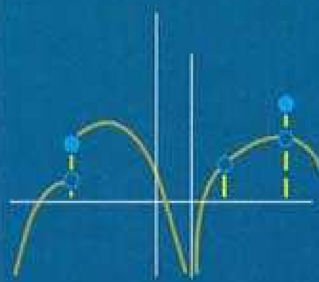


ELEMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL

VOLUMEN I
LÍMITES Y LA DERIVADA

ÁNGEL RUIZ
HUGO BARRANTES

PREFACIO

Elementos de Cálculo Diferencial está dirigido fundamentalmente a los estudiantes de Secundaria, aunque también, por su amplitud y profundidad académicas, a los universitarios que necesiten una sólida introducción al Cálculo Diferencial e Integral: instrumento fundamental para todas las ciencias y la tecnología modernas.

Este libro posee varias características que lo hacen especialmente útil en lma enseñanza y aprendizaje de los conceptos y métodos del Cálculo:

- Contiene un repaso selectivo de la geometría, el álgebra, la trigonometría, y las funciones necesarias para el desarrollo de los temas del Cálculo. Este recuento se hace por medio de recuadros intercalados debidamente a lo largo del texto y, también, cuando se requiere más amplitud, con pequeñas secciones introductorias especiales (por ejemplo: trigonométricas, exponenciales y logarítmicas).

- La aproximación es intuitiva y no formal; es decir: no se favorece las definiciones y demostraciones formales, que son de interés sobre todo para los matemáticos. Más bien se enfatiza la comprensión de las ideas principales y se promueve un sentido práctico, operatorio y visual de las matemáticas. Se suele iniciar los temas con ejemplos y situaciones de los que arrancan las ideas matemáticas, para luego ascender a los conceptos generales. Por eso mismo es que se da una gran relevancia a la representación gráfica, una gran utilización de la geometría analítica, con el propósito de que el estudiante pueda visualizar constantemente los conceptos y métodos y, por ello mismo, facilitar su comprensión y dominio. No obstante, para quienes requieran o deseen un conocimiento de las definiciones y métodos formales matemáticos, hemos incluido un capítulo específico al final del Volumen II.

- Se pone un especial cuidado en los aspectos de cálculo numérico y aproximativo, con el propósito de evidenciar esta dimensión de las matemáticas.

- Para hacer ver la cercanía entre el Cálculo y otras áreas del conocimiento, hemos incluido un capítulo especial de aplicaciones de los límites y la derivada (Capítulo 8) tanto en las ciencias físicas, químicas, biológicas, económicas, sociales, en la tecnología, como en otras dimensiones de las mismas matemáticas. Las aplicaciones se incluyen cuando su inclusión tiene sentido teórico y pedagógico (no artificialmente), es decir: una vez que se posee el conocimiento de los conceptos y los métodos matemáticos que se van a aplicar. El nivel de las aplicaciones es introductorio, y solo se busca que el estudiante aprecie el tipo de usos que tiene el Cálculo.

- Para favorecer un sentido de realidad y "terrenalidad" del Cálculo y de las matemáticas, hemos incluido notas y secciones históricas a lo largo de todos los capítulos. La historia de las matemáticas permite comprender que sus resultados no son verdades infalibles o absolutas, sino construcciones realizadas por personas de carne y hueso y en sociedades particulares.

- El Capítulo 9, "Temas adicionales: una introducción", busca crear una ventana por la que el y la estudiante puedan mirar hacia otras partes del mundo de las matemáticas, y formarse una visión con una perspectiva más amplia. Por eso la aproximación que se le ha imprimido es apenas introductoria.

- Las secciones de ejercicios han sido divididas conforme a tipos distintos de práctica y evaluación: selección única, falso y verdadero, desarrollo. Esto favorece la comprensión de los conceptos (y no solo la mera aplicación de procedimientos y "recetas"), pero, además, prepara a los estudiantes para las diferentes evaluaciones que tendrán que realizar (como en las pruebas del Bachillerato). Para beneficio de la autoevaluación ofrecemos las respuestas de todos los ejercicios impares propuestos.

El primer volumen contiene un tratamiento completo del tema de los límites, pero lo hace dándole significado al concepto de límite dentro del Cálculo Diferencial. Es decir, los métodos infinitesimales solo tienen significado en su utilización tanto en las derivación como en la integración; en sí mismos resultan abstractos y vacíos. Por eso es que en el Capítulo 1 del Volumen I se introduce intuitivamente la derivada, lo que conduce a la necesidad de los límites y luego, en el último capítulo de este volumen, se desarrolla la derivada plenamente usando los límites. De esta manera el estudiante comprenderá mejor la utilidad de los métodos infinitesimales.

El segundo volumen desarrolla plenamente el Cálculo en las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas (capítulos 6 y 7). Hasta aquí llega el tronco del libro. Los últimos tres capítulos de este volumen son complementarios y buscan fortalecer los resultados estudiados o abrir una perspectiva más amplia del Cálculo.

Estos capítulos, al igual que todas las secciones históricas del libro, se prestan muy bien para trabajarlos en grupo o en proyectos especiales para algunos educandos.

Hemos escrito este libro con la conciencia de que las necesidades de los estudiantes o las instituciones educativas a lo largo del país son diferentes. Por eso se puede seguir estrategias distintas en la utilización de este texto; proponemos tres opciones:

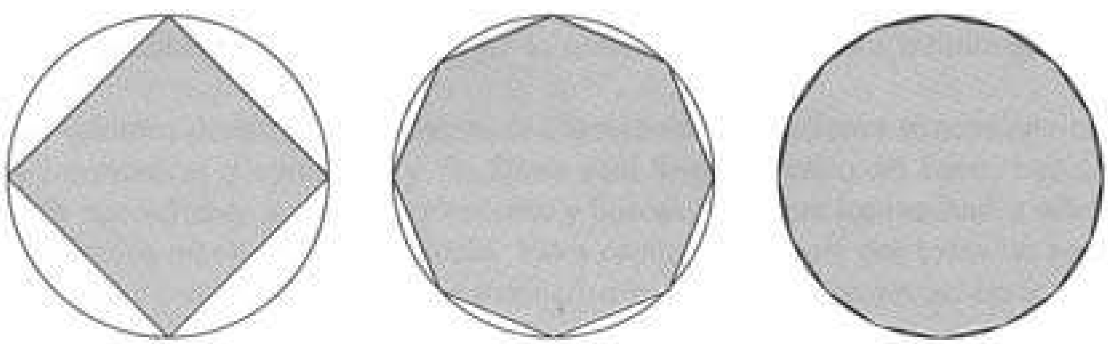
- *Completa*: Volúmenes I y II completos (excepto el Capítulo 10, que debe quedar solo para algunas personas interesadas especialmente).
- *Básica*: Volumen I, y Secciones 8.2 y 8.3 del Volumen II.
- *Reducida*: Capítulos 1, 2 y 3, Secciones 4.1, 4.2, y 5.1, y 5.2., del Volumen I.

Como complemento y apoyo adicionales, puede usarse nuestro libro *Elementos de Cálculo Diferencial: Historia y Ejercicios resueltos*, publicado por la misma Editorial de la Universidad de Costa Rica, que contiene una amplia historia de los principales temas del Cálculo Diferencial e Integral (dentro del contexto más amplio de la historia de la ciencia y el pensamiento) y, además, la solución detallada de una parte de los ejercicios propuestos en el texto que usted tiene en sus manos.

Por último, los autores deseamos expresar nuestro agradecimiento a la Editorial de la Universidad de Costa Rica por su apoyo en la publicación de este libro de texto. Esperamos que *Elementos de Cálculo Diferencial* pueda servir a los propósitos de fortalecer la formación matemática nacional de cara a un nuevo milenio donde las matemáticas, las ciencias, y la tecnología jugarán un papel decisivo para el progreso individual y colectivo.

Angel Ruiz
Hugo Barrantes

Escuela de Matemática,
Universidad de Costa Rica,
Ciudad Universitaria Rodrigo Facio,
11 de Octubre de 1996.

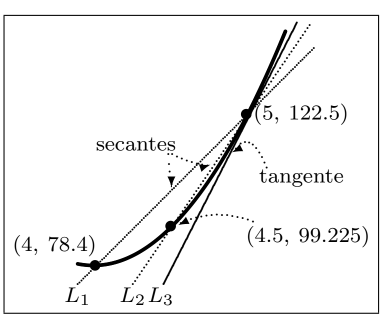


El Método de exhausción de la Antigüedad servía para calcular áreas. Por medio de polígonos regulares se puede calcular el área del círculo.

CONTENIDO

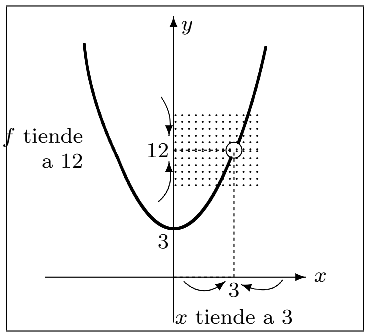
VOLUMEN I

Se introduce de modo intuitivo el concepto de derivada como justificación de la necesidad del concepto de límite. Esto se hace mediante el uso del concepto de velocidad instantánea y de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. En el aspecto histórico se presenta una breve reseña sobre la vida y la obra de Galileo Galilei.



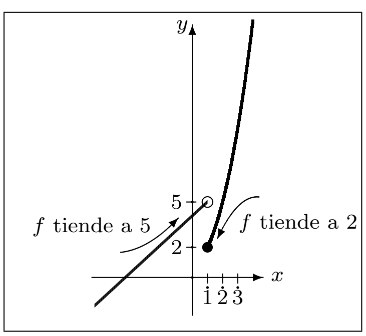
CAPÍTULO 2: LÍMITES

Se hace un tratamiento más extensivo de los límites, dándole prioridad al aspecto gráfico. Se estudian las propiedades de los límites y se calculan utilizando tanto esas propiedades como la transformación de expresiones algebraicas en otras equivalentes. En la parte histórica se proporciona una breve reseña del desarrollo de la Geometría Analítica y su importancia en el desarrollo del Cálculo.

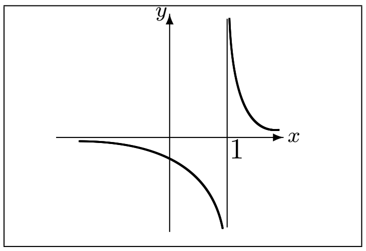


CAPÍTULO 3: LÍMITES LATERALES Y CONTINUIDAD

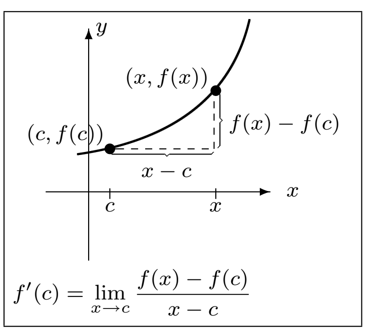
En este capítulo se introduce el estudio de uno de los conceptos centrales del Cálculo: la *continuidad* de las funciones; para ello se introduce en primera instancia el estudio de los límites laterales. Se proporciona, además, alguna información sobre uno de los creadores del Cálculo: Issac Newton.



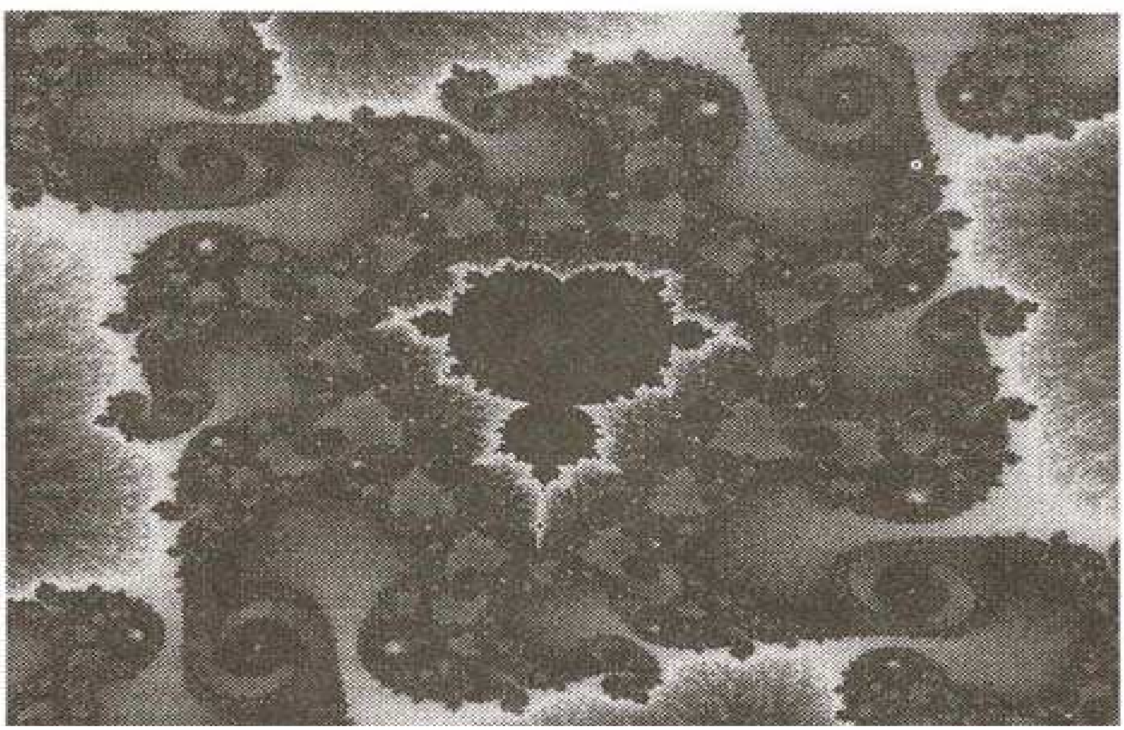
Se complementa el estudio de los límites introduciendo los conceptos de límites infinitos y límites al infinito y el concepto de recta asíntota (horizontal y vertical) ligado con estos tipos de límites. Además, mediante el concepto de área del rectángulo, se hace una brevísima introducción a una de las grandes ramas del Cálculo: la integración.



En este capítulo regresamos al concepto de derivada, definiéndola a través de un límite. Se estudian las reglas de derivación y se utilizan para calcular derivadas de diferentes funciones algebraicas. Utilizando el cálculo de derivadas se determinan velocidades y rectas tangentes y normales. Se proporcionan algunos datos históricos sobre otro de los creadores del Cálculo: Gottfried Leibniz.



VOLUMEN II



El conjunto de Mandelbrot, figura construida utilizando un fractal.
Se podría decir que un fractal es una manera de ver el infinito.

INTRODUCCIÓN

El Cálculo Diferencial e Integral constituye una de las grandes conquistas intelectuales de la humanidad. Una vez que se construyó, la historia de las matemáticas ya no sera igual: la geometría, el álgebra y la aritmética, la trigonometría, se colocarían en una nueva perspectiva teórica. Los nuevos conceptos y métodos tendrán también un impacto extraordinario en la descripción y manipulación de la realidad física. El objetivo de este libro es, precisamente, iniciar al lector en el estudio de los conceptos y métodos del Cálculo Diferencial, transmitir esa perspectiva radicalmente novedosa con relación a las matemáticas clásicas (que ocupa la mayoría de las matemáticas preuniversitarias), y sugerir el significado de sus aplicaciones en nuestra relación con el mundo.

Arquímedes de Siracusa

Lo primero que debe quedar claro es que el Cálculo no significa un poco más de álgebra (unas nuevas fórmulas), o una consecuencia especial de la geometría euclidiana o de la trigonometría usual; el Cálculo cristaliza conceptos y métodos cualitativamente diferentes, que la humanidad estuvo tratando de dominar por más de 20 siglos. Una larga lista de personas lidiaron con los métodos "infinitesimales", como Zenón de Elea, Eudoxo de Cnido, Arquḿedes de Siracusa desde la Grecia Antigua. Pero se tuvo que esperar, sin embargo, hasta el siglo XVII para tener la madurez social, científica y matemática que permitiría construir el Cálculo que hoy aprendemos en los colegios y universidades.

Conceptos y métodos cualitativamente diferentes

Aplicaciones

Sus aplicaciones son difíciles de cuantificar porque toda la matemática moderna, de una u otra forma, ha recibido su influencia; y las diferentes partes del edificio matemático interactúan constantemente con las ciencias naturales y la tecnología moderna.

Para dar una primera idea: mencionemos problemas sencillos que se resuelven fácilmente con los métodos del Cálculo:

- ⧫ Si una nave espacial pesa en la superficie del planeta Tierra 150 toneladas, ¿cuánto trabajo (término físico $W = \text{Fuerza} \times \text{Distancia recorrida}$) se requiere para elevarlo de la superficie de la Luna a una altura de 80 metros?

- ⧫ Un finquero de Paraíso de Cartago quiere construir un corral en forma de rectángulo y dividirlo por una valla paralela a uno de los lados. Tiene 160 metros de valla. ¿Cuáles son las dimensiones del corral de área máxima que puede construir?

- Una erupción volcánica hace que la ceniza caiga de manera gradual al suelo. A una distancia l del volcán, la altura de la ceniza depositada es Be^{-Kl} metros, con B y K constantes positivas. Determinar el volumen total de ceniza que cae dentro de una distancia a del volcán.

- Se inyecta intramuscularmente una sustancia farmacéutica a un paciente. Después de t horas la concentración del fármaco en la sangre viene dada por

$$S = \frac{t + 4t^2}{60 + t^3}$$

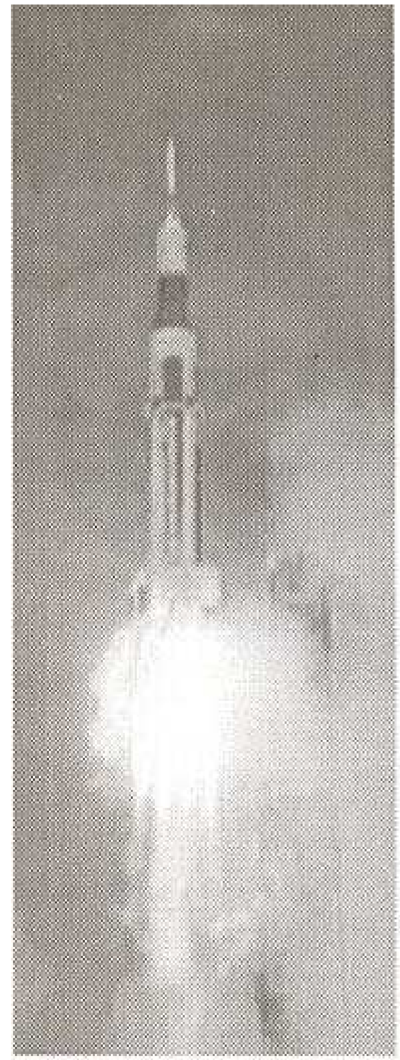
¿Cuándo será máxima la concentración?

- Tacos Costa Rica sabe que la demanda por mes de sus tacos se describe por

$$y = \frac{40\,000 - X}{18\,000}$$

Cuándo el número de tacos X es $18\,000$ ¿cuál sería el aumento de ingresos por cada taco?

- La Mutual San Juan tiene 60 condominios para alquilar en Alajuela. Se sabe que cuando el alquiler es de 60 000 colones todos se ocupan. Pero cada vez que la Mutual aumenta en 8 000 colones el alquiler, queda vacío un condominio. Para cada uno de los condominios alquilados se gasta ₡ 9 000 al mes en mantenimiento. ¿Cuál sería el alquiler que se debe cobrar para que la Mutual obtenga el máximo beneficio?



Cohete despegando

- A h kilómetros de altura, la presión de nuestra atmósfera es de

$$1\,000(0,88)^h \text{ milibares.}$$

Un cohete sube a 10 kilómetros por segundo de manera vertical. ¿Si la altura del cohete es 80 kilómetros con qué rapidez cambia la presión atmosfríca?

Los conceptos y métodos del Cálculo son parte del lenguaje actual de la ingeniería, la biología, la física, la farmacia, la electrónica, la demografía, la economía y, en general, de todas las áreas del conocimiento teórico y aplicado. Pero ¿cuál fue el origen del Cálculo?

Lenguaje de las ciencias y la tecnología modernas

Un poco de historia

Los grandes creadores del Cálculo diferencial fueron el inglés Isaac Newton (1642–1727) y el alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). De manera diferente pero independientemente estos grandes intelectuales de los siglos XVII y XVIII sistematizaron y generalizaron ideas y procedimientos que habían sido abordados (de diferentes maneras) y con éxito parcial desde la Antigedad. Antes de Newton y Leibniz fueron realizados diversos aportes de importancia asociados al nombre de grandes personalidades, como por ejemplo: Gilles de Roberval (1602–1675), Johannes Kepler (1571–1630), RenÉDescartes (1596–1650), Pierre de Fermat (1601–1665), Galileo Galilei (1564–1642), Christiaan Huygens (1629–1695, amigo de Leibniz), John Wallis (1616–1703, amigo de Newton), Bonaventura Cavalieri (1598–1647, discípulo de Galileo), Evangelista Torricelli (1608–1647, discípulo de Galileo), Isaac Barrow (1630–1677, maestro de Newton).

Newton y Leibniz culminan una fase en la historia del Cálculo

Para tener la perspectiva científica e histórica apropiada, debe decirse que una de las contribuciones previas decisivas para el trabajo de Newton y Leibniz fue la Geometría Analítica (la expresión de puntos geométricos en coordenadas y el uso de métodos algebraicos), creado independientemente por Descartes y Fermat.

La construcción del Cálculo fue parte importante de la Revolución Científica que vivió la Europa del siglo XVII.

Aparte de los nombres que hemos mencionado, los de William Harvey (1578–1657), Francis Bacon (1561–1626), Pierre Gassendi (1592–1655), Robert Boyle (1627– 1691), Robert Hooke (1635–1703) estń vinculados a grandes contribuciones en la anatomía, la física, la química y los nuevos métodos en el conocimiento.

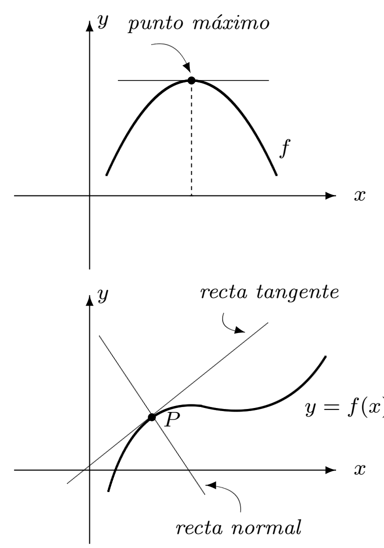
Debemos señalar que el nombre de Newton no solo se asocia a la creación del Cálculo, sino también a lo que fue la principal expresión de la Revolución Científica del siglo XVII: la síntesis de la astronomía y la mecánica que realizó en su obra *Principios matemťicos de la Filosofá Natural*, publicada en 1687. Al mostrar matemáticamente que el sistema del mundo se sostenía por la Ley de la Gravitación Universal, sus textos se convirtieron en la "biblia" de la nueva ciencia. La física newtoniana solo va a empezar a ser "superada" por la física relativista de Albert Einstein en los comienzos del siglo XX.

Los nuevos métodos enfatizaban la experiencia empírica y la descripción matemática en nuestra relación con la realidad. La Revolución Científica supuso una ruptura con las formas de pensar, estudiar y vincularse con la naturaleza que dominaron casi absolutamente en Europa entre los siglos V y XV d.C. Estas ruptura y salto en la historia del conocimiento estuvieron precedidos por las

El Cálculo en los fundamentos de la nueva sociedad y la nueva cultura importantes transformaciones que se vivieron durante los siglos XV y XVI con el Renacimiento y la Reforma protestante. Los cambios intelectuales, culturales, políticos y sociales, que se dieron en el Renacimiento y, al mismo tiempo, aquellos que se cristalizaron en la revolución científica y matemática, constituyeron los fundamentos de la sociedad occidental moderna. En esa medida el Cálculo Diferencial e Integral está en el corazón del tipo de conocimiento, cultura y de sociedad del que, esencialmente, somos parte.

Problemas de partida

Cuatro tipos de problemas fueron los que de manera directa motivaron la creación del Cálculo:



- Uno de ellos fue la determinación de la velocidad y la aceleración de un cuerpo si se conoce la distancia en función del tiempo.
- Otro fue el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes determinados por curvas o superficies.
- El tercer problema era determinar cuándo una función (que describe un fenómeno real) alcanzaba un valor máximo o mínimo.
- El cuarto problema estaba asociado a la geometría, y era cómo calcular las rectas tangentes y normales a una curva en un punto.

Newton y Leibniz demostraron que con métodos infinitesimales se resolvían los cuatro tipos de problemas planteados.

El Cálculo infinitesimal fue ampliamente desarrollado durante el siglo XVIII en sus métodos propiamente matemáticos como, también, en sus aplicaciones a las diferentes ciencias de la naturaleza. Los nombres de Leonhard Euler, los hermanos Jacques (1654–1705) y Jean Bernoulli (1667–1748) , Alexis Claude Clairaut (1713–1765), el mismo Leibniz y muchos otros, están asociados a ese período. No podríamos olvidarnos de mencionar en el período de fines de siglo XVIII y principios del XIX a los grandes matemáticos franceses Joseph L. Lagrange (1736–1813), Adrien M. Legendre (1752–1833) y Pierre Simon Laplace (1749–1827), Lazare Carnot (1753–1823), el Marqués de Condorcet (1743–1794) y Gaspard Monge (1746–1818).

El siglo XIX abriría una nueva etapa en la historia del Cálculo, enfatizando, si se quiere, la necesidad de dotarlo de un mayor rigor lógico que el que había exhibido antes. Los nombres de Niels H. Abel (1802–1829), Bernhard Bolzano (1781–1848), Augustin

Cauchy (1789–1857), Karl Weierstrass (1815–1897) se refieren a algunos de los muchos matemáticos que realizaron sus trabajos en esta nueva fase.

En Costa Rica

Para ir dando fin a esta introducción, resulta interesante mencionar que el Cálculo diferencial e integral aparentemente se empezía enseñar en Costa Rica en 1864. Le correspondió el honor de su introducción al ingeniero mexicano Angel Miguel Velázquez, quien había sido contratado para la apertura de las carreras de Ingeniería Civil, Arquitectura y Agrimensura de la Universidad de Santo Tomás.

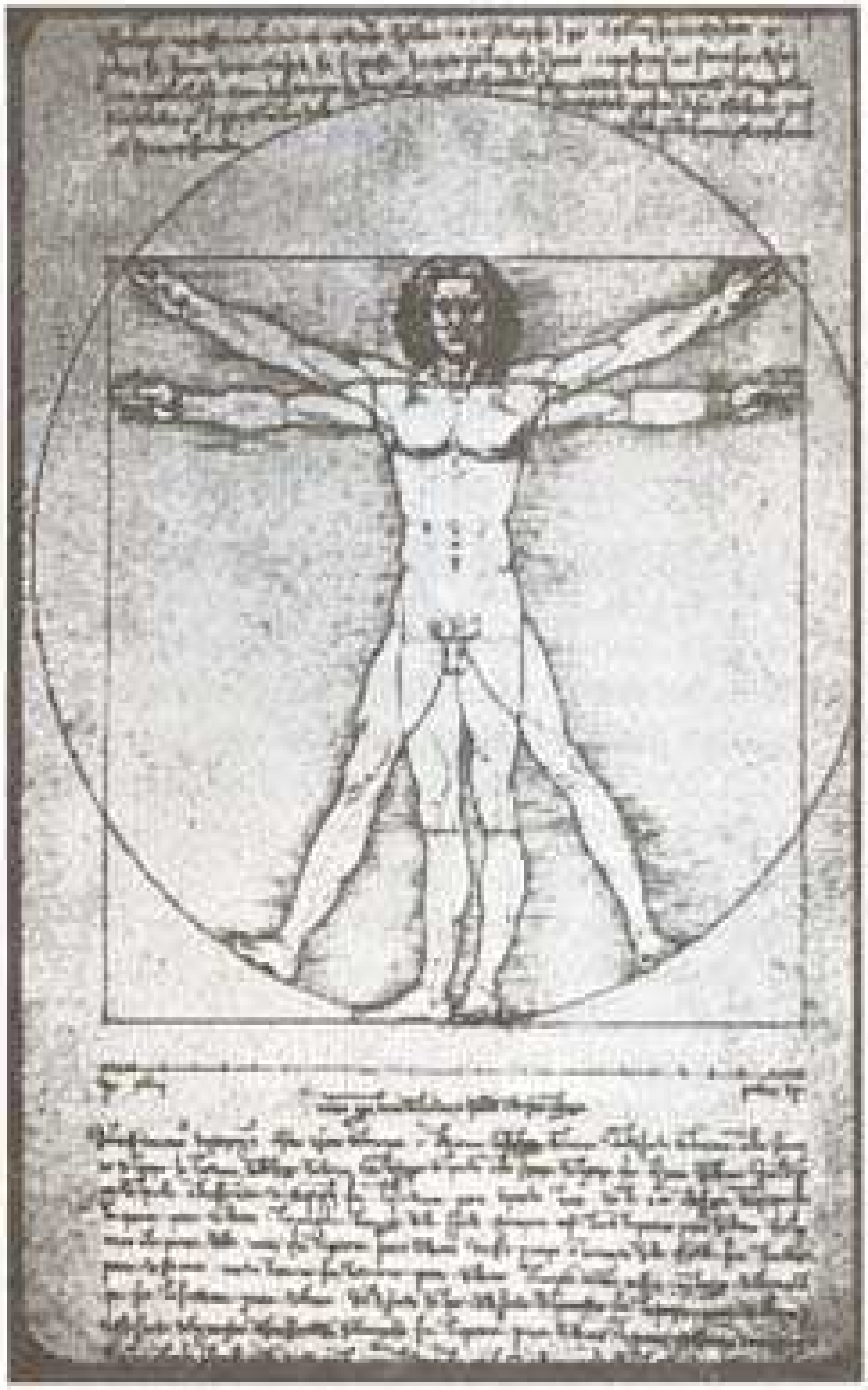
Las matemáticas tienen un rostro humano

Es necesaria una perspectiva histórica

Con la perspectiva histórica que hemos sugerido en los párrafos anteriores y que nos acompañará siempre en este libro, buscamos compartir con el lector una visiø'n del Cálculo y de las matemáticas en general. Una visión que entiende los resultados matemáticos como construcciones intelectuales realizadas por hombres de carne y hueso, partícipes de comunidades científicas con los vicios y virtudes presentes en todo colectivo humano.

Las matemáticas: parte del "mundanal ruido"

Los resultados de las matemáticas deben verse como el producto del trabajo de muchas personas en diferentes momentos y no como conjuntos de verdades fuera del "mundanal ruido", no "contaminadas" o producidas exclusivamente por mentes privilegiadas. Las creaciones o descubrimientos matemáticos tienen una historia, a veces muy larga, antes de ser definitivamente formuladas. Muchas veces nos presentan las matemáticas ya acabadas y libres del error, tratando de hacernos olvidar todos los andamios, todos los intentos, las pruebas fallidas, los errores, que antecedieron los resultados finales. Con la recurrencia a la historia de las matemáticas buscaremos mostrar, en alguna medida, el rostro humano que siempre ha tenido esta disciplina (al igual que las otras ciencias), que no siempre ha sido mostrado en la mayoría de textos de matemáticas, pero que es fundamental para comprenderlas y aprenderlas de la mejor manera.



Cuadrado y círculo en la figura humana.
Fragmento de un manuscrito de Leonardo da Vinci.

CAPÍTULO 1
LAS RAZONES DE CAMBIO Y LA DERIVADA

El verdadero viaje hacia el descubrimiento no consiste en buscar nuevos horizontes sino en tener nuevos ojos

Marcel Proust

Muchos de los aspectos de nuestra vida diaria como los de las ciencias y las técnicas tienen que ver con *el cambio* de las cosas, y en especial con el cambio de una cosa *con relación a otras*. La velocidad de un automóvil, por ejemplo, representa un cambio de su posición con respecto al tiempo (que también cambia). La *razón de cambio* de la población o de la demanda de un producto industrial o de la inflación con relación al tiempo son otros ejemplos que nos reafirman que continuamente, a veces sin darnos cuenta, estamos usando razones de cambio.

Las matemáticas y en particular la rama de ellas que se llama Cálculo ofrecen la posibilidad de establecer modelos que permiten estudiar este tipo de fenómenos. En este *Capítulo* discutiremos algunos de estos problemas y veremos cómo ellos motivaron la definición de ciertos conceptos matemáticos, que han resultado ser de mucha importancia tanto en el desarrollo de la matemática misma como en sus aplicaciones.

Se puede decir que el concepto central en el estudio del Cálculo es el concepto de *variación* o *cambio continuos*.

“**No existe el movimiento**”

En el siglo V a.C., en la Grecia Antigua vivió un famoso filósofo (discípulo de otro filósofo: Parménides) llamado Zenón de Elea. Una de las cosas que se propuso fue demostrar que el movimiento no era posible.

Para ello formuló una "paradoja" que ha despertado el interés de los matemáticos y científicos de todos los tiempos. Esta paradoja la podemos reformular de la siguiente manera:

La paradoja de la Dicotomía de Zenón

Un corredor debe alcanzar una tortuga que se encuentra parada a 1 km de distancia.

Zenón diría: Para alcanzar a la tortuga el corredor deberá recorrer una primera distancia

$$d_1 = \text{la mitad de la distancia} = 500\ m.$$

También deberá recorrer la distancia:

$$d_2 = \text{la mitad de la mitad} = 250\ m.$$

Y sucesivamente una tercera distancia:

$$d_3 = \text{la mitad de la mitad de la mitad} = 125\ m.$$

Una cuarta: $d_4 = 62,5\ m.$

Una quinta: $d_5 = 31,25\ m.$

Una sexta: $d_6 = 15,625\ m.$

Podríamos resumir la situación anterior en una tabla

Tabla 1.1

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
$500\,m$	$250\,m$	$125\,m$	$62,5\,m$	$31,25\,m$	$15,625\,m$

y podríamos calcular

Tabla 1.2

d_7	d_8	d_{20}	d_{50}	d_{100}
$7,8125\,m$	$3,90625\,m$	$0,00095367432\,m$	$8,8817842^{-13}\,m$	$7,8886091^{-28}\,m$

Como el proceso se puede repetir indefinidamente, el corredor deberá recorrer un número infinito de distancias *en un tiempo finito*. Zenón diría: eso no es posible; entonces no hay movimiento.

Aquiles y la tortuga

En realidad Zenón formuló cuatro paradojas parecidas a la anterior. Otra de las más famosas se llama la de *Aquiles y la tortuga*. El gran escritor argentino Jorge Luis Borges la planteó de la siguiente manera:

> "Aquiles, símbolo de rapidez, tiene que alcanzar la tortuga, símbolo de morosidad. Aquiles corre diez veces más ligero que la tortuga y le da diez metros de ventaja. Aquiles corre esos diez metros, la tortuga corre uno; Aquiles corre ese metro, la tortuga corre un decímetro; Aquiles corre ese decímetro, la tortuga corre un centímetro; Aquiles corre ese centímetro, la tortuga un milímetro; Aquiles el milímetro, la tortuga un décimo de milímetro, y así infinitamente, de modo que Aquiles puede correr para siempre sin alcanzarla. Así la paradoja inmortal."
>
> **Jorge Luis Borges**
> "La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga"
> 1930.


El Cálculo responde a la paradoja de la Dicotomía de Zenón

¿Qué piensa usted? ¿Es el movimiento producto de nuestra imaginación?

Los métodos que condensaría el Cálculo Diferencial e Integral en el siglo XVII responderían con toda precisión a este tipo de paradojas. Pero para eso la humanidad tuvo que atravesar un largo período desde el siglo V a. C.

Se repasa en esta sección, en primer lugar, el concepto de *variación* de una cantidad. Luego se estudia el concepto de *razón de cambio*, con especial énfasis en el caso particular de la velocidad.

1.1 RAZONES DE CAMBIO

¿Cómo se mide la variación?

Podemos distinguir algunas maneras de medir la variación o cambio, por ejemplo el **cambio absoluto** o **incremento** y el **cambio relativo**.

Ejemplo 1. Variación absoluta

Juan abrió una cuenta de ahorros con ₡500, al cabo de dos meses Juan fue al Banco a averiguar su saldo. Le dijeron que ahora tenía ₡520. Esto es, Juan tiene ahora ₡20 más; el cambio absoluto en la cuenta de ahorros de Juan fue de ₡20. Por otra parte, Juan tiene ahora un 4% más de lo que tenía en un principio; el cambio relativo en su cuenta fue de 4%. △

Incrementos

El cambio absoluto o incremento es una diferencia: *lo que tiene* *al final menos lo que tenía al comienzo.* Si C_f es la cantidad final y C_i es la cantidad inicial entonces el cambio absoluto se denota por ΔC y se calcula como

$$\Delta C = C_f - C_i.$$

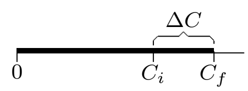


Figura 1.1. Cambio absoluto

En el caso de la cuenta de ahorros de Juan se tiene que $C_f = 520$, $C_i = 500$ y entonces

$$\Delta C = C_f - C_i = 520 - 500 = 20.$$

El cambio relativo es un cociente: *El cambio absoluto dividido entre lo que tenía al comienzo*, es decir

$$\frac{\Delta C}{C_i}.$$

En el caso de Juan:

$$\frac{\Delta C}{C_i} = \frac{20}{500} = 0,04,$$

que se escribe como 4%.

Otra forma de medir la variación es comparando el incremento de una cantidad variable con relación al incremento de otra cantidad variable. Esto se conoce como **variación promedio** o **razón promedio de cambio** de una cantidad con respecto a la otra.

Ejemplo 2. Variación promedio

Volvamos a la cuenta de ahorros de Juan. El incremento en la cantidad de dinero fue

$$\Delta C = ₡\,20.$$

Si consideramos el momento en que abrió la cuenta de ahorros como el mes 0, entonces el momento en que hizo la consulta fue el mes 2. La variación absoluta en el tiempo fue

$$\Delta t = 2 - 0 = 2 \text{ meses}$$

(es decir, transcurrieron 2 meses). Podemos calcular el cociente

Razón promedio

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{₡\,20}{2 \text{ meses}} = ₡\,10/\text{mes}.$$

Este resultado es un promedio y se puede interpretar diciendo que la cantidad de dinero en la cuenta de ahorros de Juan creció a una razón promedio de ₡10 por mes. △

En las aplicaciones a las ciencias muchas veces estamos interesados en cómo se comporta una variable y cuando otra variable x se aproxima a un valor dado c, esto es, cuando x varía de manera que sus valores son cada vez más próximos a c.

En estas circunstancias ambas variables tienen que estar relacionadas: y debe ser una función de x (vea el recuadro sobre funciones). Esto se presenta por ejemplo cuando tratamos con velocidades, aceleraciones, etc.

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Recuerde que una función es una relación que asocia a cada elemento de un conjunto A (llamado **dominio** de la función) un único elemento en un conjunto B (llamado **codominio** de la función). Si la función se denota por f entonces se escribe $f : A \longrightarrow B$. Si x es un elemento de A, su elemento asociado y de B se llama la **imagen** de x, a su vez se suele decir que x es **preimagen** de y. Los dos elementos x e y son variables, es decir, pueden tomar diferentes valores; x se llama **variable independiente** porque puede tomar cualquier valor en A, por su parte, y se llama **variable dependiente** porque una vez que usted le da un valor a x, el valor de y es la imagen de x y no cualquier elemento de B.

Por lo general, cuando se trata con funciones reales de variable real, esto es, funciones en las que tanto el dominio como el codominio son subconjuntos del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, es posible describir la relación mediante una fórmula que permite encontrar la imagen de cada elemento particular del dominio.

Por ejemplo, si decimos,

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{con} \quad f(x) = x^2 - 2,$$

entonces lo que se está indicando es que tenemos una función f cuyo dominio es $\mathbb{R}$, cuyo codominio es $\mathbb{R}$ y se dice además que para cada valor x de $\mathbb{R}$ su imagen se calcula mediante la fórmula $f(x) = x^2 - 2$. As, si $x = 2$ entonces su imagen es

$$f(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2;$$

la imagen de $x = -5$ es

$$f(-5) = (-5)^2 - 2 = 25 - 2 = 23.$$

Recuadro 1.1: **Funciones**

Ejemplo 3. Variación de una función en un punto

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, ¿qué sucede con los valores de $f(x)$ si x está cada vez más próximo a 1?

Solución: La primera observación que se puede hacer es que $x = 1$ no está en el dominio, pues si se sustituye $x = 1$ en la expresión

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

se obtiene

$$\frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0},$$

lo que no está definido (es una forma indeterminada). Sin embargo, sigamos adelante: utilizamos una calculadora para calcular los valores de $f(x)$ con x cercano a 1. Tome en primer lugar $x = 2$ (2 está alejado una unidad de 1, hacia la derecha); tenemos

$$f(2) = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = \frac{4 - 1}{1} = 3,$$

tomemos ahora $x = 0$ (0 está alejado una unidad de 1, hacia la izquierda); tenemos

$$f(0) = \frac{(0)^2 - 1}{0 - 1} = \frac{0 - 1}{-1} = 1.$$

Hagamos lo mismo con $x = 1,5$ (media unidad hacia la derecha de 1):

$$f(1,5) = \frac{(1,5)^2 - 1}{1,5 - 1} = \frac{2,25 - 1}{0,5} = \frac{1,25}{0,5} = 2,5$$

y con $x = 0,5$ (media unidad a la izquierda de 1):

$$f(0,5) = \frac{(0,5)^2 - 1}{0,5 - 1} = \frac{0,25 - 1}{-0,5} = \frac{-0,75}{-0,5} = 1,5.$$

Aproximación con tablas de valores

Podemos continuar de esta manera. En la siguiente tabla de valores aparecen los resultados utilizando valores de x cada vez más próximos a 1 tanto por la izquierda (menores que 1) como por la derecha (mayores que 1).

Tabla 1.3

x se acerca a 1 por la izquierda

x se acerca a 1 por la derecha

1

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1

2

f se acerca a 2 por la izquierda

f se acerca a 2 por la derecha

Así, de la tabla 1.3 deducimos que lo que sucede con $f(x)$ es que sus valores se aproximan cada vez más a 2 cuando los valores de x se aproximan a 1.

Tome usted una calculadora y haga varios cálculos tomando cada vez valores más próximos a 1, por ejemplo tome

$x = 1,0001$, luego

$x = 1,000001$ y

$x = 1,0000001$

¿qué sucede?, ¿cómo explicaría esta situación? △

Veamos ahora lo que sucede de manera gráfica:

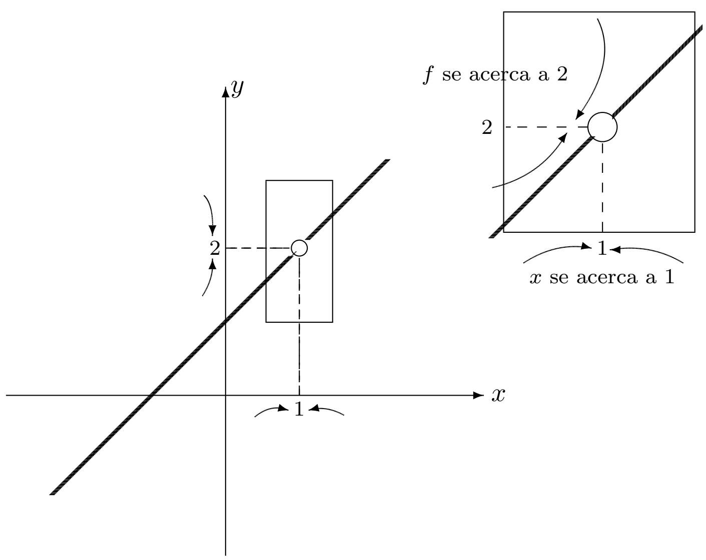


Figura 1.2. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

Como se ve, hay un "hueco" en el punto $(1, 2)$, pero la función cuando x se acerca a 1, iría "naturalmente" al valor $y = 2$.

La velocidad es una razón de cambio

Sabemos que viajando por carretera la distancia entre San José y Puntarenas es

*La **velocidad** es una cantidad vectorial, esto es, tiene magnitud y dirección.*

La **rapidez** es la magnitud de la velocidad.

Cuando en el lenguaje corriente decimos que la velocidad de un objeto es de $10m/seg$ sin especificar la dirección, en realidad nos estamos refiriendo a la rapidez. de aproximadamente 120 km. Suponga que un amigo suyo viajó de San José a Puntarenas; salió de San José a las 2 : 00 pm y llegó a Puntarenas a las 4 : 00 pm.

Su amigo recorrió 120 km en un lapso de 2 horas. La velocidad promedio fue de

$$\frac{120\ \ km}{2\ \ h} = 60\ \ km/h.$$

En general, la **velocidad promedio** es el cociente: distancia recorrida entre tiempo transcurrido:

$$\boxed{\text{velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}.}$$

Se acostumbra a denotar la velocidad promedio como v_{prom}, la distancia recorrida por Δd y el tiempo transcurrido por Δt, de modo que podemos escribir:

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

Ejemplo 4. Velocidades promedio

La figura 1.3 representa las ciudades A, B, C, D y las correspondientes distancias entre ellas.

Un viajero salió cierto día a la $1:00$ pm de la ciudad A, llegó a la ciudad B a la $1:30$ pm y siguió hacia la ciudad C a la cual llegó a las $2:30$ pm, sin detenerse continuó su camino y llegó a la ciudad D a las $4:30$ pm (todo el mismo día).

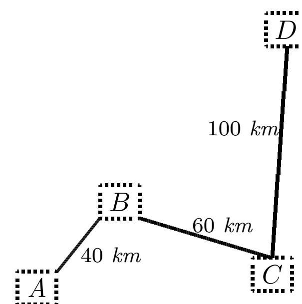


Figura 1.3. Camino recorrido

a) ¿Cuál fue su velocidad promedio entre la ciudad A y la ciudad B?

b) ¿Cuál fue su velocidad promedio entre la ciudad C y la ciudad D?

c) ¿Cuál fue su velocidad promedio en todo el recorrido realizado?

Solución

a) La distancia entre A y B es de $40km$ y el tiempo que tardó fue de 30 minutos, es decir $0,5$ horas. Aquí la velocidad promedio fue

$$v_{\text{prom}} = \frac{40km}{0,5h} = 80km/h.$$

b) La velocidad promedio entre C y D fue

$$v_{\text{prom}} = \frac{100km}{2h} = 50km/h.$$

c) La distancia total de A a D es

$$40km + 60km + 100km = 200km,$$

el tiempo transcurrido fue de 3 horas y media, es decir $3,5h$, por lo tanto la velocidad promedio del recorrido entre A y D fue

$$v_{\text{prom}} = \frac{200km}{3,5h} = 57,1428km/h.$$

$\triangle$

¿Es suficiente la velocidad promedio?

Enfatizamos el término velocidad promedio puesto que lo que se da es una medida *promedio* de la variación. Sin embargo, por ejemplo, en el caso de su amigo que viajó a Puntarenas no sabemos con certeza su velocidad en cada momento. No podemos, con la información dada, saber cuál fue su velocidad al ser las 2 : 30 pm. En algún momento posiblemente se detuvo, desde luego en ese momento su velocidad fue de 0 km/h; en otras ocasiones de seguro superó los 60 km/h.

El conductor de un automóvil puede darse cuenta de la velocidad a la que va en algún momento dado observando el velocímetro del carro (si tal instrumento se encuentra en buen estado). Pero nosotros, con la información del tiempo transcurrido y la distancia recorrida, solo podemos calcular un promedio y no podemos saber lo que sucedió en cada instante.

Velocidad promedio y velocidad instantánea

Otro de los aspectos importantes de las ciencias es la predicción. Esto es, a partir de datos dados referidos a una situación, poder predecir con un grado aceptable de aproximación algunas cosas que podrían suceder en esa situación o en otra situación semejante. Así, por ejemplo, para el movimiento de un objeto podría resultar importante saber cuál es su velocidad en algún instante preciso dado y no la velocidad promedio en ese momento.

Calcular las velocidades y aceleraciones instantáneas fue uno de los problemas que cautivó la atención de los principales matemáticos del siglo XVII.

1.2 CAÍDA LIBRE Y CÁLCULO DE RECTAS TANGENTES

Aquí se estudia, en primera instancia, el concepto de velocidad instantánea mediante el caso de un cuerpo en caída libre. Posteriormente se estudia la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto dado.

Uno de los asuntos más interesantes en la historia de las ciencias fue el de la caída libre de los cuerpos. La pregunta es: si se lanzan dos cuerpos de diferente peso desde lo alto de un edificio ¿cuál cae más rápido? Supóngase que el aire no produce resistencia ni fricción en ninguno de los dos cuerpos. Antes de seguir leyendo: ¿cómo contestaría usted esa pregunta?

La respuesta correcta fue dada por el gran científico italiano Galileo Galilei (1564–1642), quien descubrió que en el vacío (sin resistencia ni fricción del aire) los cuerpos caen con la misma velocidad, caen al mismo tiempo. Es interesante señalar que Galileo descubrió este principio observando que las velocidades con la que caen dos cuerpos difieren menos en el aire que en el agua. Algo así como que si disminuye la resistencia del medio, la diferencia entre las velocidades de dos cuerpos disminuye, llegando esta diferencia a ser nula en el vacío.

Galileo descubrió la ley de los cuerpos en caída libre

Galileo no solo descubrió eso sino que describió el movimiento en caída libre *matemáticamente*:

$$\boxed{d = 4,9t^2}$$

(si el cuerpo se deja caer).

Torre de Pisa

Suponga que usted se para en lo alto de un edificio y deja caer una piedra hacia el suelo (note que no la lanza, solo abre su mano para que caiga) y suponga que la única fuerza que actúa sobre la piedra es la gravedad. Sea t el tiempo (medido en segundos) que transcurre desde el momento en que usted deja caer la piedra y algún instante determinado, y d la distancia (medida en metros) recorrida por la piedra hasta ese instante. Como d depende de t, escribimos $d(t)$ en vez de d. Como dijimos antes, Galileo descubrió que se tiene la relación

$$d(t) = 4,9t^2.$$

Por ejemplo, 1 *seg* después de haber soltado la piedra, ésta ha recorrido

$$d(1) = 4,9(1)^2 = 4,9 \text{ m.}$$

A los 2 *seg* la distancia recorrida por la piedra habrá sido

$$d(2) = 4,9(2)^2 = 4,9 \cdot 4 = 19,6 \text{ m.}$$

En la tabla 1.4 se dan algunos tiempos y la correspondiente distancia recorrida.

Tabla 1.4

t seg	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$d(t)$ m	4,9	11,025	19,6	30,625	44,1	60,025	78,4	99,225	122,5	148,225	176,4

¿Podemos predecir cuál será la velocidad de la piedra exactamente 5 segundos después de haberla soltado?

Aproximación de la velocidad instantánea

Sabemos que esta velocidad instantánea no se puede calcular como una velocidad promedio, pero vamos a ver cómo *a partir de ella* encontramos la velocidad instantánea.

- Podemos suponer que la velocidad a los 5 segundos no andará muy lejos de la velocidad promedio un poco antes de los 5 segundos; por ejemplo, en el último segundo transcurrido antes de los 5 segundos.

  En el segundo 4, la piedra ha recorrido $78,4$ metros (vea la tabla anterior).

  En el segundo 5, la piedra ha recorrido $122,5$ metros (vea la tabla anterior).

  La distancia recorrida en ese segundo fue $122,5 - 78,4\,\text{m} = 44,1\,\text{m}$

  La velocidad promedio fue

  $$\frac{44,1\,\text{m}}{1\,\text{seg}} = \boxed{\mathbf{44,1}\,\text{m/seg}}$$

  Primera aproximación a la velocidad

  Esta es solamente una aproximación de la velocidad buscada.

- Podemos suponer que nos acercaremos mejor a la velocidad en el segundo 5 con la velocidad promedio en el intervalo que transcurre entre el tiempo $4,9$ seg y 5 seg. Calculemos:

  En $t = 4,9\,\text{seg}$ tenemos

  $$d = 4,9(4,9)^2\,\text{m} = 117,649\,\text{m}$$

  La nueva velocidad promedio es

  $$\frac{122,5\,\text{m} - 117,649\,\text{m}}{5\,\text{seg} - 4,9\,\text{seg}} = \frac{4,851\,\text{m}}{0,1\,\text{seg}} = \boxed{\mathbf{48,51}\,\text{m/seg}}$$

  Segunda aproximación

  Esta es una nueva aproximación a la velocidad en $5\,\text{seg}$.

  $\Rrightarrow$ *Nótese la considerable diferencia que existe entre ambas aproximaciones.* $\Lleftarrow$

  Calculemos ahora la velocidad promedio en un intervalo aún más cercano a 5: entre $4,99$ y 5.

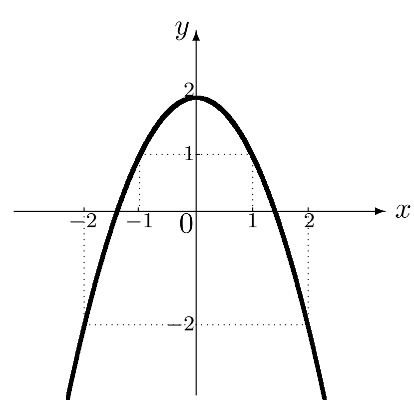
GRÁFICAS DE FUNCIONES

Dada una función real de variable real, generalmente podemos hacer una representación gráfica que nos permita conocer mejor la función. Existen técnicas en el Cálculo que nos permiten dibujar una función con bastante detalle. Sin embargo, para ciertas funciones "simples" podemos dibujar su gráfica a partir de unos cuantos puntos.
Si tenemos la función $f : A \longrightarrow B$, con $y = f(x)$, representamos en un sistema de ejes coordenados pares ordenados de números reales (x, y), donde y es la imagen de x (siendo x elemento de A).

Por ejemplo, para representar la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2 - x^2$, consideramos una tabla de valores.

x	$f(x) = 2 - x^2$
-2	-2
-1	1
0	2
1	1
2	-2

De la tabla se obtienen varios pares ordenados de números reales que corresponden a puntos que van a estar en la gráfica de la función. Estos son: $(-2, -2)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, -2)$. De modo que en el sistema de ejes dibujamos esos puntos y luego trazamos una curva que los contenga. El dibujo resultante es un bosquejo de la gráfica de la función dada.



Recuadro 1.2: **Gráficas**

Si $t = 4,99$ entonces tenemos

$$d = 4,9(4,99)^2\,\mathrm{m} = 122,01049\,\mathrm{m}$$

La velocidad promedio es:

$$\frac{122,5\,\mathrm{m} - 122,01049\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{seg} - 4,99\,\mathrm{seg}} = \frac{0.48951\,\mathrm{m}}{0,01\,\mathrm{seg}} = \boxed{\mathbf{48,951}\,\mathrm{m/seg}}$$

Tercera aproximación

- Si calculamos la velocidad promedio entre $4,999$ y $5\,\mathrm{seg}$ obtendremos:

$$\frac{122,5\,\mathrm{m} - 122,451\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{seg} - 4,999\,\mathrm{seg}} = \frac{0,0489951\,\mathrm{m}}{0,001\,\mathrm{seg}} = \boxed{\mathbf{48,9951}\,\mathrm{m/seg}}$$

Cuarta aproximación

Calcule usted la velocidad promedio entre $4,9999$ y 5. Use la calculadora.

Si seguimos el proceso con intervalos de tiempo cada vez más pequeños nos aproximaremos más a la velocidad instantánea en 5 segundos, que se aproxima más y más a un número fijo:

La velocidad instantánea

$$\boxed{\mathbf{49}}$$

El límite y la velocidad

Tenemos entonces una sucesión de varias velocidades promedio:

$$\mathbf{44,1} \quad \mathbf{48,51} \quad \mathbf{48,951} \quad \mathbf{48,9951}$$

que se aproximan al valor

$$\mathbf{49}.$$

Este último valor *fijo* decimos que es la *velocidad instantánea* de la piedra en el tiempo $t = 5$ seg. Este valor se llama el *límite* de las velocidades promedio.

Se podría criticar con justicia que la escogencia de los tiempos es muy arbitraria. Por eso veamos ahora cómo se generalizaría este procedimiento para calcular velocidades instantáneas:

Un método más general

Consideremos la misma ecuación $d = 4,9t^2$. Llamemos D la distancia recorrida por la piedra en 5 seg, es decir

$$D = 4,9(5)^2 = 122,5.$$

Ahora vamos a designar

con la letra T un intervalo de tiempo, de tal manera que $(5+T)$ es un tiempo que puede estar antes o después de 5 seg.

Por ejemplo: si $T = 0,1$ seg entonces

T es un intervalo cualquiera de tiempo

$$5 + T = 5 + 0,1 = 5,1\,\text{seg},$$

si $T = -0,1$ seg, entonces

$$5 + T = 5 + (-0,1) = 4,99\,\text{seg}.$$

La distancia recorrida en $(5+T)$ seg es:

$$\begin{aligned} D_T &= 4,9(5+T)^2 \\ &= 4,9(5^2 + 2\cdot 5\cdot T + T^2) \\ &= 122,5 + 49T + 4,9T^2. \end{aligned}$$

La distancia que se recorre en el intervalo de T seg, es decir entre 5 y $(5+T)$, es:

$$D_T - D = (122,5 + 49T + 4,9T^2) - 122,5 = 49T + 4,9T^2.$$

Entonces la velocidad promedio entre 5 seg y $(5+T)$ seg es:

La velocidad promedio en términos de T

$$V_{\text{prom}} = \frac{D_T - D}{T} = \frac{49T + 4,9T^2}{T} = 49 + 4,9T.$$

Ahora obsérvese: si T se hace muy pequeño entonces $4,9T$ también se hace muy pequeño y si T se hace muy cercano de 0, $4,9T$ también estará cercano a 0.

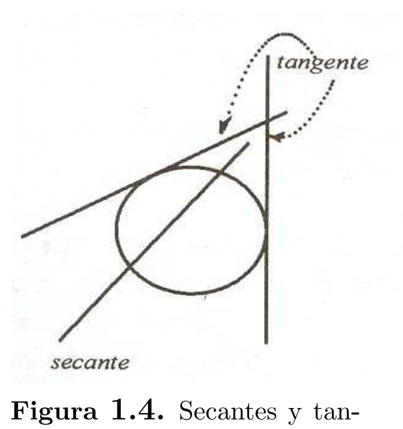


Figura 1.4. Secantes y tangentes

Por ejemplo: si $T = 0,0000000001 = 10^{-10}$, tenemos que $4,9T = 0,00000000049$, y entonces tenemos $V_{\text{prom}} = 49,00000000049$ lo que es prácticamente **49**. Podemos decir que las velocidades promedio se aproximan a **49**. Esta es la velocidad instantánea en $t = 5$.

Note que en nuestro caso el valor instantáneo 49 se encontró poniendo $T = 0$ en la ecuación $V_{\text{prom}} = 49 + 4,9T$. Veremos luego que esta sustitución no se puede hacer en todos los casos.

El problema de las tangentes

Retomemos la situación descrita en el ejemplo de la velocidad de la piedra en caída libre.

Allí consideramos un desplazamiento que satisface la relación funcional $d(t) = 4,9t^2$, donde la variable independiente t representa el tiempo y la variable dependiente d representa la distancia recorrida. La tabla 1.5 nos permite hacer un bosquejo de la gráfica de la función.

Tabla 1.5: Valores de $d(t) = 4,9t^2$

t segundos	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$d(t)$ metros	4,9	11, 025	19,6	30,625	44,1	60,025	78,4	99,225	122,5	148,225	176,4

El problema de la velocidad que estudiamos en esa ocasión puede verse, desde el punto de vista gráfico, como un problema de rectas tangentes.

LA ECUACIÓN DE LA RECTA

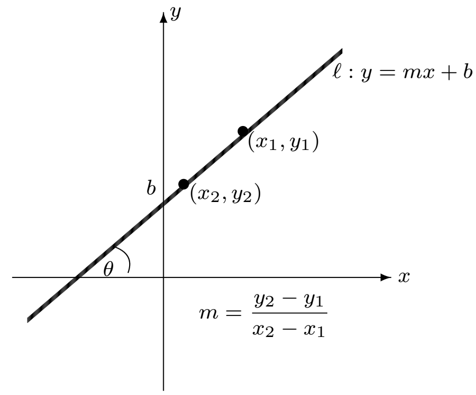
Recuerde que la ecuación de una recta (no vertical) está dada por $y = mx + b$.
El valor m se llama la *pendiente* de la recta y es una medida de la inclinación de la recta con respecto al eje x;
el valor b se llama $y-$*intersección* y determina la ordenada del punto en que la recta corta al eje y.

Si los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen a la recta entonces podemos calcular la pendiente mediante la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

y la intersección se puede calcular mediante

$$b = y_1 - mx_1 \quad \text{o} \quad b = y_2 - mx_2.$$



Por ejemplo si una recta ℓ contiene los puntos $(-1, 3)$ y $(2, 4)$, entonces

$$m = \frac{4-3}{2-(-1)} = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad b = 4 - \frac{1}{3} \cdot 2 = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}.$$

De manera que la ecuación de la recta es

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}.$$

Recuadro 1.3: **Rectas**

La figura 1.5 corresponde a la gráfica de la función $y = 4,9x^2$.
Esta es la misma función que vimos antes solo que usando otros nombres para las variables. Considere las tres rectas que se dan en la figura 1.6.

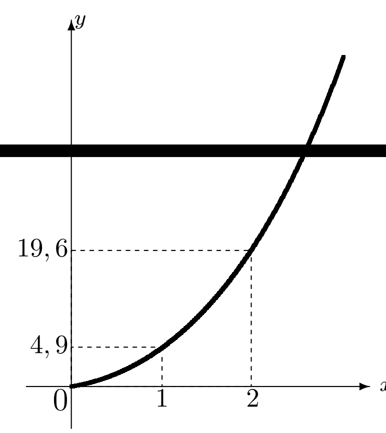


Figura 1.5. $d(t) = 4,9t^2$

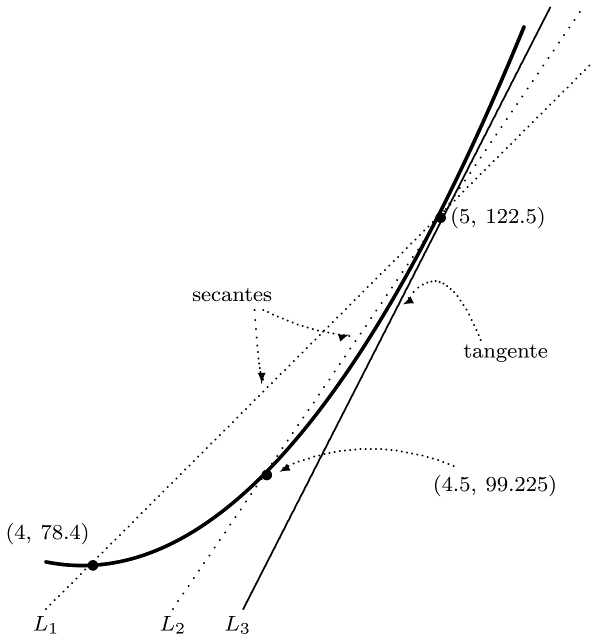


Figura 1.6. Secantes y tangentes

Las rectas L_1 y L_2 son secantes y cortan a la gráfica en dos puntos. Mientras que intuitivamente vemos que la recta L_3 es una recta tangente y solo "toca" a la gráfica en el punto $(5,\ 122,5)$.

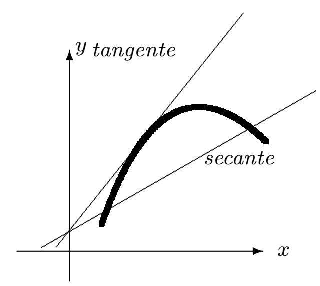


Figura 1.7. Secantes y tangentes

Podemos calcular las pendientes de las rectas L_1 y L_2 utilizando la fórmula que se da cuando se conocen dos puntos pertenecientes a la recta (vea el recuadro 1.3), así obtenemos que

Cálculo de pendientes de rectas secantes

- La recta L_1 pasa por los puntos $(4,\ 78,4)$ y $(5,\ 122,5)$, por lo tanto la pendiente de la recta L_1 es

$$m_1 = \frac{122,5 - 78,4}{5 - 4} = \mathbf{44,1}$$

  Esta es la misma velocidad promedio en el intervalo de tiempo entre los 4 segundos y los 5 segundos.

- La recta L_2 pasa por los puntos $(4,5,\ 99,225)$ y $(5,\ 122,5)$, por lo tanto la pendiente de la recta L_2 es

$$m_2 = \frac{122,5 - 99,225}{5 - 4,5} = \frac{23,275}{0,5} = \mathbf{46,55}$$

  Esto equivale a la velocidad promedio de los $4,5$ seg a los 5 seg.

- Aún podemos calcular más pendiente de rectas secantes tomando valores de x más próximos a 5, por ejemplo la pendiente de la recta que pasa por $(4,9,\ 117,649)$ y $(5,\ 122,5)$ es

$$m^* = \frac{122,5 - 117,649}{5 - 4,9} = \frac{4,851}{0,1} = \mathbf{48,51}$$

Estas pendientes en cada caso corresponden también a velocidades promedio.

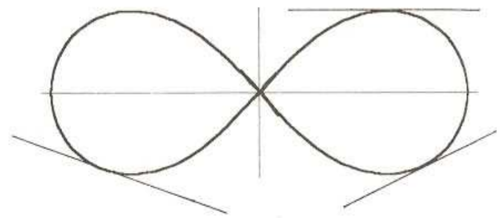


Figura 1.8. Tangentes

De la secante a la tangente

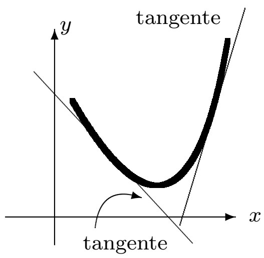


Figura 1.9. Tangentes

Sin embargo, no podemos utilizar esa fórmula para calcular la pendiente m_3 de L_3 puesto que solo conocemos un punto de esa recta. ¿De qué manera podríamos intentar un cálculo de m_3, es decir, de la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $(5,\ 122,5)$?

Si en lugar de la recta tangente consideramos una recta secante cuya "inclinación" sea muy próxima a ella, la pendiente de esta secante será una aproximación de la pendiente de la tangente. Una posibilidad es la m^* calculada antes, de modo que podríamos decir que

Pendiente de la recta tangente

$$m_3 \cong 48,51$$

Pero podemos obtener mejores aproximaciones considerando valores de x cada vez más próximos a 5. En la tabla 1.6 se dan algunas aproximaciones de la pendiente de la recta tangente.

Tabla 1.6

x	y	Δx	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cong m_3$
4,99	122,01049	0,01	0,48951	48,951
4,999	122,4510049	0,001	0,0489951	48,9951
4,9999	122,495100049	0,0001	0,004899951	48,99951

Si seguimos la tabla 1.6 podemos considerar como valor de la pendiente de la recta tangente $m_3 = 49$.

1.2.1 La derivada como razón de cambio instantáneo

El ejemplo de la velocidad de la piedra en caída libre y el de la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto dado se refieren a la misma situación.

En ambos casos tenemos en primer lugar una función:

$$d(t) = 4,9t^2 \qquad \text{o} \qquad f(x) = 4,9x^2$$

También en ambos calculamos *promedios*:

$$\frac{d(t) - d(5)}{t - 5} \qquad \text{o} \qquad \frac{f(x) - f(5)}{x - 5}$$

Se calcularon varios de esos promedios con los valores de t o de x (variable independiente) cada vez más próximos a 5.

En ambos casos los promedios obtenidos fueron cada vez más cercanos al valor 49. Valor que se interpretó así:

- La velocidad instantánea de la piedra 5 *seg* después de haber sido soltada es de 49 m/seg.

- La pendiente de la recta tangente a la curva dada por

$$f(x) = 4,9x^2$$

  en el punto $(5,\ 122,5)$ es

$$m = 49.$$

Entonces la conclusión es: calcular la velocidad instantánea se reduce a calcular la pendiente de la recta tangente a la función que describe el movimiento. Observe que en realidad ambas son la misma función, solo que usamos diferentes nombres para las variables y la utilizamos para interpretar diferentes situaciones. Pero, podemos aplicar el proceso descrito antes a cualquier función y para cualquier valor dado de la variable independiente.

Velocidad instantánea = pendiente de la recta tangente

Este proceso es uno de los conceptos centrales en la rama de las matemáticas que se llama *Cálculo Diferencial* y tiene múltiples aplicaciones en las ciencias y las técnicas debido a que muchísimos de los conceptos en estas áreas tienen que ver con razones de cambio. Por ejemplo:

- La *velocidad* es la razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo.

- La *aceleración* es la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo.

Razones de cambio instantáneas

- La *densidad* es la razón de cambio de la masa con respecto al volumen.
- La *pendiente* es la razón de cambio de la altura con respecto a la distancia horizontal.
- La *corriente* es la razón de cambio de la cantidad de carga eléctrica con respecto al tiempo.
- El *costo marginal* es la razón de cambio del costo de la producción con respecto al número de unidades producidas.

De la lista anterior podemos deducir la gran cantidad de campos en que se aplica.

La derivada

El concepto al que nos hemos estado refiriendo es el que se llama *derivada de una función en un punto* y se puede interpretar como una razón de cambio instantáneo. Así, según lo indicado antes la derivada de

$$f(x) = 4,9x^2$$

en $x = 5$ es 49.
Esto se denota simbólicamente por

$$f'(5) = 49$$

En general: si la derivada de una función $y = f(x)$ en $x = c$ es r se escribe

$$f'(c) = r$$

(Se lee: "efe prima de c es igual a r").

De lo comentado anteriormente podemos decir que si la posición de un objeto, en el tiempo t, que se mueve en línea recta está dada por $d(t)$, entonces su velocidad en el instante $t = c$ está dada por $d'(c)$.

De modo análogo la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es $m = f'(c)$.

Aplicaremos el procedimiento descrito antes para calcular algunas derivadas.

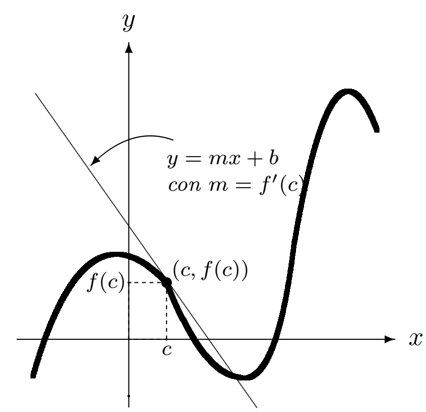


Figura 1.10. Pendiente de la tangente: $f'(c)$

Ejemplo 5 (*Derivada de una función lineal*)**.** Calcular la derivada de $f(x) = 3x + 1$ cuando $x = 4$. Es decir, calcular $f'(4)$.

Solución Formamos el cociente

$$\frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \frac{(3x + 1) - 13}{x - 4},$$

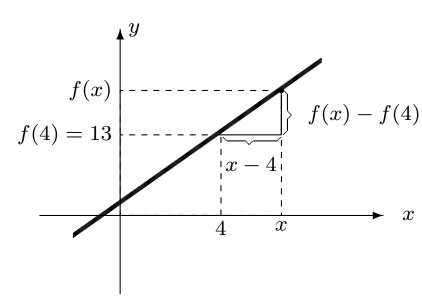


Figura 1.11. $f(x) = 3x + 1$

simplificando la fracción tenemos que

$$\frac{(3x+1)-13}{x-4} = \frac{3x-12}{x-4} = \frac{3(x-4)}{x-4} = 3.$$

No es siquiera necesario calcular valores para este cociente porque siempre va a ser igual a 3, de manera que $f'(4) = 3$. Observe que la función dada corresponde a una recta y que el valor obtenido es precisamente la pendiente de esa recta. △

★ *Actividad:* Sea f la función del ejemplo anterior.
Primero: escoja un valor cualquiera de x (el que desee).
Segundo: obtenga la derivada de f en ese valor (usando el método que se mostró).
Tercero: repita el procedimiento con otros valores y obtenga la derivada.
Cuarto: analice sus resultados.
Quinto: ¿cómo explicaría sus resultados en términos gráficos?

Ejemplo 6 (*Calcular la derivada*)**.** Sea $f(x) = x^3 - 2$, calcular la derivada de f cuando $x = 2$. Esto es, calcular $f'(2)$.

Solución

Según lo que hemos dicho consideramos el cociente

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{(x^3-2)-6}{x-2} = \frac{x^3-8}{x-2}$$

y luego calculamos los valores de este cociente para valores de x cada vez más próximos a 2 usando valores mayores que 2 y valores menores que 2.

Lo más cómodo es construir una tabla (tenemos $f(2) = 2^3 - 2 = 6$):

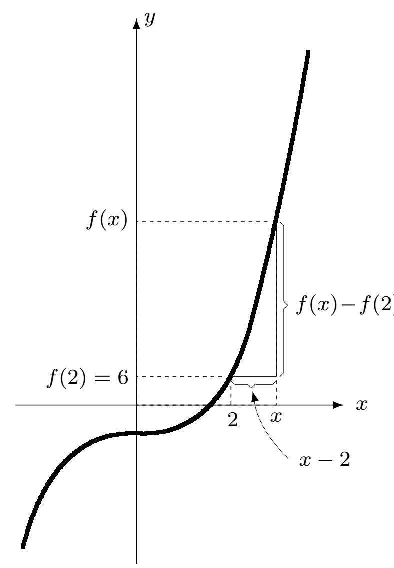


Figura 1.12. $f(x) = x^3 - 2$

Tabla 1.7

valores mayores que 2					valores menores que 2				
x	$f(x)$	$f(x)-f(2)$	$x-2$	$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$	x	$f(x)$	$f(x)-f(2)$	$x-2$	$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$
2,5	13,625	7,625	0,5	15,25	1,5	1,375	-4,625	-0,5	9,25
2,1	7,261	1,261	0,1	12,61	1,9	4,859	-1,141	-0,1	11,41
2,01	6,120601	0,120601	0,01	12,0601	1,99	5,880599	-0,119401	-0,01	11,9401
2,001	6,012006	0,012006	0,001	12,006	1,999	5,988006	-0,011994	-0,001	11,994002

De la tabla vemos que para valores de x cada vez más cercanos a 2, tanto mayores como menores que 2, se tiene que el valor del cociente

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

es cada vez más cercano a 12. Podemos decir que $f'(2) = 12$. △

★ *Nota:* Los valores que aparecen en esta tabla se obtuvieron utilizando un sencilla calculadora científica. Se conservaron hasta seis decimales proporcionados por la calculadora para no alterar mucho los resultados. La misma observación vale para todos los cálculos numéricos que aparecen en este libro.

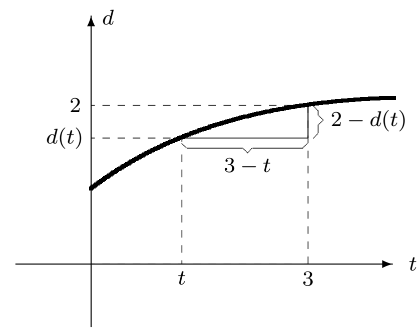


Figura 1.13. $d(t) = \sqrt{t+1}$

Ejemplo 7 (*Calcular la velocidad).* Un insecto se mueve sobre una recta de manera que a los t segundos se encuentra a una distancia $d(t) = \sqrt{t+1}$ metros del origen. Determinar su velocidad a los $3\,seg$.

Solución

La velocidad a los $3\,seg$ es $d'(3)$, de modo que conside-ramos el cociente

$$\frac{d(t)-d(3)}{t-3} = \frac{\sqrt{t+1}-2}{t-3}$$

y elaboramos una tabla en la que se calcula este cociente para valores muy próximos a 3, tomando valores mayores que 3 y valores menores que 3.

Tabla 1.8

valores mayores que 3					valores menores que 3				
t	$d(t)$	$d(t)-d(3)$	$t-3$	$\frac{d(t)-d(3)}{t-3}$	t	$d(t)$	$d(t)-d(3)$	$t-3$	$\frac{d(t)-d(3)}{t-3}$
3,5	2,12132	0,12132	0,5	0,24264	2,5	1,870828	-0,129171	-0,5	0,258342
3,1	2,024845	0,024845	0,1	0,248456	2,9	1,974841	-0,025158	-0,1	0,251582
3,01	2,002498	0,002498	0,01	0,249843	2,99	1,997498	-0,002501	-0,01	0,250156
3,001	2,00025	0,00025	0,001	0,249984	2,999	1,99975	-0,00025001	-0,001	0,25001

De la tabla anterior deducimos que la velocidad del insecto a los $3\,\text{seg}$ es de $0,25\,\text{m/seg}$. △

Ejemplo 8 (*Calcular la recta tangente).* Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 4 - x^2$ cuando $x = 1$.

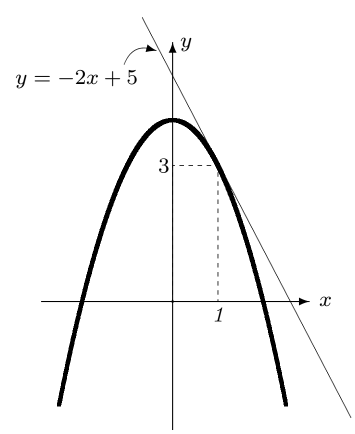
Solución

Tenemos que

$$f(1) = 4 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

y entonces el punto de tangencia es $(1, 3)$. Para conocer la pendiente de la recta tangente calculamos el cociente

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{(4-x^2)-3}{x-1} = \frac{1-x^2}{x-1}$$



$f(x) = 4 - x^2$, *tangente:* $y = -2x + 5$

Figura 1.14.

para valores de x cada vez más próximos a 1, según la tabla siguiente:

Tabla 1.9

valores mayores que 2					valores menores que 2				
x	$f(x)$	$f(x)-f(1)$	$x-1$	$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$	x	$f(x)$	$f(x)-f(1)$	$x-1$	$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
1,5	1,75	-1,25	0,5	-2,5	0,5	3,75	0,75	-0,5	-1,5
1,1	2,79	-0,21	0,1	-2,1	0,9	3,19	0,19	-0,1	-1,9
1,01	2,9799	-0,0201	0,01	-2,01	0,99	3,0199	0,0199	-0,01	-1,99
1,001	2,997999	-0,002001	0,001	-2,001	0,999	3,001999	0,001199	-0,001	-1,999

De la tabla anterior podemos deducir que la pendiente de la recta tangente es $m = -2$.

Ahora obtenemos el valor de b. Tenemos que $b = y - mx$ y sustituyendo los valores $y = 3$, $x = 1$, $m = -2$ entonces

$$b = 3 - (-2)(1) = 3 + 2 = 5.$$

De modo que la ecuación de la recta es

$$y = -2x + 5.$$

△

1.3 GALILEO, LA CIENCIA MODERNA Y LAS MATEMÁTICAS

Se proporciona alguna información sobre la vida y la obra de Galileo Galilei y su relación con las ciencias y las matemáticas.

Se supone que los resultados sobre la caída libre obtenidos por Galileo fueron inferidos (o demostrados) a partir de un experimento realizado en la torre inclinada de Pisa en Italia (dejando caer dos balas de cañón de diferente peso). Algunos historiadores han expresado dudas sobre si en efecto se realizó el experimento o no. Lo importante para la ciencia y el conocimiento, sin embargo, no es eso, sino las ideas sobre la naturaleza de la ciencia que Galileo promovió.

Principios metodológicos

Galileo estableció dos principios del método de la ciencia madura: por un lado, que las leyes físicas (mecánicas) se deben describir a través

Galileo Galilei

de las matemáticas (relaciones cuantitativas) y, por otro lado, que estas leyes se obtienen y confirman por medio de experimentos controlados. *Experimentación y matemáticas* son fundamentos de la nueva ciencia.
Los planteamientos de Galileo fueron decisivos en la revolución intelectual y científica del siglo XVII. No debe olvidarse tampoco que el trabajo de Galileo en la mecánica y la dinámica fue un punto medular del que partiría Newton unas décadas después.
Galileo Galilei nació en Pisa, Italia, donde primeramente estudió medicina en la Universidad de Pisa. Aprendió matemáticas con un ingeniero privado y a los 17 años se pasó de la medicina a las matemáticas.

La lucha por una nueva cosmología

Galileo asumió la defensa de las ideas del astrónomo polaco Nicolás Copérnico (1473–1543), integrando en sus trabajos los resultados fácticos obtenidos por Tycho Brahe (1546–1601) y Johannes Kepler (1571–1630). Este último había concluido que las órbitas de los planetas eran elípticas y no circulares, en desacuerdo con ideas que venían desde la Grecia antigua: que los círculos eran las figuras perfectas que describían la realidad.

La defensa del heliocentrismo

Para sus resultados Galileo usó como base avances hechos por matemáticos renacentistas (Hierónimo Cardano, Nicolo Tartaglia y otros), pero su principal instrumento de batalla fue el telescopio (producto de la tradición artesanal). A través del telescopio pudo descubrir importantes hechos que desestimaban el dominante *geocentrismo* (los planetas giran alrededor de la Tierra) y favorecían la interpretación *heliocéntrica* de Copérnico (los planetas giran alrededor del Sol): que la Luna tenía cráteres y montañas, que Venus muestra fases como la Luna, que Saturno parece estar dividido en tres partes, y que en torno a Júpiter giran tres estrellas o lunas.

Galileo usó el telescopio

Ya en 1610 Galileo publicó su libro *Mensajero de las estrellas*, condensando sus observaciones revolucionarias. Es, sin embargo, 22 años después en su libro *Diálogo concerniente a los dos sistemas del mundo: el ptolomeico y el copernicano*, que atacó frontalmente toda la cosmología aceptada y la filosofía del gran filósofo griego Aristóteles que había sido defendida por los escolásticos. *El diálogo* fue escrito en italiano para buscar una mayor audiencia para sus

Un "juicio" contra el pensamiento científico ideas.

Galileo fue llevado a juicio en 1633 por la Inquisición. Fue condenado a arresto domiciliario durante el resto de su vida, y a renunciar públicamente al copernicanismo.

Sobre las matemáticas

El lenguaje de la naturaleza

Un famoso párrafo escrito por Galileo es el siguiente:

> "La Filosofía [la naturaleza] está escrita en ese gran mundo que siempre está ante nuestra vista –y quiero decir el universo– pero no la podemos comprender si no aprendemos primero el lenguaje y los símbolos en los que está escrita. El libro está escrito en el lenguaje matemático, y los símbolos son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, que sin su ayuda no es posible comprender una sola palabra de éste; sin ellos uno vaga en vano a través de un oscuro laberinto".

Con base en estas líneas: ¿Podría usted señalar cuál pensaba Galileo que era la utilidad de las matemáticas?

1.4 EJERCICIOS DEL *CAPÍTULO I*

Completar

En los ejercicios 1 a 5 complete correctamente la frase.

1. Un amigo suyo abrió una cuenta de ahorros con ₡2 000. Al cabo de tres meses tiene ₡2 300 en su cuenta, entonces la variación absoluta de la cantidad de dinero en la cuenta fue de
₡ __________.

2. María pesaba 60 kg; luego de una dieta su peso fue de 58 kg. La variación absoluta en el peso de María fue de __________ kg.

3. Si una cantidad cambia de 200 unidades a 250 unidades entonces su variación relativa es __________%.

4. Si una cantidad inicial de 240 unidades aumenta en un 30% entonces la cantidad final es __________.

5. Si una cantidad aumenta en 375 unidades en un período de 3 horas, entonces el cambio promedio por hora de esa cantidad fue __________.

Selección única

En los ejercicios 6 a 11 seleccione la opción que completa o contesta correctamente el enunciado dado.

6. Si el cambio absoluto en una cantidad de X unidades fue un crecimiento de 20 unidades entonces la nueva cantidad es

(a) $X-20$ (b) $X+20$ (c) $\frac{X}{20}$ (d) $20X$

7. Si una cantidad X cambia a $3X$ entonces el cambio relativo es

(a) 30% (b) 20% (c) 200% (d) 300%

8. Si C colones ganan intereses de manera que a los 3 meses se convierten en $C+600$ colones, entonces la razón promedio a la que creció el dinero fue

(a) ₡ $\frac{C+600}{3}$ por mes (b) ₡200 por mes
(c) ₡600 por mes (d) $C+600$ por mes

9. Una barra de metal a $65^o\,C$ se coloca en una habitación. Al cabo de 2 minutos la temperatura de la barra descendió en un 10%. ¿Cuál es su nueva temperatura?

(a) $58.5^o\,C$ (b) $55^o\,C$ (c) $71.5^o\,C$ (d) $75^o\,C$

10. Si un objeto se mueve en línea recta de modo que: a los dos minutos de iniciado el movimiento se encuentra a 10 metros del origen, y a los 4 minutos de iniciado el movimiento se encuentra a 22 metros del origen; entonces su velocidad promedio es

(a) $16\,m/min$ (b) $5\frac{1}{3}\,m/min$ (c) $5.5\,m/min$
(d) $1.8\,m/min$

11. Un objeto se mueve en línea recta de manera que a los t segundos de iniciado el movimiento se encuentra a $s(t)=t^2+1$ metros del origen. Si queremos estimar la velocidad instantánea del objeto a los 2 segundos, entonces podemos utilizar valores de t cada vez más próximos a 2 para calcular el valor de la expresión siguiente:

(a) $\dfrac{t^2+6}{t+2}$ (b) $\dfrac{t^2-56}{t-2}$ (c) $\dfrac{t^2-4}{t-2}$ (d) $\dfrac{t^2+5}{t+2}$

Falso o verdadero

En los ejercicios 12 a 18 diga si el enunciado dado es falso o verdadero (explique).

12. La variación relativa de una cantidad es un porcentaje.

13. Si un objeto se mueve en línea recta de manera que la velocidad promedio entre el tercer segundo y el quinto segundo es de $20\,m/seg$ entonces necesariamente la velocidad instantánea del objeto en el cuarto segundo es de $20\,m/seg$.

14. Podemos asegurar que cuanto mayor sea la distancia recorrida, mayor será la velocidad promedio.

15. Algunas rectas tangentes a una curva en un punto pueden cortar a la recta en otro punto.

16. Si la recta tangente a la gráfica de $y=f(x)$ en el punto $(c,f(c))$ es horizontal entonces $f'(c)=0$.

17. Si $f'(c)=g'(c)$ entonces podemos asegurar que $f(c)=g(c)$.

18. Si $f(x)=7x-2$ entonces $f'(c)=7$ para todo $c\in\mathbb{R}$.

Problemas y preguntas de desarrollo

19. Un objeto se mueve en línea recta de modo que a los t segundos se encuentra a $s(t) = t^2+2t+5$ metros del origen.

(a) Determine la velocidad promedio del objeto entre los 2 segundos y los 5 segundos.

(b) Determine la velocidad promedio desde el instante en que inicia el movimiento ($t = 0$ seg) hasta el instante $t = 5$ seg.

(c) Utilizando el procedimiento estudiado en este capítulo dé un estimado de la velocidad del objeto en el instante $t = 5$ seg.

20. En la figura 1.15 se da la gráfica de una función f y una recta L tangente a la gráfica de la función en el punto $(2, 1)$; si se sabe que $f'(2) = -2$, calcule la ecuación de la recta L.

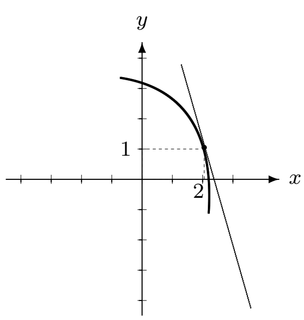


Figura 1.15.

21. De acuerdo con la figura 1.16, calcule c y $f'(c)$.

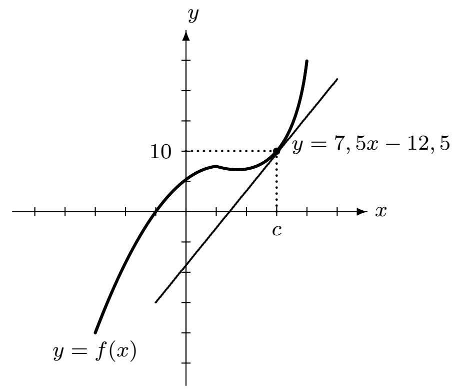
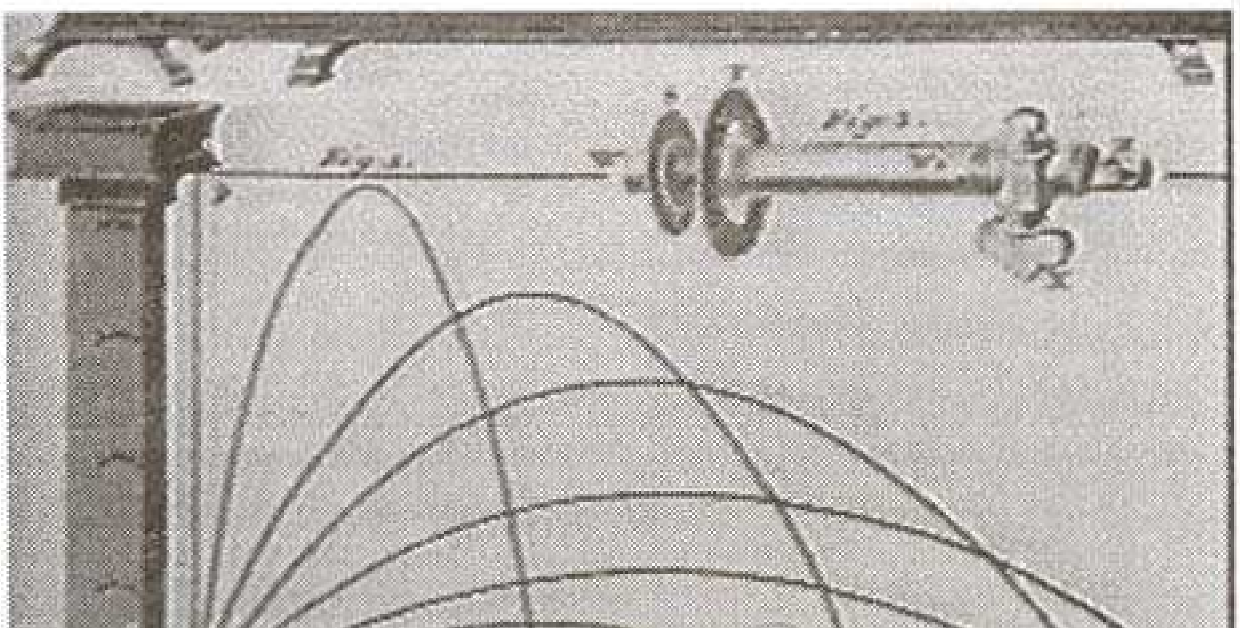


Figura 1.16.

22. Use una tabla de valores para estimar $f'(2)$ siendo $f(x) = x^2 - x$ (utilice una calculadora).

23. Use una tabla de valores para encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2+x-1$ en el punto $(2, 5)$. Elabore un dibujo de la situación.

24. Un objeto se mueve en línea recta de modo que a los t segundos se encuentra a $s(t) = \sqrt{t^2 + 9}$ metros del origen. Usando una tabla de valores estime la velocidad instantánea del objeto a los 4 segundos.



Movimiento parabólico de proyectiles.
Detalle de una pintura del siglo XVII.

CAPÍTULO 2
LÍMITES

La esencia de las matemáticas es su libertad.

Georg Cantor

Los dos conceptos centrales sobre los que se fundamenta el Cálculo Diferencial e Integral son los de *función* y *límite*. Si bien es posible estudiarlos sin mucha referencia gráfica, la realidad es que se comprenden mejor si se posee a la par una visualización gráfica y geométrica. De la misma manera y como hemos podido apreciar en el capítulo anterior, el concepto de derivada (también el de integral) admite un sentido eminentemente visual y su tratamiento gráfico es muy adecuado. En este libro daremos un especial énfasis a los aspectos geométricos y gráficos presentes en los diferentes asuntos que trataremos. Por eso antes de entrar directamente al concepto de límite vamos a repasar rápidamente el tema de las funciones y la representación gráfica.

2.1 FUNCIONES Y SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Como veremos al final de este Capítulo en términos históricos, la representación de curvas geométricas en coordenadas (en particular las *rectangulares*) supuso en el siglo XVII una auténtica revolución teórica, fundamental para la creación y progreso del Cálculo. Cada punto de una curva se puede representar por números: las coordenadas (x, y), y la curva se podría describir por medio de una ecuación. De la misma manera, recíprocamente, una ecuación nos daría una curva geométrica.

En esta sección se repasa el concepto de función. Se da énfasis a la obtención de información cualitativa referente a una función a partir de su gráfica.

El objetivo esencial de la *geometría analítica* es, precisamente, el de estudiar curvas geométricas de forma algebraica y ecuaciones algebraicas con su representación geométrica.

Si se tiene la ecuación de una curva geométrica es posible "trabajarla" algebraicamente y obtener resultados nuevos que por vía meramente geométrica no serían posibles.

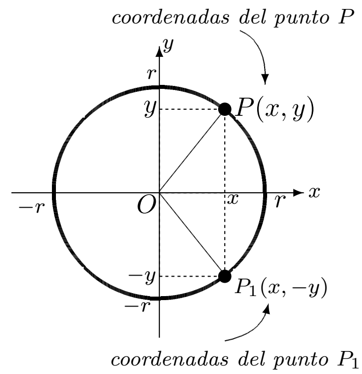


Figura 2.1. $x^2 + y^2 = r^2$: un círculo

La gráfica de una función

Una función $f(x) = y$ o la ecuación $f(x) - y = 0$ posee representación gráfica en el plano coordenado. Por ejemplo, la *Figura 2.3* nos da la gráfica de la función

$$y = f(x) = 2x^3 - x$$

y la *Figura 2.4* la de otra función.

Es importante señalar, sin embargo, que no toda ecuación nos ofrece una función, ni toda curva geométrica representa la gráfica de una función. Por ejemplo, la *Figura 2.1* y la *Figura 2.2* no representan funciones. Note que en las últimas figuras mencionadas para casi todas las x en el eje de las *abscisas* se asigna dos y en el eje de las *ordenadas* (lo que "prohibe" la definición de función).

De una ecuación o curva es posible en ocasiones *obtener* funciones. Por ejemplo, de

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (\text{con } r > 0)$$

podemos obtener dos funciones:

$y^2 = r^2 - x^2$, sacando la raíz tenemos

$$\begin{cases} y = \sqrt{r^2 - x^2} \\ y = -\sqrt{r^2 - x^2} \end{cases}$$

lo que gráficamente es:

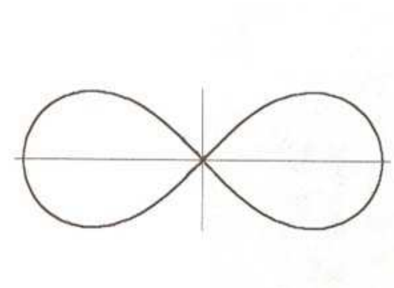


Figura 2.2. Lemniscata: $3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$

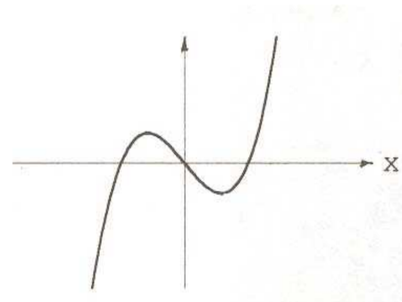


Figura 2.3. La curva $y = 2x^3 - x$

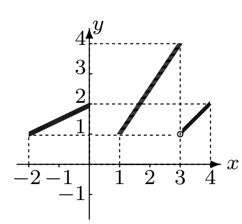


Figura 2.4. Segmentos de recta

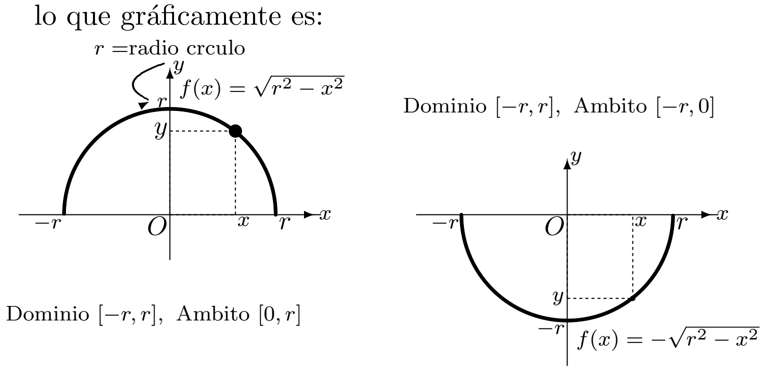


Figura 2.5. Semicircunferencias

Gráficas de funciones sencillas

Podemos representar gráficamente algunas de las funciones más sencillas:

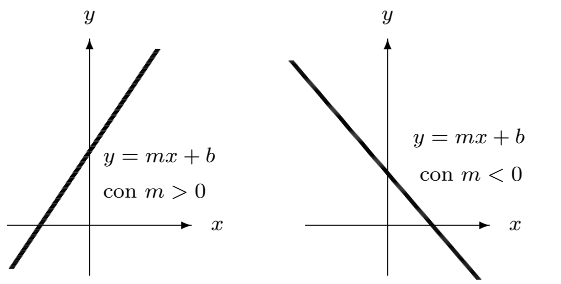


Figura 2.6. Funciones lineales, dominio: $\mathbb{R}$, ámbito: $\mathbb{R}$

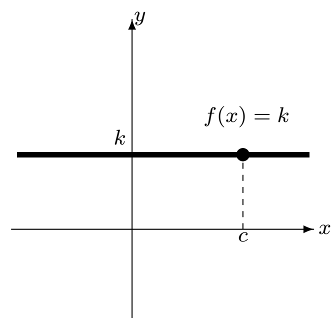


Figura 2.7. Función constante, dominio: $\mathbb{R}$, ámbito: $\{k\}$

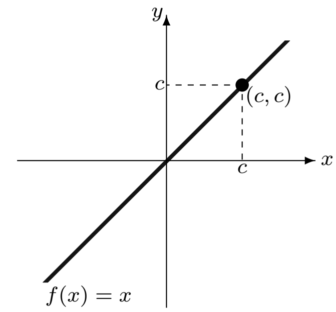


Figura 2.8. Función identidad, dominio: $\mathbb{R}$, ámbito: $\mathbb{R}$

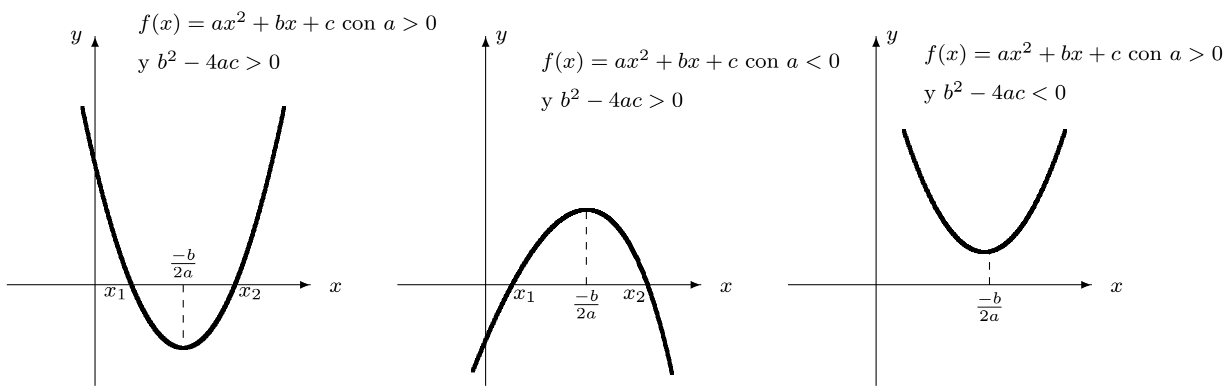


Figura 2.9. Funciones cuadráticas o parabólicas, dominio: $\mathbb{R}$

Considere ahora las siguientes dos gráficas

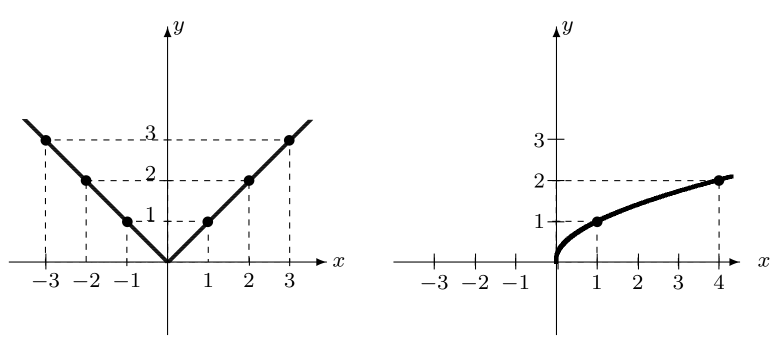


Figura 2.10.

¿Cuáles podrían ser las ecuaciones de las funciones representadas por esas gráficas?

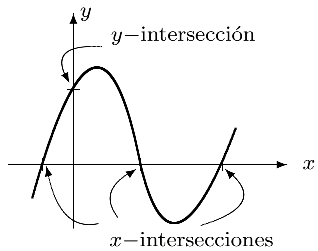
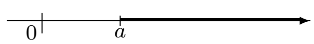


Figura 2.11. Intersecciones

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/x \geq a\}$



$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/x > a\}$

f es *estrictamente creciente* en el intervalo I si dados x_1 y x_2 en I: cuando $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

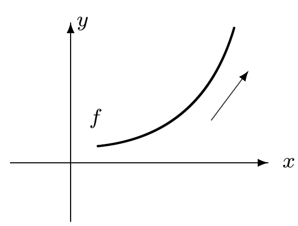


Figura 2.12. f creciente

f es *estrictamente decreciente* en el intervalo I si: cuando $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

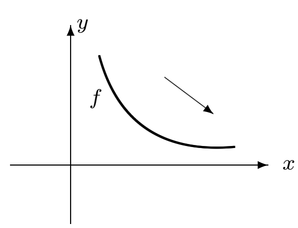


Figura 2.13. f decreciente

Interpretación gráfica

Estudiar las características de una función a partir de su gráfica es de mucha importancia para el Cálculo. Vamos a hacer un ejemplo.

Ejemplo 1. Interpretando una gráfica

Considere la siguiente gráfica:

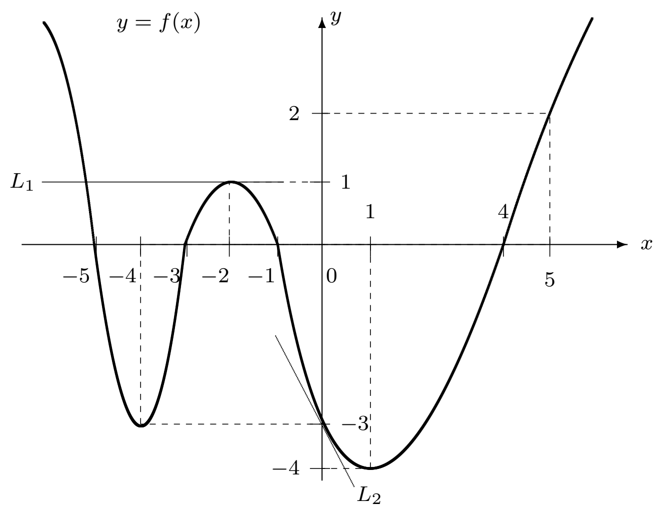


Figura 2.14. Gráfica de $y = f(x)$

A partir de ella determine la siguiente información:

a) El dominio y el ámbito de f.

b) La imagen de 4, y además $f(-2)$ y $f(5)$.

c) Los puntos donde la curva corta a los ejes.

d) Los intervalos donde f es creciente y donde es decreciente

e) Las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 que son tangentes a la curva en los puntos $(-2, 1)$ y $(0, -3)$.

Solución:

a) El dominio es $\mathbb{R}$ y el ámbito es $[-4, +\infty[$.

b) Tenemos que $f(4) = 0$, $f(-2) = 1$, $f(5) = 2$.

c) La gráfica corta al eje x ($x-$intersección) en $(4, 0)$, $(-1, 0)$, $(-3, 0)$ y $(-5, 0)$. Corta al eje y ($y-$intersección) en $(0, -3)$.

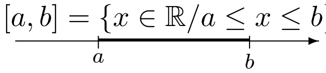
d) Es creciente en los intervalos $[-4, -2]$, $[1, +\infty[$; es decreciente en $]-\infty, -4]$ y $[-2, 1]$.

e) Note que la recta L_1 pasa por el punto $(-2, 1)$ y es paralela al eje x. Toda recta $y = mx + b$ paralela al eje x tiene $m = 0$, por lo que es de la forma $y = b$. Entonces la ecuación es $\boxed{y = 1}$. △

Para poder calcular la ecuación de L_2 se requiere más información que no da la gráfica.
Por ejemplo, si se tuviera la ecuación de la función explícitamente $y = f(x)$, la pendiente de la recta tangente en el punto $(0, -3)$ se podría obtener con los métodos del Cálculo Diferencial (¿cómo?).

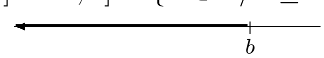
Si se tiene la gráfica es posible obtener información sobre una ecuación o una función, pero no siempre es fácil obtener la gráfica.
Si se usa una tabla de valores debe obtenerse muchos puntos porque con pocos es posible equivocarse.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$



$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$



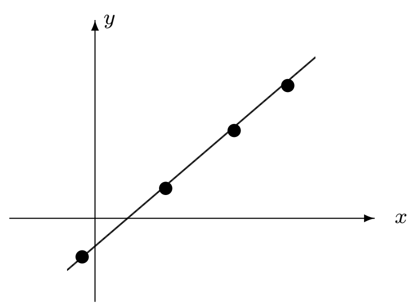


Figura 2.15. Con pocos puntos se sugiere una recta

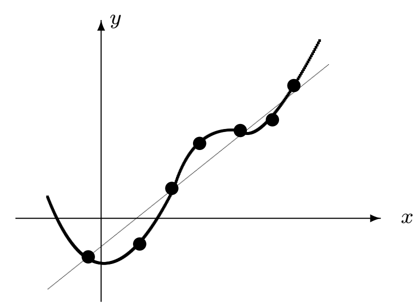


Figura 2.16. Con más puntos se puede apreciar mejor la gráfica

Construir gráficas de funciones a partir de su ecuación algebraica es precisamente una de las principales aplicaciones que posee el Cálculo diferencial.

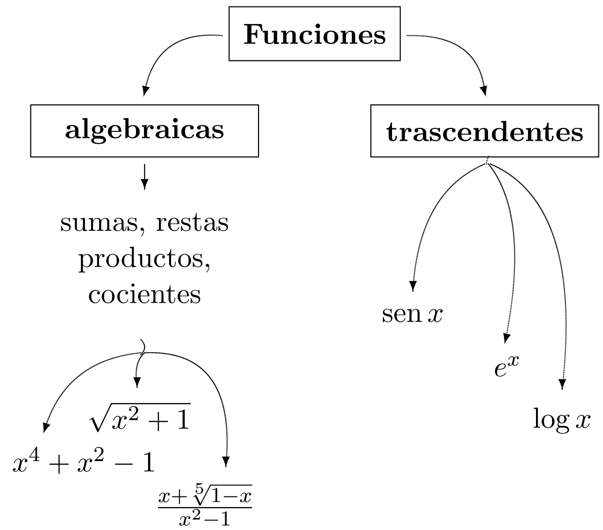


Figura 2.17. Arbol de las funciones

Mediante gráficos y tablas de valores de las funciones se introduce el concepto de límite de una función en un punto. También se proporciona casos en los cuales el límite no existe.

2.2 EL PROCESO DEL LÍMITE

Los capítulos anteriores sirvieron para ilustrar la importancia de este proceso en la matemática y sus aplicaciones a modelos que describen situaciones. Aquí lo veremos con más detalle y lo utilizaremos en funciones cualesquiera.

Ejemplo 2. Con la gráfica y una tabla de valores

¿Qué le sucede a $f(x)=x^2+3$ cuando x se acerca a 3?

Solución: La figura 2.18 corresponde a la gráfica de esta función. En ella podemos ver que entre más cerca se encuentren de 3 los valores de x, entonces los valores de $f(x)$ se encuentran más cercanos a 12.

La tabla 2.1 de valores refuerza esa percepción gráfica

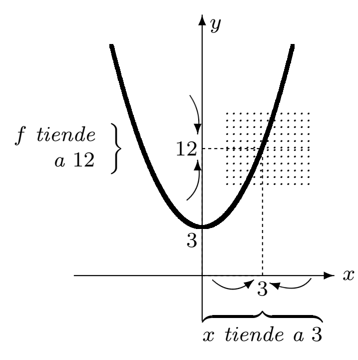


Figura 2.18. $f(x)=x^2+3$

Tabla 2.1

3

x	2,5	2,9	2,99	2,999	3,001	3,01	3,1	3,5
$f(x)$	9,5	11,41	11,9401	11,994001	12,006001	12,0601	12,61	15,25

12

Podemos ver que a medida que tomamos valores de x más próximos a 3, tanto para valores mayores que tres como para valores menores que 3, los valores de $f(x)$ se aproximan a 12. $\triangle$

Ejemplo 3. Con la gráfica y una tabla de valores

Si $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, ¿a qué valor se aproxima $f(x)$ si x se aproxima a 2?

Solución: Aquí tenemos la gráfica de esa función.

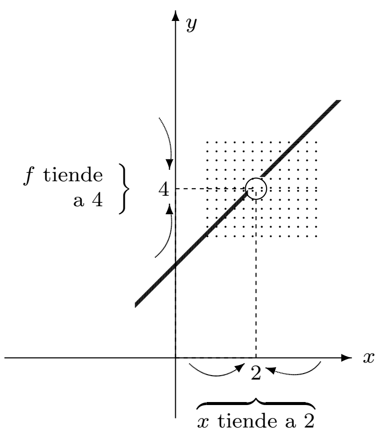


Figura 2.19. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

Podemos ver que, aún cuando la gráfica presenta una ruptura (hueco) en el punto $(2,4)$, las imágenes de valores de x muy cercanos a 2 son muy cercanas a 4.

También una tabla de valores utilizando valores de x próximos a 2 tanto por la izquierda (menores que 2) como por la derecha (mayores que 2), nos convence de esa situación.

Tabla 2.2

$\longrightarrow$ 2 $\longleftarrow$

x	1,5	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1	2,5
$f(x)$	3,5	3,9	3,99	3,999	4,001	4,01	4,1	4,5

$\longrightarrow$ 4 $\longleftarrow$

Así, de la tabla 2.2 deducimos que los valores de $f(x)$ se aproximan a 4 cuando los valores de x se aproximan a 2. $\triangle$

Ejemplo 4. Por la derecha y por la izquierda

Consideremos ahora la función $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

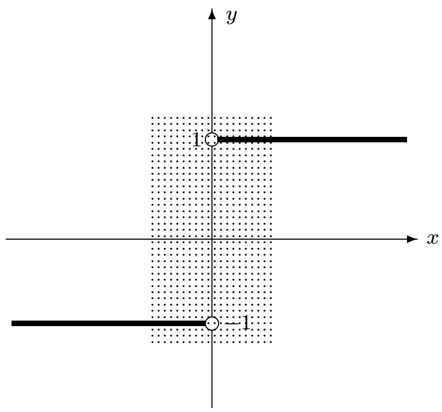


Figura 2.20. $g(x) = \frac{|x|}{x}$

En su gráfica vemos que por la derecha de 0 las imágenes son 1, mientras que por la izquierda de 0 las imágenes son -1, la gráfica presenta un "salto" y entonces las imágenes no se acercan a un mismo valor. Podemos ver que el límite no existe. Hagamos una tabla como las de los ejemplos anteriores para verlo de otra manera.

Tabla 2.3

0

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1	0,5
$g(x)$	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1

$-1 \mid 1$

Este caso difiere de los anteriores porque si tomamos valores de x por la izquierda de 0 entonces $g(x)$ se hace -1, pero al tomar valores por la derecha de 0 entonces $g(x)$ se hace 1. Esto es: la tendencia difiere según el lado en que tomemos los valores. △

Ejemplo 5. Crecimiento ilimitado

Ahora hagamos lo mismo para $f(x) = \dfrac{1}{x}$, para valores de x cercanos a 0.

En la figura 2.20 vemos que a medida que nos acercamos a 0 por la derecha, la gráfica de la función "sube ilimitadamente" sin aproximarse a ningún valor en particular. Si vamos por la izquierda de 0, la gráfica de la función "baja ilimitadamente" y tampoco se aproxima a ningún valor en particular.

La tabla también indica esa tendencia.

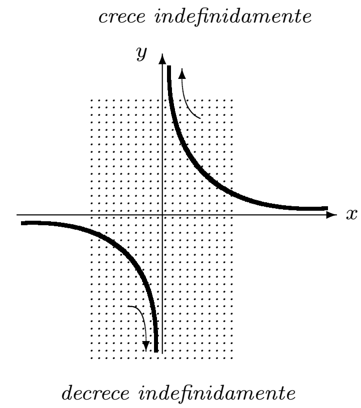


Figura 2.21. $f(x) = \frac{1}{x}$

Tabla 2.4

0

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1	0,5
$g(x)$	-2	-10	-100	-1000	1000	100	10	2

?

Viendo la tabla 2.4 y pensando en valores de x aún más próximos a 0 es fácil convencerse que si vamos por el lado derecho los valores de $f(x)$ crecen ilimitadamente (se dice que crecen sin cota) y si vamos por el lado izquierdo los valores decrecen ilimitadamente (decrecen sin cota). $\triangle$

Comentario sobre los ejemplos anteriores

Estos cuatro ejemplos tienen cosas en común y cosas en las cuales difieren:

La idea intuitiva de límite

- En primer lugar, tienen en común el hecho de que tenemos un valor dado de x (es decir un valor de x previamente fijado) digamos $x = c$ y, luego, consideramos valores de x cada vez más próximos a c, tanto valores mayores que c (por la derecha) como valores menores que c (por la izquierda). Esta situación se expresa diciendo que x *tiende a* c y simbólicamente se indica por

  $$\boxed{x \longrightarrow c}$$

  En el ejemplo 2, $x \longrightarrow 3$;

  en el ejemplo 3, $x \longrightarrow 2$;

  en los ejemplos 4 y 5, $x \longrightarrow 0$.

- En segundo lugar, en los ejemplos 2 y 3, a medida que nos aproximamos al valor dado de x, no importa si lo hacemos por la izquierda o por la derecha, los valores de $f(x)$ se van aproximando a un valor fijo L. Decimos en este caso que $f(x)$ *tiende* a L y escribimos

  $$\boxed{f(x) \longrightarrow L}$$

  La situación completa se expresa así:

"El límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es igual a L"

Simbólicamente se escribe

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = L}$$

Se tiene entonces que

$$\lim_{x\to 3} x^2 + 3 = 12,$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-4} = 4.$$

EL VALOR ABSOLUTO

Recuerde que el **valor absoluto** se define de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Lo anterior significa que si un número es positivo o cero entonces es igual a su valor absoluto y si el número es negativo entonces su valor absoluto es su opuesto.

Algunas propiedades

1) $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$
2) $|xy| = |x|\,|y|$ para todo x, y en $\mathbb{R}$
3) $|x+y| \leq |x| + |y|$ para todo x, y en $\mathbb{R}$
4) $|x| < k$ es equivalente a $-k < x < k$
5) $|x| > k$ es equivalente a $x > k$ o $x < -k$

Recuadro 2.1: **Valor absoluto**

- En el ejemplo 4 tenemos una situación diferente. En este caso, cuando x tiende a 0 por la derecha entonces $g(x)$ tiende a 1, pero cuando x tiende a 0 por la izquierda se tiene que $g(x)$ tiende a -1.

  En estas circunstancias se dice que el límite de $g(x)$ cuando x tiende a 0 NO EXISTE.

  Un límite que no existe

  Es decir

  $$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \quad \text{no existe.}$$

- Finalmente, en el cuarto ejemplo tampoco existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0, porque la tabla no presenta tendencia hacia ningún valor fijo sino que las imágenes crecen o decrecen sin límite a medida que aproximamos x a 0. Esto es:

  $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \quad \text{no existe.}$$

De acuerdo con lo anterior damos la siguiente definición intuitiva de límite.

Definición 2.1. El límite

Decimos que el **límite** de $f(x)$ cuando x tiende a c es igual a L si a medida que x se acerca a c, ya sea por la derecha como por la izquierda, entonces los valores de $f(x)$ se aproximan a L.
Esto se escribe

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

La situación anterior también se puede escribir como

$$f(x) \to L \quad \text{cuando} \quad x \to c$$

Esto se puede ver gráficamente en la figuras 2.22 y 2.23.

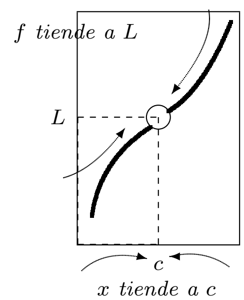


Figura 2.22.

Ejemplo 6. Existencia de los límites

La figura 2.24 representa una función $y = f(x)$.

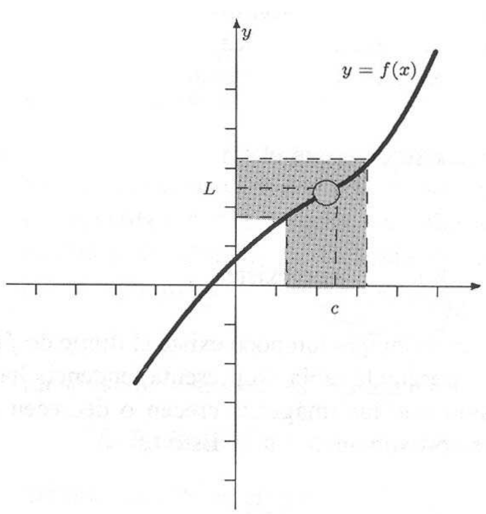


Figura 2.23. $\lim_{x \to c} f(x) = L$

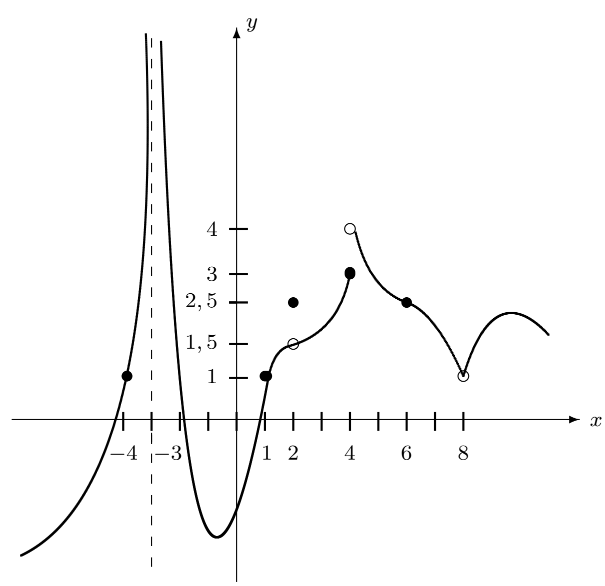


Figura 2.24. $y = f(x)$

A partir del dibujo tenemos

$$\lim_{x\to -4} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = 1,5$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 6} f(x) = 2,5$$

Por otra parte:

- $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ no existe porque cerca de 3 la función crece sin cota.
- $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ no existe porque: si nos aproximamos a 3 por la derecha, los valores de $f(x)$ se aproximan a 4, y si lo hacemos por la izquierda, los valores de $f(x)$ se acercan a 3.

△

Cuando tratamos con los límites debemos tener en consideración una serie de situaciones:

1. El límite de $f(x)$ cuando $x \to c$ puede existir aún cuando $f(c)$ no exista. Por ejemplo, recuerde que si

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

entonces se tiene que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

y sin embargo $f(2)$ no existe (porque en $x = 2$ el denominador se hace cero).

2. Por el contrario, puede ser que $f(c)$ exista y sin embargo $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ no exista, tal es el caso si consideramos $c = 4$ en el gráfico anterior.

3. Puede ser que tanto $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ como $f(c)$ existan pero no sean iguales. En el gráfico anterior se tiene, por ejemplo,

$$f(2) = 2,5$$

y

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1,5.$$

4. Finalmente, en muchas ocasiones existe el límite de la función cuando $x \to c$ y este límite es igual a $f(c)$. Por ejemplo, vimos antes que

$$\lim_{x\to 3}(x^2+3) = 12$$

y también, si $f(x) = x^2 + 3$ entonces $f(3) = 12$.

De todo esto lo que debe quedar bien claro es: al calcular $\lim_{x\to c} f(x)$ lo que interesa es “lo que sucede con $f(x)$ para valores de x *muy próximos* a c y no lo que sucede en c mismo”. Es decir, no importa si $f(c)$ existe o no existe, y si existiera no interesa quién sea; el límite no tiene que ver con $f(c)$ sino con los valores de $f(x)$ para x *cercano* a c.

Los valores de $f(x)$ que interesan

2.3 CÁLCULO DE LÍMITES

En esta sección se establecen las propiedades de los límites y se dan algunas técnicas que permiten calcular muchos límites de funciones algebraicas, sin tener que recurrir ni a gráficas ni a tablas.

Hasta aquí hemos calculado límites mediante la elaboración de una tabla o viendo gráficas de funciones. En las tablas hemos escrito valores de x suficientemente cercanos al valor $x = c$ dado y hemos consignado las correspondientes imágenes obtenidas mediante el uso de una calculadora. A partir de estas imágenes hemos inferido el valor del límite o hemos determinado que no existe.

Esto está bien para introducir el concepto y tratar de aclarar su significado. En algunas ocasiones esto nos permite también tener una idea bastante acertada del límite, sin embargo el uso gráficas o de tablas para calcular límites no es todo lo eficiente que quisiéramos. Básicamente tenemos algunos problemas:

Gráficas y tablas no siempre pueden ayudar

- A veces no se conoce la gráfica de una función, o es muy difícil de trazar.
- Para algunas funciones en general es muy engorrosa la elaboración de la tabla utilizando únicamente una sencilla calculadora.
- No siempre el valor que uno puede inferir de la tabla es el correcto.

Como sucede muy a menudo en matemáticas, se puede tomar atajos que nos permiten efectuar cálculos más rápidos y, a la vez, con la certeza de la validez de los resultados obtenidos. En el caso de los límites esto se logra con el uso adecuado de algunos teoremas que daremos a continuación como propiedades de los límites.

Primeramente, comentaremos dos límites especiales.

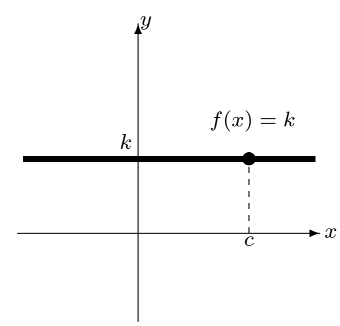


Figura 2.25. $f(x) = k$ (constante)

Dos límites especiales

El límite de una función constante

De la gráfica 2.25 podemos ver que para cualquier valor de c tenemos que

$$\boxed{\lim_{x\to c} k = k}$$

Ejemplo 7. a) $\lim\limits_{x \to 5} 2 = 2$

b) $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{2} = \sqrt{2}$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} 3,5 = 3,5$ $\triangle$

El límite de la función identidad

De la gráfica 2.26 podemos observar que para cualquier valor $x = c$ se tiene que

$$\boxed{\lim_{x \to c} x = c}$$

OPERACIONES CON FUNCIONES

Dadas dos funciones f y g, en la parte común de su dominio podemos definir:

- La *suma* de f y g como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- La *resta* de f menos g como $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.
- El *producto* de f y g como $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- El *cociente* de f sobre g como $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (si $g(x) \neq 0$).

También se define la **composición de funciones** del siguiente modo: suponga que A, B y C son subconjuntos de $\mathbb{R}$ y sean $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow C$, a partir de ellas se define una nueva función que se llama la **función composición** que va de A a C, se denota por $g \circ f$ y es tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Esto significa que para encontrar la imagen de x bajo $g \circ f$, primero se calcula la imagen de x bajo f y luego la imagen de $f(x)$ bajo g.

Por ejemplo, si $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x^2$ entonces $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+2) = (x+2)^2$. También se puede calcular $(f \circ g)(x)$: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 2$.

Observe que ambos resultados difieren; debe tenerse mucho cuidado al calcular composiciones de funciones para no invertir el orden en que se aplican.

Recuadro 2.2: **Operaciones con funciones**

Ejemplo 8. a) $\lim_{x\to 5} x = 5$

b) $\lim_{x\to -3} x = -3$

c) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} x = \frac{1}{2}$ △

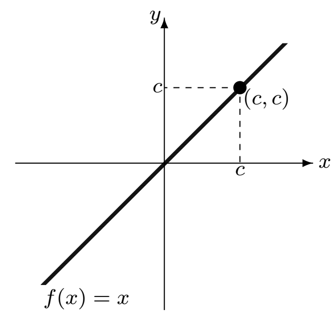


Figura 2.26. $f(x) = x$ (identidad)

Propiedades de los límites

Los límites especiales comentados anteriormente junto con las propiedades generales de los límites que vamos a dar aquí, nos permitirán calcular una gran cantidad de límites sin recurrir a tablas o a gráficas.

Teorema 2.1. Operaciones con límites

Suponga que f y g son funciones tales que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} g(x) = M$ entonces se tienen las siguientes propiedades:

a) $\lim_{x\to c}\big[f(x) + g(x)\big] = L + M$. "El límite de una suma de funciones es igual a la suma de los límites de las funciones (cuando éstos existen)"

b) $\lim_{x\to c}\big[f(x) - g(x)\big] = L - M$. "El límite de una resta de funciones es la resta de los límites de esas funciones (cuando éstos existen)"

c) $\lim_{x\to c}\big[f(x)g(x)\big] = L \cdot M$. "El límite de un producto de funciones es el producto de los límites de esas funciones (cuando éstos existen)"

d) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, siempre que $M \neq 0$. "El límite de un cociente de funciones es el cociente de los límites de esas funciones (cuando éstos existen y el límite en el denominador es diferente de 0)"

e) Si n es un número entero entonces $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = L^n$. Cuando n es negativo se debe tener que $L \neq 0$. "El límite de una potencia de una función es la potencia del límite de esa función (cuando éste existe y en caso de que el exponente sea negativo $L \neq 0$)"

f) Si n es un número natural entonces $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$. En caso de que n sea par debemos tener $L \geq 0$. "El límite de la raíz n–ésima de una función es la raíz n–ésima del límite de la función (cuando éste existe y cuando n es par si es mayor o igual que 0)"

A continuación se da una serie de ejemplos que ilustran las propiedades indicadas. En todos los casos los cálculos están basados en los límites de la función constante y de la función identidad ya dados.

Aplicaciones de las propiedades de los límites

Ejemplo 9.

a) $\lim\limits_{x\to 3}(x+15) = \lim\limits_{x\to 3} x + \lim\limits_{x\to 3} 15 = 3 + 15 = 18$

b) $\lim\limits_{x\to 3}(x-15) = \lim\limits_{x\to 3} x - \lim\limits_{x\to 3} 15 = 3 - 15 = -12$

c) $\lim\limits_{x\to 5} 4x = \lim\limits_{x\to 5} 4 \cdot \lim\limits_{x\to 5} x = 4 \cdot 5 = 20$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+15}{x-15} = \dfrac{\lim_{x\to 3}(x+15)}{\lim_{x\to 3}(x-15)} = \dfrac{18}{-12} = \dfrac{-3}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = \left[\lim\limits_{x\to 2} x\right]^3 = 2^3 = 8$

f) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 4} x} = \sqrt{4} = 2$

. △

Ejemplo 10.

Calcular $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+3)$.

Solución: Tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}(x^2+2x+3) &= \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 2x + \lim_{x\to 2} 3 \\
&= \left[\lim_{x\to 2} x\right]^2 + \lim_{x\to 2} 2 \cdot \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 3 \\
&= 2^2 + 2 \cdot 2 + 3 \\
&= 4 + 4 + 3 \\
&= 11
\end{aligned}$$

. △

Ejemplo 11.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} \frac{x^2+1}{x+2} &= \frac{[\lim_{x\to 3} x]^2 + \lim_{x\to 3} 1}{\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 2} \\
&= \frac{3^2+1}{3+2} \\
&= \frac{10}{5} = 2
\end{aligned}$$

. △

Ejemplo 12.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt[3]{x^2+2}+1} &= \frac{\lim_{x\to 5}(\sqrt{x+4}-1)}{\lim_{x\to 5}(\sqrt[3]{x^2+2}+1)}\\
&= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 5}x+\lim_{x\to 5}4}-1}{\sqrt[3]{\lim_{x\to 5}x^2+\lim_{x\to 5}2}+1}\\
&= \frac{\sqrt{5+4}-1}{\sqrt[3]{25+2}+1}\\
&= \frac{\sqrt{9}-1}{\sqrt[3]{27}+1}=\frac{3-1}{3+1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

. △

Si usted observa detenidamente estos últimos cuatro ejemplos se dará cuenta que basta evaluar la función en el valor hacia el que tiende x. Esto es cierto en muchos casos, como sucede en los siguientes:

Ejemplo 13.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x+2}=\frac{2^2+1}{2+2}=\frac{5}{4}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x-4}{x+5}=\frac{3-4}{3+5}=\frac{-1}{8}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{5+x}+1}{x^2-3}=\frac{\sqrt{5+(-2)}+1}{(-2)^2-3}=\frac{\sqrt{3}+1}{4-3}=\sqrt{3}+1$

. △

Pero la evaluación directa no siempre funciona. Consideremos nuevamente

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{x-2}.$$

Si intentamos evaluar en 2 obtenemos

$$\frac{2^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}$$

y esta es una expresión indefinida.

Límites determinados o indeterminados

Decimos que el límite es **determinado** si al evaluar la función en el valor hacia el que x tiende se obtiene el valor del límite. En caso contrario se dice que es **indeterminado**. Existen varias formas indeterminadas; la que acabamos de ver se llama la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Cuando al intentar calcular un límite se obtiene una forma indeterminada debemos echar mano de otros aspectos de la función para encontrar el límite propuesto.

Volvamos a

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}.$$

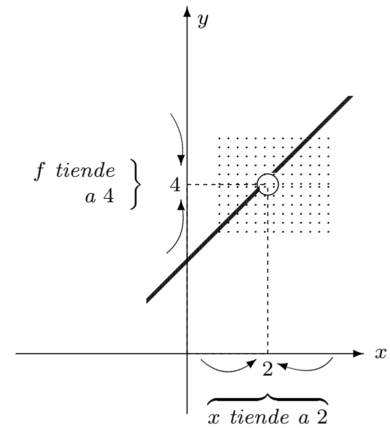


Figura 2.27. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

Lo que sucede aquí es que

$$\lim_{x\to 2}(x-2) = 0$$

y entonces la propiedad del límite de un cociente no se puede aplicar porque el límite del denominador es igual a 0. Sin embargo, en el ejemplo 3 habíamos dicho, mediante el uso de una tabla, que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$$

¿Será que la tabla nos engañó o habrá una manera de verificar que este valor es correcto?

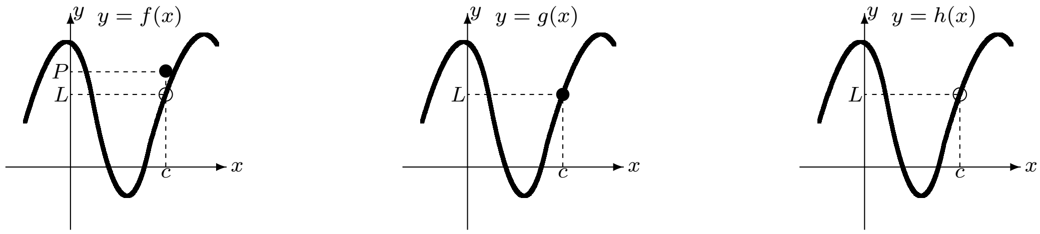
La respuesta a esta pregunta está fundamentada en la siguiente propiedad

Teorema 2.2. Dos límites coinciden si ...

Si f y g son dos funciones definidas en un intervalo abierto que contiene a c y si $f(x) = g(x)$ para todo x del intervalo con $x \neq c$ entonces

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x).$$

En otras palabras, lo que está diciendo el teorema es que *no importa lo que pase en* c, si las funciones coinciden para valores cercanos a c los límites indicados son iguales. En el siguiente dibujo se dan tres funciones que coinciden excepto en c. Se ve en ellas que los límites cuando $x \to c$ tienen que ser iguales.



$f(c) = P,$ $\quad$ $g(c) = L,$ $\quad$ $h(c)$ no existe,

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to c} h(x) = L$

Figura 2.28. f, g y h difieren en c pero tienen el mismo límite en c

FACTORIZACIÓN Y SIMPLIFICACIÓN

Factorizar es expresar un polinomio como producto de otros polinomios.

Por ejemplo, si usted realiza el producto $(x-2)(x+3)$ obtiene como resultado x^2+x-6, en otras palabras: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ de manera que $(x-2)(x+3)$ es una factorización de x^2+x-6, se dice que $(x-2)$ y $(x+3)$ son factores de x^2+x-6.

Simplificar un cociente de polinomios consiste en factorizar el numerador y el denominador y "tachar" los factores que sean idénticos "arriba" y "abajo" en la fracción.
Por ejemplo, $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ y $x^2-4=(x-2)(x+2)$, entonces

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x+3}{x+2}$$

La última fracción es simplificación de la primera (se tachó el factor en común $x-2$).
Existen muchos métodos de factorizar polinomios; un repaso de ellos puede serle muy útil en el cálculo de lmites.

Las siguientes fórmulas de factorización le pueden ayudar.

$$\begin{array}{ll}
x^2+2xy+y^2=(x+y)(x+y) & x^2-2xy+y^2=(x-y)(x-y) \\
x^2-y^2=(x+y)(x-y) & x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2) \\
x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2) & x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)
\end{array}$$

Recuadro 2.3: **Factorización**

Lo que todo esto significa es: si se logra transformar adecuadamente la función dada en otra que sea equivalente a ella (salvo en el valor c

dado) y si la función nueva tiene un límite determinado, entonces: éste es también el límite de la función original.

Regresando una vez más a

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2},$$

sabemos que

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

siempre que $x \neq 2$.

De esta manera, según el teorema:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4$$

tal como lo indicaba la tabla.

Cálculo de límites: *métodos*

A partir del ejemplo anterior vemos que con el objeto de realizar estas transformaciones se utiliza los conocimientos del álgebra básica tales como operaciones con fracciones racionales, factorización de polinomios, racionalización y simplificación de expresiones algebraicas en general.

Límites indeterminados.
Evaluar primero

A continuación se presenta varios ejemplos que ilustran estos procedimientos. En todos los casos se trata de límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$. Cuando esté calculando límites haga siempre en primer lugar la evaluación porque si el límite no es indeterminado no es necesario realizar las transformaciones por más “extraña” que sea la función.

Primer método: *factorizar y simplificar*

Ejemplo 14.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-x-6} &= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x+2}\\ &= \frac{3+3}{3+2} = \frac{6}{5}\end{aligned}$$

. △

Ejemplo 15.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

. △

Ejemplo 16.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-3x+2}{x^2-5x+6} =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+x-1)}{(x-3)(x-2)} =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-1}{x-3} = \frac{5}{-1} = -5$$

. △

RACIONALIZACIÓN

En una fracción algebraica que contenga radicales, **racionalizar** es eliminar el radical del denominador o del numerador. Normalmente el radical no desaparece del todo de la expresión sino que “cambia de lugar”.

Ejemplo: Racionalizar el denominador en

$$\frac{x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}.$$

Se trata de que el denominador no contenga races. El método es multiplicar el numerador y el denominador por una expresión que permita que en el denominador no queden las races. Es de gran ayuda recordar las fórmulas de factorización (vea el recuadro sobre ese tema). En este caso, con el fin de utilizar la fórmula de diferencia de cuadrados procedemos as:

$$\frac{x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = \frac{x(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}$$

$$= \frac{x(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{x(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{x+2-x} = \frac{x(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{2}$$

De modo parecido se procede si hay que racionalizar el numerador, pero en ese caso eliminando las races del numerador.

Recuadro 2.4: **Racionalización**

Segundo método: *racionalizar y simplificar*

Ejemplo 17.

Calcular $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

Solución: En los casos anteriores utilizamos factorización y simplificación para obtener una nueva función. Aquí lo más conveniente es racionalizar el denominador; para ello multiplicamos tanto el numerador como el denominador de la fracción por $\sqrt{x}+2$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} &= \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}\\
&= \frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

. △

Ejemplo 18.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{6+x}-x}{3-x} &= \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{6+x}-x)(\sqrt{6+x}+x)}{(3-x)(\sqrt{6+x}+x)}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{6+x-x^2}{(3-x)(\sqrt{6+x}+x)}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{(3-x)(2+x)}{(3-x)(\sqrt{6+x}+x)}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{2+x}{\sqrt{6+x}+x}\\
&= \frac{2+3}{\sqrt{6+3}+3}=\frac{5}{6}
\end{aligned}$$

. △

Ejemplo 19.

Calcular $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$

Solución: Aquí racionalizamos el denominador:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1} &= \lim_{x\to -1} \frac{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{x+5-4}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{1}{\sqrt{x+5}+2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-1+5}+2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

. $\triangle$

Tercer método: *combinación de los anteriores*

Ejemplo 20.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{\sqrt{6+x}-2} &= \lim_{x\to -2} \frac{(x^2+x-2)(\sqrt{6+x}+2)}{(\sqrt{6+x}-2)(\sqrt{6+x}+2)} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{(x^2+x-2)(\sqrt{6+x}+2)}{6+x-4} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{(x^2+x-2)(\sqrt{6+x}+2)}{x+2} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{6+x}+2)}{x+2} \\
&= \lim_{x\to -2} (x-1)(\sqrt{6+x}+2) \\
&= -12
\end{aligned}$$

. $\triangle$

Ejemplo 21.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(x-1)(x+1)(1+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(x-1)(x+1)(1+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)(1+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{-1}{(x+1)(1+\sqrt{x})}\\
. &= -\tfrac{1}{4}
\end{aligned}
$$

△

Ejemplo 22.

Calcular $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{2x+7}-1}$

Solución: En este caso procedemos por "doble racionalización", del siguiente modo:

Doble racionalización

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{2x+7}-1} &= \lim_{x\to -3}\frac{(\sqrt{x+4}-1)(\sqrt{x+4}+1)(\sqrt{2x+7}+1)}{(\sqrt{2x+7}-1)(\sqrt{2x+7}+1)(\sqrt{x+4}+1)}\\
&= \lim_{x\to -3}\frac{(x+4-1)(\sqrt{2x+7}+1)}{(2x+7-1)(\sqrt{x+4}+1)}\\
&= \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(\sqrt{2x+7}+1)}{(2x+6)(\sqrt{x+4}+1)}\\
&= \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(\sqrt{2x+7}+1)}{2(x+3)(\sqrt{x+4}+1)}\\
&= \lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{2x+7}+1}{2(\sqrt{x+4}+1)}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

△

Ejemplo 23.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}}{x}$

Solución: Transformamos la función utilizando las operaciones con expresiones algebraicas.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x-(x+2)}{x(x+2)}}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{x(x+2)}}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x(x+2)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2}{x+2}\\
&= -1
\end{aligned}$$

$\triangle$

Ejemplo 24.

Calcular $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

Solución: Observe que en este caso aparecen dos variables: x y h. Para efectos del cálculo del límite es h la que hacemos variar hacia 0 (pues dice $h\to 0$), la x se trata como si fuera constante. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

$\triangle$

2.4 COORDENADAS Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Aquí se esboza brevemente el desarrollo histórico de la Geometría Analítica y se proporciona alguna información referente a René Descartes.

Pareciera lo más natural el realizar la representación de curvas o funciones en coordenadas rectangulares. Sin embargo, la humanidad tuvo que atravesar un largo trayecto para esta construcción matemática que sería decisiva en el desarrollo del Cálculo y las matemáticas modernas.

En la Antigíedad

En la Grecia Antigua, por diversas razones, la aritmética y el álgebra se vieron subordinadas a la geometría. Los números y las relaciones numéricas se estudiaban a partir de sus representaciones geométricas (como por ejemplo, segmentos, áreas o volúmenes), y las construcciones con regla y compás eran centrales. Por ejemplo, hoy en día nosotros expresamos la relación algebraica (distributividad):

Representación geométrica en Euclides

$$a(b+c+d) = ab + ac + ad.$$

En la Antigíedad, el famoso matemático Euclides, en su libro *Los Elementos* (Libro II), escribió el equivalente de esa expresión algebraica en términos geométricos:

> "Si tenemos dos líneas rectas y cortamos una de ellas en un número cualquiera de segmentos, entonces el retángulo contenido por las dos líneas rectas es igual a los rectángulos contenidos por la línea recta que no fue cortada y cada uno de los segmentos anteriores."

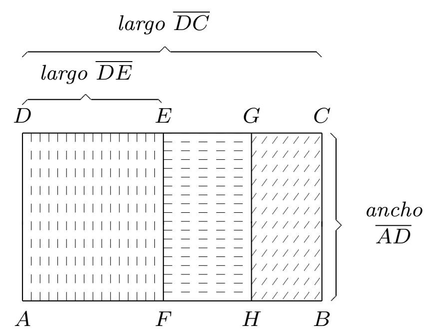


Figura 2.29.

Este teorema quería decir que:

$$\overline{AD}(\overline{DE}+\overline{EG}+\overline{GC}) = \overline{AD}\cdot\overline{DE}+\overline{AD}\cdot\overline{EG}+\overline{AD}\cdot\overline{GC}$$

Con la caída definitiva de las civilizaciones griega y romana, siglo V d. C., lo que hoy conocemos como Europa (salvo Italia y Grecia), se convirtió en una colección de pueblos aislados y de poco nivel cultural y educativo, bajo la influencia central de la Iglesia Católica. Una buena parte de los textos griegos fueron rescatados, preservados, traducidos y ampliados por los musulmanes (después del siglo VII d. C.). La mayoría de estos textos serían conocidos por lo europeos hasta después del siglo XII d. C., y esto contituyó un factor importante del Renacimiento (siglos XV y XVI) y, también, de la Revolución Científica que se daría en el siglo XVII.

Los textos griegos en el Renacimiento

En el nuevo momento histórico

Nuevos avances significativos en las ciencias y las matemáticas después de los griegos tuvieron que esperar más de 15 siglos.

Aunque hubo predecesores importantes como, por ejemplo, Nicole Oresme (*circa* 1323–1382) y Franíois Viíte (1540–1603), el resultado decisivo para "liberar" a la aritmética y el álgebra de su subordinación a la geometría, fue construido por los franceses René Descartes (1596–1650) y Pierre de Fermat (1601–1665) (independientemente). Se trataba de la

Descartes y Fermat: la construcción de la geometría analítica representación de curvas geométricas en sistemas de coordenadas y, lo más importante, el tratamiento del álgebra y la aritmética sin tanta limitación con relación a la representación geométrica antigua. Si las curvas de esta manera podían describirse con ecuaciones algebraicas, también nuevas ecuaciones algebraicas permitían definir nuevas curvas que los griegos antiguos no podían conocer (pues estaban "amarrados" a las contrucciones geométricas con regla y compás). A los nuevos métodos se les llamaría Geometría Analítica.

La nueva geometría permitió considerar un sinnúmero de nuevos problemas matemáticos y físicos y, de la misma manera, ponía en evidencia que el álgebra y la aritmética constituían campos teóricos independientes de la geometría. Podría decirse que los siguientes siglos de la historia de las matemáticas verían un cambio de énfasis de la geometría hacia el álgebra.

Descartes y Fermat

Debe señalarse que la construcción de la geometría analítica fue completamente imprescindible para la creación del Cálculo Diferencial e Integral. Cabe mencionar algunos detalles interesantes:

• Por un lado, que el uso más sistemático de las coordenadas rectangulares "cartesianas" fue realizado más bien por Fermat que por Descartes (quien usó en general coordenadas oblicuas).

• En segundo lugar, la obra de Descartes en la que aparece la geometría analítica fue publicada en 1637 como un apéndice del famoso libro *El discurso del Método* e intitulado: *La Géométrie*. La obra de Fermat sería publicada hasta 1679 (póstumamente en la obra *Varia opera mathematica*). Sin embargo se ha demostrado que Fermat había descubierto el nuevo método antes que apareciera *La Géométrie* de Descartes.

Un fundamento del Cálculo

• En tercer lugar: los nuevos métodos algebraicos, tanto para Descartes como para Fermat se enfocaron hacia la solución de problemas geométricos. Sin embargo, Descartes tenía mejor comprensión que Fermat en cuanto a que se trataba de una metodología radicalmente nueva que rompía con la tradición antigua.

La geometría analítica fue necesaria para la creación del Cálculo, pero, también, se entendió mejor la importancia de la geometría analítica cuando el Cálculo se desarrolló.

Descartes y las matemáticas

René Descartes al igual que matemático fue un gran filósofo, físico, y también soldado. Fue abanderado del mecanicismo (la realidad se describe con las leyes de la mecánica) y trató de dar un nuevo método para obtener conocimiento verdadero basado en las matemáticas y sus métodos. El siguiente párrafo fue escrito por él:

La matemática universal

> "...Todas las ciencias que tienen como finalidad investigaciones acerca del orden y la medida están relacionadas con

> las matemáticas. Es de poca trascendencia si esta medida se mira en números, formas, estrellas, sonidos, o en cualquier otro objeto. En acuerdo con eso, debe existir una ciencia general que debe explicar todo lo que puede ser conocido acerca del orden y la medida, considerados independientemente de cualquier aplicación a un sujeto particular, y eso, de hecho, esta ciencia tiene su propio nombre, consagrado por un largo uso, ... las matemáticas. Y una prueba que sobrepasa en facilidad e importancia las ciencias que dependen de ella es que integra al mismo tiempo todos los objetos a los cuales éstas se dedican y a muchas otras más a la par..."

¿Podría usted señalar cuáles son las ideas principales del párrafo anterior?

René Descartes

2.5 EJERCICIOS DEL *CAPITULO 2*

Interpretación gráfica

1. ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan funciones?

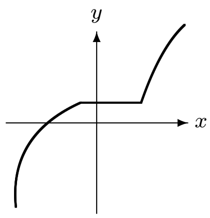
(a) 

Figura 2.30.

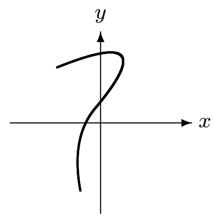
(b) 

Figura 2.31.

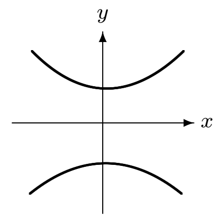
(c) 

Figura 2.32.

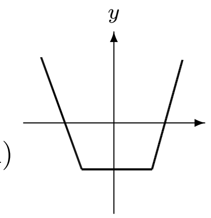
(d) 

Figura 2.33.

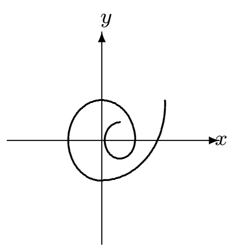
(e) 

Figura 2.34.

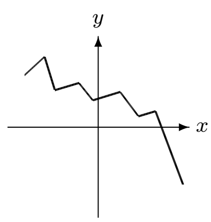
(f) 

Figura 2.35.

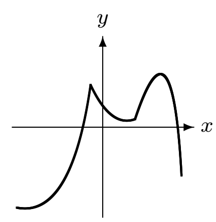
(g) 

Figura 2.36.

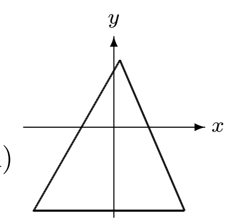
(h) 

Figura 2.37.

2. Las siguientes gráficas representan parábolas $f(x) = ax^2 + bx + c$. En cada caso indique si el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ es positivo, negativo o cero.

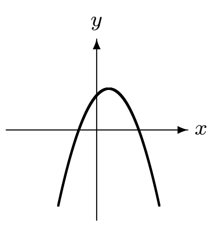
(a) 

Figura 2.38.

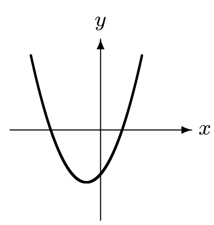
(b) 

Figura 2.39.

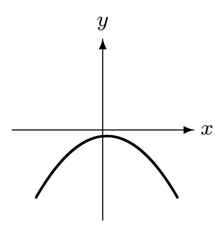
(c) 

Figura 2.40.

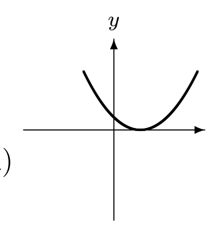
(d) 

Figura 2.41.

3. Dibuje la gráfica de una función que contenga los siguientes puntos $(0,4)$, $(2,0)$, $(-2,1)$ y $(3,-2)$.

4. La figura 2.42 representa la gráfica de una función f, determine $f(0)$, $f(3)$, $f(-3)$, la imagen de -5 y la imagen de 1.

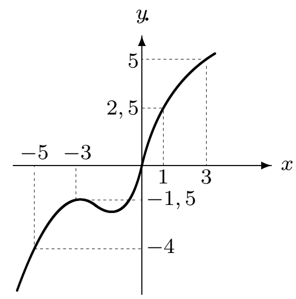


Figura 2.42.

Las gráficas en los ejercicios 5 a 9 representan funciones. En cada caso proporcione la siguiente información:

1. *Dominio y ámbito de la función.*
2. *Los puntos de intersección con los ejes.*
3. *Los intervalos donde la función es creciente y los intervalos donde es decreciente.*

5.

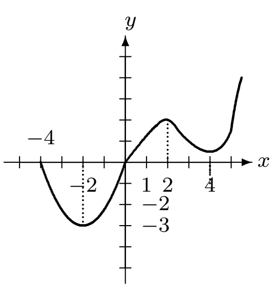


Figura 2.43.

6.

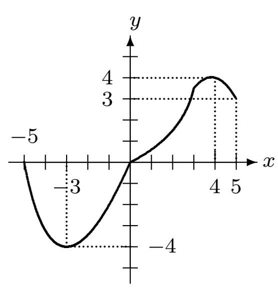


Figura 2.44.

7.

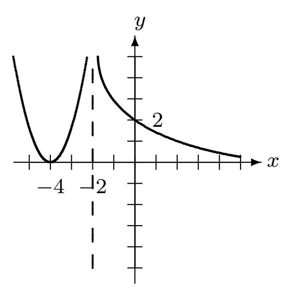


Figura 2.45.

8.

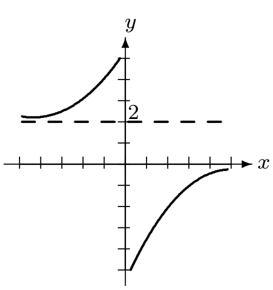


Figura 2.46.

9.

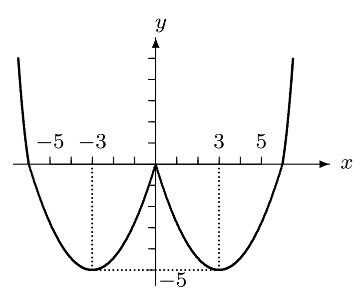


Figura 2.47.

Falso o verdadero

En los ejercicios 10 a 16 diga si la afirmación dada es falsa o verdadera (explique).

10. Si f es una función tal que $\lim_{x\to 3} f(x) = 7$ entonces podemos asegurar que $f(3) = 7$.

11. Si $f(5)$ no está definido entonces $\lim_{x\to 5} f(x)$ no existe.

12. Para cualquier función polinomial p se tiene que $\lim_{x\to 4} p(x) = p(4)$.

13. Si f y g son funciones tales que $\lim_{x\to c}[f(x) + g(x)]$ existe entonces podemos asegurar que $\lim_{x\to c} f(x)$ y $\lim_{x\to c} g(x)$ existen.

14. Si $\lim_{x\to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3}{5}$, entonces podemos asegurar que $\lim_{x\to -1} g(x) \neq 0$.

15. Si $\lim_{x\to c} f(x) \neq 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$ entonces $\lim_{x\to c}[f(x)g(x)]$ existe y es diferente de 0.

16. Si $\lim_{x\to 8} f(x) = \lim_{x\to 8} g(x)$ entonces podemos asegurar que $f(8) = g(8)$.

17. Sea f una función tal que $\lim_{x\to 3} f(x) = 8$. Con base en esto diga cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas (¿por qué?).

(a) Necesariamente $f(3) = 8$.

(b) Para valores de x "suficientemente próximos" a 3, los valores de $f(x)$ son suficientemente próximos a 8.

(c) Necesariamente existe un valor c muy cercano a 3 tal que $f(c) = 8$.

(d) Necesariamente, a partir de un cierto valor de x cercano a 3 los valores de $f(x)$ son iguales a 8.

18. La figura 2.48 representa la gráfica de una función f. Para cada una de las siguientes afirmaciones diga si es *falsa* o *verdadera* (explique).

1. $f(0) = 2$
2. $f(-2) \leq f(x)$ para todo x en el dominio de la función.
3. $f(2) > f(\frac{1}{2})$
4. Si $b < a < -2$ entonces $f(a) > f(b)$.
5. Existe c tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo x en el dominio de f.

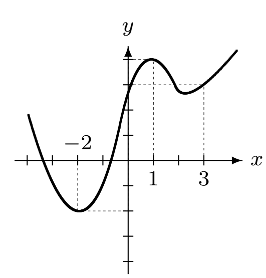


Figura 2.48.

Selección única

En los ejercicios 19 a 27 escoja la opción que conteste o complete correctamente el enunciado propuesto.

19. Si $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 0$ entonces podemos asegurar que

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ no existe. (b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 2$

(c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ no existe. (d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$

20. Si $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 3$ entonces $\lim\limits_{x\to -2}(f^2(x) - x^2)$ es igual a

(a) 13 (b) 5 (c) 8 (d) 0

21. El valor de $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x| - x}{x - 1}$ es

(a) 2 (b) 1 (c) -1 (d) 0

22. El límite $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3}$ es igual a

(a) 0 (b) 1/3 (c) $-1/9$ (d) No existe

23. El límite $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{|x + 1|}{x + 1}$ es igual a

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) No existe

24. El límite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{|x - 1|}$ es igual a

(a) 3 (b) -3 (c) 2 (d) No existe

25. El límite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^2 + 2xh + h^2}{x + h}$ es igual a

(a) x (b) h (c) 0 (d) No existe

26. Una función cuyo límite no existe cuando $x \to 2$ es la siguiente:

(a) $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$

(b) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$

(c) $f(x) = \frac{2x}{x+2}$

(d) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+4}$

27. Para cierta función f se obtuvieron las siguientes tablas de valores:

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

x	0,8	0,88	0,888	...	0,8...8	1,0...02	...	1,002	1,02	1,2
$f(x)$	3	3	3	...	3	3	...	3	3	3

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

x	0,9	0,99	0,999	...	0,9...9	1,0...01	...	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	2	2	2	...	2	2	...	2	2	2

De acuerdo con esto, sobre $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ podemos decir que

(a) es igual a 2 (b) es igual a 3

(c) es igual a algún número en el intervalo $]2, 3[$ (d) no existe

Problemas y preguntas de desarrollo

28. La figura 2.49 representa la gráfica de una función f. Con base en ella dé el valor de cada límite o establezca que el límite no existe.

(a) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

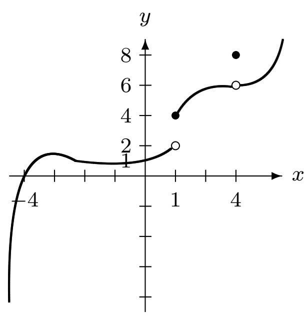


Figura 2.49.

29. La figura 2.50 representa la gráfica de una función g. Con base en ella dé el valor de cada límite o establezca que el límite no existe.

(a) $\lim\limits_{x\to -8} g(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to -6} g(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$

(e) $\lim\limits_{x\to 8} g(x)$

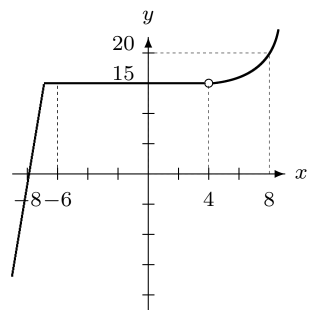


Figura 2.50.

30. La figura 2.51 representa la gráfica de una función h. En cada caso determine el valor de cada límite o establezca que el límite no existe.

(a) $\lim\limits_{x\to -3} h(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$

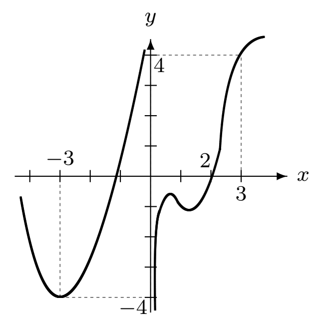


Figura 2.51.

31. Considere la función $f(x) = \dfrac{3^x - 1}{x}$. Utilice una calculadora para completar la siguiente tabla:

x	0.1	0.01	0.001	-0.001	-0.01	-0.1
$f(x)$						

De acuerdo con los resultados obtenidos, ¿es posible que exista $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 1}{x}$?

32. Completando una tabla como la del ejemplo anterior estime el valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 1}{2^x - 1}$ en caso de que exista. ¿Puede dar un valor exacto o solamente una aproximación?

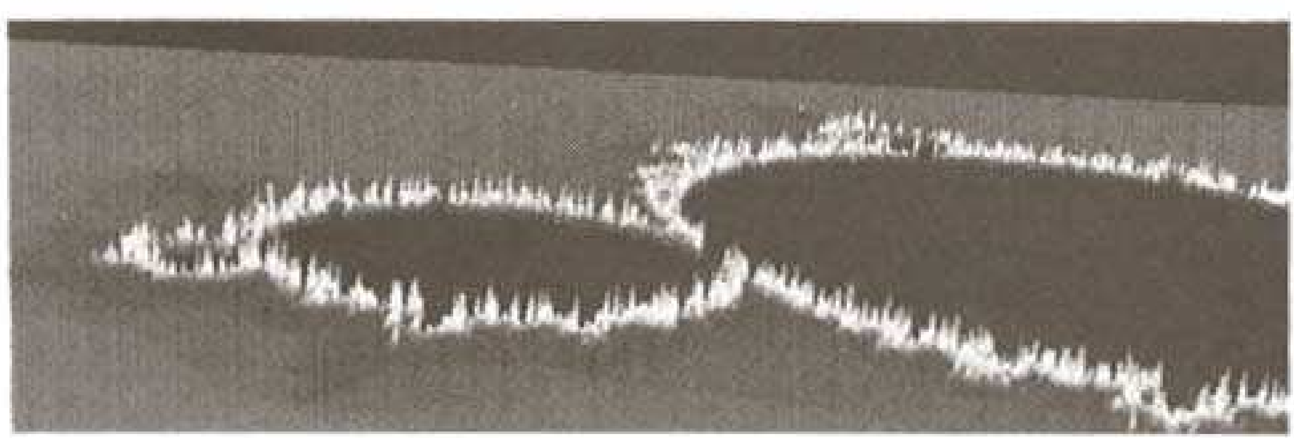


Imagen construida utilizando un fractal

En los ejercicios 33 a 36 calcule el límite indicado utilizando el teorema 2.1 y los límites de la función identidad y la función constante, justifique cada paso.

33. $\lim\limits_{x\to 2}(3x+4)$

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-1}{x^2+2}$

35. $\lim\limits_{s\to -1}\sqrt{s^2-s+2}$

36. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(x^3+x+4)$

En los ejercicios 37 a 39 encuentre los límites que se piden suponiendo que

$$\lim_{x\to c} f(x)=4 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} g(x)=-2$$

37. $\lim\limits_{x\to c}\big(3f(x)+4g(x)\big)$

38. $\lim\limits_{x\to c}\sqrt{2f(x)+g^2(x)}$

39. $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{2g(x)+f(x)}{f(x)-g(x)}$

En los ejercicios 40 a 62 calcule el límite que se pide o determine que no existe.

40. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{x-7}$

41. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$

42. $\lim\limits_{t\to -3}\dfrac{t^3+27}{t+3}$

43. $\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{t^2+2t-24}{t-4}$

44. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$

45. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x+1}{x^2+3x-4}$

46. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x+10}{25-x^2}$

47. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

48. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{x-2}$

49. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

50. $\lim\limits_{s\to 9}\dfrac{s-9}{\sqrt{s}-3}$

51. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

52. $\lim\limits_{s\to 2}\dfrac{2s-4}{\sqrt{s+2}-2}$

53. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$

54. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

55. $\lim\limits_{r\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+r}}{1-\sqrt{5-r}}$

56. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-2}{\sqrt{7+x}-3}$

57. $\lim\limits_{y\to 2}\dfrac{\frac{1}{y}-\frac{1}{2}}{y-2}$

58. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{h-1}}{h}$

59. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

60. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+2h}-\sqrt{2x}}{h}$

61. $\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{t}+1}{t+1}$

62. $\lim\limits_{t\to x}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{t-x}$

63. Dada $f(x)=\sqrt{x+3}$ calcule $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

64. Dada $g(x)=x^2+3x$ calcule $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$

65. Dada $h(x)=\frac{1}{x^2}$ calcule $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{h(x)-h(3)}{x-3}$

66. Bosqueje la gráfica de la función f definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si } x<2 \\ x-2 & \text{si } 2<x<3 \\ 10-x^2 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$$

y luego encuentre los siguientes límites o establezca que no existen:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

67. Dibuje la gráfica de una función f que satisfaga simultáneamente todas las condiciones siguientes:

(a) Su dominio sea $[-2,2]-\{1\}$ (b) $f(-2)=0$, $f(2)=3$, $f(-1)=-1$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ (d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

68. Dibuje la gráfica de una función g que satisfaga simultáneamente todas las condiciones siguientes:

(a) Su dominio sea $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$ (b) Creciente en todo su dominio

(c) $\lim_{x \to -2} f(x)$ no existe (d) $\lim_{x \to 3} f(x)$ no existe

69. Escriba un ejemplo de dos funciones f y g tales que $\lim_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$ existe y sin embargo $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe o $\lim_{x \to 2} g(x)$ no existe.

70. Suponga que f y g son funciones tales que $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = 1$. Explique por qué, bajo esa condiciones, se puede concluir que $\lim_{x \to c} g(x)$ no existe.

71. Considere la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Suponga que se mantienen constantes los coeficientes b y c (siendo $b > 0$). Si hacemos que el coeficiente a se aproxime a 0, ¿qué sucederá con las raíces de la ecuación?

72. Se tiene una función g tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$:

a) Determine una función f tal que $\lim_{x \to 0} [g(x) \cdot f(x)] = 1$.

b) Determine una función h tal que $\lim_{x \to 0} [g(x) \cdot h(x)] = -3$.

c) Determine una función p tal que $\lim_{x \to 0} [g(x) \cdot p(x)]$ no exista.

73. Se define una función f del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es número entero} \\ 2 & \text{si } x \text{ no es número entero} \end{cases}$$

a) Dibuje la gráfica de f.

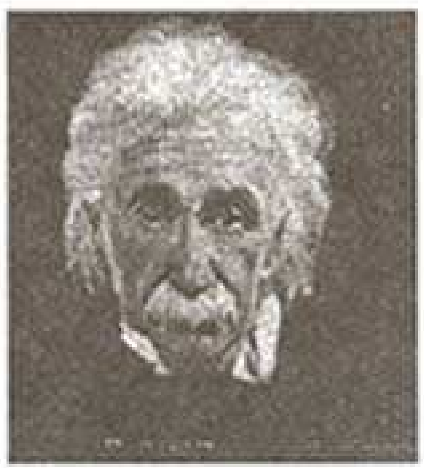
b) ¿Existe $\lim_{x \to 2} f(x)$?

c) ¿Existe $\lim_{x \to 3/2} f(x)$?

d) ¿Para que valores de c existe $\lim_{x \to c} f(x)$?, ¿cuál es el valor del límite en los casos en que existe?

CAPÍTULO 3

LÍMITES LATERALES Y CONTINUIDAD



¿Cómo es posible que las matemáticas, un producto del pensamiento humano que es independiente de la experiencia, se ajuste tan excelentemente a los objetos de la realidad física? ¿Puede la razón humana sin la experiencia descubrir a través del puro pensamiento propiedades de las cosas reales?

Mientras las proposiciones de las matemáticas se refieren a la realidad, no son seguras; y si son seguras, no se refieren a la realidad.

Albert Einstein

En este capítulo vamos a estudiar el concepto de *continuidad*, uno de los centrales en el análisis de las funciones. Vamos a comenzar entonces con los límites laterales.

Estudiamos en esta sección los conceptos de límite por la derecha y límite por la izquierda y su relación con el concepto de límite.

3.1 LOS LÍMITES LATERALES

En el *Capítulo 1* estudiamos

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}.$$

En esa ocasión, mediante una tabla vimos que el límite no existe, pues si tomamos valores de x cada vez más próximos a 0 pero mayores que 0 se obtiene como resultado 1, mientras que si lo hacemos por la izquierda se obtiene como resultado -1. Sin embargo, podemos hablar de una manera más *restringida* de *límite por la izquierda* y *límite por la derecha*.

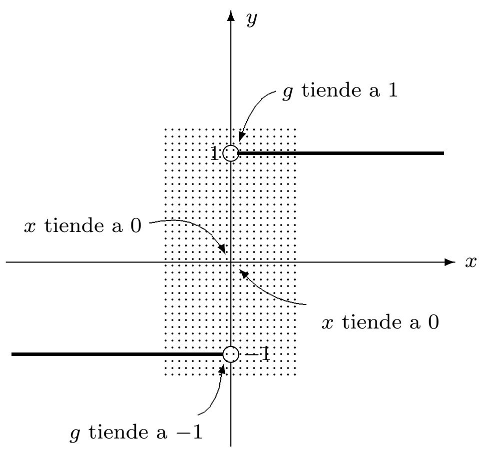


Figura 3.1. $g(x) = \frac{|x|}{x}$

En el caso que nos ocupa decimos que el límite por la derecha es 1 y que el límite por la izquierda es -1.

Definición 3.1. Límites laterales

Decimos que el **límite por la derecha** de $f(x)$ cuando x tiende a c es L, si a medida que tomamos valores de x, cada vez más próximos a c, pero mayores que c, entonces $f(x)$ se aproxima a L. Simbólicamente

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Decimos que el **límite por la izquierda** de $f(x)$ cuando x tiende a c es M, si a medida que tomamos valores de x, cada vez más próximos a c, pero menores que c, entonces $f(x)$ se aproxima a M. Simbólicamente

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = M$$

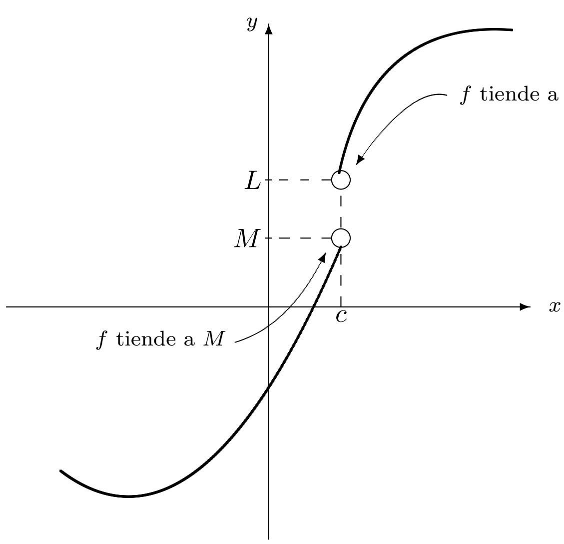


Figura 3.2. Límites laterales

Funciones definidas "por partes"

Ejemplo 25.

Considere una función definida "por partes" como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 4+x & \text{si} \quad x<1 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

El significado de esto es el siguiente: si queremos calcular la imagen de algún número menor que 1 usamos la primera fórmula. Por ejemplo,

$$f(0,5) = 4 + 0,5 = 4,5,$$

$$f(0) = 4 + 0 = 4,$$

$$f(-3) = 4 + (-3) = 1, \quad \text{etc.}$$

Mientras que si queremos determinar la imagen de 1 o de valores mayores que 1 entonces usamos la segunda fórmula; así, por ejemplo:

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2,$$

$$f(1,5) = (1,5)^2 + 1 = 2,25 + 1 = 3,25,$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5, \quad \text{etc.}$$

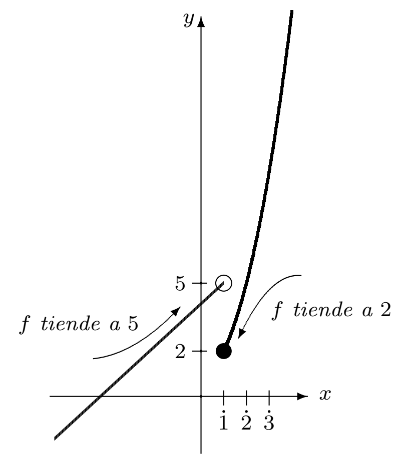


Figura 3.3. $y = f(x)$

Queremos ver qué pasa cerca de 1.

Si tomamos valores de x por la izquierda de 1 usamos para las imágenes la forma $x + 4$ y, entonces, el límite por la izquierda de $f(x)$ cuando x tiende a 1 es

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x+4) = 5.$$

Calcular los límites separadamente

Mientras tanto, si tomamos valores de x por la derecha de 1 usamos la forma $x^2 + 1$. Por lo tanto

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+1) = 2.$$

$\triangle$

Observe en este ejemplo anterior que el límite de $f(x)$ cuando $x \to 1$ no existe (la figura 3.3 representa la gráfica de esa función).

En realidad, para que un límite exista debe existir tanto por la derecha como por la izquierda y ambos deben ser iguales.

En funciones definidas "por partes", como la anterior, si se quiere verificar la existencia del límite en el punto o puntos donde se parte, deben calcularse separadamente los dos límites laterales y corroborarse si son iguales o no.

Ejemplo 26.

Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si} \quad x < 2 \\ 4x + 2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Determinar si existe el $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Solución: Tenemos

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (3x - 2) = 4,$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (4x + 2) = 10.$$

Concluimos que $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe. $\triangle$

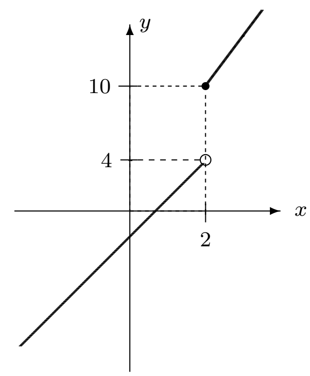


Figura 3.4. $y = f(x)$

Ejemplo 27.

Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} -x + 5 & \text{si} \quad x \leq -2 \\ x^2 + 3 & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}$$

Determinar si existe el $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$.

Solución: Tenemos

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (-x + 5) = 7,$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (x^2 + 3) = 7.$$

Concluimos que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 7$. $\triangle$

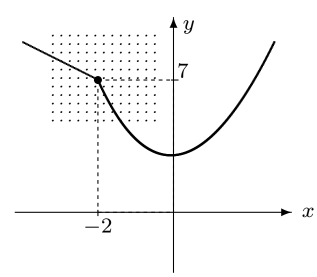


Figura 3.5. $y = g(x)$

> En esta sección se establece el concepto de continuidad en conexión con el concepto de límite. Se estudian propiedades de las funciones continuas.

3.2 CONTINUIDAD

Al final de la *Sección 2.2*, se hicieron algunas observaciones sobre las posibles relaciones entre la existencia de $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ y el valor $f(c)$.

Retomemos esas observaciones y veamos su significado gráfico.

1. En esta gráfica se tiene que:
   - $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ sí existe
   - $f(c)$ no existe

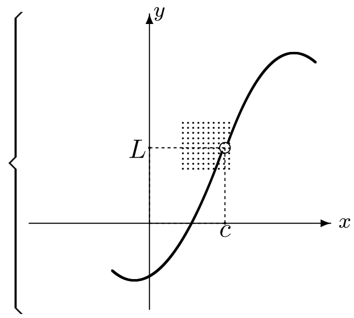


Figura 3.6.

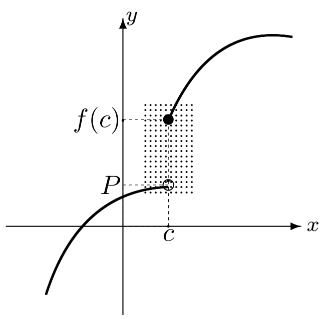


Figura 3.7.

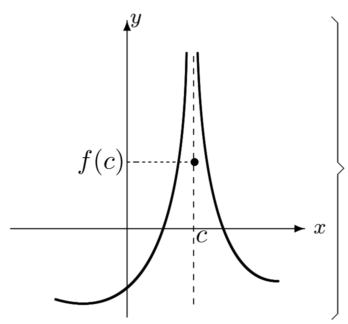


Figura 3.8.

2. En estas gráficas se tiene que:
   - $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ no existe
   - $f(c)$ sí existe

3. En esta gráfica se tiene que:
   - $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ sí existe
   - $f(c)$ sí existe, pero
   - $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq f(c)$

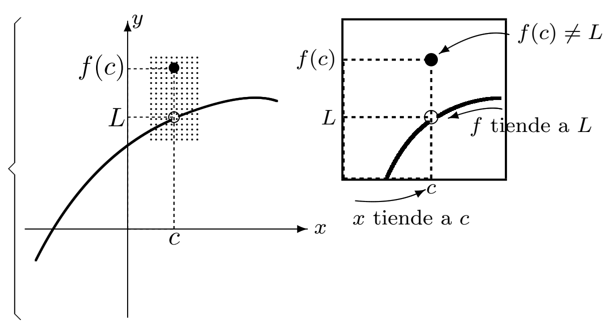


Figura 3.9.

4. En esta gráfica se tiene que:
   - $\lim_{x\to c} f(x)$ sí existe
   - $f(c)$ sí existe y además
   - $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

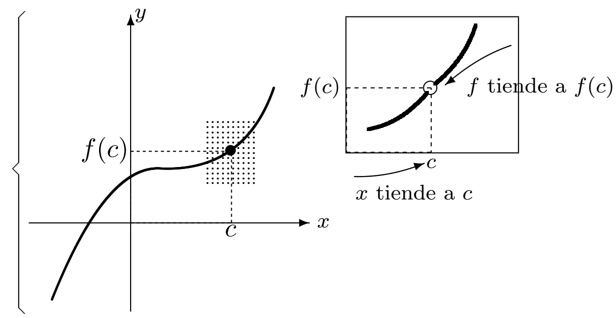


Figura 3.10.

Un vistazo a las figuras anteriores nos permite darnos cuenta que, salvo en la última, en todas las demás la gráfica de la función presenta algún tipo de ruptura de la curva sobre el valor de $x = c$. En otras palabras solamente la gráfica del último caso podría ser dibujada "sin levantar el lápiz del papel". Esta última es la que intuitivamente llamaríamos una **función continua**. Precisamente la definición de continuidad está basada en la situación que se presenta en este último caso.

Función continua: "sin levantar el lápiz"

Definición 3.2. Continuidad

Suponga que f es una función que está definida en algún intervalo abierto que contenga a c. Decimos que la función f es **continua en** $x = c$ si se tienen las siguientes condiciones:

1. Existe $f(c)$, esto es: c está en el dominio de f.
2. También existe $\lim_{x\to c} f(x)$.
3. Además $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Si f no es continua en c se dice que es **discontinua** en c.

Ejemplo 28. Discusión sobre la continuidad de algunas funciones

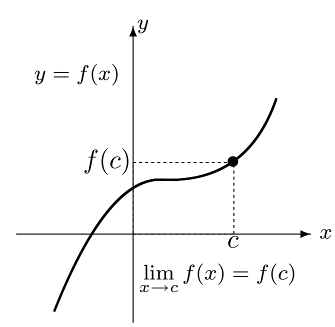


Figura 3.11. f continua en c

1. Si tenemos una función constante $f(x) = k$, sabemos que para cualquier c se tiene $\lim_{x\to c} f(x) = k$ y además $f(c) = k$. Esto nos dice que es un función continua.
2. La función identidad $f(x) = x$ también es continua pues $f(c) = c$ y $\lim_{x\to c} x = c$.
3. La función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ es

(a) discontinua en 1 porque $f(1)$ no existe, pero

(b) continua en todos los demás puntos. Por ejemplo $f(2) = 3$ y

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

$\triangle$

En realidad, si al calcular un límite cuando $x \to c$ éste se obtiene por simple evaluación (es decir: no es un límite indeterminado), entonces la función es continua en c.

Teorema 3.1. Operaciones con funciones continuas

Si f y g son funciones continuas en $x = c$ entonces también son continuas en c la suma $f + g$, la diferencia $f - g$, el producto $f \cdot g$ y, si $g(c) \neq 0$, el cociente f/g.
Por otra parte, si g es continua en c y f es continua en $g(c)$ entonces la composición $f \circ g$ es continua en c.

De acuerdo con este teorema y los puntos 1 y 2 del ejemplo anterior se tiene que la mayoría de las funciones que manejamos en este nivel son continuas en todos los puntos o casi en todos los puntos. Pues, efectivamente, estas funciones se obtienen mediante la combinación de las operaciones indicadas en el teorema a partir de la función identidad y de las funciones constantes.

A partir de las funciones constante e identidad

Ejemplo 5. Funciones continuas Las siguientes funciones son continuas en todos los puntos de $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$
2. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x^2 + 4}$
3. $h(x) = \dfrac{5x - 3}{x^2 + 2}$

$\triangle$

Figura 3.12. $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

Ejemplo 6. Funciones continuas y discontinuas

1. La función $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$ es discontinua en $x = 3$ y en $x = -3$ pues no existen ni $f(3)$ ni $f(-3)$ (en estos casos el denominador se anula). En todos los demás valores en $\mathbb{R}$ la función es continua.

2. La función $f(x) = \sqrt{x-1}$ es continua para todo valor $x \geq 1$.

$\triangle$

Continuidad en un intervalo

En general, decimos que una función es **continua** en $\mathbb{R}$ si es continua para todo x en $\mathbb{R}$. También decimos que es continua en un intervalo abierto I si es continua para toda x en I.

★ *Nota:* En el punto 2 del ejemplo anterior se tiene que el dominio de la función es el intervalo $[1, +\infty[$. En ese caso no tiene sentido hablar de $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ pues la función no está definida para valores menores que 1. Pero en estas circunstancias diremos que f es continua en $[1, +\infty[$ porque es continua en $]1, +\infty[$ y además

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1).$$

Ejemplo 7. Continuidad de una función racional

Determinar en qué conjunto es continua la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x+5}{x-3}$$

Figura 3.13. $f(x) = \frac{x+5}{x-3}$

Solución: El dominio de esta función es $\mathbb{R} - \{3\}$ y la función es continua en todo su dominio. $\triangle$

Ejemplo 8. Continuidad de una función con una raíz en el denominador

Determinar dónde es continua la función

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

a

Figura 3.14. $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Solución: Esta es una función continua en todo su dominio, es decir en $]-1, 1[$. $\triangle$

Ejemplo 9. Continuidad de una función definida por partes

Determinar dónde es continua la función

$$h(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x-3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

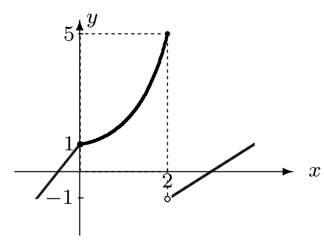


Figura 3.15. $y = h(x)$

Solución: Aquí tenemos una función definida por partes. Dentro de cada parte la función es continua, pero podría haber problemas con los límites en los puntos de división 0 y 2.

Tenemos

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} (2x+1) = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2+1) = 1,$$

y además

$$h(0) = 0^2 + 1 = 1,$$

por lo tanto la función es continua en 0.

Por otro lado,

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+1) = 5,$$

$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-3) = -1.$$

Esto dice que

$$\lim_{x\to 2} h(x)$$

no existe y por lo tanto h no es continua en 2.
Resumiendo la información decimos que h es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$. △

Ejemplo 10. Buscar la continuidad si hay un parámetro

Encontrar un valor de d para el cual la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} dx^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ dx + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución: Dentro de cada parte la función es continua. Para que además sea continua en 2, debemos tener que

$$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x).$$

Es decir,

$$4d - 3 = 2d + 2.$$

Resolviendo esta ecuación resulta

$$\begin{aligned} 4d - 2d &= 2 + 3 \\ 2d &= 5 \\ d &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Entonces si $d = \frac{5}{2}$ se tiene que f es continua en todo $\mathbb{R}$. △

Clasificamos en esta sección ciertos tipos de discontinuidades que se pueden presentar.

3.3 FUNCIONES DISCONTINUAS

Hemos visto anteriormente que las funciones pueden tener discontinuidades en algunos puntos. Básicamente la dicontinuidad en algún punto $x = c$ se presenta por alguna de las razones siguientes:

A. El límite $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ no existe.

B. El límite $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ sí existe pero $f(c)$ no existe.

C. El límite $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ sí existe, $f(c)$ también existe, pero

$$\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c).$$

D. Ni $f(c)$ ni $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existen.

Ejemplo 11. Discontinuidades de diferentes tipos

En la figura 3.16 se presenta una función f:

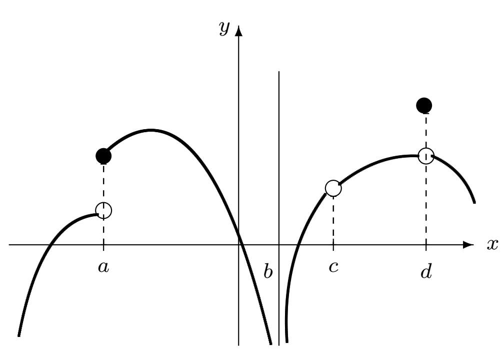


Figura 3.16. Diferentes tipos de discontinuidad

Podemos ver que la función presenta cuatro puntos de discontinuidad.

En $x = a$ se tiene que $f(a)$ existe pero $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe.

En $x = b$ se tiene que $f(b)$ no existe y $\lim_{x\to b} f(x)$ tampoco existe.

En $x = c$ se tiene que $f(c)$ no existe pero $\lim_{x\to c} f(x)$ si existe.

En $x = d$ se tiene que $f(a)$ existe, $\lim_{x\to d} f(x)$ también existe, pero

$$\lim_{x\to d} f(x) \neq f(d)$$

$\triangle$

Observando bien la gráfica, podemos ver que las discontinuidades son de diferente tipo. En c y en d la gráfica solo representa una "leve" ruptura, solo se interrumpe en un punto. Mientras que en a la gráfica "salta" de un lugar a otro y en b la gráfica "baja" indefinidamente. En los puntos en los que la gráfica solo se interrumpe en un punto sucede que el límite existe, mientras que en las otras circunstancias el límite no existe. Con base en esto damos la definición siguiente.

Definición 3.3. Tipos de discontinuidad

Sea f discontinua en $x = c$, decimos que

(a) la discontinuidad es **evitable** si $\lim_{x\to c} f(x)$ existe.

(b) la discontinuidad es **inevitable** si $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe.

En este caso, si

$$\lim_{x\to c^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c^-} f(x)$$

existen pero son diferentes, se dice que la discontinuidad es de **salto**.

Ejemplo 12. Clasificando discontinuidades

Para la función cuya gráfica se da en la figura 3.16 (ejemplo 11), las discontinuidades en $x = c$ y en $x = d$ son evitables. Las discontinuidades en a y b son inevitables. Por otra parte, la discontinuidad en a es una discontinuidad de salto. $\triangle$

Los nombres que se dieron en la definición anterior son bastante claros en cuanto a su significado. Si se tiene una discontinuidad evitable en $x = c$ bastaría redefinir

$$f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$$

para obtener una nueva función que sí es continua en $x = c$ (así se evitaría la discontinuidad).

Esto no se puede hacer en el caso de discontinuidades inevitables.

Ejemplo 13. **Caculando discontinuidades evitables e inevitables**

Determinar cuáles son los puntos de discontinuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 3 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 4x + 1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

Indicar cuáles son evitables y cuáles son inevitables.

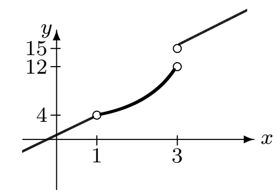


Figura 3.17.

Solución:

La función está definida en $\mathbb{R} - \{1, 3\}$ tiene entonces dos puntos de discontinuidad: en $x = 1$ y en $x = 3$

Tenemos que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$$

por lo tanto

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4$$

y entonces en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable.

Por otra parte

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 12 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 13$$

por lo tanto

$$\lim_{x \to 3} f(x) \quad \text{no existe}$$

por lo que en $x = 3$ hay una discontinuidad inevitable y es de salto (porque existen los dos límites laterales). △

Ejemplo 14. **Redefiniendo una función**

Determine los puntos de discontinuidad de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

y redefina la función para que sea continua en $\mathbb{R}$.

Solución:

La función es discontinua en $x = 1$ y además

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

La discontinuidad es evitable y si escribimos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

obtenemos una función idéntica a la función dada (salvo en $x = 1$) y además continua en $x = 1$. △

3.4 NEWTON, LAS MATEMÁTICAS Y LA REVOLUCIÓN CIENTFICA

Aqu se hace una breve reseña sobre la vida y obra de Isaac Newton en conexión con su aporte a la Fsica y a las Matemáticas.

Con resultados en la mecánica y dinámica como los obtenidos por Galileo, y en la astronoma por Brahe y, especialmente, Kepler, los cientficos del siglo XVII tenan a su disposición un mapa de gran riqueza intelectual. En ese mapa se añada la visión metodológica de Galileo sobre las ciencias y, también, la revolución realizada por la geometra analtica de Descartes y Fermat. Los métodos infinitesimales, los del Cálculo Diferencial e Integral, estaban a la orden del da. Muchos grandes cientficos y matemáticos incursionaron en ese mapa intelectual, dando aportes de diferentes formas, pero solo una persona fue capaz de integrar en una sola unidad teórica astronoma, mecánica, dinámica y cálculo diferencial e integral: **Newton**. Se puede decir que su trabajo constituyó la cúspide de la Revolución Cientfica del siglo XVII, y que abrió una nueva fase en la historia del conocimiento.

Una sntesis de astronoma, mecánica y matemáticas

Isaac Newton

Isaac Newton

Isaac Newton nació el 25 de diciembre de 1642, precisamente el año que murió el gran Galileo. El padre del pequeño y enfermizo Isaac haba muerto antes que éste naciera, lo que haba sucedido prematuramente. Fue cuidado por su abuela y, gracias a un to por parte de madre que haba estudiado en Cambridge y supo apreciar el talento del joven Newton, su madre lo matriculó en esta prestigiosa universidad inglesa en 1661.

Isaac no iba a estudiar matemáticas precisamente, porque en realidad no haba realizado ningún estudio en las mismas. De hecho, al hacer sus exámenes de ingreso recibió una calificación de insuficiente en Geometra euclideana.

Estando en el Trinity College de la Universidad de Cambridge pareció que al principio estudiara Qumica y, luego, incluso pensó en pasarse de la ciencia al derecho.

Podra decirse que las dos fuentes principales de su formación fueron sus estudios propios e independientes y, por otro lado, las lecciones de su profesor Isaac Barrow. Newton estudió las obras de Euclides, Kepler, Vite, Descartes, Copérnico, Galileo, Wallis y el mismo Barrow.

Por iniciativa de Barrow, quien reconoció el genio de Newton, le dieron a Newton la cátedra lucasiana de Cambridge en 1669. Estuvo en esta universidad hasta 1696.

Cálculo y Mecánica Celeste

El Cálculo

Con la creación del Cálculo Diferencial e Integral completó los trabajos que desde Eudoxo y Arqumedes en la antigedad hasta Kepler, Galileo, Descartes, Fermat, Barrow y otros se venan realizando para dominar los métodos infinitesimales, referidos a los procesos continuos e infinitos. Sin duda, el Cálculo (cuya notación más apropiada fue creada por el alemán Leibniz) representó el resultado matemático más importante del siglo XVII, y probablemente junto con la geometra euclideana la creación matemática de mayor influencia en el desarrollo de esta ciencia. Ya solo esto hubiera sido suficiente para inmortalizar a Newton, pero realizó otra hazaña intelectual: la mecánica celeste. Fue la sntesis, fundición y generalización teóricas de los resultados de Copérnico, Kepler y Galileo.

La nueva fsica

Con esta descripción matemática de las leyes de la fsica se completaba una verdadera revolución intelectual, que rompa con los esquemas dogmáticos, cerrados, acientficos que dominaron en la época medieval.

Los *Principia*

La obra que condensó sus extraordinarias contribuciones a la mecánica fue el famoso *Principios matemáticos de la filosofa natural*, de 1687. En este libro Newton dedujo con gran rigor matemático las leyes de Kepler sobre el movimiento planetario, las cuales haban sido establecidas de manera emprica. Newton demostró que estas leyes se deducan de la ley gravitacional de los cuadrados inversos:

$$F \propto \frac{MM_1}{d^2}.$$

[*La fuerza de atracción entre dos cuerpos celestes es proporcional a las masa de ambos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos.*]

Grandes ideas en poco tiempo

Explicó el movimiento de los cuerpos celestes y el de las mareas. También estableció los fundamentos de la teora del movimiento de la Luna.

El descubrimiento–contrucción del Cálculo lo realizó entre 1665 y 1666, mientras estaba en su lugar de nacimiento, Woolsthorpe, en el campo, para escapar de la peste que afectaba Cambridge y todo Londres. Fue en esos dos años que Newton elaboró las principales ideas de sus más grandes aportes a la fsica y a las matemáticas:

- acerca de la gravitación universal,
- las leyes de la composición de la luz y la naturaleza de los colores,
- el teorema binomial,
- y el Cálculo.

Newton llamó a su Cálculo con el nombre de "teora de las fluxiones". Sus nuevos métodos infinitesimales fueron usados plenamente en la derivación matemática de las leyes fsicas. El Cálculo estaba presente en la sntesis de la astronoma y mecánica que se dio con los *Principia* de Newton.

Con honores

Newton murió en 1727 con todo tipo de honores. Haba sido presidente de la Royal Society desde 1703, y hecho caballero en 1705. Fue enterrado en la abada de Westminster.

Fue tanta la pompa que hubo en el entierro de Newton que el gran Voltaire, que haba asistido, dijo:

> "He visto a un profesor de matemáticas, solo porque era grande en su profesión, enterrado como un rey que ha hecho el bien de sus súbditos".

Voltaire y la influencia de Newton

El impacto de la obra de Newton en la historia europea trascendió el plano matemático. Su descripción matemática de la realidad estableca un sistema del mundo que se contrapona a la visión dominante en la Edad Media. Tan claro fue eso que el mismo Voltaire fue quien introdujo en Francia los *Principia* de Newton (en francés) para contribuir a las ideas de la Ilustración, que, como se sabe, fue uno de los factores más importantes en la Revolución Francesa.

3.5 EJERCICIOS DEL *CAPÍTULO 3*

Interpretación gráfica

1. La figura 3.18 representa la gráfica de una función f; con base en ella determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existe:

(a) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

(e) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ (f) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

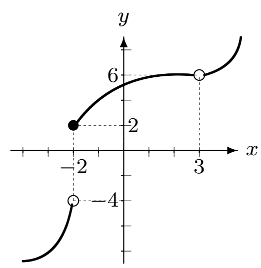


Figura 3.18.

2. La figura 3.19 representa la gráfica de una función h; con base en ella determine cada límite o establezca que no existe:

(a) $\lim\limits_{x\to -2^-} h(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to -2^+} h(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to -2} h(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to 3^-} h(x)$

(e) $\lim\limits_{x\to 3^+} h(x)$ (f) $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$

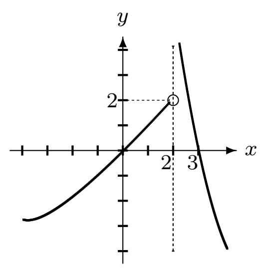


Figura 3.19.

3. La figura 3.20 representa la gráfica de una función h; con base en ella determine cada límite o establezca que no existe:

(a) $\lim\limits_{x\to -2^-} h(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to -2^+} h(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to -2} h(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$

(e) $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)$ (f) $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

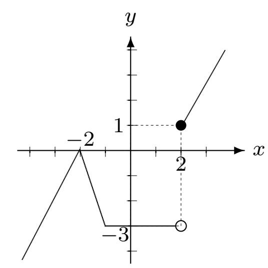


Figura 3.20.

En los ejercicios 4 a 7 se da la gráfica de una función. En cada caso diga cuáles son los puntos de discontinuidad de la función. Indique en cada caso si la discontinuidad es evitable o inevitable (en este caso diga si son o no de salto)

4.

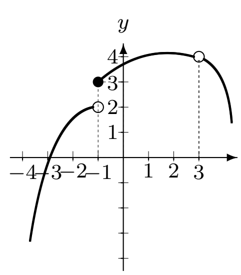


Figura 3.21.

5.

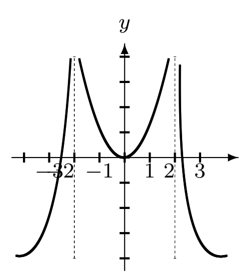


Figura 3.22.

6.

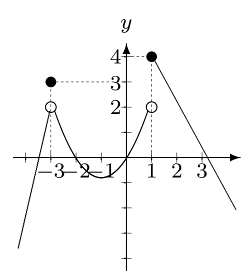


Figura 3.23.

7.

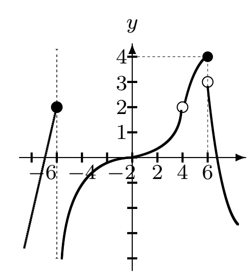


Figura 3.24.

Falso o Verdadero

8. Suponga que g es una función tal que $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 5$. En cada caso diga si la afirmación es verdadera o falsa (explique).

1. Necesariamente $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 5$
2. Necesariamente $\lim_{x\to 2} g(x) = 5$
3. Necesariamente existe un número $c > 2$, muy cercano a 2 tal que $g(c) = 5$.
4. A medida que tomamos valores de x muy próximos a 2, pero mayores que 2, los valores de $f(x)$ se aproximan a 5.

En los ejercicios 9 a 13 diga si la afirmación dada es falsa o verdadera (explique).

9. Si $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$ entonces se puede asegurar que f es continua en 3.

10. Siempre que f y g sean continuas en c se tiene que $\dfrac{f}{g}$ es continua en c.

11. Si f es continua en 5 y $\lim_{x\to 5^+} f(x) = 4$ entonces podemos asegurar que $\lim_{x\to 5} f(x) = 4$.

12. La suma de dos funciones continuas en $x = 5$ es continua en $x = 5$.

13. Si f es una función continua en 2 y $f(2) = 4$ entonces $\sqrt{f(x)}$ es continua en 2.

Selección única

En los ejercicios 14 a 23 escoja la opción que complete o conteste correctamente el enunciado propuesto.

14. La siguiente es una función que tiene exactamente dos puntos de discontinuidad:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ (b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$

(c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$ (d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

15. ¿En cuántos valores de x es discontinua la función $f(x) = \dfrac{1}{x^3+8}$?

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

16. Los puntos de discontinuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 2x+3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

son

(a) 0 y 3 (b) Solo el 3 (c) Solo el 0

(d) Ninguno.

17. ¿Para qué valor o valores de k la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{si } x \leq k \\ 2x^3+3 & \text{si } x > k \end{cases}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$?

(a) Solo para $k = 1$ (b) Para $k = 1$ o $k = 2$

(c) Para cualquier valor de k

(d) Para ningún valor de k.

18. Sea f una función para la cual se cumple que: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -1$ y $f(2) = 1$.

Considere las siguientes proposiciones:

I. $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe,

II. f es continua en $x = 2$,

III. 2 no pertenece al dominio de f.

De las anteriores proposiciones, son verdaderas:

(a) Todas (b) I y III (c) Solo II (d) Ninguna.

19. Si f es una función continua en 2 y se tiene que $\lim_{x\to 2^+} f(x) = w$ y $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -w$ entonces podemos asegurar que

(a) $w = 1$ (b) w puede ser cualquier número real (c) $w = 2$ (d) $w = 0$

20. Sea f una función continua en todo $\mathbb{R}$ y sea g una función que satisface: $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$ y $g(1) = 0$; podemos afirmar que el límite $\lim_{x\to 1} f(g(x))$ es igual a:

(a) $f(0)$ (b) $f(1)$ (c) $f(2)$ (d) No existe.

21. Sea f una función tal que $f(4) = 2$ y $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 3$. Entonces, podemos afirmar lo siguiente:

(a) f es continua en $x = 4$ (b) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 2$

(c) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 3$ (d) f es discontinua en $x = 4$

22. Sea f una función definida por $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+2}$. Podemos afirmar lo siguiente:

(a) f está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$

(b) f está definida y es continua en $\mathbb{R}-\{-2/3\}$

(c) f está definida y es continua en $\mathbb{R}-\{1/2\}$

(d) f está definida y es continua en $\mathbb{R}-\{-2/3, 1/2\}$

23. Si la figura 3.25 representa la gráfica de una función f, ¿en cuáles puntos f está definida y no es continua?

(a) -1, 1, 2 y 3 (b) -1 y 3

(c) -1, y 2 (d) -1, 2 y 3

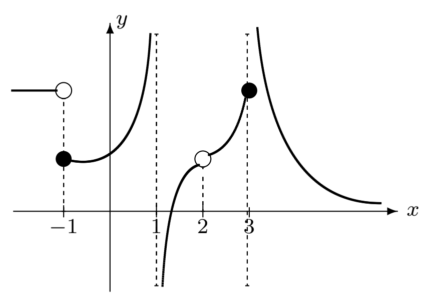


Figura 3.25.

Problemas y preguntas de desarrollo

En los ejercicios 24 a 31 calcule el límite que se indica o establezca que no existe.

24. $\lim_{x\to 6^+} \sqrt{x-6}$

25. $\lim_{x\to 6^-} \sqrt{x-6}$

26. $\lim_{x\to 2^+} \sqrt[3]{x^3-8}$

27. $\lim_{x\to 2^-} \sqrt[3]{x^3-8}$

28. $\lim_{t\to 5^+} (\sqrt{t^2-25}+3)$

29. $\lim_{t\to 2^+} \dfrac{\sqrt{(t-2)^2}}{t-2}$

30. $\lim_{t\to 2^-} \dfrac{\sqrt{(t-2)^2}}{t-2}$

31. $\lim_{y\to 6^+} \dfrac{\sqrt{y^2-36}}{t+6}$

En los ejercicios 32 a 39 pruebe que la función f dada es continua en el valor c indicado.

32. $f(x) = x^2 - 3x + 1, \;\; c = 3$

33. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}, \;\; c = 2$

34. $f(t) = \sqrt{t - 2}, \;\; c = 3$

35. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}, \;\; c = 2$

36. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & \text{si } x > 1 \\ -2x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}, \;\; c = 1$

37. $f(x) = \begin{cases} -3x + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ 3 - x & \text{si } x < -1 \end{cases}, \;\; c = -1$

38. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x > 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}, \;\; c = 3$

En los ejercicios 39 a 52 determine en qué intervalos es continua la función dada. En los puntos de discontinuidad diga si ésta es evitable o inevitable. Para las discontinuidades evitables redefina la función para obtener una función continua en el punto correspondiente.

39. $g(x) = x^4 + x^2 - x - 1$

40. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 3x + 2}$

41. $g(x) = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}}$

42. $q(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

43. $h(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

44. $f(x) = \dfrac{\sqrt{10 - x}}{x - 5}$

45. $f(x) = \dfrac{|x + 2|}{x + 2}$

46. $f(x) = \dfrac{3}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

47. $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x > 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & \text{si } x < 1 \\ -2x & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x + 3 & \text{si } 3 < x \end{cases}$

49. $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < -1 \\ 3 + x & \text{si } -1 \leq x \end{cases}$

50. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x > 2 \\ x^2 + 3 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

51. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$

52. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ \frac{x+1}{x-1} & \text{si } -2 \leq x < 2 \text{ y } x \neq 1 \\ -3x + 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$

53. Determine un valor de c para el cual la función

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ cx + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$.

54. Determine los valores de c para los que la función

$$g(x) = \begin{cases} 2cx + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ c^2x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$.

CAPÍTULO 4
LÍMITES INFINITOS Y AL INFINITO

Un matemático que no tenga también algo de poeta nunca será un matemático completo.

Karl Weierstrass

Trataremos en este capítulo con dos tipos diferentes de límites. En primer lugar, veremos los límites infinitos y, posteriormente, veremos qué sucede con las funciones cuando la variable independiente tiende a infinito.

A través de gráficos y tablas de valores se estudia en esta sección el caso de funciones que crecen o decrecen ilimitadamente cuando los valores de la variable independiente se aproximan a un valor dado, esto es: límites infinitos. Se relaciona esta situación con el aspecto gráfico de las funciones: las asíntotas verticales.

4.1 LÍMITES INFINITOS Y ASÍNTOTAS VERTICALES

Consideremos el siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|}.$$

Como podemos ver de la gráfica, si hacemos variar x tendiendo a 0 (por la derecha y por la izquierda), la gráfica “sube” ilimitadamente.

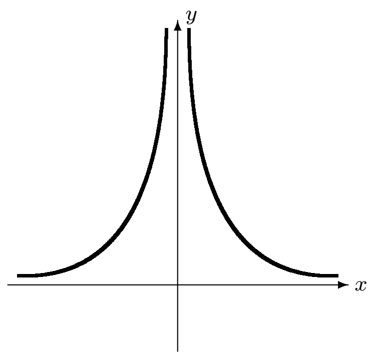


Figura 4.1. $f(x) = \frac{1}{|x|}$

Construyamos, además, una tabla con valores de x cercanos a 0.

Tabla 4.1

0

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1	0,5
$\frac{1}{\lvert x\rvert}$	2	10	100	1000	1000	100	10	2

?

De acuerdo con la gráfica y con la tabla 4.1, decimos que el límite propuesto no existe porque a medida que nos aproximamos a cero tanto por la derecha como por la izquierda tenemos que los valores de la función crecen ilimitadamente.

Crecimiento ilimitado

Límites infinitos

En la situación expuesta anteriormente dijimos que el límite no existe, pero esa situación especial en la que $f(x)$ crece ilimitadamente se expresa diciendo que $f(x)$ tiende a infinito. Escribimos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$$

Una definición informal de esta situación sería la siguiente:

Definición 4.1. Límites infinitos

Decimos que $f(x)$ **tiende a infinito** cuando x tiende a c si se puede hacer $f(x)$ tan grande como se quiera al escoger x suficientemente cercano a c. Se escribe $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$
(Esto se lee: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es infinito).

De un modo parecido definimos la notación

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

(el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es menos infinito).

Ejemplo 15. **Límite infinito cuando $x \to 0$**

Considere $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$. Realicemos una tabla de valores tomando x muy cercano a 0

Tabla 4.2

0

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1	0,5
$\frac{-1}{x^2}$	-4	-100	-10000	-1000000	-1000000	-10000	-100	-4

?

Es bastante claro, a partir de la tabla 4.2, que

$$\lim_{x \to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty.$$

La figura 4.2 representa la gráfica de esta función. △

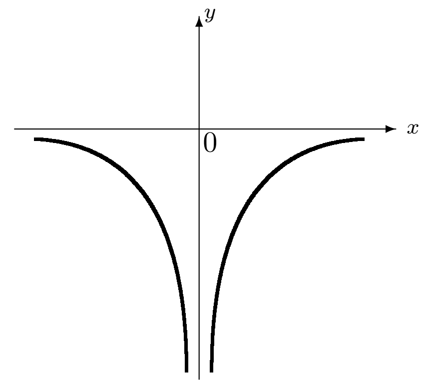


Figura 4.2. $f(x) = \frac{-1}{x^2}$

Ejemplo 16. **Límite infinito cuando $x \to 1$**

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Esta es una tabla de valores tomando x cercano a 1.

Tabla 4.3

0

x	0,5	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1	1,5
$\frac{1}{x-1}$	-2	-10	-100	-1000	1000	100	10	2

?

A partir de la tabla 4.3 podemos decir que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$

La gráfica de esta función se representa en la figura 4.3. △

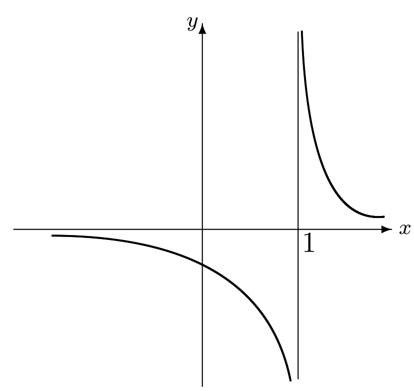


Figura 4.3. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Asíntota vertical

Asíntotas

Las gráficas de las situaciones dadas anteriormente tienen cierta característica en común: en los tres casos hay una recta vertical a la cual la función "se va pegando". Estas rectas se llaman **asíntotas.**

Así, la función

$$f(x) = \frac{1}{|x|}$$

tiene una **asíntota vertical** que es el eje y. También la función

$$f(x) = \frac{-1}{x^2}$$

tiene al eje y como asíntota vertical. Mientras tanto la función

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

tiene a la recta $x = 1$ como asíntota vertical.

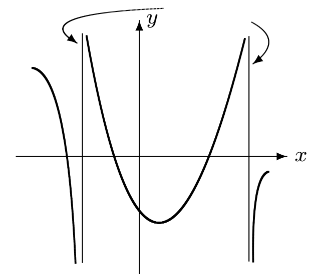


Figura 4.4. Asíntotas verticales

En general, podemos dar la siguiente definición:

Definición 4.2. Asíntota vertical

La recta $x = c$ es una **asíntota vertical** de $f(x)$ si se cumple al menos una de las siguientes posibilidades:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = \infty.$$

Los dos teoremas siguientes son muy útiles en el cálculo de límites infinitos.

Teorema 4.1. El límite $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{1}{(x-c)^n}$

1. Si n es un número entero positivo par, entonces $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{1}{(x-c)^n} = \infty$
2. Si n es un entero positivo impar entonces $\lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{1}{(x-c)^n} = \infty$ y $\lim\limits_{x\to c^-} \dfrac{1}{(x-c)^n} = -\infty$

Ejemplo 17. Aplicación del teorema 4.1

De acuerdo con el teorema anterior tenemos que

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \infty$ (pues 2 es un número par).

2. $\lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{1}{(x+4)^3} = \infty$ (pues 3 es impar).

3. $\lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{1}{(x+4)^3} = -\infty$ (pues 3 es impar).

4. $\lim\limits_{x\to 8^-} \dfrac{1}{x-8} = -\infty$ (aquí tenemos que el exponente del denominador es 1, que es impar).

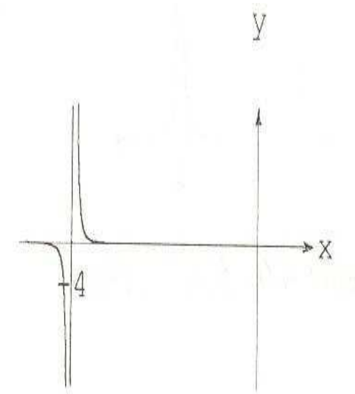


Figura 4.5. $f(x) = \frac{1}{(x+4)^3}$

$\triangle$

Teorema 4.2. Operaciones con límites infinitos

Suponga que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ y que $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ (algún número L) entonces:

1. $\lim\limits_{x\to c}[g(x) + f(x)] = \infty$.
2. Si $L > 0$, entonces $\lim\limits_{x\to c}[g(x)f(x)] = \infty$ y $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.
3. Si $L < 0$, entonces $\lim\limits_{x\to c}[g(x)f(x)] = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Teoremas análogos se pueden dar para el caso de $-\infty$ y también para cuando $x \to c^+$ y $x \to c^-$.

Ejemplo 18. Aplicaciones del teorema 4.2

Calcular los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x}{(x-2)^2}$ 2. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x}{x^2-1}$

3. $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{x+2}{x^2-9}$ 4. $\lim\limits_{x\to -1} \left[\dfrac{3}{(x+1)^2} + 5x\right]$

5. $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x-6}{x^2-5x}$

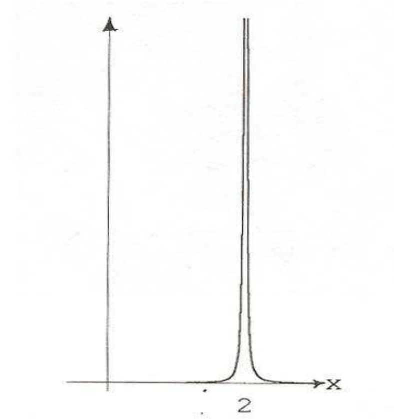


Figura 4.6. $f(x) = \frac{3x}{(x-2)^2}$

Solución:

1. Observe que podemos escribir

$$\frac{3x}{(x-2)^2} = 3x \cdot \frac{1}{(x-2)^2}$$

y tenemos

$$\lim_{x\to 2} 3x = 6, \qquad \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$

Entonces, por el punto 2 del teorema se tiene que

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x}{(x-2)^2} = \infty$$

2. En este caso:

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1}$$

y tenemos

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x+1} = 1, \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$

Por lo tanto (punto 2 del teorema):

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x^2-1} = \infty$$

3. Procedemos de modo parecido en este caso:

$$\frac{x+2}{x^2-9} = \frac{x+2}{(x-3)(x+3)} = \frac{x+2}{x-3} \cdot \frac{1}{x+3}$$

y como

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x+2}{x-3} = \frac{1}{6}, \qquad \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{x+3} = -\infty$$

entonces

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x+2}{x^2-9} = -\infty$$

4. Tenemos que

$$\lim_{x\to -1} \frac{3}{(x+1)^2} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -1} 5x = -5$$

entonces, por el punto 1 del teorema,

$$\lim_{x\to -1} \left[\frac{3}{(x+1)^2} + 5x\right] = \infty$$

5. Descomponemos la función de la siguiente manera

$$\frac{x-6}{x^2-5x} = \frac{x-6}{x(x-5)} = \frac{x-6}{x} \cdot \frac{1}{x-5}.$$

Ahora,

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x-6}{x} = \frac{-1}{5}, \qquad \lim_{x\to 5^+} \frac{1}{x-5} = \infty$$

y entonces, por el punto 3 del teorema:

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x-6}{x^2-5x} = -\infty$$

$\triangle$

Ejemplo 19. Asíntotas verticales

Determinar las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x^2+3x-2}$

Solución: Podemos escribir

$$f(x) = \frac{3x+1}{2x^2+3x-2} = \frac{3x+1}{(2x-1)(x+2)}$$

Vemos que el denominador se hace 0 cuando $x = -2$ o $x = \frac{1}{2}$ de manera que hay dos posibles asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = \frac{1}{2}$.

Calculamos

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{3x+1}{(2x-1)(x+2)} = \infty,$$

$$\lim_{x\to (\frac{1}{2})^+} \frac{3x+1}{(2x-1)(x+2)} = \infty$$

y por lo tanto ambas rectas son asíntotas verticales. △

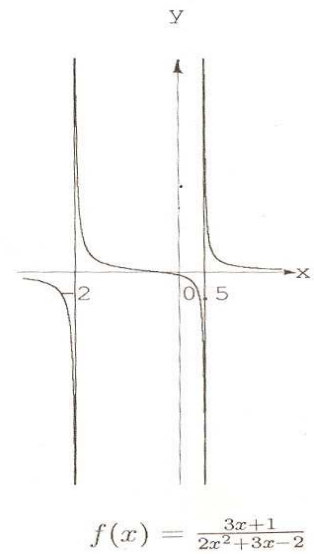


Figura 4.7.

Ejemplo 20. Un cero del denominador que no es asíntota vertical

Determinar las asíntotas verticales de

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$$

Solución: Tenemos

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \frac{x^2-9}{(x-3)(x-2)}.$$

Por lo tanto hay dos posibles asíntotas verticales: $x = 3$ y $x = 2$.

Ahora calculamos

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-9}{(x-3)(x-2)} = \infty$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x-2} = 6$$

Lo anterior dice que la recta $x = 2$ es asíntota vertical, pero $x = 3$ NO es asíntota vertical porque el límite considerado no es ni ∞ ni $-\infty$.

. △

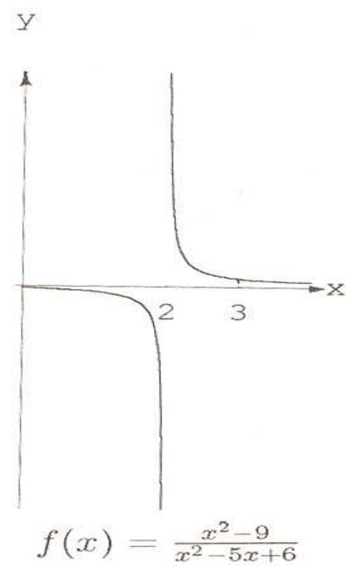


Figura 4.8.

4.2 LÍMITES AL INFINITO Y ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Aquí se estudia el comportamiento de las funciones cuando la variable independiente tiende a infinito. Se analiza el concepto de asíntota vertical.

"Sí existe el movimiento"

Retomemos en este capítulo la paradoja de la *Dicotomía* de Zenón que mencionamos en el capítulo primero. Podemos representar la situación de la siguiente manera:

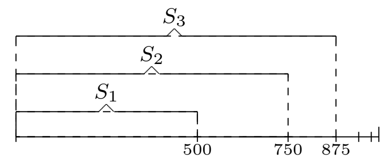


Figura 4.9.

El corredor debe recorrer

$$d_1 = 500$$

y debe recorrer

$$d_1 + d_2 = 500 + 250,$$

y así sucesivamente.

Escribamos
$$\begin{aligned} S_1 &= d_1 &&= 500\\ S_2 &= d_1+d_2 &&= 750\\ S_3 &= d_1+d_2+d_3 &&= 875\\ S_4 &= d_1+d_2+d_3+d_4 &&= 937,5 \end{aligned}$$

y podemos seguir

$$\begin{aligned} S_{20} &= d_1+d_2+\cdots+d_{20} &&= 999,99905\\ S_{50} &= d_1+d_2+\cdots+d_{50} &&= 1\,000-8,8817842^{-13}\\ S_{100} &= d_1+d_2+d_3+\cdots d_{100} &&= 1\,000-7,8886091^{-28} \end{aligned}$$

Llamamos al conjunto de los números $S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$ una **sucesión de sumas**, y la denotamos $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Notamos que al crecer n, el valor S_n se acerca cada vez más al valor 1 000.

Expresamos modernamente lo anterior diciendo

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1\,000.$$

Entonces, la suma infinita de cantidades que consideró Zenón no nos da un valor infinito. Nos da la distancia 1 000.

Una suma infinita que da un número finito

Límites al infinito

En lo que sigue vamos a estudiar los límites infinitos para diversas funciones.

Aquí consideraremos un problema diferente al considerado en capítulos anteriores. En ellos nos hemos preguntado qué pasa con $f(x)$

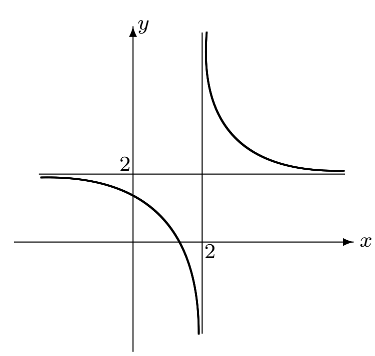


Figura 4.10. $f(x) = \frac{2x+5}{x-2}$

cuando x se aproxima a un valor determinado c. Aquí nos preguntaremos qué pasa con $f(x)$ cuando x crece ilimitadamente (x crece sin cota) o cuando decrece ilimitadamente (decrece sin cota). Estos son los límites *al infinito*.

Ejemplo 21. Crecimiento ilimitado de x

Sea $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-2}$, nos preguntamos:

a) ¿Qué sucede con $f(x)$ si hacemos crecer a x ilimitadamente?

b) ¿Qué sucede con $f(x)$ si hacemos decrecer a x ilimitadamente? (esto es, si tomamos valores negativos de x cada vez "más abajo")

Solución: La gráfica de la función indica que a medida que x crece o decrece ilimitadamente, los valores de $f(x)$ se acercan arbitrariamente a 2.

LAS SUCESIONES

Una sucesión infinita se puede definir como una función con dominio igual a $\mathbb{N}$. Por ejemplo, consideremos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = \dfrac{1}{n}$. Es decir: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$.

Podemos poner $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \rightarrowtail & \frac{1}{n} \end{array}$ es decir, $f(n) = \dfrac{1}{n}$.

Otro ejemplo: si $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ obtenemos $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{16}, \cdots, \dfrac{1}{n^2}, \cdots$. Aquí la función está definida por $g(n) = \dfrac{1}{n^2}$.

Se dice que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es *convergente* si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} = L$. Por ejemplo, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Si la sucesión no es convergente se llama *divergente*. ¿Si $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, es $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente o divergente?

Recuadro 4.1: **Sucesiones**

Crecimiento sin cota

a) Construyamos una tabla de valores que nos refuerza lo que vemos en la gráfica:

Tabla 4.4

$\longrightarrow \infty$

x	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$	3,125	2,091836	2,009018	2,0009	2,00009

$\longrightarrow 2$

Con la tabla 4.4 comprobamos que a medida que los valores de x crecen sin cota, los valores de $f(x)$ se aproximan a 2.

La expresión "x crece sin cota" se simboliza con $x \to \infty$ y se dice que x **tiende a infinito**. Toda la situación anterior se escribe simbólicamente como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x-2} = 2.$$

★ *Actividad:* Si usted calcula $f(x)$ para valores más grandes observará que a partir de un cierto momento los valores que da la calculadora se *estacionan* en 2 (hágalo). ¿Significa esto que las imágenes son exactamente 2?, explique por qué se da esa situación con la calculadora.

b) Para comprobar la respuesta también construiremos una tabla de valores.

Tabla 4.5

$\longrightarrow -\infty$

x	-10	-100	-1000	-10000	-100000
$f(x)$	1,25	1,911764	1,991017	1,9991	1,99991

$\longrightarrow 2$

Nuevamente, a partir de la tabla 4.5 vemos que a medida que los valores de x decrecen sin cota, los valores de $f(x)$ se aproximan a 2.

Decrecimiento sin cota

La expresión "x decrece sin cota" se simboliza con $x \to -\infty$ y se dice que x **tiende a menos infinito**. La situación anterior se escribe simbólicamente como

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+5}{x-2} = 2.$$

. △

Podemos dar una definición informal para estas situaciones.

Definición 4.3. Límites al infinito

a) Decimos que el límite cuando x tiende a infinito de $f(x)$ es igual a L si a medida que hacemos crecer x ilimitadamente entonces los valores de $f(x)$ se aproximan a L. Simbólicamente

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

(Esto se lee: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito es L).

b) Decimos que el límite cuando x tiende a menos infinito de $f(x)$ es igual a M si a medida que hacemos decrecer x ilimitadamente entonces los valores de $f(x)$ se aproximan a M. Simbólicamente

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = M$$

(Esto se lee: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a menos infinito es M).

Asíntotas horizontales

La figura 4.11 representa la gráfica de

$$f(x) = \frac{2x+5}{x-2}$$

Note que en el dibujo, además de la asíntota vertical $x = 2$, se observa otra recta a la cual la gráfica de la función se "va pegando": ésta es la recta horizontal $y = 2$. Estas rectas se llaman **asíntotas horizontales de la gráfica** de $f(x)$ y están estrechamente relacionadas con los límite al infinito. De hecho, podemos dar la siguiente definición:

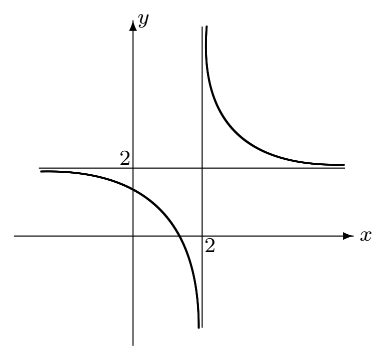


Figura 4.11. $f(x) = \frac{2x+5}{x-2}$

Definición 4.4. Asíntota horizontal

Decimos que la recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si se cumple que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = k \quad \text{o que} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = k$$

Ejemplo 22. Dos asíntotas horizontales

En la figura 4.12 se representa la gráfica de una función f.

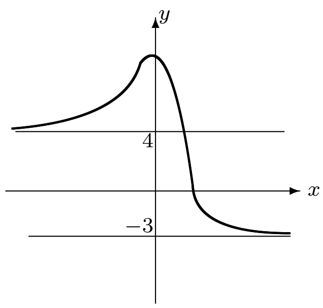


Figura 4.12. Asíntotas horizontales

Ahí vemos que hay dos asíntotas horizontales que son $y = -3$, $y = 4$. Tenemos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = -3$. △

El siguiente teorema nos sirve para calcular límites al infinito.

Teorema 4.3. Propiedades de los límites al infinito

1. Si k es una constante entonces $\lim_{x\to\infty} k = k$ y $\lim_{x\to-\infty} k = k$
2. Si n es un número natural par entonces $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} x^n = \infty$
3. Si n es un número natural impar entonces $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$
4. Si m es un número natural par entonces $\lim_{x\to\infty} \sqrt[m]{x} = \infty$
5. Si m es un número natural impar entonces $\lim_{x\to\infty} \sqrt[m]{x} = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[m]{x} = -\infty$
6. Si k es un número racional positivo y r es un número real arbitrario entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{r}{x^k} = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} \frac{r}{x^k} = 0$ siempre que x^k esté definido.

Además, son válidas las propiedades dadas en los teoremas 2.1 y 4.2 si en vez de $x \to c$ escribimos $x \to \infty$ o escribimos $x \to -\infty$.

Aplicaciones del Teorema 4.3

Ejemplo 23.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} -432 = -432$, por el punto 1 del teorema anterior tomando $k = -432$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \infty$, por el punto 2 del teorema, tomando $n = 2$ (par).
- $\lim\limits_{x\to\infty} x^5 = \infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$, por el punto 3 del teorema, tomando $n = 5$ (impar).
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$, por el punto 4 del teorema, tomando $m = 2$ (par).
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x} = \infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$, por el punto 5 del teorema, tomando $m = 3$ (impar).
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{42}{x^4} = 0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{42}{x^4} = 0$, por el punto 6 del teorema, tomando $r = 42$ y $k = 4$.

$\triangle$

Ejemplo 24. Un método para calcular ciertos límites al infinito

- Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{1}{x^3} + 12\right]$

Solución: Tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{x^3} + 12\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} + \lim_{x\to\infty} 12 = 0 + 12 = 12$$

- Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^2 - 5x + 6)$.

Solución: Usualmente, con el fin de utilizar las propiedades anteriores, se procede en estos casos del siguiente modo:

$$\lim_{x\to-\infty} (-3x^2 - 5x + 6) = \lim_{x\to-\infty} -3x^2 \left(1 + \frac{5}{3x} - \frac{2}{x^2}\right)$$

Observe que lo que se hizo fue factorizar la expresión "sacando" el término de mayor exponente, por esta razón dentro del paréntesis quedan fracciones en las que aparece la variable en el denominador. El objetivo que se persigue con esto es muy claro: estas fracciones que acabamos de mencionar tienden a 0 y, por lo tanto, el límite solo va a depender del término de mayor exponente. Entonces,

Se factoriza apropiadamente

$$\lim_{x\to-\infty} -3x^2 \underbrace{\left(1+\overbrace{\frac{5}{3x}-\frac{2}{x^2}}^{\to 0}\right)}_{\to 1} = \lim_{x\to-\infty} -3x^2 = -\infty \quad (\text{¿por qué?})$$

El procedimiento que acabamos de utilizar en el ejemplo anterior se usa en el cálculo de muchos de los límites al infinito.

- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x+4}{3x^2-2x+1}$

Solución: Procedemos del siguiente modo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x+4}{3x^2-2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \overbrace{\left(1+\overbrace{\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}^{\to 0}\right)}^{\to 1}}{3x^2 \underbrace{\left(1-\underbrace{\frac{2}{3x}+\frac{1}{3x^2}}_{\to 0}\right)}_{\to 1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

$\triangle$

Límites al infinito de funciones polinomiales

El procedimiento usado es bastante general y podemos deducir de él las dos reglas siguientes.

Regla 1: Si tenemos un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ (con $a_n \neq 0$) entonces

$$\lim_{x\to\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$$

y también

$$\lim_{x\to-\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n$$

Regla 2: Si tenemos dos polinomios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ (con $a_n \neq 0$) y $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ (con $b_m \neq 0$) entonces

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

y además

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to-\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Simplemente lo que dicen las dos reglas anteriores es que al calcular los límites al infinito de un polinomio basta considerar solo el término de mayor grado. Del mismo modo, al calcular los límites al infinito de un cociente de polinomios basta considerar solamente el cociente de los términos de mayor grado de ambos polinomios.

Ejemplo 25. Cálculo de asíntotas horizontales

Determinar las asíntotas horizontales de las siguientes funciones

a) $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$ b) $g(x) = \dfrac{2x^3 - 4x + 1}{x^2 - x + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{x^3 + 4x + 1}{x^5 - x + 1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3 - 4x + 1) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$ (según la regla 1).

Por otra parte $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3 - 4x + 1) = \lim\limits_{x\to\infty} 2x^3 = \infty$

De modo que f no tiene asíntotas horizontales.

★ *Nota:* De hecho ninguna función polinomial tiene asíntotas horizontales. ¿Podría usted explicar por qué?

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-4x+1}{x^2-x+1} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 2x = \infty$ (según la regla 2).

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-4x+1}{x^2-x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty.$$

Tampoco esta función tiene asíntotas horizontales.

c) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+4x+1}{x^5-x+1} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^5} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ (según la regla 2).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x+1}{x^5-x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^5} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Por lo tanto h tiene una asíntota horizontal $y=0$.

△

4.3 LÍMITES AL INFINITO Y CÁLCULO DE ÁREAS

En esta sección se hace una breve introducción de la relación que existe entre el concepto de límite al infinito y el cálculo de áreas de regiones planas. Este aspecto es la base del cálculo integral.

El cálculo de longitudes, áreas y volúmenes fue uno de los grandes asuntos que motivaron la creación del Cálculo Diferencial e Integral en el siglo XVII. De hecho, se puede decir que era una preocupación más extendida entre los científicos y matemáticos de la época que el cálculo de las rectas tangentes a una curva. Debe decirse, además, que mientras este último asunto se planteó en el siglo XVII, el cálculo de áreas de figuras curvilíneas a través de diferentes procedimientos fue un asunto de interés desde 20 siglos antes. Los intentos previos a Newton y Leibniz acudieron a procedimientos parecidos al "método de exhausción" que creó Eudoxo (*circa* 408–355 a. C.) y que utilizó extensamente Arquímedes de Siracusa (*circa* 287–212 a. C.), dos de los más grandes matemáticos de la Antigíedad. Estos métodos hacen referencia a lo que se llama *integración* y que en este libro no pretendemos desarrollar. Sin embargo, resulta de gran interés familiarizarnos con el tipo de problema y la forma de enfrentarlo que desarrollaron los matemáticos antes de Newton. Esto nos permitirá estudiar mejor el significado de los métodos infinitesimales.

Cálculo del área bajo la curva $y=x^2$ entre 0 y 4

Considere la curva dada por $y=x^2$ entre los puntos $x=0$ y $x=4$.

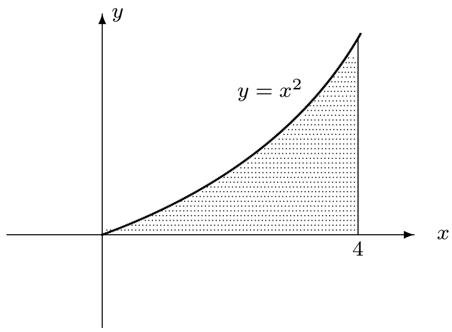


Figura 4.13.

El área se puede aproximar con el área de 4 rectángulos definidos específicamente según la figura 4.14:

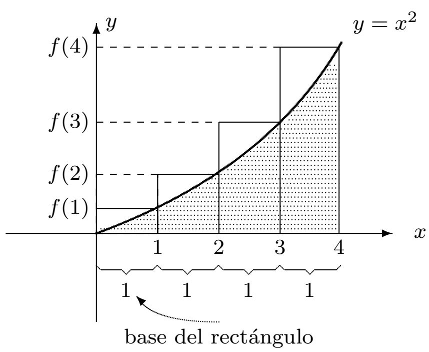


Figura 4.14.

y donde se tiene:

$$f(1) = 1^2 = 1$$
$$f(2) = 2^2 = 4$$
$$f(3) = 3^2 = 9$$
$$f(4) = 4^2 = 16$$

El área de cada rectángulo es *ancho* $\times$ *largo*. El ancho es siempre 1 y el largo se obtiene al evaluar la función $f(x) = x^2$ en el valor final de cada segmento definido por la división del intervalo $[0, 4]$.

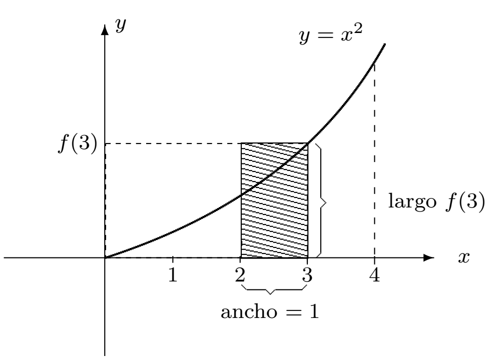


Figura 4.15.

La suma de las áreas de los 4 rectángulos da una aproximación:

$$\begin{aligned}
\text{Area} &\cong 1\cdot f(1)+1\cdot f(2)+1\cdot f(3)+1\cdot f(4)\\
&= 1\cdot(1)^2+1\cdot(2)^2+1\cdot(3)^2+1\cdot(4)^2\\
&= 1\cdot(1^2+2^2+3^2+4^2)\\
&= 1\cdot(1+4+9+16)\\
&= \boxed{30}
\end{aligned}$$

Una primera aproximación

Obsérvese que esta aproximación es muy "gruesa" y que se mejoraría mucho si se tiene rectangulitos más delgados, es decir aumentando el número de los rectangulitos como en la siguiente figura:

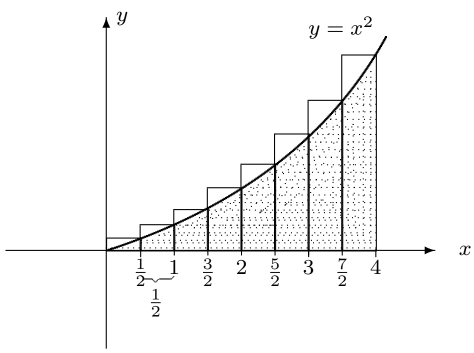


Figura 4.16.

Aquí el ancho de los 8 rectangulitos es $\frac{1}{2}=0,5$ y la nueva aproximación se obtiene por:

$$\begin{aligned}
\text{Area} &\cong \tfrac{1}{2}\cdot f(\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2}\cdot f(1)+\tfrac{1}{2}\cdot f(\tfrac{3}{2})+\tfrac{1}{2}\cdot f(2)+\tfrac{1}{2}\cdot f(\tfrac{5}{2})+\tfrac{1}{2}\cdot f(3)+\tfrac{1}{2}\cdot f(\tfrac{7}{2})+\tfrac{1}{2}\cdot f(4)\\
&= \tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{2}{2})^2+\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{3}{2})^2+\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{4}{2})^2+\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{5}{2})^2+\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{6}{2})^2+\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{7}{2})^2+\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{8}{2})^2
\end{aligned}$$

$$\left[\text{Note que } 1=\frac{2}{2},\ 2=\frac{4}{2},\ 3=\frac{6}{2} \text{ y } 4=\frac{8}{2}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2^3}(1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2)$$

$$\left[\text{sacando a factor } \tfrac{1}{2^3}\right]$$

$$= \tfrac{1}{8}(1+4+9+16+25+36+49+64)$$

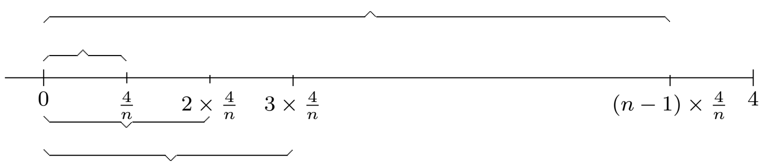
$$= \boxed{25{,}5}$$

Una segunda aproximación

En forma general: podemos considerar ahora n rectángulos que parten el intervalo $[0,4]$.

La longitud del ancho es ahora $\frac{4}{n}$ y la *partición* se vería así:

Se parte el intervalo $[0,4]$ en n partes



Note que podemos llamar

$$x_1 = \frac{4}{n}, \quad x_2 = 2 \cdot \frac{4}{n}, \quad x_3 = 3 \cdot \frac{4}{n}, \ldots, x_{n-1} = (n-1) \cdot \frac{4}{n}, \quad x_n = n \cdot \frac{4}{n} = 4$$

y que $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 4$.

$$\begin{aligned}
\text{Area} &\cong \tfrac{4}{n} \cdot f(\tfrac{4}{n}) + \tfrac{4}{n} \cdot f(2 \cdot \tfrac{4}{n}) + \tfrac{4}{n} \cdot f(3 \cdot \tfrac{4}{n}) + \cdots + \tfrac{4}{n} \cdot f((n-1) \cdot \tfrac{4}{n}) + \tfrac{4}{n} \cdot f(n \cdot \tfrac{4}{n}) \\
&= \tfrac{4}{n} \cdot (\tfrac{4}{n})^2 + \tfrac{4}{n} \cdot 2^2 \cdot (\tfrac{4}{n})^2 + \tfrac{4}{n} \cdot 3^2 \cdot (\tfrac{4}{n})^2 + \cdots + \tfrac{4}{n} \cdot (n-1)^2 \cdot (\tfrac{4}{n})^2 + \tfrac{4}{n} \cdot n^2 \cdot (\tfrac{4}{n})^2 \\
&= \left(\tfrac{4}{n}\right)^3 (1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2) \quad \text{[ecuación 4.3.1]}
\end{aligned}$$

[sacando a factor $\left(\frac{4}{n}\right)^3$]

Se puede demostrar que

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

[Resultado obtenido por los matemáticos franceses Blaise Pascal (1623–1662) y Pierre de Fermat].

Entonces, sustituyendo en la ecuación 4.3.1:

$$\text{Area} \cong \left(\frac{4}{n}\right)^3 \left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\right] = 4^3 \left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3 \cdot 6}\right]$$

Por lo tanto:

$$\text{Area} \cong 4^3 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right]$$

Al aumentar el número de rectángulos n, la aproximación se mejora. Si $n \to \infty$ obtendríamos el área *exactamente*. Es decir:

El área es un límite al infinito

$$\boxed{\text{Area} = \lim_{n\to\infty} 4^3 \left[\frac{1}{3} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{2n}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{6n^2}}\right] = \frac{4^3}{3} = \boxed{21{,}333}}$$

El área bajo la curva $y = x^2$ en el intervalo $[0, a]$

Si en lugar de $x = 4$, tomamos un valor más general $x = a$ $(a > 0)$, y reproduciendo el método, tendríamos:

$$\boxed{\text{Area} = \lim_{n\to\infty} a^3 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right] = \frac{a^3}{3}}$$

Lo que obtendríamos se expresa modernamente como

$$\text{Area } = \int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$$

Este resultado lo conocía Arquímedes a través del uso del método de exhausción.

El área bajo la curva $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, a]$ viene dada por

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$$

[Se dice: la *integral definida* de x^2 entre 0 y a es $\frac{a^3}{3}$]. Este resultado y el método de obtenerlo eran conocidos por varios matemáticos antes de Newton y Leibniz.

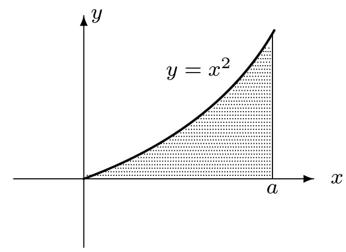


Figura 4.17. Area $= \int_0^a x^2 dx$

El área es una integral definida

El símbolo $\int$ *(una S alargada), de* integral, *fue introducido por Leibniz en 1675.*

4.4 EJERCICIOS DEL *CAPÍTULO 4*

Interpretación gráfica

1. La figura 4.18 representa la gráfica de una función f. De acuerdo con ella determine:

(a) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ (f) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

(g) Las asíntotas verticales y horizontales de f.

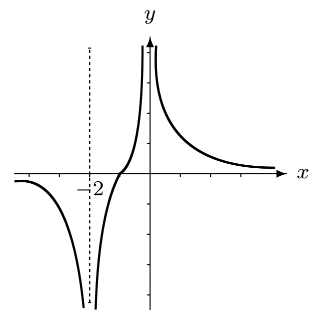


Figura 4.18.

2. La figura 4.19 representa la gráfica de una función g. De acuerdo con ella determine:

(a) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$

(e) Las asíntotas verticales y horizontales de g.

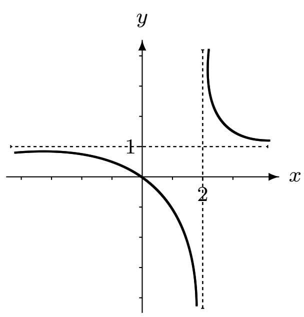


Figura 4.19.

3. La figura 4.20 representa la gráfica de una función f. De acuerdo con ella determine:

(a) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ (f) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

(g) Las asíntotas verticales y horizontales de f.

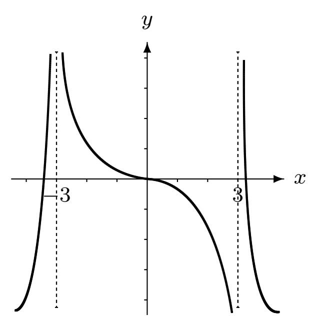


Figura 4.20.

4. La figura 4.21 representa la gráfica de una función h. De acuerdo con ella determine:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)$

(e) Las asíntotas verticales y horizontales de h.

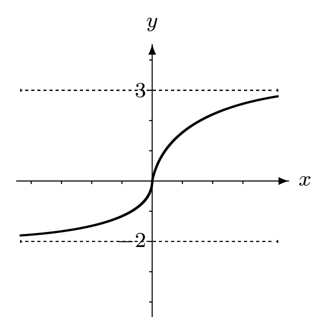


Figura 4.21.

En los ejercicios 5 a 8 la figura dada representa un función f. En cada caso determine lo siguiente:

(a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (e) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ (h) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ (i) Las asíntotas verticales y horizontales de f.

5.

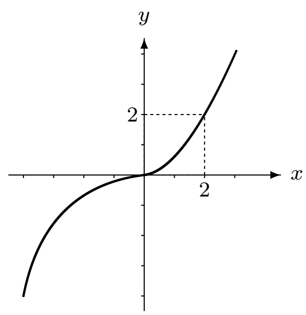


Figura 4.22.

6.

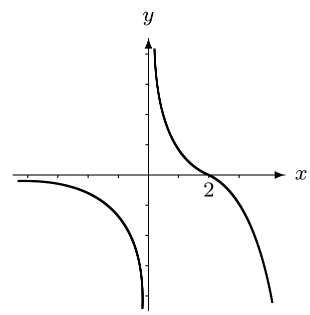


Figura 4.23.

7.

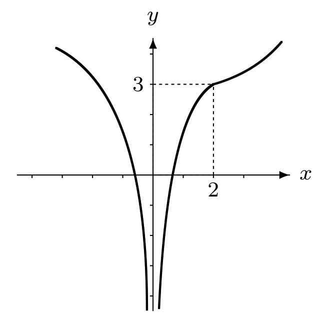


Figura 4.24.

8.

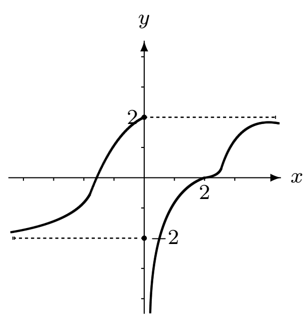


Figura 4.25.

Falso o Verdadero

En los ejercicios 9 a 15 diga si la afirmación dada es verdadera o falsa (explique).

9. Si $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ entonces podemos asegurar que si $a < b < 2$ entonces $f(a) < f(b)$.

10. Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$ entonces $\lim\limits_{x\to c} -f(x) = \infty$.

11. Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 8$ entonces existe un valor M tal que para todo $x > M$ se tiene que $f(x) \leq 8$.

12. Si f es discontinua en 5 entonces la recta $x = 5$ es una asíntota vertical de f.

13. Si $x = 3$ es una asíntota vertical de $f(x)$ entonces $f(3)$ no existe.

14. Si $y = 5$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ puede existir algún valor c tal que $f(c) = 5$.

15. Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ entonces debe existir un intervalo $]M, +\infty[$ en el cual la función es creciente.

Selección única

En los ejercicios 16 a 22 escoja la opción que responda o complete correctamente la proposición.

16. El valor de $\lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{x}{x+4}$ es

(a) -4 (b) $-1/2$ (c) $-\infty$ (d) $+\infty$

17. El valor de $\lim\limits_{x\to 9^-} \dfrac{x^2-81}{x-9}$ es

(a) 18 (b) -18 (c) $+\infty$ (d) $-\infty$

18. ¿Cuántas asíntotas verticales tiene la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-x^2-4x+4}$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

19. ¿Cuál es el valor de $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-1/3}$?

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) $+\infty$

20. Si $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = -\infty$ entonces podemos asegurar que

(a) $g(3)$ no existe (b) $x = 3$ es asíntota vertical de g (c) $y = 3$ es asíntota vertical de g
(d) $\lim\limits_{x\to -3} g(x) = +\infty$

21. Si $m > n$ entonces una asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{x^n}{x^m}$ es la recta

(a) $y = 0$ (b) $y = m-n$ (c) $y = 1$ (d) No tiene asíntotas horizontales.

22. ¿Cuál es el valor de $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}$?

(a) 0 (b) -4 (c) $1/4$ (d) $-1/4$

Preguntas y problemas de desarrollo

En los ejercicios 23 a 34 encuentre el límite pedido.

23. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{|x-2|}$

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3}{x^4}$

25. $\lim\limits_{t\to 8^+} \dfrac{t+8}{t-8}$

26. $\lim\limits_{t\to 8^-} \dfrac{t+8}{t-8}$

27. $\lim\limits_{h\to 3} \dfrac{2h}{h^2-6h+9}$

28. $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{x^2}{x^2-25}$

29. $\lim\limits_{t\to 2^+} \dfrac{t^2+2t-8}{t^2-4}$

30. $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$

31. $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$

32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+5}{6x^4}$

33. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{|x-1|+2}{x-1}$

34. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{|x-1|+2}{x-1}$

En los ejercicios 35 a 47 encuentre el límite pedido.

35. $\lim_{x\to+\infty}(x^2+2x-1)$

36. $\lim_{x\to-\infty}(x^2+2x-1)$

37. $\lim_{x\to+\infty}(-3x^5+2x)$

38. $\lim_{x\to-\infty}(-3x^5+2x)$

39. $\lim_{t\to-\infty}\dfrac{5t+8}{2t-8}$

40. $\lim_{t\to+\infty}\dfrac{56t+11}{t^2-81}$

41. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-2x}{x^3-25}$

42. $\lim_{t\to+\infty}\dfrac{t^2+2t-8}{t^4-4}$

43. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3-3x}{x^2-x-2}$

44. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-6x+2}{x^3-x-2}$

45. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^3+5}{4x^3-2}}$

46. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{\sqrt{x^2-1}}.$

47. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x+5}}{4x-2}$

En los ejercicios 48 a 53 determine las asíntotas horizontales y verticales de la función dada.

48. $\dfrac{3x+2}{2x-1}$

49. $\dfrac{-4}{x^2-9}$

50. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$

51. $\dfrac{12}{x^2+x+1}$

52. $\dfrac{2x^3+5}{x^3-x}$

53. $\dfrac{x^2-4}{x^3+2x^2-5x-6}$

54. Dibuje la gráfica de una función f que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones:

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

(c) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ (d) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

55. Dibuje la gráfica de una función f que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones:

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

(c) $\lim_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$

(d) $\lim_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$

(e) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ (f) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

56. Considere la función $f(x)=16-x^2$ definida sobre el intervalo $[0,4]$. Dibuje el área bajo esa curva. Dé una aproximación del área:

(a) utilizando 4 rectángulos de igual base (dibuje la situación).

(b) utilizando 8 rectángulos de igual base (dibuje la situación).

57. Exprese el área considerada en el ejemplo anterior como un límite y calcúlelo.

58. Exprese el área bajo la curva $y=x^2+2$ sobre el intervalo $[0,2]$ como un límite y calcúlelo. Dibuje la situación.

59. Considere $f(x) = \sqrt{x^2+2x+8} - x$.

(a) Complete la siguiente tabla:

x	10	50	100	1000
$f(x)$				

(b) Tomando como base los resultados obtenidos en (a) dé un estimado de $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+8} - x)$.

(c) El resultado en (b) se puede obtener algebraicamente. Hágalo.
Sugerencia:

$$\sqrt{x^2+2x+8} - x =$$

$$\frac{(\sqrt{x^2+2x+8} - x)(\sqrt{x^2+2x+8} + x)}{\sqrt{x^2+2x+8} + x}$$

60. Para n entero positivo se define

$$f(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

Por ejemplo:

$$f(4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \approx 0,884523809$$

(a) Calcule $f(n)$ para $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=6$, $n=7$, $n=8$, $n=9$, $n=10$. Use calculadora.

(b) Dé un estimado para $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$.

61. Se considera un segmento AB como el de la figura 4.26 cuya longitud es 12. Se parte el segmento en n partes iguales y sobre cada parte se construye un triángulo isósceles cuyos ángulos en la base miden 45^o. Calcule la longitud de la línea quebrada (la línea de puntitos en el dibujo) cuando $n=2$, cuando $n=4$ y cuando $n=6$. ¿Cuál es el límite de la longitud de la línea quebrada cuando n tiende a infinito?

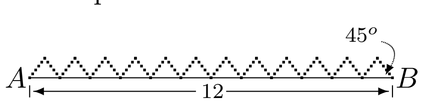


Figura 4.26.

62. En algunas ocasiones, cuando x tiende a infinito, los valores de una función $f(x)$ se aproximan a los valores de una recta oblicua. Esta recta se llama *asíntota oblicua* de la función; tal es el caso de la recta L en el gráfico dado en lo figura 4.27

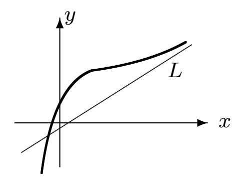


Figura 4.27.

Para que f tenga una asíntota oblicua en ∞, una condición necesaria (aunque no suficiente) es que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ sea ∞ o $-\infty$. Si la ecuación de la asíntota oblicua es $y = mx + b$ entonces tenemos

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad y \quad b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$$

Lo mismo vale si en lugar de ∞ escribimos $-\infty$.
Utilizando esto calcule una asíntota oblicua para la función $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.

CAPÍTULO 5
LA DERIVADA

Esta ciencia (matemáticas) no tiene como único objetivo contemplar eternamente su propio ombligo; ella toca la naturaleza y algún día hará contacto con ella. En ese día será necesario descartar las definiciones puramente verbales y no ser nunca más la víctima de palabras vacías.

Henri Poincaré

En los capítulos anteriores hemos introducido de manera intuitiva la noción de derivada y, luego, hemos estudiado el concepto de límite y sus propiedades.

Esto nos va a permitir establecer en lo que sigue la definición de *la derivada* con un mayor grado de precisión matemática. Aunque esta precisión se empezaría a desarrollar con los matemáticos del siglo XIX, la realidad es que, en sus aspectos esenciales, los resultados que vamos a estudiar a continuación (y los que cubrirían básicamente los cursos universitarios de pregrado en cálculo diferencial e integral) fueron obtenidos en los dos siglos anteriores. Los padres del Cálculo, Newton y Leibniz, y los grandes matemáticos que les siguieron como los hermanos Bernoulli, Euler, D'Alembert y otros, desarrollaron ampliamente el nuevo campo matemático y sus aplicaciones a las ciencias físicas sin las precisiones y el rigor que solo se lograría en el siglo XIX.

En el *Capítulo 1* vimos que el cálculo de la velocidad instantánea en un momento era equivalente al del valor de la pendiente de la recta tangente a la función que describe el movimiento considerado.

Si $f(x) = x^3$, la derivada en el punto $(2, 8)$ es la pendiente de la recta tangente en ese punto:

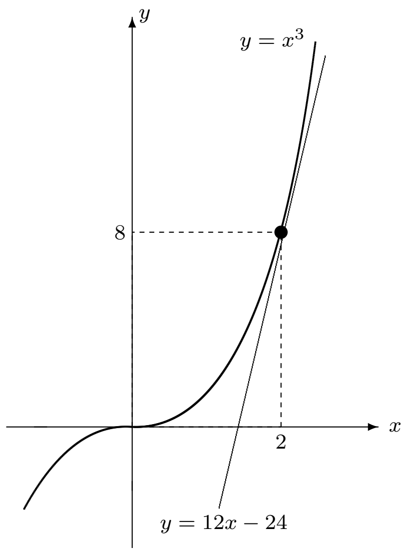


Figura 5.1. $y = 12x - 24$ es tangente a la curva en $(2, 8)$

Construyamos una secante que pase por los puntos $(2, 8)$ y $(x, f(x))$ un punto cualquiera. La siguiente figura nos representa la situación:

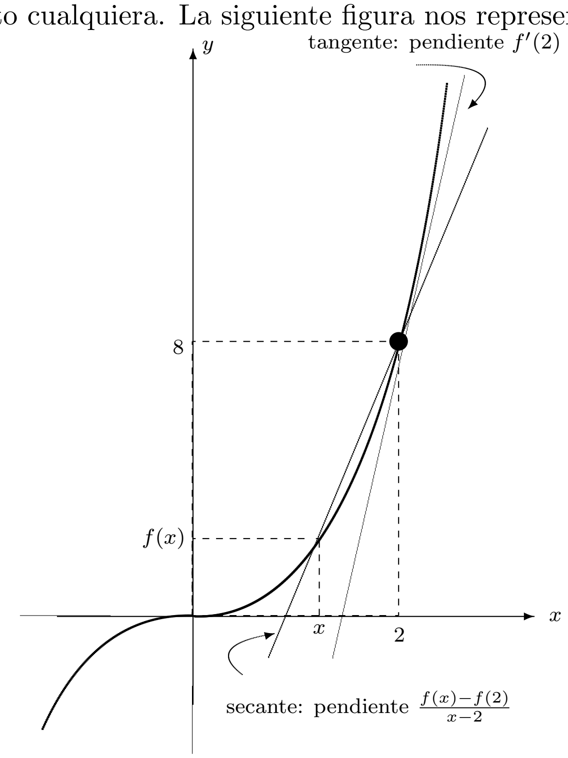


Figura 5.2. Secante y tangente

Consideremos la razón

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^3 - 8}{x - 2},$$

que sabemos es la pendiente de la recta secante. Si construimos nuevas secantes con x más cerca de 2, obtenemos una colección de rectas secantes que se acercan cada vez más a la recta tangente.

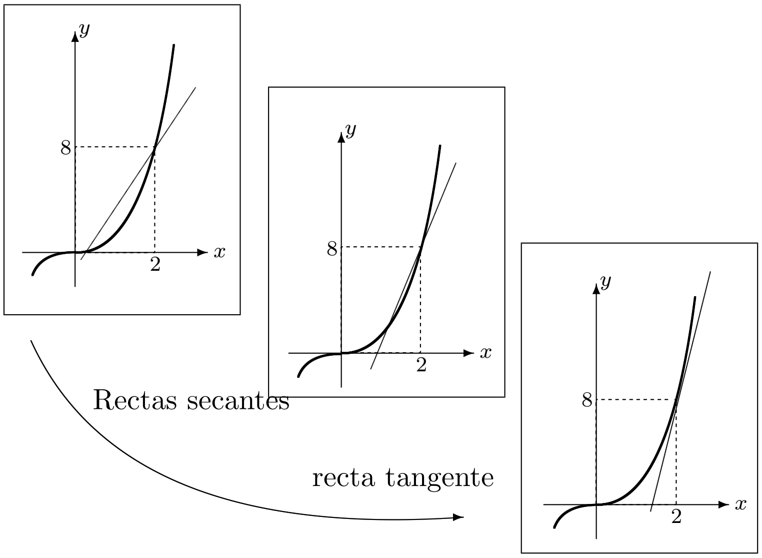


Figura 5.3. Las secantes se aproximan a la tangente

Lo que hemos realizado lo podemos escribir por medio del concepto de límite que hemos desarrollado en la siguiente manera:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c}\text{pendiente}\\ \text{de la recta tangente}\\ \text{en } (2, f(2))\end{array}\right\} = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)}$$

y

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = 12.$$

5.1 LA DEFINICIÓN DE DERIVADA

En esta sección se da una definición de derivada, se calculan derivadas utilizando la definición y se estudia la relación entre la derivabilidad y la continuidad de las funciones.

Procedemos ahora a precisar la definición general de la derivada en términos del concepto de límite:

Definición 5.1. La derivada en un punto

Sea f una función y sea c un número en el dominio de f, **se llama derivada de** f **en** $x = c$ al límite

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c},$$

si este límite existe. Si el límite no existe se dice que la función **no es derivable en** $x = c$.

Como ya sabemos, la derivada de f en $x = c$ se denota por $f'(c)$. Esto es,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

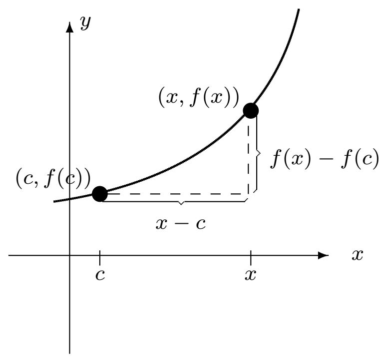


Figura 5.4.

Ejemplo 26. Cálculo de la derivada de una función lineal

Sea $f(x) = -4x + 5$; determinar $f'(2)$.

Solución: De acuerdo con la definición tenemos:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{-4x + 5 - (-3)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{-4x + 8}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{-4(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} (-4) \\ &= -4 \end{aligned}$$

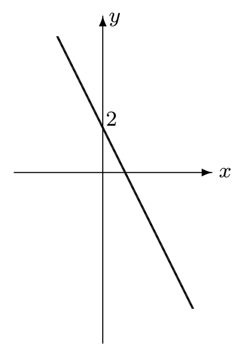


Figura 5.5. $f(x) = -4x + 5$

△

★ *Actividad:* Para la misma función del ejemplo anterior calcule $f'(-3)$ y $f'(0)$. ¿Cómo explicaría usted los resultados obtenidos, desde el punto de vista gráfico?

Ejemplo 27. Cálculo de la pendiente de una recta tangente

Considere la función $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de esta función en el punto $(-1, 4)$.

Solución: Según dijimos en el *Capítulo 1*, la derivada de una función en un punto se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto. En este caso particular entonces la pendiente que buscamos viene dada por $f'(-1)$:

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{x\to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \\ &= \lim_{x\to -1} \frac{2x^2 - x + 1 - 4}{x + 1} \\ &= \lim_{x\to -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} \\ &= \lim_{x\to -1} \frac{(x + 1)(2x - 3)}{x + 1} \\ &= \lim_{x\to -1} (2x - 3) \\ &= -5 \end{aligned}$$

De manera que la pendiente de la recta tangente en el punto $(-1, 4)$ es -5. △

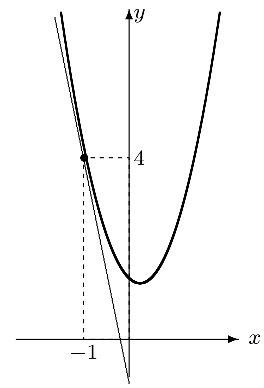


Figura 5.6. Pendiente de la tangente: -5

Ejemplo 28. Cálculo de la derivada en un punto

Calcular $f'(-2)$ siendo $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{x+1}{x-1} - 3}{x - 2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{x+1-3(x-1)}{x-1}}{x - 2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{-2x+4}{x-1}}{x - 2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{-2(x-2)}{x-1}}{x - 2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{-2(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{-2}{x - 1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

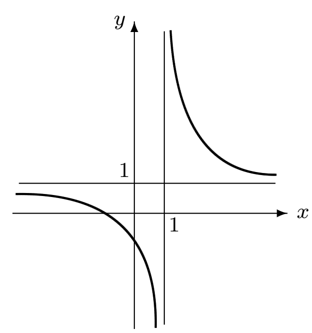


Figura 5.7. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

△

La definición anterior representa también un método para calcular derivadas. Sin embargo, como usted puede ver, resulta bastante tedioso. Por ejemplo, si para la misma función anterior usted tuviera que calcular la derivada en 3, en 5, en -7, entonces tendría que calcular tres límites análogos al anterior. No obstante, para esta función y para prácticamente todas, existe la posibilidad de eludir tantos cálculos y calcular un solo límite que nos de la derivada en todos los puntos donde ésta exista.

La derivada como una función

Comenzaremos escribiendo la definición de derivada en una forma equivalente pero más cómoda para los efectos que nos proponemos.

Recuerde que

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Ahora, si en lugar de x escribimos $c + h$, es decir $x = c + h$ entonces cuando $x \to c$ se tiene que $h \to 0$ y la derivada se puede escribir ahora como

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}.$$

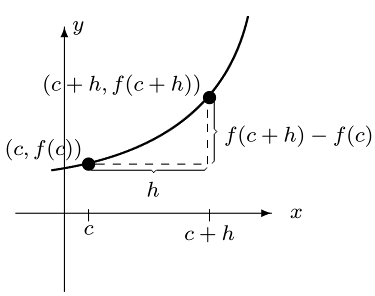


Figura 5.8.

Se puede utilizar alternativamente cualquiera de los dos límites para calcular derivadas.

Observe que esta segunda forma no hace referencia explícita a la variable independiente x de la función. Esto hace más fácil escribir la siguiente definición:

Definición 5.2. La derivada como función

Sea f una función y suponga que la derivada de f existe para todo x en un cierto dominio. Si a cada x le asociamos la derivada $f'(x)$ se obtiene una nueva función f' que se llama **función derivada de** f y tenemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

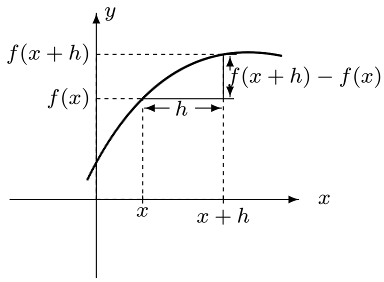


Figura 5.9.

★ *Nota:* La expresión anterior es una "forma alternativa de la derivada".

Ejemplo 29. Cálculo de la derivada

Calcular $f'(x)$ siendo $f(x) = x^2 + x - 1$.

Solución: Tenemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) - 1 - (x^2 + x - 1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + x + h - 1 - x^2 - x + 1}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h + 1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (2x + h + 1) \\
&= 2x + 1
\end{aligned}$$

Esto es, $f'(x) = 2x + 1$. △

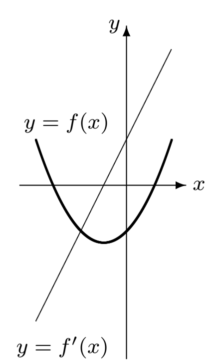


Figura 5.10. $f(x) = x^2 + x - 1$ y $f'(x) = 2x + 1$

Ejemplo 30. Cálculo de la derivada en un punto

Tomemos nuevamente la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ y calculemos su función derivada.

Tenemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x+h+1}{x+h-1} - \frac{x+1}{x-1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(x-1)(x+h+1)-(x+1)(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x-1)(x+h+1)-(x+1)(x+h-1)}{h(x+h-1)(x-1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+xh+x-x-h-1-x^2-xh+x-x-h+1}{h(x+h-1)(x-1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h(x+h-1)(x-1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2}{(x+h-1)(x-1)} \\
&= \frac{-2}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

Es decir $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Por ejemplo, si $x = 2$ tenemos

$$f'(2) = \frac{-2}{(2-1)^2} = -2.$$

Por otra parte,

$$f'(3) = \frac{-2}{(3-1)^2} = \frac{-1}{2},$$

$$f'(5) = \frac{-2}{(5-1)^2} = \frac{-1}{8},$$

etc. No hay que calcular el límite cada vez, solo basta evaluar en la función derivada. $\triangle$

Ejemplo 31. Derivada 0: recta tangente paralela al eje x

Determinar en qué puntos la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ es paralela al eje x.

Solución: Una recta paralela al eje x tiene necesariamente una pendiente igual a 0. De modo que debemos ver en qué puntos la derivada de la función es 0:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^3+3(x+h)^2-12(x+h)-(2x^3+3x^2-12x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)+3(x^2+2xh+h^2)-12x-12h-2x^3-3x^2+12x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{6x^2h+6xh^2+2h^3+6xh+3h^2-12h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(6x^2+6xh+2h^2+6x+3h-12)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(6x^2+6x-12+6xh+2h^2+3h)\\
&= 6x^2+6x-12
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$f'(x)=6x^2+6x-12.$$

Para ver cuándo $f'(x)=0$ debemos resolver la ecuación

$$6x^2+6x-12=0:$$

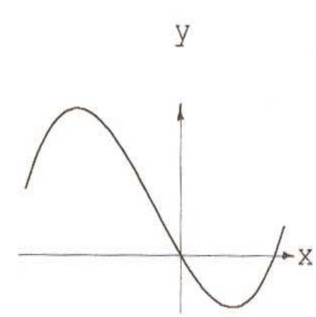
$$6x^2+6x-12=0\Longrightarrow 6(x^2+x-2)=0\Longrightarrow 6(x-1)(x+2)=0,$$

se deduce que $x=1$, $x=-2$.

En conclusión, hay dos puntos en que la tangente es horizontal (paralela al eje x):

$$(1,f(1))=(1,-7)\quad \text{y}\quad (-2,f(-2))=(-2,20).$$

$\triangle$



$f(x)=2x^3+3x^2-12x$

Figura 5.11.

Como dijimos en la definición de derivada, el límite que la determina no siempre existe. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Ejemplo 32. No siempre existe la derivada

Demostrar que la función dada por $f(x)=|x|$ no es derivable en $x=0$.

Solución: Intentemos calcular

$$\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}.$$

Tenemos

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1,$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

Lo anterior significa que

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} \quad \text{no existe.}$$

y por lo tanto $f'(0)$ no existe, es decir, f no es derivable en 0. △

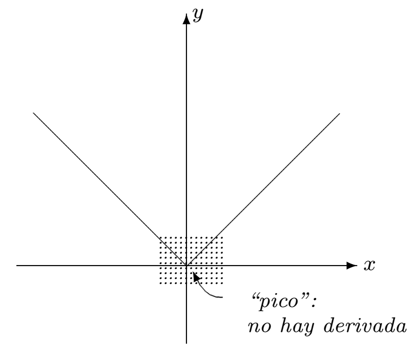


Figura 5.12. $f(x) = |x|$

La figura 5.12 representa la gráfica de $f(x) = |x|$. Como podemos ver, esa gráfica tiene un "pico" en el punto de abscisa 0. Los puntos donde la gráfica de una función tiene "picos" corresponden a valores de la abscisa en los cuales la derivada no existe.

Ejemplo 33. Derivada infinita: tangente vertical

Consideremos ahora la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Intentemos calcular $f'(0)$. Tendríamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{0+h}-\sqrt[3]{0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} \\ & \quad \text{y, racionalizando:} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Podemos decir que la derivada de f cuando $x = 0$ es "infinita" y gráficamente esto significa que la recta tangente a la curva en el punto $(0,0)$ es vertical. △

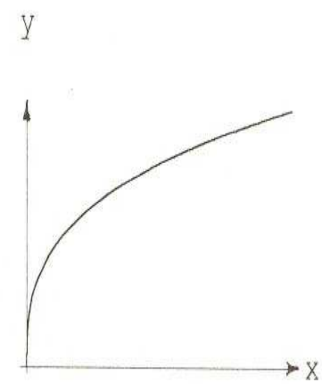


Figura 5.13. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Por otra parte, una condición necesaria para que una función sea derivable en un punto es que sea continua en ese punto. Tal como lo enuncia el siguiente teorema.

Teorema 5.1. Derivabilidad y continuidad

Si f es derivable en c entonces f es continua en c.

Ejemplo 34. Una función que no es derivable en 5 puntos

La función representada en la figura 5.14 tiene varios puntos en los cuales no es derivable:

- No es derivable cuando $x = -3$ porque ahí presenta un "pico".
- No es derivable cuando $x = -1$ porque ahí es discontinua.
- No es derivable cuando $x = 1$ porque ahí presenta un "pico".
- No es derivable cuando $x = 2$ porque ahí es discontinua.
- No es derivable cuando $x = 3$ porque ahí es discontinua.

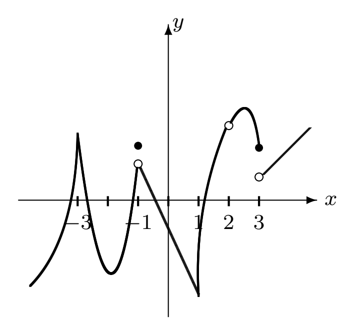


Figura 5.14. Puntos donde no hay derivada

△

El teorema anterior dice que *en los puntos donde la función es discontinua no puede ser derivable*, pero, mucho cuidado, no dice que si la función es continua tiene que ser derivable. Retomando el caso de la función $f(x) = |x|$ vemos que es siempre continua y sin embargo no es derivable en $x = 0$.

Discontinuidad implica no derivabilidad

Notaciones para la derivada:

Si $y = f(x)$ es una función, entonces, además de la notación $f'(x)$ para su derivada, se utilizan también las siguientes

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad [f(x)]', \quad D_x y, \quad D_x f(x).$$

El concepto de límite

En este libro hemos introducido el *concepto de límite* y, a partir del mismo, estudiado, por ejemplo, la noción de continuidad. El concepto ha sido usado para definir propiamente *la derivada*, también se usa para definir *la integral*. Es una noción de importancia medular.

Lo interesante es que la formulación de continuidad, derivada e integral tanto de Newton y Leibniz como de la mayoría de los matemáticos del siglo XVIII, no usaba la noción de límite como la hemos estudiado aquí. Tanto en Newton como Leibniz hay referencia a la idea que terminaría condensándose en el concepto de límite. Pero la forma definitiva como se generalizaría en la comunidad matemática es bien posterior a ellos.

En torno a la introducción de este concepto como central en el Cálculo o Análisis se suele mencionar al francés Jean D'Alembert (1717–1783) quien usaba explícitamente la palabra *límite*. Por ejemplo decía:

> "La teoría de los límites está en la base de la verdadera Metafísica del cálculo diferencial."

No sería, sin embargo, hasta el trabajo del gran matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789–1857) que se le daría la forma casi idéntica que hoy conocemos del Cálculo infinitesimal elemental y, en particular, al concepto de límite. En el trabajo de Cauchy (publicado en libros de 1821, 1823 y 1829) los conceptos de *función* y de *límite* de una función son los fundamentales.

Debe decirse, sin embargo, que otro gran matemático de Bohemia (hoy parte de la República Checa), Bernhard Bolzano (1781–1848), había construido en la misma época e independientemente definiciones de límite, derivada, continuidad y convergencia muy similares a las de

Cauchy. Su obra, desafortunadamente, no tuvo mucha acogida entre los matemáticos de su época y, más bien, fue ignorada por 50 años.

Es interesante señalar que Bolzano fue de los primeros en resaltar la diferencia entre derivabilidad y continuidad. En 1834 había escrito un librito *Funktionenlehre*, en el que mencionó un ejemplo de una función continua que no tiene derivada finita en **ningún punto**. Ese libro no se completó ni se publicó y no tuvo (ni hubiera tenido probablemente) ningún impacto en la comunidad matemática de su época.

Quien sí tuvo éxito en establecer definitivamente la distinción entre continuidad y derivabilidad fue el matemático alemán Bernhard Riemann (1826–1866) con un artículo que escribió en 1854. El artículo se publicó hasta 1868, cuando empezó a tener más influencia. También el matemático suizo Charles Collérier (1818–1889) y el alemán Karl Weierstrass (1815–1897) ofrecieron en la época ejemplos de funciones continuas pero nunca diferenciables.

Como se puede apreciar, desde la formulación realizada por Newton, hasta el uso del concepto de límite y la distinción entre derivabilidad y continuidad pasó mucho tiempo. Muchas veces se pierde este sentido histórico cuando se estudia el tema en nuestros libros de texto, los que pasan de los límites a la continuidad y derivabilidad en pocos días.

5.2 REGLAS DE DERIVACIÓN

En esta sección se estudian las propiedades de la derivada y se utilizan para calcular derivadas de funciones complicadas.

Aún cuando se puede calcular un solo límite que nos da la función derivada de una función dada, los cálculos tal como usted lo ha visto suelen ser muy engorrosos. Pero aquí, también, podemos tomar caminos más cortos que nos permiten calcular derivadas con un mínimo de esfuerzo. Para ello veremos primero algunas derivadas especiales y luego un teorema que da una lista de propiedades de la derivada.

Algunas derivadas especiales

1. Si $f(x) = k$ (constante), entonces $f'(x) = 0$.
2. Si $f(x) = x$ entonces $f'(x) = 1$.
3. Si $f(x) = x^n$ (para n un número real), entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Ejemplo 35. Aplicación de derivadas especiales

Según el punto 3 anterior tenemos:

- Si $g(x) = x^{21}$ entonces $g'(x) = 21x^{21-1} = 21x^{20}$.
- Si $h(x) = x^{\frac{4}{3}}$ entonces $h'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$.
- Sea $r(x) = \sqrt{x}$. Como $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ entonces

$$r'(x) = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

- Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Como $\frac{1}{x} = x^{-1}$ entonces

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}.$$

$\triangle$

El siguiente teorema nos da propiedades generales de las derivadas.

Teorema 5.2. Propiedades de las derivadas

Sean f y g funciones derivables en un dominio común, entonces:

1. $[kf(x)]' = kf'(x)$ para cualquier constante k (la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función)
2. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$ (la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones).
3. $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$ (la derivada de una diferencia de funciones es igual a la diferencia de las derivadas de las funciones).
4. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (la derivada de un producto de funciones es igual a la derivada de la primera por la segunda sin derivar más la primera sin derivar por la derivada de la segunda)
5. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ (la derivada de un cociente es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, todo sobre el cuadrado del denominador).
6. $\left[\big(f(x)\big)^n\right]' = n\big(f(x)\big)^{n-1} \cdot f'(x)$, para n un número real.

Utilizando las propiedades dadas en este teorema y las derivadas especiales anteriormente dichas podemos calcular una cantidad enorme de derivadas, tal como lo ilustran los siguientes ejemplos.

Cálculo de derivadas usando el teorema 5.2

Ejemplo 36.

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 8x^4$
2. $g(x) = x^5 + x^3$
3. $h(x) = x^6 - 123$
4. $p(x) = (x^{-4})\sqrt{x}$
5. $r(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$
6. $s(x) = (x^5 + 4x)^{15}$

Solución: En lo que sigue verifique usted qué propiedades se usan en cada caso:

1. $f'(x) = (8x^4)' = 8(x^4)' = 8 \cdot 4x^3 = 32x^3$
2. $g'(x) = (x^5 + x^3)' = (x^5)' + (x^3)' = 5x^4 + 3x^2$
3. $h'(x) = (x^6 - 123)' = (x^6)' - (123)' = 6x^5 - 0 = 6x^5$
4. $p'(x) = [(x^{-4})\sqrt{x}]' = (x^{-4})'\sqrt{x} + (x^{-4})(\sqrt{x})' =$
   $-4x^{-5}\sqrt{x} + x^{-4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $r'(x) = \left[\dfrac{x^3}{x^2+1}\right]' = \dfrac{(x^3)'(x^2+1) - x^3(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$
   $= \dfrac{3x^2(x^2+1) - x^3(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$
6. $s'(x) = [(x^5 + 4x)^{15}]' = 14(x^5 + 4x)^{14} \cdot (x^5 + 4x)' =$
   $14(x^5 + 4x)^{14} \cdot (5x^4 + 4)$

$\triangle$

Ejemplo 37.

Calcular la derivada de las siguientes funciones

1. $q(x) = 2x^5 + 4x^3 + 2x$.
2. $f(x) = (x^5 - 2x^3)(x^{14} + 15x^2 + 6x)$
3. $g(t) = \dfrac{t+1}{t^2 - 3t + 1}$
4. $h(t) = \sqrt[3]{t^3 + 5t - 4}$

Solución:

1. $q'(x) = (2x^5 + 4x^3 + 2x)' = 10x^4 + 12x^2 + 2$.
2. $f'(x) = [(x^5 - 2x^3)(x^{14} + 15x^2 + 6x)]' =$
   $(5x^4 - 6x^2)(x^{14} + 15x^2 + 6x) + (x^5 - 2x^3)(14x^{13} + 30x + 6)$
3. $g'(t) = \left[\dfrac{t+1}{t^2 - 3t + 1}\right]' = \dfrac{1(t^2 - 3t + 1) - (t+1)(2t-3)}{(t^2 - 3t + 1)^2}$.
   Note que aquí se utilizó la letra t como variable independiente.

4. $h'(t) = [\sqrt[3]{t^3+5t-4}]' = \left[(t^3+5t-4)^{1/3}\right]' =$
$\frac{1}{3}(t^3+5t-4)^{-2/3} \cdot (3t^2+5)$

△

Ejemplo 38.
Calcule la derivada de

$$f(x) = \frac{(x^2+5x)^3+2x}{2x+1}$$

Solución: Tenemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\frac{(x^2+5x)^3+2x}{2x+1}\right]' \\
&= \frac{\left(\left[(x^2+5x)^3\right]' + (2x)'\right)(2x+1) - \left[(x^2+5x)^3+2x\right](2x+1)'}{(2x+1)^2} \\
&= \frac{\left(3(x^2+5x)^2(2x+5)+2\right)(2x+1) - \left[(x^2+5x)^3+2x\right](2)}{(2x+1)^2}
\end{aligned}$$

△

Derivadas de orden superior

Dada una función, una vez que se calcula la primera derivada, es posible a su vez calcular la derivada de esta derivada y así sucesivamente. Estas se llaman derivadas de *orden superior*. Así

- La derivada de la primera derivada de f se llama **segunda derivada** de f y se denota por f''. Esto es
$$f''(x) = [f'(x)]'.$$
- A su vez, la derivada de la segunda derivada de f se llama **tercera derivada** de f y se denota por f'''. Esto es
$$f'''(x) = [f''(x)]'.$$
- Y así sucesivamente. En general la $n-$**ésima derivada de** f es la derivada de la $(n-1)-$ésima derivada de f y se denota por $f^{(n)}$. Así
$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Ejemplo 39. Cálculo de la segunda derivada

Calcular la segunda derivada de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$.

Solución: Tenemos $f'(x) = (x^3 + 4x^2 - 1)' = 3x^2 + 8x$ y por lo tanto $f''(x) = (3x^2 + 8x)' = 6x + 8$. △

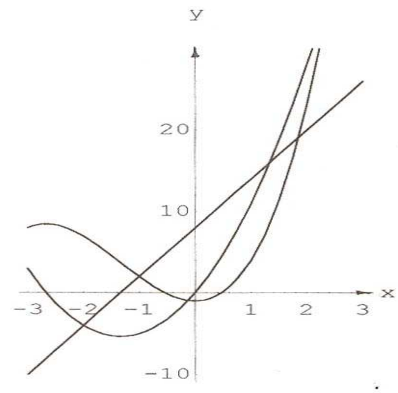


Figura 5.15. Aquí aparecen f, f' y f''

Ejemplo 40. Cálculo de la cuarta derivada

Calcular la cuarta derivada de $f(x) = x^6 - x^5 + x^3$.

Solución: Tenemos sucesivamente

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^5 - 5x^4 + 3x^2, \\ f''(x) &= 30x^4 - 20x^3 + 6x, \\ f'''(x) &= 120x^3 - 60x^2 + 6, \\ f^{(4)}(x) &= 360x^2 - 120x \end{aligned}$$

△

Algunos ejemplos de aplicaciones

Vimos en el primer capítulo que se puede interpretar la derivada como una *velocidad instantánea* o gráficamente como la *pendiente de una recta tangente*. Los siguientes ejemplos se refieren a esas interpretaciones.

Ejemplo 41. Cálculo de la velocidad

Suponga que un objeto se mueve en línea recta de modo que en cada instante t su distancia al origen es

$$d(t) = 2t^3 + t^2 + 1 \text{ metros.}$$

Determinar su velocidad en cada instante t, ¿cuál es su velocidad a los 4 seg?, ¿y a los 6 seg?

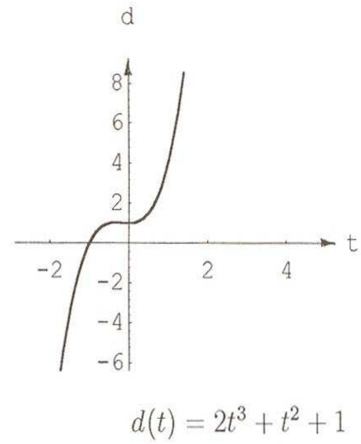


Figura 5.16.

Solución: Sabemos que la velocidad $v(t)$ está dada por la derivada $d'(t)$, de manera que

$$v(t) = d'(t) = 6t^2 + 2t \,\text{m/seg},$$

en cada instante t.

La velocidad a los 4 seg sería

$$v(4) = d'(4) = 6(4)^2 + 2(4) = 104 \,\text{m/seg}$$

y a los 6 segundos sería

$$v(6) = d'(6) = 6(6)^2 + 2(6) = 228 \,\text{m/seg}$$

△

Ejemplo 42. Cálculo de la recta tangente

Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva dada por

$$g(x) = 4 - x^2$$

en el punto $(1, 3)$.

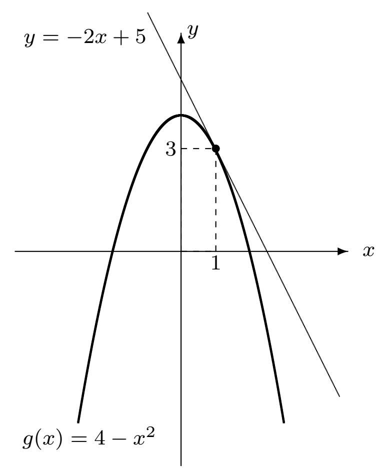


Figura 5.17. g y su tangente en $(1, 3)$

Solución: Observe que el punto $(1, 3)$ pertenece a la curva pues si $x = 1$ entonces $g(1) = 4 - 1^2 = 3$. Sabemos entonces que la pendiente m de la recta tangente es la derivada de g evaluada en 1. Tenemos $g'(x) = -2x$ y por lo tanto

$$m = g'(1) = -2(1) = -2.$$

La intersección b se calcula mediante

$$b = 3 - (-2)(1) = 3 + 2 = 5.$$

De manera que la ecuación de la recta es

$$y = -2x + 5$$

△

Ejemplo 43. Cálculo de la recta normal

Para la misma función del ejemplo anterior determinar la **recta normal** a la curva en el punto $(1, 3)$

Solución: Primero dos cosas:

- La *recta normal* a la curva en un punto es la recta que es perpendicular a la tangente en ese punto.
- Si dos rectas (que no son ni horizontales ni verticales) son perpendiculares entonces el producto de sus pendiente es -1. Esto es, si la pendiente de una es m, la de la otra es $\frac{-1}{m}$.

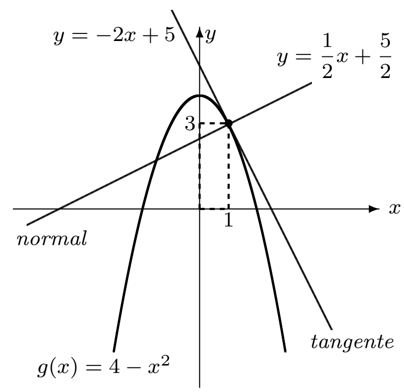


Figura 5.18. g, la tangente y la normal en $(1, 3)$

Según esto, como en el ejercicio anterior calculamos que la pendiente de la tangente es $m = -2$, entonces la pendiente de la normal es

$$\frac{-1}{m} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2},$$

y la intersección sería

$$b = 3 - \tfrac{1}{2} \cdot 1 = 3 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2}$$

y por lo tanto la ecuación de la recta normal es

$$y = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}$$

△

Aquí se estudia la derivación implícita, que sirve para determinar la derivada de funciones dadas en forma implícita mediante una ecuación que la relaciona con la variable independiente.

5.3 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

No todas las curvas se pueden describir como una sola función. Por ejemplo, la curva que se presenta en la figura 5.20 es una circunferencia y no representa una función.

Sin embargo, usted puede ver que la semicircunferencia superior sí representa una función y la semicircunferencia inferior también representa una función. Podemos obtener dos funciones diferentes a partir de esta circunferencia. Estas se llaman **funciones implícitas**.

La circunferencia representada en el dibujo tiene centro en $(0, 0)$, y radio 4 su ecuación es entonces

$$x^2 + y^2 = 16.$$

Esto quiere decir que un punto (x, y) está en la circunferencia si y solo si satisface la ecuación. Por ejemplo $(0, -4)$ pertenece a la circunferencia porque

$$0^2 + (-4)^2 = 0 + 16 = 16;$$

también $(3, \sqrt{7})$ pertenece a la circunferencia porque

$$3^2 + (\sqrt{7})^2 = 9 + 7 = 16,$$

etc. Por otra parte, el punto $(-2, \sqrt{11})$ no pertenece a la circunferencia porque

$$(-2)^2 + (\sqrt{11})^2 = 4 + 11 = 15 \neq 16.$$

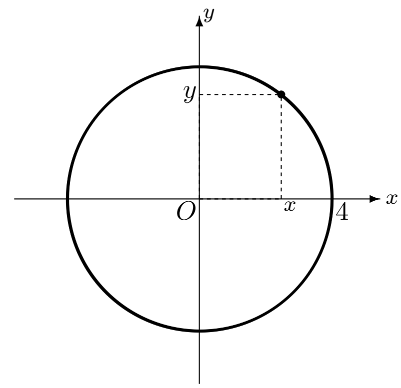


Figura 5.19. Circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 4

Dijimos, viendo el dibujo, que de esta circunferencia podemos obtener dos funciones. Efectivamente estas funciones se pueden obtener despejando y de la ecuación:

$$x^2 + y^2 = 16 \Longrightarrow y^2 = 16 - x^2 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

y tenemos las funciones

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2} \quad \text{que define la semicircunferencia superior,}$$

$$g(x) = -\sqrt{16 - x^2} \quad \text{que define la semicircunferencia inferior.}$$

Funciones dadas explícitamente

Sin embargo, no siempre es factible despejar funciones a partir de una ecuación dada, aunque sepamos que hay dos o más funciones implícitas definidas. Y, aún así, podríamos estar interesados en, por ejemplo, determinar la ecuación de la recta tangente a la curva en algunos de sus puntos.

Resulta que es posible derivar una función implícita aún cuando no podamos despejarla de la ecuación que la define. Basta sencillamente con derivar ambos miembros de la ecuación que la define, teniendo en cuenta, eso si, que una de las variables es función de la otra. El siguiente ejemplo ilustra el método llamado **derivación implícita**.

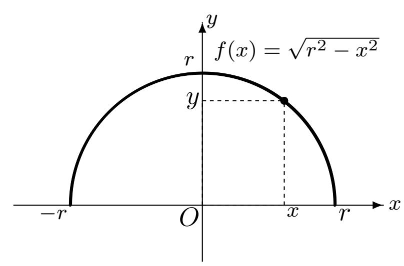


Figura 5.20. Semicircunferencia superior

Ejemplo 44. Cálculo de la derivada en un punto de la circunferencia

Considere que y es una función de x definida por la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 = 16.$$

Determinar y' y encontrar su valor en el punto $(3, \sqrt{7})$.

Solución: Vamos a derivar a ambos lados de la ecuación, pero teniendo el cuidado de recordar que y es función de x:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2=16 \quad &\Rightarrow \quad (x^2+y^2)'=(16)' \qquad \text{(vamos a derivar ambos miembros)}\\
&\Rightarrow \quad 2x+2y\cdot y'=0\\
&\qquad \left(\text{aplicamos la regla } \big([f(x)]^n\big)'=n[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)\right)\\
&\Rightarrow \quad 2y\cdot y'=-2x\\
&\Rightarrow \quad y'=\frac{-2x}{2y}\\
&\Rightarrow \quad y'=\frac{-x}{y}
\end{aligned}$$

Ahora, en el punto $(3,\sqrt{7})$ tenemos $x=3$, $y=\sqrt{7}$, por lo tanto aquí se tiene

$$y'=\frac{-3}{\sqrt{7}}.$$

$\triangle$

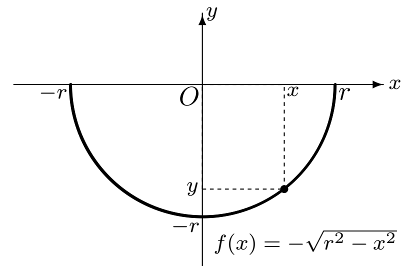


Figura 5.21. Semicircunferencia inferior

Una comprobación:

Consideremos ahora $y=\sqrt{16-x^2}$ (la semicircunferencia superior); tenemos:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{16-x^2}}\cdot(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}.$$

Como $y=\sqrt{16-x^2}$, entonces tendríamos

$$y'=\frac{-x}{y}$$

que coincide con el resultado anteriormente obtenido.

★ *Actividad:* Calcule y' para $y=-\sqrt{16-x^2}$. Debe obtener el mismo resultado que en el ejemplo anterior.

Ejemplo 45. Cálculo de las rectas tangente y normal en una hipérbola

Determine la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva

$$x^2 - y^2 = 9$$

en el punto $(5, 4)$. Esta curva se llama *hipérbola*.

Solución: Por derivación implícita:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = 9 \quad &\Rightarrow \quad (x^2 - y^2)' = (9)' \\ &\Rightarrow \quad 2x - 2y \cdot y' = 0 \\ &\Rightarrow \quad y' = \frac{x}{y} \end{aligned}$$

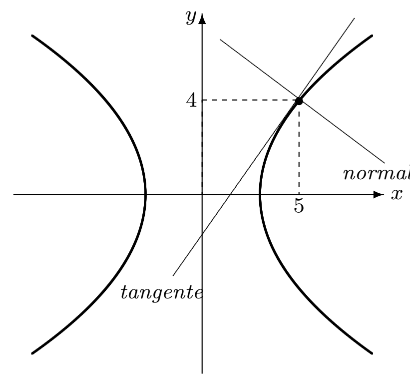


Figura 5.22. Hipérbola $x^2 - y^2 = 9$

La pendiente m de la recta tangente es y' evaluada en $x = 5$, $y = 4$, entonces

$$m = \frac{5}{4}$$

y

$$b = 4 - \frac{5}{4} \cdot 5 = 4 - \frac{25}{4} = \frac{-9}{4}.$$

La ecuación de la recta tangente es

$$y = \frac{5}{4}x - \frac{9}{4}.$$

Ahora, la pendiente m_0 de la normal es $m_0 = \frac{-1}{m}$, es decir

$$m_0 = \frac{-1}{\frac{5}{4}} = \frac{-4}{5}$$

y la intersección sería

$$b_0 = 4 - (\frac{-4}{5})(5) = 4 + 4 = 8.$$

De manera que la ecuación de la normal es

$$y = -\frac{4}{5}x + 8$$

△

Ejemplo 46. Cálculo de la derivada en una ecuación

Determinar y' si y está dada implícitamente por la ecuación

$$2xy^2 + y^3 = x^3 + 2.$$

Solución: Procedemos por derivación implícita derivando ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{aligned}
2xy^2 + y^3 = x^3 + 2 \quad &\Rightarrow \quad (2xy^2 + y^3)' = (x^3 + 2)' \\
&\Rightarrow \quad (2xy^2)' + (y^3)' = (x^3)' + (2)' \\
&\Rightarrow \quad (2x)'y^2 + (2x)(y^2)' + 3y^2 \cdot y' = 3x^2 \\
&\Rightarrow \quad 2y^2 + (2x)(2y \cdot y') + 3y^2 \cdot y' = 3x^2 \\
&\Rightarrow \quad 2y^2 + (4xy + 3y^2)y' = 3x^2 \\
&\Rightarrow \quad (4xy + 3y^2)y' = 3x^2 - 2y^2 \\
&\Rightarrow \quad y' = \frac{3x^2 - 2y^2}{4xy + 3y^2}
\end{aligned}$$

△

Se presenta una breve reseña sobre la vida y obra de uno de los creadores del Cálculo: Gottfried Leibniz.

5.4 LEIBNIZ Y EL CÁLCULO

La Europa del siglo XVII estaba “madura” para un salto cualitativo en el tratamiento de los métodos infinitesimales. Y una prueba de ello es que tantos matemáticos de primer orden le hubieran entrado a esta temática en relativamente tan poco tiempo. Ya hemos mencionado al gran Newton, ahora vamos a señalar el trabajo de Leibniz, un hombre de muy diferentes aficiones intelectuales que fue, sin duda, una de las grandes mentes universales de la humanidad.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) nació en Leipzig, Alemania, y vivió casi siempre alrededor de la ciudad de Hanover, donde sirvió a los duques de la ciudad.

Junto con Newton se considera creador del Cálculo Diferencial e Integral. Newton construyó el Cálculo entre 1665 y 1666, mientras Leibniz lo hizo entre 1773 y 1776. Pero fue Leibniz quien publicó primero sus resultados (entre 1684 y 1686) y luego lo hizo Newton (entre 1704 y 1736). Ambos hicieron sus contribuciones de manera independiente y con características propias, sin embargo durante décadas se dio una polémica muy famosa sobre quién lo había encontrado primero.

Hubo polémica entre Newton y Leibniz

Leibniz entró a la Universidad de Leipzig a los 15 años en donde estudió derecho, teología, filosofía y matemáticas. Aunque a los 20 años tenía la preparación para que le dieran el título de doctor en derecho no se lo dieron por su juventud (aunque algunos piensan que fue por envidia y temor ante un joven tan brillante). Logró conseguir su título en otra universidad (Nuremberg) y allí rechazó incluso un puesto de profesor de leyes, para dedicarse a la diplomacia por más de 40 años.

Leibniz mismo dijo que hasta 1672 casi no sabía nada de matemáticas. En ese año fue que conoció al matemático holandés Christiaan Huygens que lo puso en contacto con obras matemáticas importantes de Descartes y Pascal.

Una mente universal

Además de diplomático, Leibniz fue filósofo, abogado, historiador, filólogo y hasta un pionero de la geología. Sus trabajos en matemáticas y filosofía son de lo mejor que el mundo ha producido.

Podría decirse que mientras que el enfoque de Newton en el Cálculo fue *físico*, el de Leibniz fue esencialmente *geométrico* e incluso algebraico. La obra que recoge su método fue un artículo que apareció en 1684 en una revista llamada *Acta eruditorum*, que él había fundado hacía un par de años.

El artículo contenía los símbolos dx, dy y $\dfrac{dy}{dx}$, así como las reglas de la derivación como

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Los mismos nombres de cálculo diferencial e integral provienen de *calculus differentialis* y *calculus integralis* (en latín) que usó Leibniz.

Gottfried Leibniz

El uso de los símbolos "=" y "×" para denotar igualdad y multiplicación también fueron resultado de la influencia de este gran hombre. Los términos "función" y "coordenadas" también.

La derivación e integración son procesos inversos

Newton y Leibniz

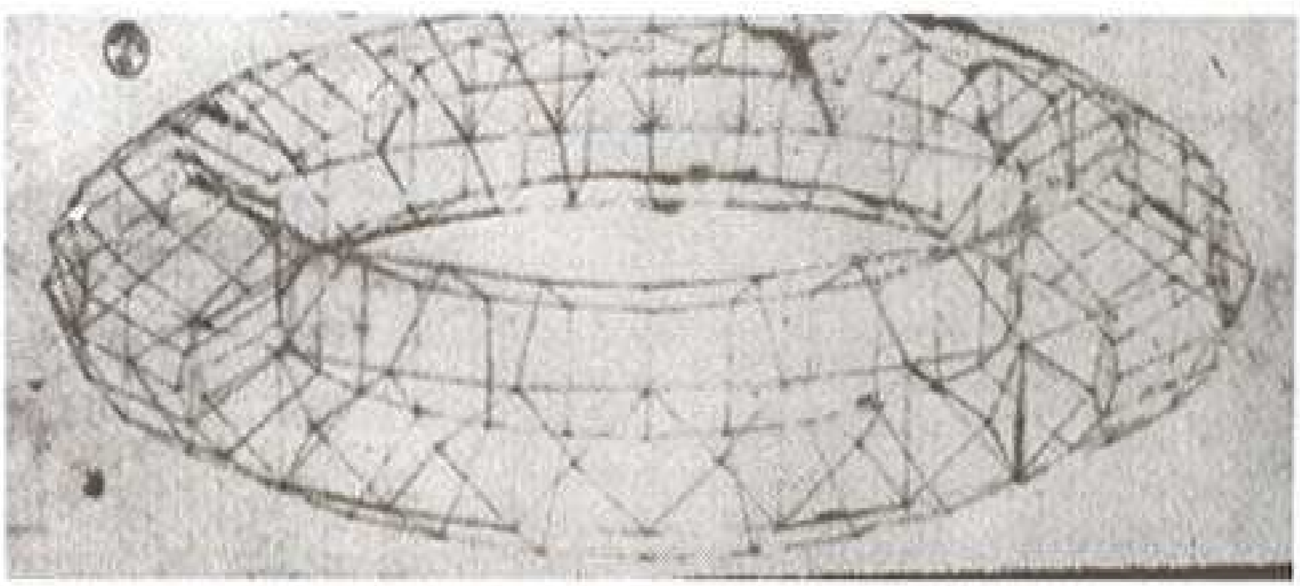
Tanto Newton como Leibniz comprendieron la esencia y el significado teóricos del nuevo método. Ambos se dieron cuenta y generalizaron la idea de que la derivación y la integración eran procesos inversos. Pero el estilo de ambos era diferente. Newton era más empírico y buscaba la aplicación, Leibniz era especulativo y buscaba la generalización. Por ejemplo, Leibniz precisó muy bien las fórmulas de la derivación, buscando un método general. Newton nunca las precisó, las usó en medio de su visión aplicada. El impacto extraordinario que tuvieron las aplicaciones del Cálculo en la física, precisamente, hizo que durante el siglo

XVIII el énfasis que tuvo la construcción matemática fuera de aplicaciones.

El impacto de los trabajos de Leibniz en la comunidad científica y matemática de la época fue grande. Por ejemplo, a partir de los mismos y en relativamente poco tiempo, los hermanos suizos Bernoulli desarrollaron enormemente los resultados de lo que hoy sería el cálculo universitario de pregrado.

A pesar de que la notación y formulación de Leibniz eran más útiles, los matemáticos ingleses se negaron a usarlas durante décadas, debido a la disputa entre Newton y Leibniz sobre la "paternidad" del Cálculo. Con esto se hizo un flaco favor a las matemáticas en Inglaterra.

A diferencia de Newton, Leibniz murió sin honores, fue enterrado con solo la presencia de su secretario y los sepultureros.



Formas de poliedros en estudios de perspectiva por Paolo Ucello, pintor italiano del Renacimiento

5.5 EJERCICIOS DEL *CAPÍTULO 5*

Interpretación gráfica

En los ejercicios 1 a 4 la figura dada representa una función f. En cada caso determine:

(a) los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$,

(b) los valores de x para los cuales la función no es derivable.

1.

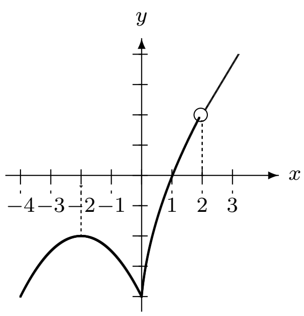


Figura 5.23.

2.

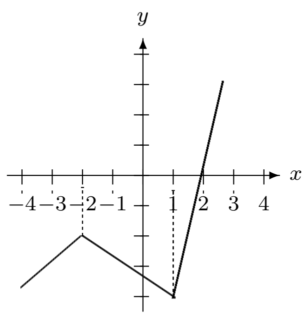


Figura 5.24.

3.

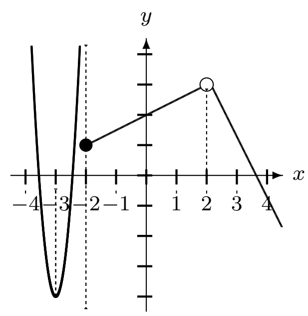


Figura 5.25.

4.

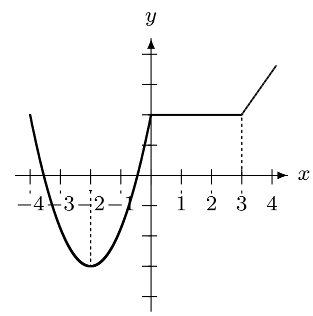


Figura 5.26.

Falso o Verdadero

En los ejercicios 5 a 10 diga si la afirmación es falsa o verdadera (explique).

5. Si f es una función continua en $x = 4$ entonces podemos asegurar que existe $f'(4)$.

6. Si f y g son funciones derivables tales que $f(x) > g(x)$ para todo x entonces $f'(x) > g'(x)$ para todo x.

7. Si $f'(c) = 0$, $g'(c) = 0$ y $h(x) = f(x)g(x)$ entonces $h'(c) = 0$.

8. Si $p(x) = f(x)h(x)g(x)$, entonces $p'(x) = f'(x)h(x) + h'(x)g(x) + g'(x)f(x)$.

9. Si la figura 5.27 representa la gráfica de una función f entonces podemos asegurar que $f'(1) = f'(2)$.

10. Según la figura 5.27 podemos afirmar que $f'(2) > f(-2)$.

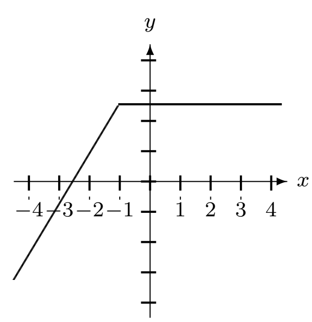


Figura 5.27.

Selección única

En los ejercicios 11 a 20 escoja la opción que responda o complete correctamente la proposición dada.

11. Si $f(x) = \sqrt{2x+3}$ entonces $f'(3)$ es igual al siguiente límite

(a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+h}-3}{h}$ (b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+2h}-3}{h}$

(c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{2\cdot 3+3}+h-3}{h}$ (d) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+h}+3}{h}$

12. En $x=0$ la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

es

(a) derivable y continua (b) derivable y no continua (c) continua y no derivable (d) no continua y no derivable

13. Si f y g son funciones tales que $f(2) = 3$, $f'(2) = -1$, $g(2) = 2$ y $g'(2) = 4$ entonces $(f\cdot g)'(2)$ es igual a

(a) -4 (b) 5 (c) 10 (d) 2

14. Para las mismas funciones del ejercicio anterior se tiene que $(f/g)'(2)$ es igual a

(a) $-1/4$ (b) $-7/8$ (c) $5/8$ (d) $-7/2$

15. Sean f y g funciones tales que $g(x) = f(-x)$ para todo x, entonces

(a) $g'(x) = f'(x)$ (b) $g'(x) = -f'(x)$

(c) $g'(-x) = -f'(x)$ (d) $g'(-x) = f'(x)$

16. ¿En que valores de x no es derivable la siguiente función?

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x \geq 1 \\ x^2+x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ |x+1|-1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(a) Solo en -1 y 1 (b) En -1, 1 y 0

(c) Solo en -1 y 0 (d) Solo en 1 y 0

17. Sean f y g funciones derivables tales que $f\left([g(x)]^2\right)$ es derivable. La derivada de $f\left([g(x)]^2\right)$ es igual a

(a) $2f'\left([g(x)]^2\right)\cdot g(x)\cdot g'(x)$

(b) $2f'\left([g(x)]^2\right)\cdot g'(x)$

(c) $2f[g(x)]\cdot g'(x)$ (d) $2f'(x)\cdot g'(x)$

18. Si f es una función derivable en $x=3$ y $f'(3) = 2$, entonces podemos afirmar que:

(a) $\lim\limits_{r\to 3} \dfrac{f(r)-9}{r-3} = 2$

(b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$

(c) $\lim\limits_{r\to 2} \dfrac{f(r)-f(2)}{r-2} = 3$ (d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$

19. La figura 5.28 corresponde a una función f. Considere las siguientes afirmaciones:
I. f no es derivable en $x=1$.
II. f es derivable en $x=2$.
III. f es derivable en $x=0$.
De estas afirmaciones son verdaderas:
(a) Solo I (b) Todas
(c) Solo I y III (d) Solo III

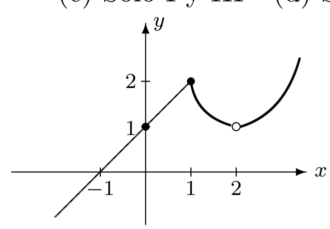


Figura 5.28.

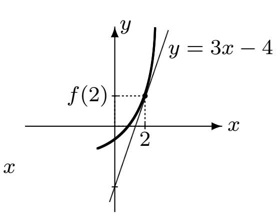


Figura 5.29.

20. Según la figura 5.29, la recta de ecuación $y = 3x-4$ es tangente a la gráfica de f en el punto $(2, f(2))$. Según esto, podemos afirmar que:

(a) $f'(2) = 3$ y $f(2) = -4$

(b) $f'(2) = -4$ y $f(2) = 3$

(c) $f'(2) = 3$ y $f(2) = 2$

(d) $f'(2) = 2$ y $f(2) = 3$

Problemas y preguntas de desarrollo

21. Para cierta función diferenciable f sabemos que $f(1,03) = 3,85$ y $f(1,05) = 3,82$. Dé un valor estimado razonable de $f'(1,03)$; justifique su respuesta.

22. Para cierta función diferenciable f se sabe que $f(5) = 3$, y $f'(5) = 0,3$. Dé un valor estimado razonable de $f(5,04)$; justifique su respuesta.

En los ejercicios 23 a 28 utilice la definición de derivada o su forma alternativa para calcular la derivada de la función en el punto x indicado en cada caso.

23. $f(x) = x^2 - x + 1, \;\; x = 1$

24. $f(x) = \sqrt{x+3}, \;\; x = 2$

25. $f(x) = \dfrac{3}{x-2}, \;\; x = -1$

26. $f(x) = x^3 - x^2 + 1, \;\; x = 0$

27. $f(x) = \sqrt{2x+5}, \;\; x = 2$

28. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}, \;\; x = 1$

En los ejercicios 29 a 33 utilice la definición de derivada o su forma alternativa para calcular la función derivada de la función dada en cada caso.

29. $f(x) = x^2 + 1$

30. $f(x) = \sqrt{x-5}$

31. $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$

32. $f(x) = x^3 - 1$

33. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

34. En cada una de ístas figuras se representa la grífica de una funciín f. Utilice en cada caso la informaciín dada en el dibujo para calcular de modo aproximado el valor de $f'(1)$ (sugerencia: calcule la pendiente de la recta dada en el dibujo).

(a)

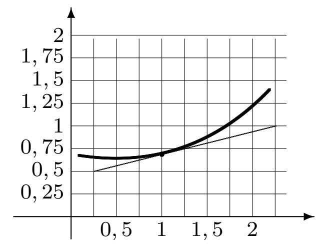


Figura 5.30.

(b)

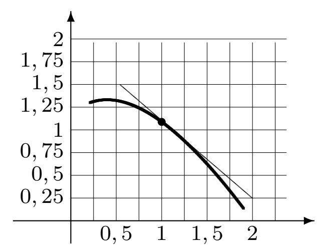


Figura 5.31.

35. En cada ísta figura se representa la grífica de una funciín g. Utilice la informaciín dada en el dibujo para calcular de modo aproximado el valor de $f'(2)$.

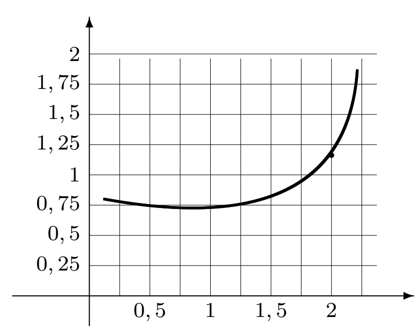


Figura 5.32.

En los ejercicios 36 a 60 calcule la derivada de la función dada utilizando las propiedades de la derivada (no use la definición).

36. $g(t) = t^4 - 3\sqrt{t}$

37. $h(x) = 3\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x}$

38. $f(t) = \dfrac{t+2}{t-3}$

39. $f(t) = \dfrac{t^2-3}{t^2+3t}$

40. $g(x) = \dfrac{2x^3+x^2+1}{2x^2+1}$

41. $f(t) = \dfrac{\sqrt{t}+2}{t^2-3}$

42. $h(x) = (x^5 - 2x)(x^3 + x^2 - x)$

43. $h(x) = (x^{-3} - 2x^2)(3x^2 + x^{1/2} - 3x)$

44. $g(x) = (\frac{1}{2}\sqrt{x} + 3x^{-2})(\frac{1}{3}\sqrt[4]{x} + x)$

45. $h(x) = (4 - \sqrt[5]{2x})(x^{-3} + x^2 - x)$

46. $f(x) = \dfrac{2}{x+\sqrt{x}}$

47. $g(x) = \dfrac{2\sqrt[3]{x}+x-1}{2x^2+x}$

48. $g(x) = (3x+15)^{10}$

49. $f(t) = \sqrt{3t+1}$

50. $g(x) = 3\sqrt[3]{x^2+x+1}$

51. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}}{3x+2}$

52. $g(x) = \dfrac{x+\sqrt[3]{x^2+1}}{x^2+2}$

53. $f(x) = \left(\dfrac{x^3-2x}{x^4+3x^2}\right)^5$

54. $h(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}}$

55. $h(t) = 5t^{-5} + \sqrt[4]{t} + t^{1/2}$

56. $h(x) = (-2x^3 + 15x)^{-8}$

57. $h(x) = \dfrac{(x^2+3x)(x^2+4)}{2x+1}$

58. $h(x) = \dfrac{(x^3-3\sqrt{x})(2x^2+4x)}{x+5}$

59. $f(x) = 2x + 5\sqrt{2x^3+x^2}$

60. $h(r) = 5(3r+1)^3 + 2(r^2-3r)^{-3}$

En los ejercicios 61 a 65 calcule la primera, segunda, tercera y cuarta derivadas de la función dada en cada caso.

61. $f(x) = x^3 - 2x + 5$

62. $g(x) = x^5 + x^4 - 2x$

63. $h(x) = 2\sqrt{x}$

64. $g(t) = t^{-4} + 3t^{-5}$

65. $g(r) = 3r^{-5/2} + 2\sqrt[3]{r}$

Las ecuaciones dadas en los ejercicios 66 a 70 definen y como función implícita de x. En cada caso determine $\frac{dy}{dx}$.

66. $x^2 + 3y^2 = 5$

67. $xy - x^2 + y^3 = 0$

68. $2x^2y + 3xy^2 = 1$

69. $x^3y^2 + xy = 2y$

70. $(x^2+y^2)^2 = x^4 + y^5$

71. Un objeto se mueve en línea recta de manera que a los t segundos se encuentra a $s(t) = 3t^2 + 2t + 5$ metros del origen. Determine su velocidad a los 3 segundos.

72. Un objeto se mueve en línea recta de manera que a los t segundos se encuentra a $d(t) = \sqrt{t^2 + 4}$ metros del origen. Determine su velocidad a los 4 segundos.

73. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - x^2 + 1$ en el punto $(1, 1)$.

74. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x^2+1}$ en el punto $(2, \frac{1}{5})$.

75. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 + x - 4$ en el punto $(-1, -2)$.

76. Determine la ecuación de la recta tangente y la de la recta normal a la curva $y = x^3 + 2x - 1$ en el punto $(1, 2)$.

77. Determine la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la curva $4x^2 + 9y^2 = 36$ en el punto $(1, \frac{4\sqrt{2}}{3})$

78. Determine la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la curva $x^3y^3 - 4xy + y^4 = 1$ en el punto $(2, 1)$.

79. Determine en qué puntos la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ tiene tangente horizontal.

80. Una recta L_1 es tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 + x^2 - x$ en el punto $(1, 1)$. Otra recta L_2 es tangente a la misma curva en el punto $(c, f(c))$. ¿Cuál debe ser el valor de c para que las rectas L_1 y L_2 sean paralelas?

81. Existen dos puntos de la parábola $y = 2x^2 + x - 1$ para los cuales se tiene que la pendiente de la recta tangente es igual a la ordenada del punto. ¿Cuáles son esos puntos?

82. La recta de ecuación $y = \frac{9}{4}x - 3$ es tangente a la curva $f(x) = 2x + \sqrt{x}$. Determine el punto de tangencia (esto es, de acuerdo con la figura 5.33, se trata de calcular $(a, f(a))$).

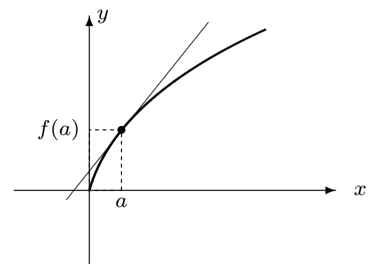


Figura 5.33.

83. Determine los puntos de la curva $y = x^2 + 1$ para los cuales las rectas tangentes pasan por el origen (en la figura 5.34, determinar $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$).

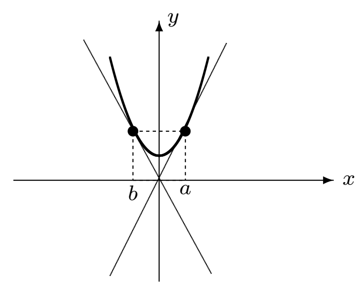


Figura 5.34.

84. Pruebe que no existe ninguna recta tangente a $f(x) = x^3 + 2x^2$ cuya pendiente sea igual a -2.

85. Una recta L_1 es tangente a la curva $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$. Otra recta L_2 es tangente a la misma curva en el punto (c, c^2). ¿Cuál debe ser el valor de c para que las rectas L_1 y L_2 sean perpendiculares?

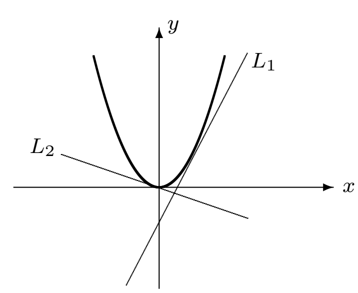


Figura 5.35.

86. La curva de la figura 5.36 corresponde a la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$. La recta L es tangente a la curva en el punto P. Pruebe que no importa cuál sea el punto P siempre se tiene que el área del triángulo AOB es igual a 2.

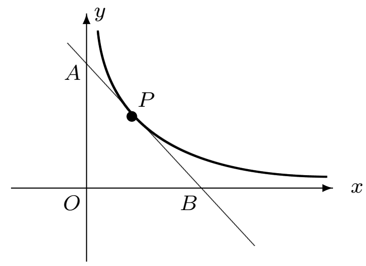


Figura 5.36.

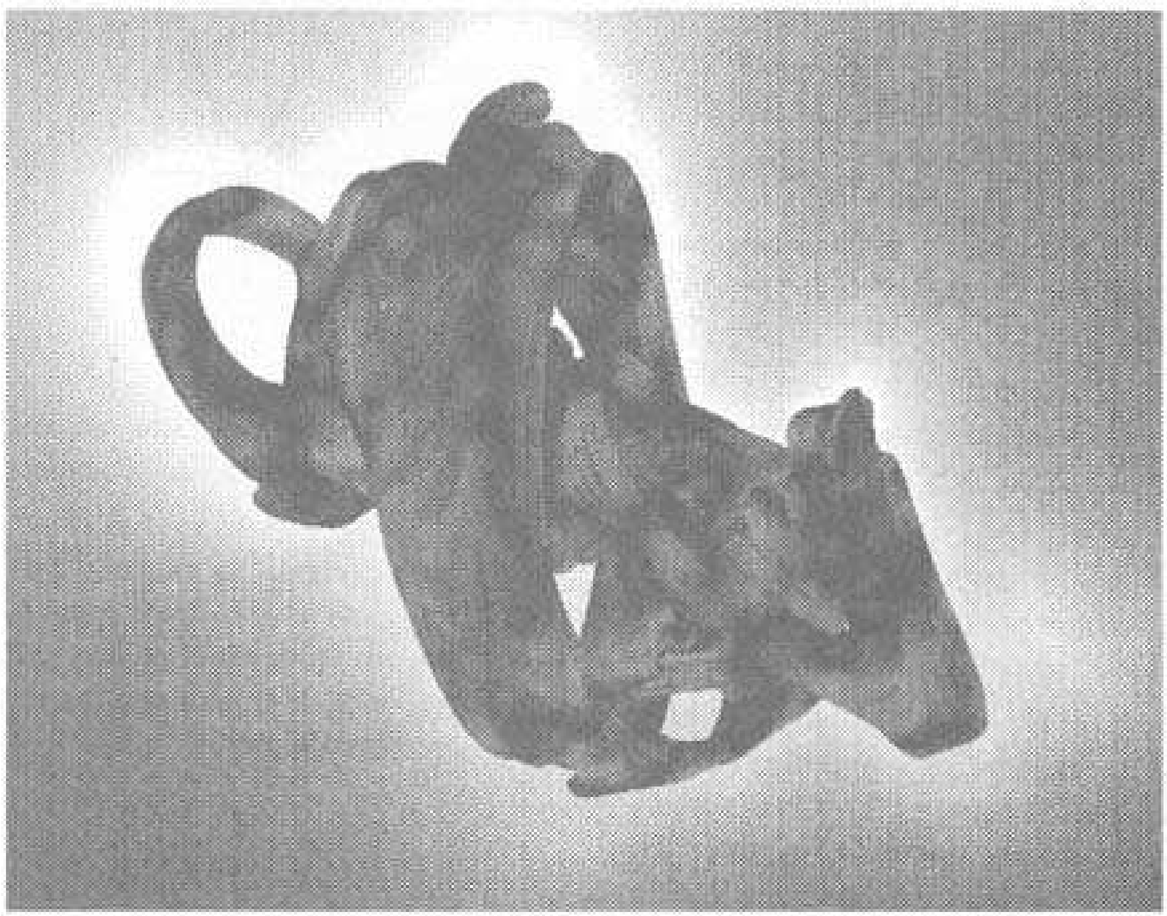


Imagen construida utilizando un fractal

Respuestas a los ejercicios impares

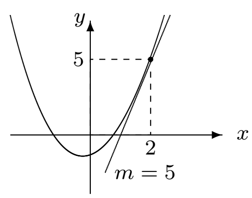
Capítulo 1

1. 300	**3.** 25%	**5.** 125
7. c	**9.** a	**11.** c
13. F	**15.** V	**17.** F

19. (a) 9 m/seg, (b) 7 m/seg, (c) 12 m/seg

21. $c = 3$, $f'(c) = 7,5$

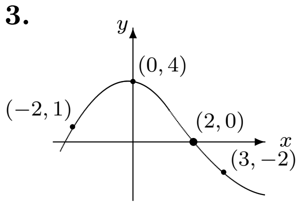
23. pendiente = 5



Capítulo 2

1. Son funciones: a, d, f, g

3.



5. (a) dominio: $[-4, +\infty[$, ámbito: $[-3, +\infty[$, (b) corta a eje y en $(0, 0)$, corta a eje x en $(0, 0)$ y $(-4, 0)$, (c) creciente en $[-2, 2]$ y en $[4, +\infty[$, decreciente en $[-4, -2]$ y $[2, 4]$.

7. (a) dominio: $\mathbb{R} - \{-2\}$, ámbito: $[0, +\infty[$, (b) corta a eje y en $(0, 2)$, corta a eje x en $(-4, 0)$, (c) creciente en $[-4, -2]$, decreciente en $[-\infty, -4]$ y $[-2, +\infty[$.

9. (a) dominio: $\mathbb{R}$, ámbito: $[-5, +\infty[$, (b) corta a eje y en $(0, 0)$, corta a eje x en $(-6, 0)$, $(0, 0)$ y $(6, 0)$, (c) creciente en $[-3, 0]$ y en $[3, +\infty[$, decreciente en $[-\infty, -3]$ y $[0, 3]$.

11. F

13. F

15. V

17. (a) F, (b) V, (c) F, (d) F

19. d

21. d

23. d

25. a

27. d

29. (a) 0, (b) 15, (c) 15, (d) 15, (e) 20

31.

x	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	1,16123	1,10466	1,09921

x	-0.001	-0.01	-0.1
$f(x)$	1,09800	1,09259	1,04041

La tabla indica que sí es posible la existencia de un límite.

33. 10

35. 2

37. 4

39. 0

41. 4

43. 10

45. $\frac{1}{5}$

47. $\frac{1}{2}$

49. $3x^2$

51. $\frac{1}{6}$

53. 1

55. $\frac{-1}{3}$

57. $\frac{-1}{4}$

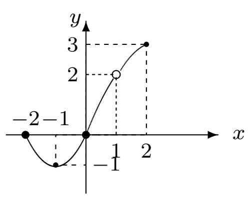
59. No existe

61. $\frac{1}{3}$

63. $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

65. $\frac{-2}{27}$

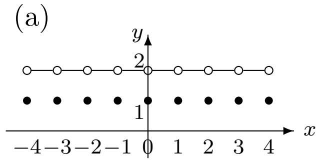
67. Una posible:



69. Por ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x-2}$ y $g(x) = \frac{-1}{x-2}$

71. Cuando a se aproxima a 0 una de las raíces se aproxima a $\frac{-c}{b}$ y la otra crece "ilimitadamente" (si $a > 0$) o decrece "ilimitadamente" (si $a < 0$).

73. (a)



(b) sí existe (es 2), (c) sí existe (es 2), (d) existe para todo $c \in \mathbb{R}$ y siempre es 2.

Capítulo 3

1. (a) -4, (b) 2, (c) no existe, (d) 6, (e) 6, (f) 6

3. (a) 0, (b) no existe, (c) no existe, (d) 0, (e) 0,
(f) 0

5. $x = -2$, $x = 2$

7. $x = -6$, $x = 4$, $x = 6$

9. F

11. V

13. V

15. c

17. a

19. d

21. d

23. b

25. No existe

27. 0

29. 1

31. 0

33. $f(3) = 1$ y $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$

35. $f(2) = 5$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 5$

37. $f(-1) = 4 = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x)$

39. $\mathbb{R}$

41. $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

43. $\mathbb{R}$

45. $\mathbb{R} - \{-2\}$

47. $\mathbb{R} - \{2\}$

49. $\mathbb{R}$

51. $\mathbb{R} - \{1\}$

53. $c = \frac{-5}{2}$

Capítulo 4

1. (a) $-\infty$, (b) $-\infty$, (c) $+\infty$, (d) $+\infty$, (e) 0,
(f) 0, (g) asíntotas verticales: $x=-2$, $x=0$;
asíntota horizontal: $y=0$

3. (a) $+\infty$, (b) $-\infty$, (c) $+\infty$, (d) $+\infty$, (e) $-\infty$, (f) $-\infty$, (g) asíntotas verticales: $x=-3$, $x=3$; asíntota horizontal: no hay

5. (a) 2, (b) 2, (c) 2, (d) 0, (e) 0, (f) 0, (g) $+\infty$,
(h) $-\infty$, (i) no hay

7. (a) 3, (b) 3, (c) 3, (d) $-\infty$, (e) $-\infty$, (f) $-\infty$,
(g) $+\infty$, (h) $+\infty$, (i) asíntota vertical: $x=0$;
asíntota horizontal: no hay

9. F

11. F

13. F

15. F

17. a

19. c

21. a

23. $+\infty$

25. $+\infty$

27. $+\infty$

29. $\frac{3}{2}$

31. $+\infty$

33. $-\infty$

35. $+\infty$

37. $-\infty$

39. $\frac{5}{2}$

41. $-\infty$

43. $+\infty$

45. $\frac{1}{2}$

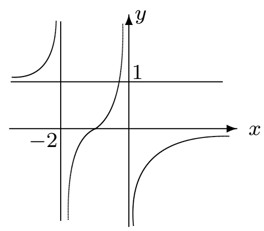
47. 0

49. Asíntotas verticales: $x=3$, $x=-3$; asíntota horizontal: $y=0$

51. Asíntota vertical: no hay; asíntota horizontal: $y=0$

53. Asíntotas verticales: $x=-1$, $x=-3$; asíntota horizontal: $y=0$

55.



57. $A=\dfrac{128}{3}$

59. (a)

x	10	50	100	1000
$f(x)$	1,31370	1,06858	1,03464	1,00349

(b) 1, (c) 1

61. $12\sqrt{2}$

Capítulo 5

1. (a) $x=-2$, (b) $x=0$, $x=2$

3. (a) $x=-3$, (b) $x=-2$, $x=2$

5. F

7. V

9. V

11. b

13. c

15. c

17. a

19. c

21. $\frac{-3}{2}$

23. 1

25. $\frac{-1}{3}$

27. $\frac{1}{3}$

29. $2x$

31. $\dfrac{-2}{(x+3)^2}$

33. $\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

35. $f'(2) \approx 1,2$

37. $\dfrac{3}{2\sqrt{x}} + \dfrac{5}{3}x^{-2/3}$

39. $\dfrac{-t^4-t^3+9t^2+9t}{(t^2+3t)^2}$

41. $\dfrac{-3t^2-8t\sqrt{t}-3}{2\sqrt{t}(t^2-3)^2}$

43. $-3x^{-2}-\frac{5}{2}x^{-7/2}+6x^{-3}-24x^3-5x^{3/2}+18x^2$

45. $-\frac{2}{5}(2x)^{-4/5}(x^{-3}+x^2-x)+(-3x^{-4}+2x-1)(4-\sqrt[5]{2x})$

47. $\dfrac{-20x^{4/3}-4x^{1/3}-6x^2+12x-3}{(2x^2+x)^2}$

49. $\dfrac{3}{2\sqrt{3t+1}}$

51. $\dfrac{-4x-1}{(3x+2)^2\sqrt{2x+1}}$

53. $\dfrac{(x^3-2x)^4(-x^6+9x^4+6x^2)}{(x^4+3x^2)^6}$

55. $-25t^{-6}+\frac{1}{4}t^{-3/4}+\frac{1}{2}t^{-1/2}$

57. $\dfrac{6x^4+16x^3+17x^2+8x+12}{(2x+1)^2}$

59. $2+\dfrac{5(3x^2+x)}{\sqrt{2x^3+x^2}}$

61. $f'(x)=3x^2-2,\ f''(x)=6x,\ f'''(x)=6,\ f^{IV}(x)=0$

63. $h'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}},\ h''(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{x^3}},\ h'''(x)=\dfrac{3}{4\sqrt{x^5}},\ h^{IV}(x)=\dfrac{-15}{8\sqrt{x^7}}$

65. $g'(r)=\frac{-15}{2}r^{-7/2}+\frac{2}{3}r^{-2/3}$,
$g''(r)=\frac{105}{4}r^{-9/2}-\frac{4}{9}r^{-5/3}$,
$g'''(r)=\frac{-945}{8}r^{-11/2}+\frac{20}{27}r^{-8/3}$,
$g^{IV}(r)=\frac{10395}{16}r^{-13/2}-\frac{160}{81}r^{-11/3}$

67. $y'=\dfrac{2x-y}{x+3y}$

69. $y'=\dfrac{-3x^2y^2-y}{2x^3y+x-2}$

71. $v=20$ m/seg

73. $y=x$

75. $y=-5x-7$

77. Recta tangente: $y=-\frac{\sqrt{2}}{6}x+3\frac{\sqrt{2}}{2}$, recta normal: $y=3\sqrt{2}\,x+3-\frac{5}{3}\sqrt{2}$

79. $(-1,13)$ y $(2,26)$

81. $(-\frac{1}{2},-1)$ y $(2,9)$

83. $(1,2)$ y $(-1,2)$

85. $c=-\frac{1}{4}$

INDICE

Conceptos y resultados

Recuadros

Nombres