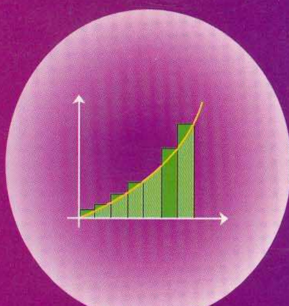
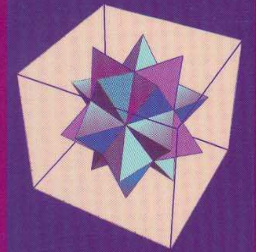
ELEMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL



VOLUMEN II
DERIVADAS, APLICACIONES Y TEMAS ESPECIALES

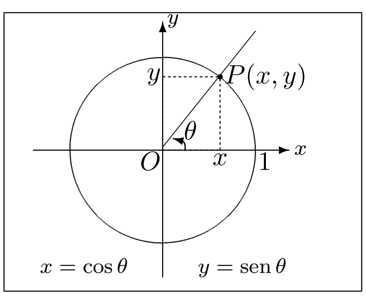


ÁNGEL RUIZ
HUGO BARRANTES

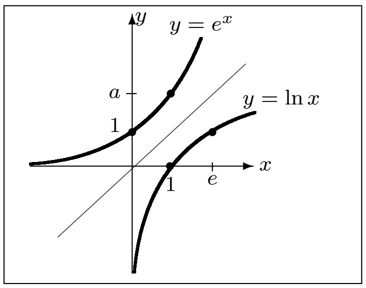
CONTENIDO

VOLUMEN II

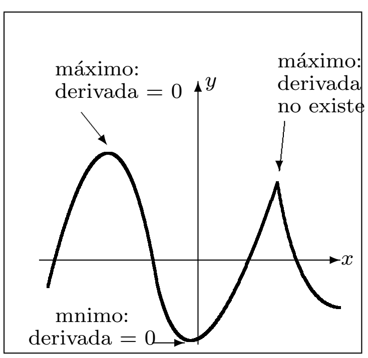
En primer lugar se realiza un repaso sobre las funciones trigonométricas, algunas de sus propiedades básicas y sus gráficas. Luego se calculan límites y derivadas de funciones en las que aparecen las funciones trigonométricas.



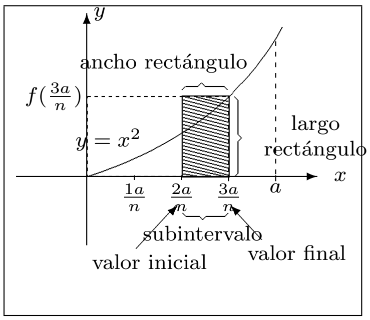
En este capítulo se repasan las funciones logarítmicas y exponenciales y se calculan lı'mites y derivadas de funciones de este tipo. Como una situación especial se utiliza el método de *derivación logarítmica* para calcular la derivada de cierto tipo de funciones. Se hace un ligera discusión sobre el desarrollo histórico de la notación en matemáticas.



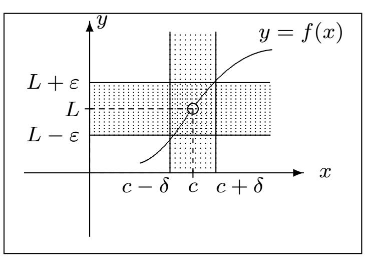
Se reseñan algunas de las aplicaciones del cálculo diferencial: situaciones especiales en que aparecen los límites y las funciones discontinuas, aplicaciones al cálculo de la velocidad y la aceleración, la construcción de gráficas de funciones y la *regla de L'Höpital*. Se proporciona algunos datos biográficos de uno de los matemáticos mś prolíficos: Leonhard Euler.



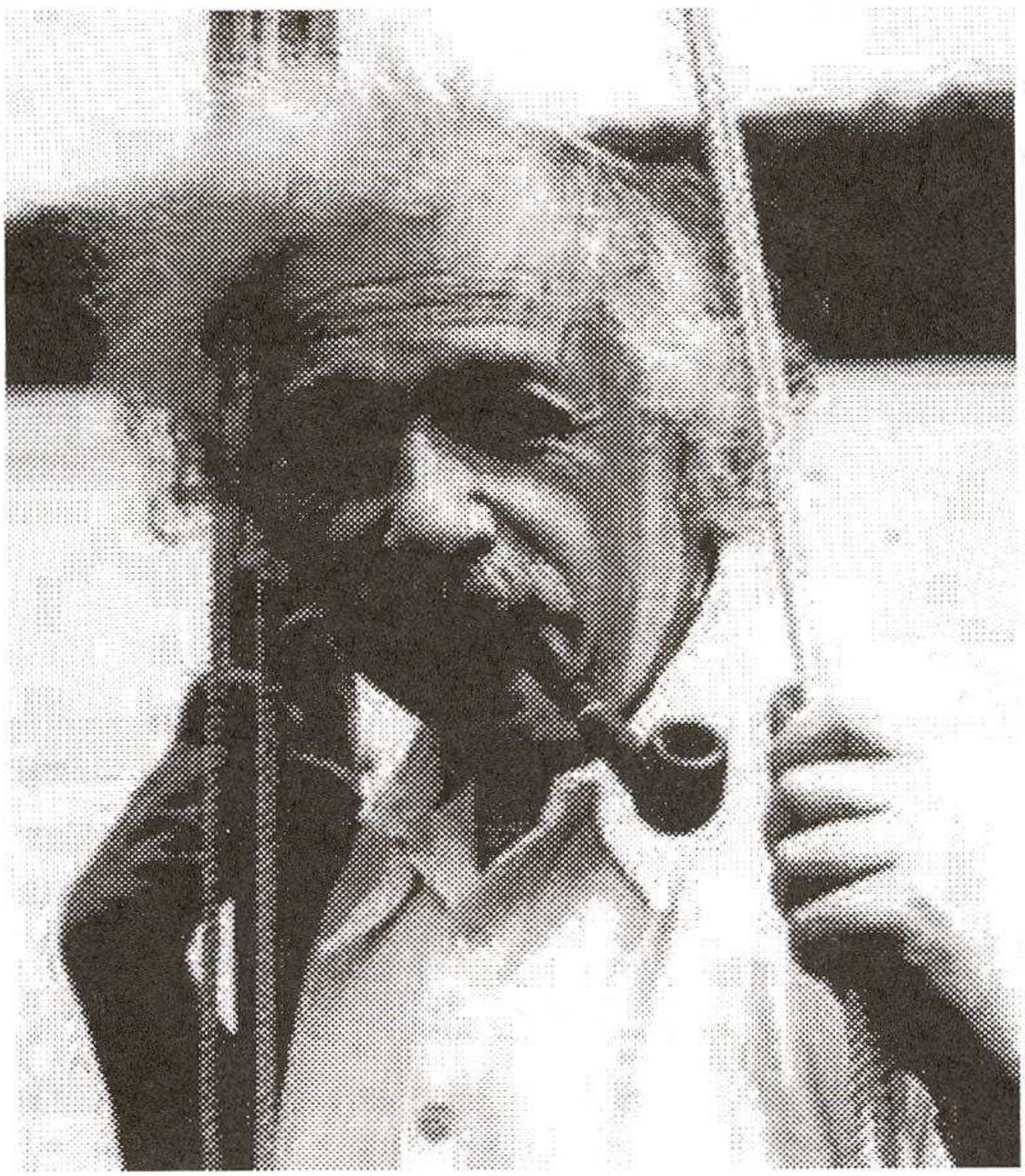
Este capítulo constituye una mirada a algunos temas especiales del Cálculo. Estos temas forman partes de cursos de Cálculo de nivel superior, pero sus rudimentos pueden ser comprendidos en este punto y permiten conocer algunas de las potencialidades de esta temática. Se hace una breve referencia a las series, la integración, las ecuaciones diferenciales y las funciones de varias variables.



Este capítulo hace referencia a uno de los aspectos fundamentales de las matemáticas: la formalización. Se comenta sobre el significado y la importancia de la demostración en matemáticas y se demuestran algunos de los teoremas estudiados a lo largo de los nueve capítulos anteriores. Finalmente se presentan algunos comentarios sobre una nueva manera de formalizar estos conceptos: el análisis no–standard.



VOLUMEN I



Albert Einstein
Físico alemán nacido en 1879, y
fallecido en Princeton, Estados Unidos en 1955.

CAPÍTULO 6

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y EL CÁLCULO

Quien se afirma a sí mismo como juez en el campo de la Verdad y el Conocimiento, será hundido por la risa de los dioses.

Albert Einstein

En el *Volumen I* vimos los métodos del *Cálculo* con funciones algebraicas. Esto es: polinomios y combinaciones de ellos mediante sumas, restas, productos, cocientes, potencias y radicales. En este capítulo veremos algunas de las reglas del cálculo referidas a otro tipo de funciones que usted ya conoce: las *funciones trigonométricas*.

La trigonometría

Trigonometría significa "medida del triángulo". Puede decirse que en ese sentido nace desde que las primeras mediciones daban lugar a los triángulos. Se podría rastrear su origen desde el Egipto y la Babilonia de la era de las grandes Civilizaciones de Bronce. Pero estaríamos hablando de una trigonometría muy rudimentaria.

El origen más elaborado de la trigonometría se desarrolló en la Grecia Antigua para ayudar en la astronomía. La astronomía griega ocupaba geometría esférica y, por eso, la trigonometría que desarrollaron fue esférica (espacial y relativa a esferas).

La creación de la trigonometría fue la obra esencialmente de tres matemáticos del período alejandrino: Hiparco (*circa* 150 a. C.), Menelao (*circa* 98 d. C.) y Ptolomeo, este último (168 d. C.) fue el gran astrónomo que sustentó la teoría geocéntrica (el Sol y los planetas giran alrededor de la Tierra).

La trigonometría plana, que es la que estudiamos normalmente en los colegios y universidades, es más bien útil para las mediciones topográficas y los griegos antiguos (como por ejemplo Herón) prefirieron aplicar la geometría euclideana y no la trigonometría plana.

Ahora bien, la división de la circunferencia en 360 unidades (*grados*) se originó en la astronomía babilónica. Ptolomeo siguió en esto a los babilónicos y, además, dividió el grado en 60 minutos (*minutae primae*), y el minuto en 60 segundos (*minutae secundae*).

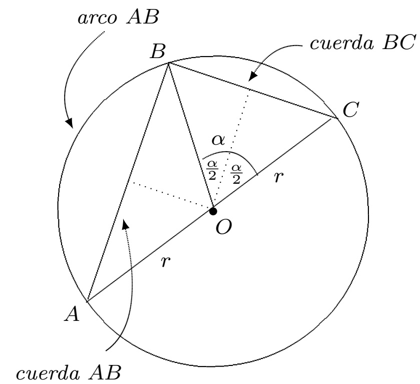


Figura 6.1.

Veamos cómo estudiaban la trigonometría los griegos. Observe el diagrama representado en la figura 6.1.

Los griegos trabajaban las funciones trigonométricas como *cuerdas* BC o AB asociadas respectivamente a un arco BC o arco AB.

Observe que en nuestros términos

$$BC = 2[\mathrm{sen}(\frac{\alpha}{2})] \cdot r$$

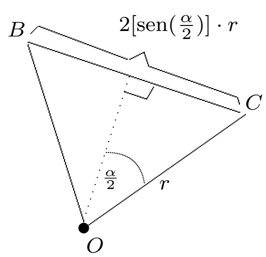


Figura 6.2.

(pues $\mathrm{sen}(\frac{\alpha}{2}) = \frac{BC}{2}/r$) y, también,

$$AB = 2[\cos(\frac{\alpha}{2})]r.$$

Usando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (2r)^2$$

Es decir:

$$[2\big(\cos(\frac{\alpha}{2})\big)r]^2 + [2\big(\mathrm{sen}(\frac{\alpha}{2})\big)r]^2 = (2r)^2$$

$$4r^2\cos^2(\frac{\alpha}{2}) + 4r^2\,\mathrm{sen}^2(\frac{\alpha}{2}) = 4r^2 \Longrightarrow$$

$$\cos^2(\frac{\alpha}{2}) + \mathrm{sen}^2(\frac{\alpha}{2}) = 1$$

Lo que es la identidad trigonométrica que ya conocemos:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

Este resultado se encuentra en Menelao, pero de seguro era conocido por sus predecesores.

Las fórmulas

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\beta\operatorname{sen}\alpha}$$

y

$$\boxed{\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

son todavía llamadas *fórmulas de Ptolomeo.*

Hindúes y árabes

Los hindúes y los árabes perfeccionaron un poco la trigonometría griega, probablemente debido a que también la ocupaban en sus estudios astronómicos. El énfasis aquí fue puesto en los cálculos más que en tratamientos generales abstractos (lo que fue típico del pensamiento hindú y árabe en contraposición con el griego).

Se conoce una obra hindú del siglo IV d.C que daba una tabla de senos calculado para cada $3,75^0$ de arco hasta los 90^0.

Los árabes tomaron la trigonometría hindú y la desarrollaron. Desde el siglo IX d.C. con el astrónomo Al-Battani se usó además del seno de los hindúes, la tangente y la cotangente. En el siglo X se hicieron tablas de la tangente y la cotangente, y hasta se usaron la secante y la cosecante como razones trigonométricas.

En el camino hacia una trigonometría como disciplina independiente se puede citar también al árabe Abu'l-Welfa (fines del siglo X) y al persa Nasir Eddin (1201-1274); este último escribió el primer texto árabe de trigonometría como ciencia autónoma.

Viíte

No fue sino con el francés Franíois Viíte que la trigonometría obtendría su forma definitiva previa a la aplicación del Cálculo. Viíte usó las 6 funciones trigonométricas usuales y, lo que es de un gran valor, estableció un tratamiento algebraico de la trigonometría (muchas de las identidades conocidas las extrajo algebraicamente). En 1579 Viíte amplió una tabla de valores trigonométrica que había elaborado el alemán Rhaeticus, dando los valores con 7 decimales para las 6 funciones trigonométricas, para cada segundo de arco.

Debe mencionarse que fue en este período (finales del siglo XVI y principios del XVII) que se empezó a usar el término *trigonometría* para esta parte de las matemáticas.

Dos recursos matemáticos ampliaron las fronteras de la trigonometría tal cual la dejó Viíte: los logaritmos (creados en el mismo período histórico) y, especialmente, algún tiempo después el uso del Cálculo infinitesimal (segunda mitad del siglo XVII).

6.1 REPASO SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Esta sección es un repaso rápido de las funciones trigonométricas: medida de ángulos, definiciones, algunas fórmulas básicas y gráficas de estas funciones. Se intercalan también algunas notas históricas relacionadas con la trigonometría.

En esta sección realizaremos un repaso de los aspectos más importantes de las funciones trigonométricas, que será de gran utilidad en lo que sigue.

Ángulos

En geometría se considera a un ángulo como la uniín de dos rayos ℓ_1 y ℓ_2 con el mismo punto inicial O. Si A es un punto de ℓ_1 y B es un punto en ℓ_2 el ángulo se denota por $\measuredangle AOB$ (figura 6.3).

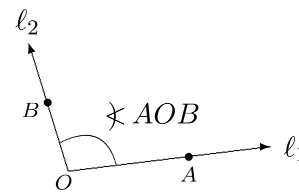


Figura 6.3.

En trigonometría los ángulos se consideran como rotaciones de un rayo. Se tiene un rayo fijo ℓ_1 con origen O y se gira el rayo alrededor de O sobre el plano hasta otra posición dada por el rayo ℓ_2.
El rayo ℓ_1 se llama *lado inicial*, ℓ_2 se llama *lado terminal* y O se llama el *vértice* del ángulo.
Se acostumbra utilizar letras griegas para darle nombre a los ángulos. La que aparece en la figura 6.4 es θ que se lee "cita", entonces el ángulo se llama *ángulo cita* (la flecha en la figura 6.4 indica el sentido de la rotación).

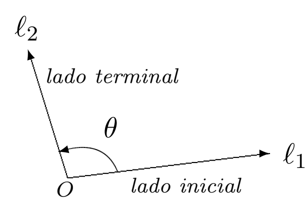


Figura 6.4.

De esta manera, la magnitud y el sentido de la rotación no se restringen y podemos tener ángulos de cualquier medida, incluso negativos.

Se puede hacer que el rayo ℓ_1 de una o más vueltas antes de llegar a la posición ℓ_2 de manera que muchos ángulos diferentes pueden tener el mismo lado inicial y el mismo lado terminal, en cuyo caso se dice que son *ángulos coterminales*. Por ejemplo, los ángulos de la figura 6.5 tienen todos el mismo lado inicial y el mismo lado terminal pero son distintos.

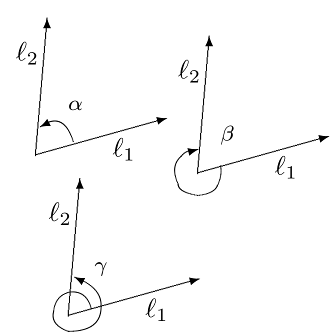


Figura 6.5.

Para obtener el ángulo β (beta) se gira ℓ_1 en sentido contrario al giro que se hace para obtener α (alfa) pero en ambos casos se llega al mismo ℓ_2.

Mientras tanto, para obtener γ (gama), se hace una rotación completa en el mismo sentido de α y se sigue hasta llegar también a ℓ_2.

Ahora nos ubicamos sobre un sistema de coordenadas rectangulares.
Diremos que un ángulo está en posición *normal* si su lado inicial es la parte positiva del eje x y el origen O es el punto $(0, 0)$.
Si el giro se hace en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj se dice que el ángulo es *positivo* y si se hace en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj se dice que es *negativo*.

En un sistema de coordenadas rectangulares

Medida de ángulos

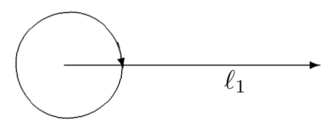


Figura 6.6.

En grados

Hay dos unidades muy comunes para medir ángulos. La más conocida en este nivel es la medida en *grados*.

Esta se define suponiendo que si un ángulo se obtiene al girar en sentido positivo el rayo ℓ_1 exactamente *una vuelta*, llegando otra vez a ℓ_1, entonces ese ángulo mide 360 grados; de manera que: un *grado* es la medida de un ángulo que corresponde a $\frac{1}{360}$ de vuelta en el sentido positivo; se denota 1^o.

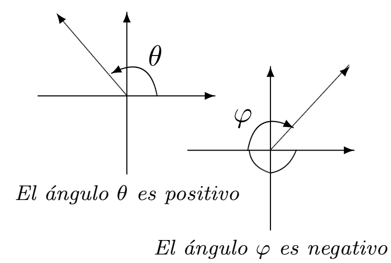


Figura 6.7.

En radianes

La otra forma de medir ángulos es en *radianes*.

Consideremos en el sistema de coordenadas una circunferencia con centro $(0, 0)$ y radio 1 (el llamado *círculo unitario* o *trigonométrico*) y suponga que θ es un ángulo central de esta circunferencia, esto es, un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia.
La *medida en radianes* de θ se define como la longitud del arco del sector circular determinado por θ (figura 6.8).

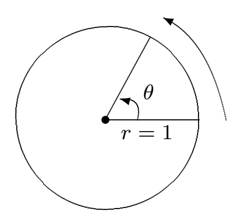


Figura 6.8.

Según lo anterior, una rotación completa corresponde a 360^o y, puesto que la medida de una circunferencia de radio 1 es 2π, entonces una rotación completa son 2π rad. Según esto entonces se tiene que

La circunferencia

$$\boxed{360^o = 2\pi \text{ rad.}}$$

La medida en radianes nos permite dar una fórmula simple para calcular la longitud s de un arco circular de radio r como el de la figura 6.9, ésta es

$$\boxed{\text{longitud de arco} = s = r\theta \quad (\theta \text{ en radianes})}$$

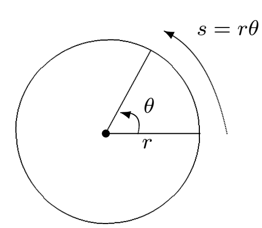


Figura 6.9.

Usando que $360^o = 2\pi\, rad.$ se deduce que

$$\boxed{1^o = \frac{\pi}{180}\, rad \quad \text{y} \quad 1\, rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^o,}$$

y esto se usa para convertir grados a radianes y radianes a grados respectivamente.

Fórmula de conversión

Por ejemplo, un ángulo recto mide 90^o, y expresado en radianes sería entonces

$$90^o = 90 \cdot \frac{\pi}{180}\, rad = \frac{\pi}{2}\, rad.$$

En la figura 6.10 se representa algunos ángulos con sus correspondientes medidas en radianes.

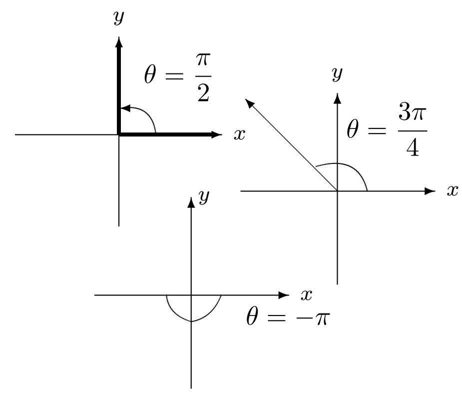


Figura 6.10.

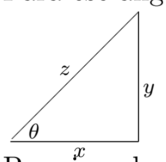
La unidad que se utiliza para medir ángulos en el Cálculo es el radián. En lo que sigue, cuando escribimos la medida de un ángulo sin hacer referencia a la unidad de medida estaremos sobrentendiendo que se trata de radianes. Por otra parte, si el ángulo θ, por ejemplo, mide 2 radianes, por abuso de notación escribiremos $\theta = 2$.

Para su mayor comodidad damos a continuación una tabla en la que aparecen algunas medidas de ángulos en grados y su equivalencia en radianes (los ángulos más usuales). Usted debe acostumbrarse a pensar en medidas dadas en radianes.

TRIGONOMETRÍA EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

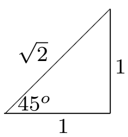
Para ángulos agudos, los valores de las funciones trigonométricas se pueden interpretar como cocientes de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

Se considera así un triángulo como el de la figura. El lado de medida y es el *cateto opuesto (cat. op.) a* θ, El lado de medida x es el *cateto adyacente (cat. ad.) a* θ y el lado de medida z es la *hipotenusa* (hip.). Para ese ángulo se tiene:

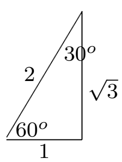


$$\begin{array}{rclrclrcl}
\operatorname{sen}\theta & = & \frac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}} & \csc\theta & = & \frac{\text{hip.}}{\text{cat. op.}} & \cos\theta & = & \frac{\text{cat. ad.}}{\text{hip.}} \\
\sec\theta & = & \frac{\text{hip.}}{\text{cat. ad.}} & \tan\theta & = & \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ad.}} & \cot\theta & = & \frac{\text{cat. ad.}}{\text{cat. op.}}
\end{array}$$

Por ejemplo en un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 45^o se tiene:



$$\begin{array}{rclrclrcl}
\operatorname{sen}45^o & = & \frac{1}{\sqrt{2}} & \csc 45^o & = & \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} & \cos 45^o & = & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\sec 45^o & = & \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} & \tan 45^o & = & \frac{1}{1} = 1 & \cot 45^o & = & \frac{1}{1} = 1
\end{array}$$



Este es un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30^o y 60^o, a partir de él usted puede obtener todas las funciones trigonométricas de esos ángulos.

Recuadro 6.1: **En el triángulo rectángulo**

Tabla 6.1

Grados	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o	270^o	360^o
Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$3\pi/2$	2π

Nota histórica: " π" no siempre fue π

π expresa la relación entre diámetro y circunferencia

$$\frac{C}{2R} = \pi.$$

Se ha calculado esta relación (número) desde la antigíedad. De las primeras referencias podemos mencionar la misma *Biblia*: I Reyes 7, 23 y II Crónicas 4, 2. Se da un valor para π de 3 (con relación a unas medidas para el templo de Salomón alrededor del año 950 a.C.). El famoso papiro egipcio *Rhind* (1650 a.C.) da un valor de $3,16$ para π. Estos primeros cálculos fueron hechos por medida y no por una construcción teórica.

La primera aproximación teórica del valor de π fue dada por Arquímedes que obtuvo la relación

$$223/71 < \pi < 22/7$$

(note que el promedio de éstos dos números da $3,1418$: una buena aproximación).

Las aproximaciones siguieron mejorándose durante siglos: Ptolomeo (alrededor 150 d.C.) $3,1416$, Tsu Ch'ung Chi (alrededor 430–501 d.C.) $\frac{355}{113}$, Al'Khwarizmi (alrededor 800 d.C.) $3,1416$, Al'Kashi (alrededor 1430 d.C.) una aproximación con 14 dígitos, Viíte (1540–1603) dio 9 dígitos, Romanus (1561–1615) 17 dígitos, Van Ceulen (alrededor 1600) dio 35 dígitos. En 1873, el inglés Shanks calculó 707 dígitos, pero solo 527 eran correctos. En 1949 con ayuda de un computador se pudo calcular 2000 dígitos para π.

El símbolo que usamos es, sin embargo, relativamente reciente. Por primera vez fue utilizado por William Jones (1675–1749) en **1706**. Pero la consagración de su uso fue debida al uso extenso del símbolo realizado por Leonhard Euler, el gran matemático suizo del siglo XVIII (1707–1783). Euler adoptó y popularizó el símbolo en **1737**.

Definición de las funciones trigonométricas

Nos ubicamos nuevamente en la circunferencia unitaria. Según deducimos de la figura 6.11, el lado terminal de cualquier ángulo en posición normal corta a la circunferencia en un punto de coordenadas $P(x, y)$. Las seis funciones trigonométricas se pueden definir a partir de las coordenadas de este punto. Tales funciones son el *seno, coseno, tangente, cotangente, secante* y *cosecante*, que se denotan respectivamente por sen, cos, tan, cot, sec y csc.

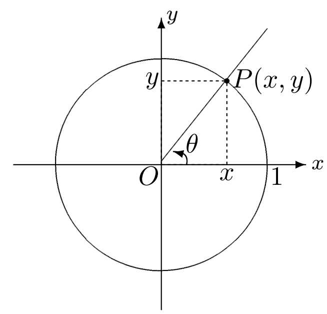


Figura 6.11. Círculo trigonométrico

Si θ es un número real que corresponde a un ángulo en posición normal y $P(x, y)$ es el punto donde el lado terminal del ángulo corta a la circunferencia unitaria, entonces se definen las funciones trigonométricas según se indica a continuación:

Definición de las funciones trigonométricas
(θ es un ángulo en posición normal tal que su lado terminal corta al círculo unitario en el punto $P(x, y)$)

Seno:	$\operatorname{sen}\theta = y$	Cosecante:	$\csc\theta = \dfrac{1}{y}$ para $y \neq 0$
Coseno:	$\cos\theta = x$	Secante:	$\sec\theta = \dfrac{1}{x}$ para $x \neq 0$
Tangente:	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ para $x \neq 0$	Cotangente:	$\cot\theta = \dfrac{x}{y}$ para $y \neq 0$

Observe que el dominio de las funciones seno y coseno es todo $\mathbb{R}$. Mientras tanto, en la definición de tangente y de secante aparece la abscisa x en el denominador, por lo tanto deben excluirse de su dominio todos los valores de θ para los cuales $x = 0$; es decir hay que excluir los ángulos de medida $(\pi/2)+n\pi$, donde n es un número entero. El dominio de la tangente y la secante es entonces:

Dominio de las funciones trigonométricas

$$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi / n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Están excluidos, por ejemplo, valores tales como

$$\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{-5\pi}{2}$$

(todos los "múltiplos impares" de $\frac{\pi}{2}$).

Por otro lado, en la definición de cotangente y cosecante aparece la ordenada y en el denominador. De manera que el dominio de estas dos funciones excluye todos los valores de la forma $n\pi$, con n entero. Quedan fuera, por ejemplo, los números:

$$0,\ \pi,\ -\pi,\ 2\pi,\ -2\pi$$

(todos los "múltiplos" de π).

La siguiente tabla 6.2 contiene el valor de las funciones trigonométricas para algunos valores del ángulo. Con ellos y con una serie de relaciones entre las funciones trigonométricas podemos calcular muchos valores para ellas. Pero, en general, debemos utilizar una calculadora para obtener estos valores con un ángulo cualquiera.

Tabla 6.2

Algunos valores trigonométricos						
θ	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
0	0	1	0	$-$	1	$-$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$-$	1	$-$	0

Fórmulas trigonométricas

A partir de la definición de las funciones trigonométricas como valores referidos a las coordenadas de puntos sobre el círculo unitario se puede obtener varias fórmulas. Por ejemplo, la ecuación que define al círculo unitario es

$$x^2 + y^2 = 1$$

Esto quiere decir que un punto (x, y) está sobre el círculo unitario si y solamente si satisface esa relación. Puesto que se define

$$\operatorname{sen}\theta = y \quad \text{y} \quad \cos\theta = x$$

entonces $x^2 + y^2 = 1$ se convierte en

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1} \quad *$$

A partir de ésta podemos deducir las que se dan a continuación:

$$\boxed{\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta} \qquad \boxed{1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta}$$

La primera se obtiene dividiendo todos los términos de (*) por $\operatorname{sen}^2\theta$ y la segunda, dividiendo los términos de (*) por $\cos^2\theta$.

A continuación se dan algunas de las fórmulas trigonométricas más usuales.

Razones trigonométricas		Fórmulas para ángulos negativos	
$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$	$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$	$\csc(-\theta) = -\csc\theta$
$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\sec(-\theta) = \sec\theta$
$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$		$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

Fórmulas para suma y resta de ángulos	
$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta$	$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta$	$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta$
$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\,\tan\beta}$	$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\,\tan\beta}$

Fórmulas para el doble de un ángulo		Fórmulas para la mitad de un ángulo	
$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\,\cos\alpha$	$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$	$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$	$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$
$\cos(2\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$	$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$	$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$
$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$			

Gráficas de las funciones trigonométricas

Finalizamos esta sección mostrando las gráficas de las funciones trigonométricas. Antes debemos recordar que estas funciones son periódicas, puesto que después de cada rotación completa los lados terminales comienzan a coincidir con los lados terminales de la rotación anterior y así sucesivamente. Las funciones seno, coseno, secante y cosecante tienen período 2π, las funciones tangente y cotangente tienen período π, esto es:

Funciones periódicas o circulares

Períodos de las funciones trigonométricas	
$\operatorname{sen}(\theta+2n\pi) = \operatorname{sen}\theta$	$\csc(\theta+2n\pi) = \csc\theta$
$\cos(\theta+2n\pi) = \cos\theta$	$\sec(\theta+2n\pi) = \sec\theta$
$\tan(\theta+n\pi) = \tan\theta$	$\cot(\theta+n\pi) = \cot\theta$

Los gráficos que daremos a continuación corresponden a una parte de la función y el patrón que se da se repite indefinidamente.

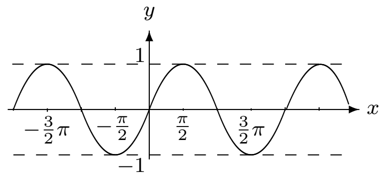


Figura 6.12. $y = \operatorname{sen} x$

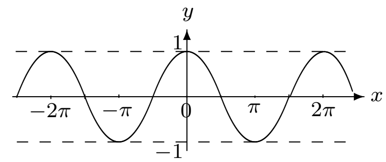


Figura 6.13. $y = \cos x$

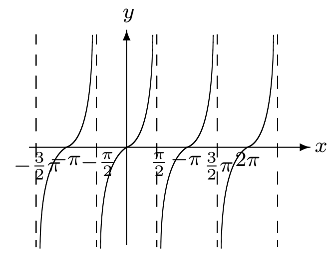


Figura 6.14. $y = \tan x$

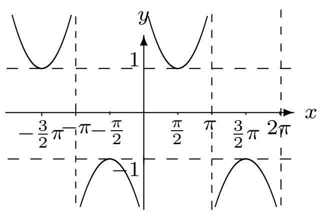


Figura 6.15. $y = \csc x$

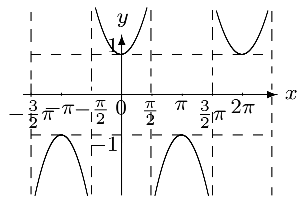


Figura 6.16. $y = \sec x$

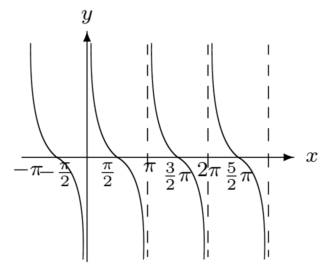


Figura 6.17. $y = \cot x$

Después de este repaso, lo que sigue es el Cálculo con estas funciones.

Una nota histórica: *Las funciones trigonométricas*

En los nuevos tiempos, las funciones trigonométricas fueron sistematizadas por Newton y Leibniz quienes habían dado expansiones en forma de serie para las mismas. Las fórmulas de estas funciones aplicadas a la suma y resta de ángulos fue dada por varias personas entre ellos Jean Bernoulli (1667–1798) y Thomas Fontet de Lagny (1660–1734).

Pero fue Euler quien dio el tratamiento completo y sistemático a las funciones trigonométricas. La periodicidad de estas funciones y la introducción de la medida de los ángulos por *radianes*, fue realizada por Euler en su *Introductio in Analysis Infinitorum* de 1748.

En esta sección se calcula el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y se utiliza para calcular otros límites en los que aparecen funciones trigonométricas.

6.2 UN LÍMITE ESPECIAL:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Recuerde que el dominio de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ es todo $\mathbb{R}$, el dominio de $\tan x$ y $\sec x$ es

$$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + n\pi / n \in \mathbb{Z}\}$$

y el dominio de $\cot x$ y $\csc x$ es

$$\mathbb{R} - \{n\pi / n \in \mathbb{Z}\}.$$

A partir de las gráficas de las funciones trigonométricas podemos deducir que ellas son continuas en todo su dominio, de manera que si c pertenece al dominio de la función correspondiente, entonces se tiene:

$$\begin{array}{rclrcl}
\lim\limits_{x\to c} \operatorname{sen} x & = & \operatorname{sen} c & \lim\limits_{x\to c} \cos x & = & \cos c \\
\lim\limits_{x\to c} \tan x & = & \tan c & \lim\limits_{x\to c} \cot x & = & \cot c \\
\lim\limits_{x\to c} \sec x & = & \sec c & \lim\limits_{x\to c} \csc x & = & \csc c
\end{array}$$

Por otra parte, si c no pertenece al dominio de la función entonces el límite no existe.

Ejemplo 1. Cálculo de límites con funciones trigonométricas

Como una aplicación de lo anterior tenemos, por ejemplo, que

$$\begin{array}{rclrcl}
\lim_{x\to\pi} \operatorname{sen} x & = & \operatorname{sen}\pi = 0 & \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \cos x & = & \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \tan x & = & \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} & \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \cot x & = & \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \\
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sec x & = & \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} & \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi} \csc x & = & \csc\frac{3}{2}\pi = -1
\end{array}$$

Por otra parte, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x$ no existe (vea la gráfica de $y = \tan x$) pero sí podemos decir que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty.$$

También tenemos que

$$\lim_{x\to\pi^+} \csc x = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\pi^-} \csc x = \infty.$$

$\triangle$

Ejemplo 2. Cálculo de un límite de funciones trigonométricas con algebraicas

Calcular $\lim_{x \to \pi}(x + x^2 \cos x)$.

Solución: Utilizando las propiedades de los límites estudiadas en capítulos anteriores tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pi}(x + x^2\cos x) &= \lim_{x\to\pi} x + \lim_{x\to\pi} x^2 \cdot \lim_{x\to\pi}\cos x \\ &= \pi + \pi^2 \cdot -1 \\ &= \pi - \pi^2 \end{aligned}$$

. △

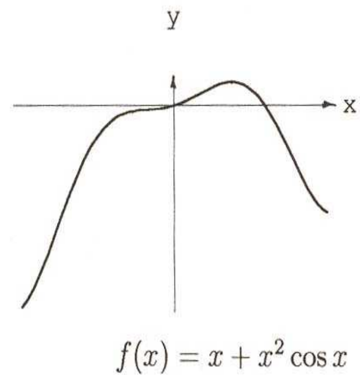


Figura 6.18.

Tenemos, igual que antes: si al evaluar no encontramos problemas entonces obtenemos el límite directamente. Pero, también, aquí podemos encontrar problemas. Piense en el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Tenemos una situación especialmente difícil puesto que al evaluar obtenemos la forma indeterminada $\frac{0}{0}$; con un agravante: no podemos ni factorizar, ni racionalizar, ni operar como lo hacíamos antes. Es evidente que aquí debemos utilizar otros métodos. Dentro de un momento aprenderemos cuál es el valor de ese límite y podremos utilizarlo para calcular otros parecidos. Pero para llegar a ese valor antes veremos un teorema que nos será de mucha utilidad.

Teorema 6.1. Teorema de intercalación

Sea I un intervalo abierto que contiene a c y suponga que para todo $x \in I$ (salvo tal vez para $x = c$) se tiene que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, si además $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, entonces también

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

La figura 6.19 representa un ejemplo de la situación que se da: la función h va por arriba, la función g va por abajo y la función f va en medio de ellas. Si tanto h como g se acercan a un mismo valor, a f no le queda otra que ir hacia ese valor puesto que queda *intercalada* entre ellas. Por esta razón el teorema también es conocido con el nombre del teorema del *sandwich.* Lo dicho anteriormente no es una demostración del teorema, solamente es una idea intuitiva basada en la situación gráfica.

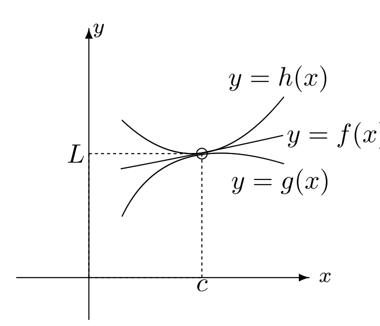


Figura 6.19.

Una demostración intuitiva

La figura 6.20 representa el círculo trigonométrico (centro $(0,0)$ y radio 1). Consideremos primero que $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

- El segmento $\overline{MP}$ tiene medida $\operatorname{sen} x$ (por definición),
- el segmento $\overline{AQ}$ tiene medida $\tan x$, ya que según el dibujo
$$\tan x = \frac{\overline{AQ}}{\overline{OA}} = \overline{AQ},$$
pues $\overline{OA}$ mide 1.
- y el arco AP tiene medida x (pues la medida del arco es igual al radio por el ángulo, esto es $1 \cdot x = x$).

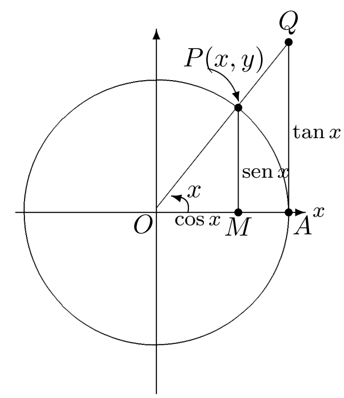


Figura 6.20.

La intuición nos dice que
$$\operatorname{sen} x < x < \tan x$$
(lo cual es cierto). Para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ se tiene que $\operatorname{sen} x$ es positivo por lo tanto si en la desigualdad anterior dividimos por $\operatorname{sen} x$, se tiene que
$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\tan x}{\operatorname{sen} x},$$
pero, recuerde que $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y por lo tanto
$$\frac{\tan x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \, \cos x} = \frac{1}{\cos x}$$
y entonces tenemos:
$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$
o, de modo equivalente (invirtiendo las fracciones, se invierten las desigualdades):
$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x.$$
También se puede llegar exactamente a la misma desigualdad si consideramos $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ (hágalo usted).

Ahora, como $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, tenemos
$$\begin{array}{ccccc} 1 & > & \frac{\operatorname{sen} x}{x} & > & \cos x \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 1 & & & & 1 \end{array}$$
y, entonces, el teorema de intercalación nos dice que también
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

Ejemplo 3. Otro límite especial

Utilizar el límite anterior para demostrar que

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0}$$

Solución: En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x(\cos x + 1)}\\
&= -\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 1}\\
&= -1\cdot\frac{\operatorname{sen} 0}{\cos 0 + 1}\\
&= -1\cdot 0\\
&= 0
\end{aligned}$$

△

Ejemplo 4. Cálculo de límites trigonométricos: el caso $\dfrac{\operatorname{sen} ax}{ax}$

Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{3x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x + 3x - 1}{5x}$

Solución: (a) Procedemos del siguiente modo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{4\operatorname{sen} 4x}{3(4x)} = \lim_{x\to 0}\frac{4}{3}\cdot\frac{\operatorname{sen} 4x}{4x} = \frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{4x}$$

Por la definición de límite se tiene que $x \to 0$ se puede sustituir por $4x \to 0$. Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{4x} = \lim_{(4x)\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{(4x)} = 1$$

y, en definitiva,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{3x} = \frac{4}{3}\cdot 1 = \frac{4}{3}.$$

(b) En este caso se agrupan los términos en el numerador para buscar un límite conocido:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+3x-1}{5x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+3x}{5x}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{5x}+\frac{3x}{5x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{\cos x-1}{x}\right]+\lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\\
&= \frac{1}{5}\cdot 0+\frac{3}{5}\\
&= \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

△

Ejemplo 5. Convertir a senos y cosenos

Calcular $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t+\tan t}{\operatorname{sen} t}$.

Solución: Es conveniente convertir la tangente en su correspondiente expresión en términos de seno y coseno. Tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{t+\tan t}{\operatorname{sen} t} &= \lim_{t\to 0}\frac{t+\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}}{\operatorname{sen} t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t\,\cos t+\operatorname{sen} t}{\cos t}}{\operatorname{sen} t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t\,\cos t+\operatorname{sen} t}{\cos t\,\operatorname{sen} t}\\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{t\,\cos t}{\cos t\,\operatorname{sen} t}+\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t\,\operatorname{sen} t}\right)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{sen} t}+\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos t}=1+1=2
\end{aligned}$$

En este ejemplo se utilizó

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{sen} t}=1,$$

¿por qué esto es válido? △

Aquí se calculan las derivadas de seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante y se usan en el cálculo de otras funciones.

6.3 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ahora procederemos a calcular las derivadas de algunas de las funciones trigonométricas básicas utilizando la definición y las propiedades estudiadas en capítulos anteriores. Luego se dará una tabla con las derivadas de las seis funciones trigonométricas básicas.

La derivada de $y = \operatorname{sen} x$

Utilicemos la definición de derivada para determinar la derivada de la función $y = \operatorname{sen} x$. Según eso tenemos:

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \, \cos h + \cos x \, \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\
&\qquad \text{(usando la fórmula del seno de una suma de ángulos)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x \, \operatorname{sen} h}{h} \quad \text{(reagrupando términos)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \, \operatorname{sen} h}{h} \quad \text{(separando límites)} \\
&= \operatorname{sen} x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\
&\qquad \text{(para efectos del límite la variable es } h\text{)} \\
&= \operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \quad \left(\text{porque } \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \text{ y } \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1\right) \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

Es decir $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$. Usted puede llevar a cabo un procedimiento parecido a este para encontrar que $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

La derivada de $y = \tan x$

Ahora calcularemos la derivada de $y = \tan x$. No necesitamos hacer lo mismo que hicimos antes para calcular la derivada del seno ni lo que usted hizo para calcular la derivada de coseno, sino que usaremos esas dos derivadas y las fórmulas del *Capítulo 5*.

En efecto, tenemos que $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - \operatorname{sen} x (\cos x)'}{(\cos x)^2} \\
&\qquad \text{(usando la derivada de un cociente)} \\
&= \frac{\cos x \, \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\
&\qquad \text{(porque } (\operatorname{sen} x)' = \cos x \text{ y } (\cos x)' = -\operatorname{sen} x\text{)} \\
&= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \sec^2 x
\end{aligned}$$

Esto es: $(\tan x)' = \sec^2 x$.

La derivada de las funciones trigonométricas

Realizando un procedimiento análogo al anterior se puede calcular las derivadas de las restantes funciones trigonométricas básicas. A continuación se da una tabla con todas ellas.

Tabla 6.3

Derivadas de las funciones trigonométricas	
$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$(\cot x)' = -\csc^2 x$
$(\sec x)' = \sec x \, \tan x$	$(\csc x)' = -\csc x \, \cot x$

Ejemplo 6. Cálculo de derivadas

Calcular la derivada de las siguientes funciones:

(a) $y = x \operatorname{sen} x$ (b) $y = \dfrac{\cos x + 1}{x - 2}$ (c) $y = \sqrt{\tan x - x}$

Solución: (a) Aquí se trata de un producto, aplicamos la regla correspondiente:

$$y' = (x \operatorname{sen} x)' = (x)' \operatorname{sen} x + x(\operatorname{sen} x)' = \operatorname{sen} x + x \cos x.$$

(b) En este caso se trata de la derivada de un cociente:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\cos x + 1}{x-2}\right)' \\ &= \frac{(\cos x+1)'(x-2) - (\cos x + 1)(x-2)'}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(-\operatorname{sen} x)(x-2) - (\cos x + 1)}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

(c) Como $\sqrt{\tan x - x} = (\tan x{-}x)^{\frac{1}{2}}$, entonces se trata de la derivada de la potencia de una función:

$$\begin{aligned} y' &= \left[\big(\tan x - x\big)^{\frac{1}{2}}\right]' \\ &= \frac{1}{2}\big(\tan x - x\big)^{-\frac{1}{2}}(\tan x - x)' \\ &= \frac{1}{2}\big(\tan x - x\big)^{-\frac{1}{2}}(\sec^2 x - 1) \end{aligned}$$

$\triangle$

Antes de dar algunos ejemplos más sobre el cálculo de derivadas de funciones en las que aparecen combinadas las funciones trigonométricas y las funciones algebraicas daremos una regla más para derivación, de la cual, en el *Capítulo 5* dimos un caso particular (el que usamos en el punto (c) del ejemplo precedente). Esta regla, conocida como la *regla de la cadena*, se refiere a la derivada de una composición de funciones.

Teorema 6.2. Regla de la cadena

Sean f y g dos funciones tales que existe $g'(x)$ y existe $f'(g(x))$ entonces la derivada de la función compuesta $f \circ g$ existe en x y se tiene

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

El teorema anterior nos permite calcular la derivada de funciones que antes no estábamos en condiciones de determinar.

Ejemplo 7. Cálculo de derivadas usando regla de la cadena

Determinar la derivada de cada función:

(a) $y = \operatorname{sen}^2 x$ (b) $y = \sec(t^2)$ (c) $y = \dfrac{\cos(x^3) + \operatorname{sen} x}{x^2}$

(d) $y = \tan^3(5x)$.

Solución: (a) Tenemos que

$$\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2,$$

de modo que aplicando la regla de la potencia obtenemos

$$y' = \left[(\operatorname{sen} x)^2\right]' = 2(\operatorname{sen} x) \cdot (\operatorname{sen} x)' = 2(\operatorname{sen} x) \cdot (\cos x) = \operatorname{sen} 2x.$$

(b) En este caso tenemos que aplicar la regla general de la cadena. La función de "afuera" es la secante y la de "adentro" es t^2. De manera que se deriva la secante, que es secante por tangente, pero evaluando en t^2 y esto se multiplica por la derivada de t^2. Así

$$y' = \left[\sec(t^2)\right]' =$$

$$\underbrace{[\sec(t^2)\tan(t^2)]}_{\text{derivada de la ``de afuera''}}\underbrace{(t^2)'}_{\text{derivada de la ``de adentro''}} =$$

$$[\sec(t^2)\tan(t^2)](2t) = 2t\sec(t^2)\tan(t^2)$$

(c) Aquí tenemos en principio un cociente, aplicamos la regla que corresponde en este caso:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\cos(x^3) + \operatorname{sen} x}{x^2}\right)' \\ &= \frac{\left[\cos(x^3) + \operatorname{sen} x\right]'(x^2) - \left[\cos(x^3) + \operatorname{sen} x\right](x^2)'}{(x^2)^2} \end{aligned}$$

Al calcular las derivadas que están indicadas nos encontramos que debemos usar la regla de la cadena en el cálculo de la derivada de $\cos(x^3)$, en este caso procedemos de modo parecido al punto (b). Tenemos

$$[\cos(x^3)]' = [-\operatorname{sen}(x^3)](x^3)' = -3x^2\operatorname{sen}(x^3)$$

y sustituyendo en y' tenemos:

$$y' = \frac{[-3x^2\operatorname{sen}(x^3) + \cos x]x^2 - 2x[\cos(x^3) + \operatorname{sen} x]}{x^4}.$$

(d) Aquí se debe aplicar dos veces la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} y' &= [\tan^3(5x)]' = [(\tan(5x))^3]' \\ &= 3(\tan(5x))^2(\tan(5x))' = 3(\tan(5x))^2(\sec^2(5x))(5x)' \\ &= 3(\tan(5x))^2(\sec^2(5x))(5) = 15\tan^2(5x)\sec^2(5x) \end{aligned}$$

△

Ejemplo 8. Cálculo de la recta normal

Calcule la ecuación de la recta normal a la curva dada por

$$f(x) = \cos 2x + x$$

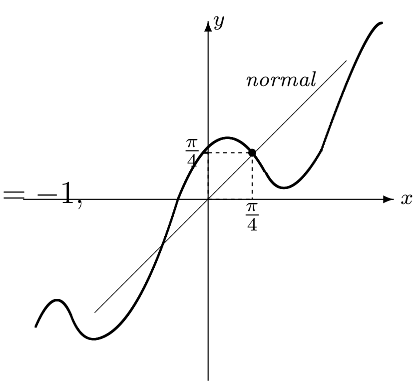
cuando $x = \frac{\pi}{4}$.

Solución: La pendiente m_t de la recta tangente es la derivada de la función evaluada en $\frac{\pi}{4}$. Tenemos

$$f'(x) = -2\operatorname{sen} 2x + 1$$

(empleando la regla de la cadena y la derivada de una suma). Entonces:

$$m_t = f'(\tfrac{\pi}{4}) = -2\operatorname{sen}\big(2\tfrac{\pi}{gf60014}\big)+1 = -2\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2}+1 = -2\cdot 1+1 = -2+1 = -1,$$



$f(x) = \cos 2x + x$

Figura 6.21.

por lo tanto, la pendiente m_n de la recta normal es

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-1} = 1.$$

Para calcular la intersección debemos primero obtener la imagen de $\frac{\pi}{4}$:

$$f(\tfrac{\pi}{4}) = \cos\big(2\tfrac{\pi}{4}\big) + \frac{\pi}{4} = \cos\tfrac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Entonces la intersección de la recta normal es

$$b = \frac{\pi}{4} - 1 \cdot \frac{\pi}{4} = 0$$

y entonces la ecuación de la recta es $y = x$. △

6.4 EJERCICIOS DEL *CAPÍTULO 6*

Interpretación gráfica

1. La figura 6.22 representa la gráfica de la función $f(x) = \tan x$, ¿cuáles son sus asíntotas verticales?

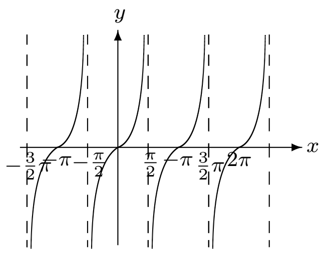


Figura 6.22. $f(x) = \tan x$

2. La figura 6.23 representa la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, ¿cuántas rectas tangentes horizontales tiene?, ¿en qué puntos son tangentes esas rectas?

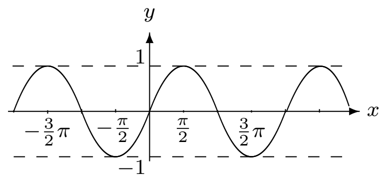


Figura 6.23. $f(x) = \operatorname{sen} x$

3. La figura 6.24 representa la gráfica de la función $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, ¿en qué puntos no es derivable esta función?

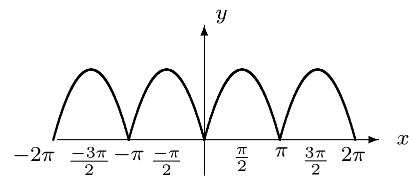


Figura 6.24. $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

Selección única

En los ejercicios 10 a 17 escoja la opción que responde o completa correctamente la proposición dada.

4. Del $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$, podemos afirmar que:

(a) No existe pero tiende a ∞ (b) Existe y es igual a 2

(c) Existe y es igual a 1 (d) Existe y es igual a 0

5. Sobre $\lim\limits_{x\to 0} x \cot 3x$ podemos afirmar que:

(a) Es igual a 1/3 (b) Es igual a 0

(c) No existe (d) Es igual a 3

6. Del límite $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos 2x}$ podemos afirmar que

(a) No existe (b) Es igual a 0

(c) Es igual a 1 (d) Es igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. Si $f(x) = x^2 \cos x$ entonces $f'(0)$ es igual a

(a) 0 (b) 1/2 (c) 1 (d) 2

8. Si $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ entonces $f'(x)$ es igual a

(a) $\dfrac{1}{2\sqrt{\cos x}}$ (b) $\sqrt{\cos x}$

(c) $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$ (d) $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\cos x}}$

9. Si $f(x) = \operatorname{sen}^2(2x)$ entonces $f'(\pi/6)$ es igual a

(a) 1 (b) $\sqrt{3}$ (c) 1/4 (d) $\sqrt{3}/2$

10. Si f y g son funciones tales que $g = f(\cos x)$ y $f'(1/2) = 2$ entonces $g'(\pi/3)$ es igual a

(a) $\sqrt{3}$ (b) $-\sqrt{3}$ (c) 2 (d) -2

11. Si g es derivable y $h(x) = \operatorname{sen}(g(x))$ entonces $h'(x)$ es igual a

(a) $g'(x)\cos x$ (b) $\cos(g(x))$

(c) $g'(x)\cos(g(x))$ (d) $\cos(g'(x))$

Falso o Verdadero

En los ejercicios 4 a 9 diga si la afirmación es falsa o verdadera (explique).

12. Si $\cos x = \cos y$ entonces $x = y$.

13. $\operatorname{sen}(30^o + \theta) = \frac{1}{2} + \operatorname{sen}\theta$ para todo θ.

14. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $\tan x \cdot \cot x = 1$.

15. Para todo $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$ se tiene que $\cos x > \operatorname{sen} x$.

16. Si $x \in]0, \pi[-\{\pi/2\}$ entonces $\tan x > 0$.

17. Si $x \in]\pi/2, \pi[$ entonces $\sec x < 0$.

Problemas y ejercicios de desarrollo

18. Calcule el valor en radianes que corresponde a los siguientes valores en grados:
300^o, 410^o, 380^o, -60^o, -720^o

19. Calcule el valor en grados que corresponde a los siguientes valores en radianes:
$\pi/5$, $-7\pi/2$, 3π, $-4\pi/3$, $\pi/8$

20. Si un ángulo central θ subtiende un arco de 30 cm de longitud sobre una circunferencia de 3 m de radio, ¿cuál es el valor de θ en radianes?

En los ejercicios del 21 al 26 pruebe la identidad dada.

21. $\operatorname{sen}\theta \sec\theta = \tan\theta$

22. $\cos^2\theta\,(\sec^2\theta - 1) = \operatorname{sen}^2\theta$

23. $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$

24. $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\,\operatorname{sen}\theta$

25. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\cos\theta} = 1 + \tan\theta$

26. $\dfrac{\csc^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = 1 + \cot^2\theta$

En los ejercicios 27 a 43 calcule el límite pedido.

27. $\lim\limits_{x\to\pi}(3\cos x + 4\operatorname{sen} x)$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x}}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x + 4}{1 - \operatorname{sen} x}$

30. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(2x - 3\operatorname{sen} x)$

31. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta^2}$

32. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1 - \cos 2y}{y}$

33. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\theta + 5\operatorname{sen}(\theta + \pi/4)}{2\theta^2}$

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{3x}$

35. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{5y}{3\operatorname{sen} y}$

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x + \tan x}{\operatorname{sen} x}$

37. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\csc 2y}{\cot y}$

38. $\lim\limits_{\theta\to\pi}\dfrac{1 + \cos\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$

39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x}{\operatorname{sen} x}$

41. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

42. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-2x^2-2\cos x+\cos^2 x}{3x^2}$

43. $\displaystyle\lim_{r\to 0} \frac{5r\,\mathrm{sen}\, r+7r^2}{2r^2}$

44. Utilice la definición de derivada para calcular la primera derivada de las funciones:

(a) $f(x)=\mathrm{sen}\,4x$ (b) $g(x)=\cos 3x$

En los ejercicios 45 a 60 calcule la primera derivada de la función dada.

45. $f(x)=x\,\mathrm{sen}\,x$

46. $g(t)=\mathrm{sen}(3t+5)$

47. $h(x)=5x+\cos 3x$

48. $g(t)=\dfrac{\mathrm{sen}\,t}{1+\cos t}$

49. $p(s)=\tan^2 3s$

50. $f(x)=\sec\sqrt{x+1}$

51. $g(t)=\dfrac{\sec 3t}{1+\tan 3t}$

52. $g(t)=(t+t^2)\sec(t+5)$

53. $h(x)=\mathrm{sen}\,x+\sqrt{\cos x}$

54. $g(t)=\dfrac{\cos t-1}{1+\cos t}$

55. $p(s)=\mathrm{sen}\,s^3$

56. $g(t)=\dfrac{\sqrt{\mathrm{sen}\,t}}{1+\sqrt{\cos t}}$

57. $p(s)=\sec^2 s+\tan^2 s$

58. $g(t)=-3\csc(2t+5)$

59. $h(x)=5\cos x+\cot 3x$

60. $p(s)=(\tan 3s+\sec 2s)^3$

En los ejercicios 61 a 64 utilice derivación implícita para calcular y'.

61. $x\cos y=x^2+y^2$

62. $x^2y-\mathrm{sen}(xy)=5$

63. $\mathrm{sen}(xy)+\tan(xy)=1$

64. $\dfrac{1+\cos x}{1+\mathrm{sen}\,y}=1$

65. Suponga que K es un número real no negativo y que f es una función tal que $0\le f(x)\le K$ para todo x. Pruebe que

$$\lim_{x\to 0} x^2 f(x)=0$$

(use el teorema de intercalación).

66. La figura 6.25 representa la gráfica de la función $f(x)=\tan x$ en el intervalo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. La recta L es tangente a la curva en el punto $(c,\tan c)$. Pruebe que el área del triángulo PQR es igual a $\dfrac{\pi^2}{8}\sec^2 c$

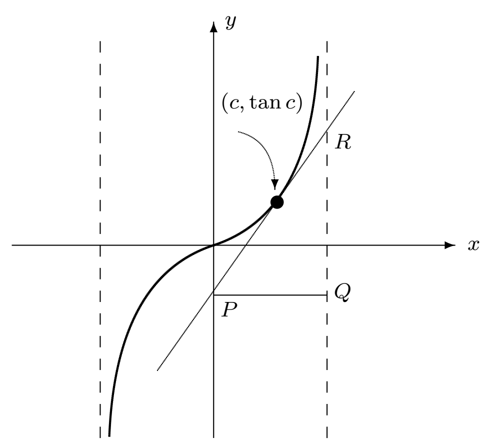


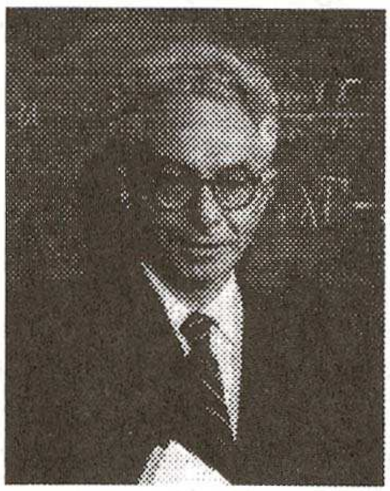
Figura 6.25.

67. Determine la ecuación de la recta normal y la ecuación de la recta tangente a la curva dada por $y=x\cos x$ en el punto $(\pi,-\pi)$.

68. Determine la ecuación de la recta normal y la ecuación de la recta tangente a la curva dada por $y=2\,\mathrm{sen}\,x+\tan x$ en el punto $(0,0)$.

CAPÍTULO 7

LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS, EXPONENCIALES Y EL CÁLCULO



La matemática viviente descansa en la fluctuación entre las potencias antitéticas de la intuición y la lógica, entre la individualidad de problemas "aterrizados" y la generalidad de las abstracciones de largo alcance.

Richard Courant

En este capítulo, después de un repaso de las funciones logarítmicas y exponenciales veremos algunos aspectos del Cálculo con este tipo de funciones.

Los logaritmos

Se podría decir que el mejor resultado en la aritmética de los siglos XVI y XVII fue la creación de los *logaritmos.* Estos fueron creados con el propósito de facilitar los cálculos en la trigonometría esférica que era usada en los problemas astronómicos.

Dos figuras fueron responsables de esta creación: John Napier (1550–1617) y Jobst Bírgi (1552–1632). Aunque la obra de Bírgi no fue publicada hasta 1620, él realizó sus inventos alrededor del año 1600 independientemente de Napier (que ya había publicado sus resultados en 1614).

La obra de Napier que recoge sus logaritmos se intituló *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* ("Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos").

El trabajo de Napier, que era un hacendado escocés con el título de Barón de Murchiston, fue continuado por Henry Briggs (1561–1639), pues Napier murió en 1617 sin completarlo. Briggs construyó la primera tabla de logaritmos llamados "logaritmos vulgares" o "de Briggs". Las tablas de Briggs cumplían las propiedades de los logaritmos que hoy en día consideramos usuales.

Entre progresiones está la cosa

La idea fundamental de los logaritmos ya había sido descubierta por Michael Stiefel (1487–1567). Esta nacía de la siguiente observación: considere la progresión geométrica

$$1,\ r,\ r^2,\ r^3,\ r^4,\ r^5,\ \ldots$$

y la progresión aritmética

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

progresión geométrica

$$\begin{array}{lcl} 1 & \rightarrow & 0 \\ r & \rightarrow & 1 \\ r^2 & \rightarrow & 2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} r^3 & \rightarrow & 3 \\ r^4 & \rightarrow & 4 \\ r^5 & \rightarrow & 5 \end{array}\right\} 3+5 = 8$$

progresión aritmética

Considere ahora el producto de dos términos de la progresión geométrica, por ejemplo: $r^3 \times r^5 = r^8$. El exponente es 8, pero 8 es también el resultado de sumar los dos términos correspondientes en la progresión aritmética: $3 + 5 = 8$. De igual manera, si se divide dos términos de la geométrica, el exponente del resultado es igual a la diferencia entre los términos asociados a la progresión artimética:

$$\frac{r^5}{r^3} = r^2$$

exponente 2, y $5 - 3 = 2$.

> Es decir, un producto se asocia a una suma y un cociente a una resta.

Napier no usaba la noción de base del sistema de logaritmos que tenemos hoy nosotros, pero sus resultados podríamos decir (con la mirada de nuestro tiempo) se hacían usando esencialmente la base $\frac{1}{e}$. Al parecer Napier usó la palabra logaritmo de la conjugación de dos palabras griegas: *logos* (razón) y *arithmos* (número).

7.1 REPASO SOBRE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS

> En esta sección se hace un repaso de las funciones logarítmicas, sus principales propiedades y sus gráficas.

Recuerde que el logaritmo de un número b en base a se define de la siguiente manera:

$$\log_a b = c \quad \text{si y solo si} \quad a^c = b.$$

Siempre se considera que la base a es un número positivo diferente de 1 ($a > 0$, $a \neq 1$). De esta manera entonces también b tiene que ser un número positivo.

Ejemplo 9. Aplicación de la definición

De acuerdo con la definición tenemos que:

1. $\log_2 8 = 3$ pues $2^3 = 8$.
2. $\log_{10} \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ pues $10^{1/2} = \sqrt{10}$.
3. $\log_{1/2} 16 = -4$ pues $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$.

$\triangle$

Propiedades de los logaritmos

A partir de la definición de logaritmo podemos ver que las conocidas propiedades de las potencias pueden ser traducidas a los logaritmos. Por ejemplo, sabemos que $a^1 = a$ para cualquier a, esto se escribe en términos de logaritmos como $\log_a a = 1$. A continuación proporcionamos una tabla con las propiedades más importantes de los logaritmos.

Propiedades de los logaritmos			
$\log_a 1 = 0$		$\log_a a = 1$	
$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$	logaritmo del producto	$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$	logaritmo del cociente
$\log_a b^n = n \log_a b$	logaritmo de la potencia	$\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{1}{m} \log_a b$	logaritmo de la raíz
$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$	logaritmo del recíproco	$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$	cambio de base
En todos los casos se supone que las expresiones involucradas tienen sentido.			

Las propiedades anteriores son muy importantes porque permiten a través de los logaritmos convertir productos y cocientes en sumas y restas. Esto será muy útil en algunos aspectos del Cálculo según veremos posteriormente.

Ejemplo 10. Aplicación de las propiedades de los logaritmos

Escribir la siguiente expresión en forma de sumas y restas de logaritmos:

$$\log_a \frac{\sqrt{3x-1}(x^2+3)}{(x-2)(2x+1)}$$

Solución: Utilizamos las propiedades anteriores de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&\log_a \frac{\sqrt{3x-1}(x^2+3)}{(x-2)(2x+1)} = \\
&= \log_a \sqrt{3x-1}(x^2+3) - \log_a(x-2)(2x+1) \quad \text{(logaritmo del cociente)} \\
&= \log_a \sqrt{3x-1} + \log_a(x^2+3) - [\log_a(x-2) + \log_a(2x+1)] \\
&\qquad \text{(logaritmo del producto aplicado dos veces)} \\
&= \frac{1}{2}\log_a(3x-1) + \log_a(x^2+3) - \log_a(x-2) - \log_a(2x+1) \\
&\qquad \text{(logaritmo de la raíz)}
\end{aligned}
$$

△

Logaritmos naturales

La propiedad del cambio de base expresa que todos los logaritmos pueden ponerse en términos de uno solo. Los más usuales son los **logaritmos comunes** que son los de base 10 y se denotan por *log* "a secas" y los logaritmos de base e que se llaman **logaritmos naturales** o *neperianos* y se denotan por *ln*. Es decir,

$\log x$ es lo mismo que $\log_{10} x$ y

$\ln x$ es lo mismo que $\log_e x$.

De hecho usted puede ver que las calculadoras solamente traen estos dos tipos de logaritmos.

Gran cantidad de las aplicaciones del Cálculo tiene que ver con los logaritmos naturales. Por eso más adelante haremos énfasis en este tipo de logaritmos; incluso definiremos el número e en términos de un límite especial.

Gráfica de la función logaritmo

Los logaritmos en una base dada se pueden ver como una función cuyo dominio es la parte positiva de $\mathbb{R}$, es decir $]0, +\infty[$ y que consiste en asignar a cada número real positivo su correspondiente logaritmo.

Tomemos por ejemplo

$$f(x) = \log_2 x.$$

La siguiente tabla nos da algunas imágenes y, con base en ella, podemos bosquejar la gráfica de esta función (figura 7.1).

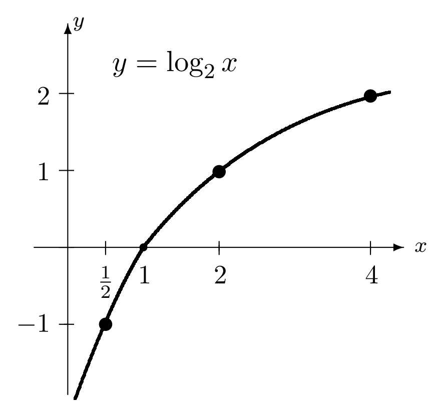


Figura 7.1. $f(x) = \log_2 x$

Tabla de valores de $f(x) = \log_2 x$

Tabla 7.1

x	$\log_2 x$
$1/4$	-2
$1/2$	-1
1	0
2	1
4	2

En realidad las gráficas de las funciones logarítmicas son parecidas a la anterior siempre que la base sea mayor que 1, si la base es menor que 1 se invierte con respecto al eje x.

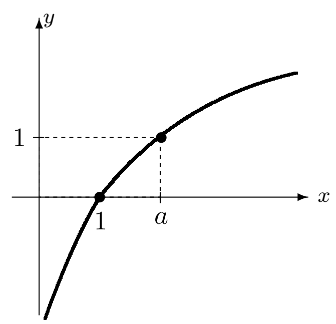


Figura 7.2. Gráfica de $y = \log_a x$ cuando $a > 1$

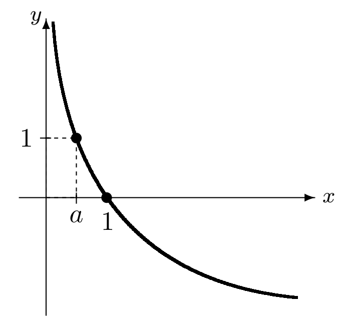


Figura 7.3. Gráfica de $y = \log_a x$ cuando $0 < a < 1$

7.2 REPASO SOBRE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES

Aquí se hace un repaso de la función exponencial, vista como la inversa de la función logarítmica. Se estudian sus principales propiedades y su gráfica.

La función $f(x) = \log_a x$ es una función biyectiva de $]0, +\infty[$ en $\mathbb{R}$. Por esta razón tiene una función inversa que va de $\mathbb{R}$ en $]0, +\infty[$ que se llama la **función exponencial de base** a y se denota por a^x. Esto es, la inversa de $f(x) = \log_a x$ es

$\log_a x$ y a^x son inversas

$$
\begin{array}{rcl}
f^{-1} : \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, +\infty[\\
x & \rightarrowtail & a^x
\end{array}
$$

Al ser mútuamente inversas se deducen dos relaciones muy importantes:

$$\boxed{\log_a a^x = x} \qquad \boxed{a^{\log_a x} = x}$$

además de las propiedades de las potencias que usted ya conoce y que dieron origen a las propiedades de los logaritmos que vimos anteriormente.

Función exponencial natural

Por otra parte, la inversa de la función logaritmo natural $\ln x$, se llama la **exponencial natural** y se denota por e^x. Las propiedades anteriores producen como caso particular una fórmula que puede resultar útil en algunas circunstancias:

$$\boxed{a^x = e^{x \ln a}}$$

A continuación se presenta los gráficos de las funciones exponenciales cuando la base es mayor que 1 y cuando está entre 0 y 1.

e

Aunque se sabía la existencia del número e más de un siglo antes de Leonhard Euler, la representación "e" fue dada por este gran científico.

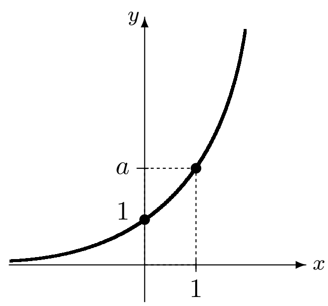


Figura 7.4. Gráfica de $y = a^x$ cuando $a > 1$

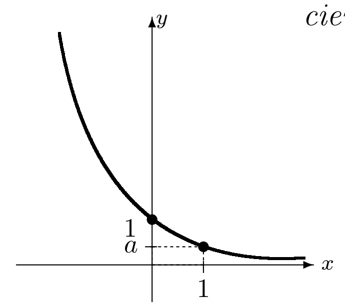


Figura 7.5. Gráfica de $y = a^x$ cuando $0 < a < 1$

Se calculan en esta sección algunos límites con funciones logarítmicas y exponenciales; en particular un límite que define al número e.

7.3 LÍMITES ESPECIALES

De las gráficas de estas funciones podemos deducir que ellas son continuas en todo su dominio, de manera que si c pertenece al dominio de la función correspondiente, entonces se tiene:

$$\lim_{x\to c}[\ln x] = \ln c$$

$$\lim_{x\to c} e^x = e^c$$

y en general

$$\lim_{x\to c}[\log_a x] = \log_a c$$

$$\lim_{x\to c} a^x = a^c$$

Basado en lo anterior tenemos

$$\lim_{x\to 3} \ln x = \ln 3$$

$$\lim_{x\to -1} e^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 8} \log_2 x = \log_2 8 = 3$$

$$\lim_{x\to 2} 3^x = 3^2 = 9$$

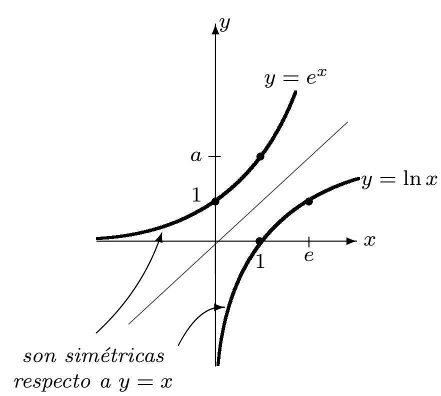


Figura 7.6. $y = \ln x$, $y = e^x$ son inversas

Ejemplo 11. Cálculo de límites

Calcular los límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 2}(x+2^x)$ (b) $\lim\limits_{x\to -1}(x\ln(x^2)+2x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-2^x}{\log_2 x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}(3^x+\ln(x+2))$

Solución: (a) $\lim\limits_{x\to 2}(x+2^x)=2+2^2=2+4=6$

(b) $\lim\limits_{x\to -1}(x\ln(x^2)+2x)=-1\ln(-1)^2+2(-1)=-\ln 1-2=-0-2=-2$

(c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-2^x}{\log_2 x}=\dfrac{4-2^4}{\log_2 4}=\dfrac{4-16}{2}=-6$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}(3^x+\ln(x+2))=3^0+\ln(0+2)=1+\ln 2$ △

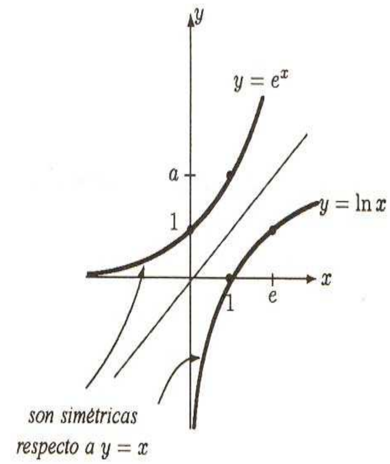


Figura 7.7. $f(x)=(1+x)^{1/x}$

¿Cómo sale el número e?

Un límite que juega un importante papel en matemáticas porque define un número especial es el siguiente:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

No podemos, con los elementos con los que contamos, calcular exactamente este límite, pero bajo el supuesto de que existe podemos hacer un estimado mediante una tabla de valores.

Tabla 7.2

0

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	0,0001	0,001	0,01	0,1
$(1+x)^{1/x}$	2,867972	2,731999	2,719642	2,718417	2,718145	2,716923	2,704813	2,5937425

De la tabla 7.2 vemos que, conservando hasta tres cifras decimales, el límite es aproximadamente igual a $2,718$. Podríamos seguir calculando para valores cada vez más cercanos a 0 y nos daríamos cuenta que se van “estacionando” cada vez más decimales pero no lograremos capturar un cierto valor “conocido” como sí sucedió en otras tablas que elaboramos antes. Este límite es el que define el conocido número e, base de los logaritmos naturales y de la función exponencial natural. Es decir,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

Función logarítmica y su inversa

La *función logarítmica*, que como mencionamos antes nació del estudio de la relación entre las progresiones aritmética y geométrica, durante el siglo XVII fue analizada a partir de la serie obtenida por la integración de

$$\frac{1}{1+x}$$

[lo que hoy diríamos es

$$\int_1^x \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(1+x) + C.]$$

John Wallis, Isaac Newton, Gottfried Leibniz y Jean Bernoulli mostraron que la función logarítmica es la inversa de la función exponencial.

Historia de dos funciones

Ya en el año de 1742 el matemático William Jones (1675–1749) había dado una sistemática descripción en estos términos.

Euler definió las dos funciones así:

$$e^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \text{y} \quad \log x = \lim_{n\to\infty} n\big(x^{1/n}-1\big).$$

Esto fue presentado así en el libro *Introductio in Analysis Infinitorum* publicado en 1748.

Ejemplo 12. Cálculo de un límite exponencial

Calcular $\lim\limits_{t\to 0}(1+2t)^{\frac{1}{t}}$.

Solución: Utilizamos las propiedades de los límites y el valor antes indicado. Además, en este caso, empleamos un "truco" que es útil en el cálculo de algunos límites; es lo que se llama un *cambio de variable.* En este caso, en el lugar de $2t$ vamos a escribir h, es decir, consideraremos $h = 2t$. Pero hay que cambiar todas las partes variables en el límite, esto es, en toda parte donde aparece t debemos poner lo que corresponda en términos de h. Así, como $h = 2t$ entonces cuando $t \to 0$, también $h \to 0$, y además $\frac{1}{t} = \frac{2}{h}$. Haciendo todas estas sustituciones se obtiene

Cambio de variable

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}(1+2t)^{\frac{1}{t}} &= \lim_{(\frac{h}{2})\to 0}(1+h)^{\frac{2}{h}} \\
&= \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{2}{h}} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^2 \\
&= \left[\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^2 \\
&= e^2 \qquad (\text{porque } \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e)
\end{aligned}$$

$\triangle$

De modo exactamente igual al anterior, pero escribiendo x en el lugar de 2 obtenemos que

$$\boxed{\lim_{h \to 0} (1 + xh)^{\frac{1}{h}} = e^x}$$

y en particular

$$\boxed{\lim_{h \to 0} (1 + \frac{h}{x})^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}}$$

7.4 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

Aquí se calculan las derivadas de las funciones logarítmica y exponencial y se utilizan para calcular derivadas de funciones más complejas.

Ahora veremos cómo se calculan las derivadas de las funciones logarítmicas y exponenciales.

La derivada de $y = \ln x$

Esta es la función logaritmo natural (el logaritmo de base e). Utilizando los límites recientemente estudiados podemos calcular su derivada mediante la definición. Tenemos:

$$\begin{aligned} y' &= (\ln x)' \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\ &\qquad \text{(usando la propiedad del logaritmo de un cociente)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \\ &\qquad \text{(usando la propiedad del logaritmo de una potencia)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \ln e^{\frac{1}{x}} \quad \text{(según el último de los límites vistos anteriormente)} \\ &= \frac{1}{x} \quad \text{(porque } \ln e^z = z \text{ para cualquier } z\text{)} \end{aligned}$$

Es decir la derivada de $\ln x$ es $\frac{1}{x}$:

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Los números más importantes se juntan: Euler descubrió una relación matemática fundamental que vincula estos números tan importantes π, e, i, 0, 1:

$$\boxed{e^{\pi i} + 1 = 0}.$$

El símbolo i se usa para representar $\sqrt{-1}$ (el número imaginario que se usa como “base”). Fue introducido con este sentido por Euler en **1777** (al final de su vida).

La derivada de $y = e^x$

Usemos la regla de la cadena para calcular esta derivada. Puesto que $\ln x$ y e^x son mutuamente inversas entonces tenemos que

$$\ln e^x = x,$$

derivando a ambos lados tenemos

$$(\ln e^x)' = (x)' = 1,$$

Pero por la regla de la cadena tenemos que

$$(\ln e^x)' = \frac{1}{e^x}(e^x)'$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x}(e^x)' &= 1 \implies \\ \frac{(e^x)'}{e^x} &= 1 \implies \\ (e^x)' &= e^x \end{aligned}$$

En otras palabras, la derivada de e^x es la misma e^x:

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

La derivada de las funciones logarítmica y exponencial en cualquier base

Utilizando las relaciones entre las funciones logarítmica y exponencial natural con las de otras bases y las reglas de derivación podemos obtener la derivada de las funciones logarítmicas y exponenciales en cualquier base. En la siguiente tabla se indican estas derivadas.

Derivadas de las funciones logarítmicas y exponenciales	
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(e^x)' = e^x$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(a^x)' = a^x \ln a$

Ahora daremos algunos ejemplo de cálculo de derivadas en las que aparecen combinaciones de estas funciones.

Ejemplo 13. Derivadas de funciones logarítmicas y algebraicas

Calcular la derivada de $y = \ln(x^5 + x^3 - 2)$.

Solución: Tenemos en este caso una composición de funciones, la función de "afuera" es el logaritmo y la de adentro es x^5+x^3-2. Usando la regla de la cadena debemos derivar el logaritmo, pero evaluando en

x^5+x^3-2 y, luego, debemos multiplicar por la derivada de esta última. Así

$$\begin{aligned} y' &= [\ln(x^5+x^3-2)]' \\ &= \frac{1}{x^5+x^3-2}\cdot(x^5+x^3-2)' \\ &= \frac{1}{x^5+x^3-2}\cdot(5x^4+3x^2) \\ &= \frac{5x^4+3x^2}{x^5+x^3-2} \end{aligned}$$

△

De la regla de la cadena y la derivada de $\ln x$ podemos deducir una fórmula general para derivar una función como la del último ejemplo:

Fórmula general para la derivada de $\ln f(x)$

$$\boxed{[\ln\big(f(x)\big)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Ejemplo 14. Derivada de funciones logarítmica y trigonométrica

De acuerdo con lo anterior tenemos que

$$\big[\ln(\cos x + x^2)\big]' = \frac{(\cos x + x^2)'}{\cos x + x^2} = \frac{-\operatorname{sen} x + 2x}{\cos x + x^2}$$

△

Ejemplo 15. Derivada de una función exponencial

Calcular la derivada de $g(x) = e^{x^5+3x^2-1}$.

Solución: También aquí tenemos una composición de funciones. La de afuera es la exponencial y la de adentro es

$$x^5+3x^2-1.$$

Al derivar, sabemos que la derivada de la exponencial es ella misma pero en este caso evaluada en

$$x^5+3x^2-1;$$

por la regla de la cadena, debe multiplicarse por la derivada de esta función. Entonces

$$g'(x) = \left[e^{x^5+3x^2-1}\right]' = e^{x^5+3x^2-1}(x^5+3x^2-1)' = e^{x^5+3x^2-1}(5x^4+6x)$$

△

También en este caso, mediante la regla de la cadena podemos deducir una regla general, lo mismo que para funciones logarítmicas y exponenciales de cualquier base. En la siguiente tabla se dan estas reglas.

Derivadas de las funciones logarítmicas y exponenciales	
$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$\left[e^{f(x)}\right]' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$[\log_a f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)\,\ln a}$	$\left[a^{f(x)}\right]' = a^{f(x)} \cdot f'(x)\,\ln a$

Ejemplos: Derivada de funciones logarítmicas y exponenciales

- Determine la derivada de las siguientes funciones:

(a) $y = x\ln x + x^2$ (b) $y = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x-3}\right)$ (c) $y = \dfrac{x+\ln x}{x+2}$

(d) $y = \sqrt{x + 3\ln(x-2)}$

Solución: (a) Aplicando las reglas de derivación:

$$\begin{aligned} y' &= (x\ln x + x^2)' = (x\ln x)' + (x^2)' \\ &= (x)'\ln x + x(\ln x)' + 2x = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} + 2x \\ &= \ln x + 1 + 2x \end{aligned}$$

(b) En este caso es más conveniente “arreglar” un poco la función usando las propiedades de los logaritmos. Esto permitirá realizar los cálculos más fácilmente. En efecto,

$$\ln\left(\frac{x^2+1}{x-3}\right) = \ln(x^2+1) - \ln(x-3)$$

y entonces

$$\begin{aligned} y' &= [\ln(x^2+1) - \ln(x-3)]' \\ &= \frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)' + \frac{1}{x-3}\cdot(x-3)' \\ &= \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x-3} \end{aligned}$$

(c)Tenemos:

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{x+\ln x}{x+2}\right)' = \\
&= \frac{(x+\ln x)'(x+2)-(x+\ln x)(x+2)'}{(x+2)^2} \\
&= \frac{(1+\frac{1}{x})(x+2)-(x+\ln x)}{(x+2)^2} \\
&= \frac{3x+2-x\ln x}{x(x+2)^2}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
y' &= \left[\sqrt{x+3\ln(x-2)}\right]' \\
&= \frac{[x+3\ln(x-2)]'}{2\sqrt{x+3\ln(x-2)}} \\
&= \frac{1+3\frac{1}{x-2}}{2\sqrt{x+3\ln(x-2)}} \\
&= \frac{x+1}{2(x-2)\sqrt{x+3\ln(x-2)}}
\end{aligned}$$

- Determine la derivada de las siguientes funciones:

(a) $y = xe^x + x^2$ (b) $y = \dfrac{x^2+1}{e^x-3}$ (c) $y = e^{x^2+2x-3}$
(d) $y = \sqrt{x+3e^x}$

Solución: (a) $y' = (xe^x + x^2)' = (xe^x)' + (x^2)'$

$= (x)'e^x + x(e^x)' + 2x$

$= 1\cdot e^x + x\cdot e^x + 2x = e^x(1+x) + 2x$

(b) $y' = \left(\dfrac{x^2+1}{e^x-3}\right)' = \dfrac{(x^2+1)'(e^x-3)-(x^2+1)(e^x-3)'}{(e^x-3)^2}$

$$= \frac{2x(e^x-3)-(x^2+1)e^x}{(e^x-3)^2}$$

(c) $y' = \left[e^{x^2+2x-3}\right]' = e^{x^2+2x-3}(x^2+2x-3)' = e^{x^2+2x-3}(2x+2)$

(d) $y' = \left(\sqrt{x+3e^x}\right)' = \dfrac{(x+3e^x)'}{2\sqrt{x+3e^x}} = \dfrac{1+3e^x}{2\sqrt{x+3e^x}}$

- Calcular la derivada de las siguientes funciones

(a) $g(x) = 3^{x^2-2\tan x}$ (b) $h(t) = \log_3(\operatorname{sen} t + 2t)$

(c) $y = \dfrac{2^{3x+1}+1}{x-2}$ (d) $f(t) = \sqrt{e^{2t} + \log_2(5t-1)}$

Solución: (a) $g'(x) = \left[3^{x^2-2\tan x}\right]' = 3^{x^2-2\tan x}(x^2-2\tan x)' \ln 3$

$$= 3^{x^2-2\tan x}(2x - 2\sec^2 x)\ln 3$$

(b) $h'(t) = [\log_3(\operatorname{sen} t + 2t)]' = \dfrac{(\operatorname{sen} t + 2t)'}{(\operatorname{sen} t + 2t)\ln 3} = \dfrac{\cos t + 2}{(\operatorname{sen} t + 2t)\ln 3}$

(c) $y' = \left[\dfrac{2^{3x+1}+1}{x-2}\right]' = \dfrac{(2^{3x+1}+1)'(x-2) - (2^{3x+1}+1)(x-2)'}{(x-2)^2} =$

$$\frac{2^{3x+1}\ln 2 \cdot 3(x-2) - (2^{3x+1}+1)}{(x-2)^2} = \frac{2^{3x+1}(3x\ln 2 - 7) - 1}{(x-2)^2}$$

(d) $f'(t) = [\sqrt{e^{2t} + \log_2(5t-1)}]' = \dfrac{[e^{2t} + \log_2(5t-1)]'}{2\sqrt{e^{2t} + \log_2(5t-1)}} =$

$$= \frac{2e^{2t} + \frac{5}{(5t-1)\ln 2}}{2\sqrt{e^{2t} + \log_2(5t-1)}}$$

- Calcular la derivada de

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{2x+1}\,\sqrt[3]{3x+2}}{(x^2+1)^5}$$

Solución: Arreglar la función, utilizando las propiedades de logaritmos, es lo más conveniente en este caso:

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{2x+1}\,\sqrt[3]{3x+2}}{(x^2+1)^5} = \frac{1}{2}\ln(2x+1) + \frac{1}{3}\ln(3x+2) - 5\ln(x^2+1)$$

de manera que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\frac{1}{2}\ln(2x+1) + \frac{1}{3}\ln(3x+2) - 5\ln(x^2+1)\right]' \\
&= \frac{1}{2}\frac{(2x+1)'}{2x+1} + \frac{1}{3}\frac{(3x+2)'}{3x+2} - 5\frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{2x+1} + \frac{1}{3}\frac{3}{3x+2} - 5\frac{2x}{x^2+1} \\
&= \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+2} - \frac{10x}{x^2+1}
\end{aligned}$$

. △

Derivación logarítmica

El ejemplo anterior nos da una idea para calcular, de una manera más sencilla, la derivada de ciertas funciones. El método se llama **derivación logarítmica** y consiste en aplicar el logaritmo natural a la función y luego derivar utilizando las reglas de los logaritmos. Esto se usa cuando la función es un producto o cociente de varios factores y también en ciertas potencias. Lo ilustraremos con algunos ejemplos.

Ejemplo 16. Uso de la derivación logarítmica

Calcular la derivada de la función

$$f(x)=\frac{\sqrt[4]{x^2+1}\,(2x-3)(x^3+2)}{(3x+1)(x-4)}$$

Solución: Este es un caso típico en el que se usa la derivación logarítmica porque las propiedades de los logaritmos nos permiten convertir productos y cocientes en sumas y restas que son más fáciles de derivar. Procedemos primero aplicando ln a la función:

$$\ln f(x)=\ln\frac{\sqrt[4]{x^2+1}\,(2x-3)(x^3+2)}{(3x+1)(x-4)},$$

luego aplicamos las propiedades de ln para convertir en sumas y restas de manera que

$$\ln f(x)=\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\ln(2x-3)+\ln(x^3+2)-\ln(3x+1)-\ln(x-4).$$

Después de esto derivamos a ambos lados:

Primero: *se aplica las propiedades de los logaritmos.*
Segundo: *se deriva.*
Tercero: *se multiplica.*

$$[\ln f(x)]'=\left[\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\ln(2x-3)+\ln(x^3+2)-\ln(3x+1)-\ln(x-4)\right]'\Longrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{4}\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2}{2x-3}+\frac{3x^2}{x^3+2}-\frac{3}{3x+1}-\frac{1}{x-4}.$$

Finalmente multiplicamos por $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x^2+1}\,(2x-3)(x^3+2)}{(3x+1)(x-4)}$ para obtener $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{4}\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2}{2x-3}+\frac{3x^2}{x^3+2}-\frac{3}{3x+1}-\frac{1}{x-4}\right)\frac{\sqrt[4]{x^2+1}\,(2x-3)(x^3+2)}{(3x+1)(x-4)}.$$

△

Ejemplo 17. Uso de la derivación logarítmica

Calcular la derivada de $f(x) = x^x$.

Solución: En este caso tenemos una situación especial. Esta es una potencia en la cual la base es variable y también el exponente es variable. Aplicamos ln a ambos lados y procedemos como en el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}
f(x) = x^x \Rightarrow \ln f(x) &= \ln x^x \\
\Rightarrow \quad \ln f(x) &= x \ln x \\
\Rightarrow \quad [\ln f(x)]' &= [x \ln x]' \\
\Rightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} &= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \\
\Rightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} &= \ln x + 1 \\
\Rightarrow \quad f'(x) &= f(x)(\ln x + 1) \\
\Rightarrow \quad f'(x) &= x^x(\ln x + 1)
\end{aligned}$$

De manera que $(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$. △

Ejemplo 18. Una derivación implícita

Calcular y' si se tiene que y está definido en forma implícita por la ecuación:

$$\ln(x+y) = x^2 + y^2$$

Solución: Procedemos por el método de derivación implícita:

$$\begin{aligned}
[\ln(x+y)]' = (x^2+y^2)' \Rightarrow \quad \frac{(x+y)'}{x+y} &= 2x + 2y \cdot y' \\
\Rightarrow \quad \frac{1+y'}{x+y} &= 2x + 2y \cdot y' \\
\Rightarrow \quad 1 + y' &= (x+y)(2x + 2y \cdot y') \\
\Rightarrow \quad 1 + y' &= (x+y)(2x) + (x+y)(2y \cdot y') \\
\Rightarrow \quad y' - (x+y)(2y \cdot y') &= (x+y)(2x) - 1 \\
\Rightarrow \quad y'[1 - (x+y)(2y)] &= (x+y)(2x) - 1 \\
\Rightarrow \quad y' &= \frac{(x+y)(2x) - 1}{1 - (x+y)(2y)}
\end{aligned}$$

△

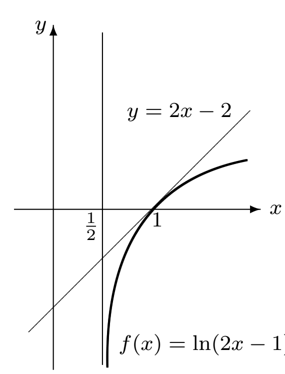


Figura 7.8.

Ejemplo 19. Cálculo de la recta tangente

Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por $f(x) = \ln(2x-1)$ en el punto $(1,0)$.

Solución: La pendiente m de la recta tangente es la derivada de la función evaluada en $x = 1$. Calculamos $f'(x)$ utilizando la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{1}{2x-1} \cdot (2x-1)' = \frac{2}{2x-1},$$

por lo tanto $m = f'(1) = \frac{2}{2\cdot 1-1} = 2$. Ahora calculamos b:

$$b = 0 - 2 \cdot 1 = -2.$$

Concluimos que la recta tangente tiene ecuación:

$$y = 2x - 2$$

△

Ejemplo 20. Funciones hiperbólicas

Existe otra familia de funciones muy interesantes que aparecen en las aplicaciones del Cálculo; éstas se llaman **funciones hiperbólicas** y, en cuanto a sus propiedades, guardan muchas analogías con las funciones trigonométricas, aunque la forma en que están definidas difiere sustancialmente. La dos funciones hiperbólicas básicas son el **seno hiperbólico** y el **coseno hiperbólico** que se definen respectivamente como

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

para todo número real x.

Calculemos la derivada de cada una de estas funciones:

$$(\operatorname{senh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Pero esta última expresión no es ni más ni menos que $\cosh x$. Es decir,

$$\boxed{(\operatorname{senh} x)' = \cosh x}$$

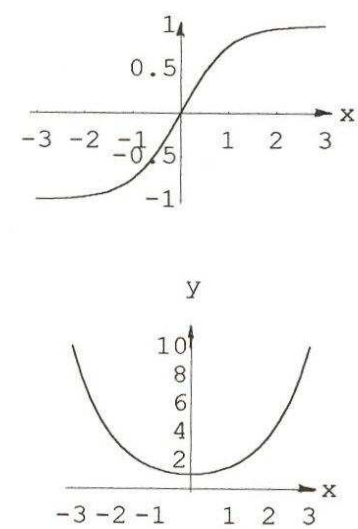


Figura 7.9. Algunas funciones hiperbólicas

De modo parecido tenemos

$$\begin{aligned}(\cosh x)' &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' \\ &= \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}(-1)}{2} \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \operatorname{senh} x.\end{aligned}$$

De modo que $\boxed{(\cosh x)' = \operatorname{senh} x}$ $\triangle$

★ *Actividad:* La demás funciones hiperbólicas se definen de manera análoga a las funciones trigonométricas, así:

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x},$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}.$$

Calcule la derivada de cada una de estas funciones.

Las funciones hiperbólicas se parecen a las trigonométricas

Sobre el concepto de función

A lo largo de este libro hemos usado constantemente el concepto de función como algo muy natural. Debe señalarse, sin embargo, que también tuvo su historia y, efectivamente, como parte de la nueva matemática y el Cálculo en particular.

La noción de función y las funciones algebraicas y trascendentales fueron introducidas y usadas en el siglo XVII. Leibniz, James, Jean Bernoulli, L'Hípital, Huygens y otros usaron diferentes tipos de funciones en los asuntos que trataron (muchos de aplicación física). Pero fue el suizo Jean Bernoulli quien primeramente formuló el concepto de función. Euler en su famoso libro *Introductio* de 1748 ofreció una serie de distinciones alrededor de las funciones que prácticamente han sobrevivido hasta ahora. El decía que una función es una expresión **analítica** formulada de cualquier manera a partir de una cantidad variable y constantes. Euler incluía los polinomios, las series de potencias y las expresiones logarítmicas y trigonométricas.

Una función era *algebraica* si las operaciones realizadas con la variable independiente eran solamente algebraicas. Las funciones algebraicas se dividen en *racionales* e *irracionales*. Las *racionales* cuando se usan las 4 operaciones usuales. *Irracionales* cuando se usa también la extracción de raíces. Las funciones que no son algebraicas son las *trascendentes* como las trigonométricas, logarítmicas y exponenciales, funciones definidas por algunas integrales, y las que poseen variables elevadas a potencias que son números irracionales. Para Euler, la diferencia se establecía a partir de la combinación de constantes y variables que definían la función. También decía que las trascendentes se separaban de las algebraicas por el uso de un número infinito de las combinaciones que hacen las funciones algebraicas.

Euler también definió lo que era una función de varias variables, y distinguió entre funciones explícitas e implícitas.

Introductio es el primer libro en la historia de las matemáticas en el que el concepto de función es el medular.

En esta sección se proporciona una breve reseña sobre el desarrollo de las notaciones en matemáticas.

7.5 LA IMPORTANCIA DE LAS NOTACIONES

La utilización y escogencia de símbolos para denotar conceptos o procesos matemáticos ha resultado de mucha importancia. Antes del siglo XVI el único hombre que introdujo concientemente el simbolismo para el álgebra fue Diofanto (alrededor del 250 d. C.). Otros cambios de notación fueron esencialmente abreviaciones de palabras. Alrededor del siglo XV, por ejemplo, se usaba m para menos y p para más. $+$ y $-$ se supone fueron introducidos por los alemanes en ese mismo siglo. El $=$ fue introducido por el inglés Robert Recorde (1510–1550). Viíte usó $\sim$ para la igualdad, y Descartes usó $\propto$ para ésta misma. Descartes usó $\sqrt{\ }$ para la raíz cuadrada.

Para que se tenga una idea de la importancia de la notación, mencionemos que el matemático italiano Jerónimo Cardano en su libro *Ars Magna* (1545) escribía

$$\text{“}x^2 = 4x + 32\text{”} \quad \text{como} \quad \text{“}\textit{qdratu aeqtur } 4 \textit{ rebus p: } 32\text{”}$$

Fue el francés Viíte quien realizó cambios decisivos en el uso de símbolos en el álgebra. Fue el primero en usar sistemáticamente letras para las variables o potencias de la variable, y también las usaba como coeficientes.

Otro ejemplo para que se perciba que todas las dimensiones de las matemáticas son históricas, elaboradas por personas de carne y hueso en algún momento: la notación x^2 para $x \cdot x$ (tan natural) se estandarizó hasta que la introdujo Gauss en el siglo XIX.

Notaciones en el Cálculo

La notación f' que usamos para la derivada (y $f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$) para las derivada de orden superior) fue introducida por el matemático francés Lagrange (1736–1813) a fines del siglo XVIII. Newton usaba $\dot{y}$ o $\ddot{y}$ para y' y y''. En 1800 L. Arbogast utilizó Df para la derivada de f (y D^2f, $D^3f, \ldots, D^nf$); es decir $f'(x) = Df(x)$ o $f^{(3)}(x) = D^3f(x)$.

La notación de Leibniz

Leibniz fue uno de los grandes matemáticos que comprendió la importancia de los símbolos a usar y, por eso, muchos de los que usó todavía nos acompañan.

Para Leibniz:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \qquad \text{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

No se trataba, para él, solo de notación. El consideraba el límite $\frac{dy}{dx}$ como un cociente de cantidades "infinitesimales" dy y dx a las que llamó "*diferenciales*". La derivada $\frac{dy}{dx}$ era un "cociente diferencial". El no usó el límite para definir la derivada; decía que se pasaba de Δy a dy, y de Δx a dx como "transformación en infinitesimales". Estos infinitesimales eran un nuevo tipo de número que eran más pequeños que cualquier número real positivo (pero $\neq 0$).

Aunque este tratamiento, como veremos, desaparecería en la historia de las matemáticas, el simbolismo $\frac{dy}{dx}$ se sigue usando. Este símbolo tiene la ventaja de resumir el proceso que empieza con un cociente de diferencias $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y luego sigue con el paso al límite.

Leibniz escribía en 1684:

$$\begin{aligned} dxy &= x\,dy + y\,dx \\ d\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} \quad \text{y} \\ dx^n &= nx^{n-1}\,dx \end{aligned}$$

La "diferencia mínima" (derivada o diferencial) de $x = dx$

La "diferencia mínima" de $y = dy$.

La diferencial $dxy = (x + dx)(y + dy) - xy$

$$\begin{aligned} &= xy + x\ dy + dx\ y + dx\ dy - xy \\ &= x\ dy + dx\ y + dx\ dy \end{aligned}$$

Como $dx\ dy$ es "infinitamente pequeño" puede, entonces, despreciarse. Por eso:

$$d(xy) = x\ dy + y\ dx.$$

Estos procedimientos con "infinitesimales" todavía se usan en algunas aplicaciones del Cálculo.

7.6 EJERCICIOS DEL *CAPITULO 7*

Completar

1. Exprese estas ecuaciones como logaritmos:

(a) $3^4 = 81$ __________

(b) $8^0 = 1$ __________

(c) $10^{-3} = 0,001$ __________

(d) $4^3 = 64$ __________

(e) $2^{-3} = \frac{1}{8}$ __________

(f) $(\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$ __________

2. Exprese estas ecuaciones como exponentes:

(a) $\log_{10} 1\,000 = 3$ __________

(b) $\log_2 8 = 3$ __________

(c) $\log_{1/4} 16 = -2$ __________

(d) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ __________

(e) $\ln e = 1$ __________

(f) $\log_8 64 = 2$ __________

Falso o Verdadero

En los ejercicios 3 a 8 diga si la afirmación es falsa o verdadera (explique)

3. Para todo x se tiene que $\ln 2 - \ln x = \dfrac{\ln 2}{\ln x}$.

4. Si $0 < a < 1$ entonces $\log_a 8 > \log_a 9$.

5. Si $0 < b < 1 < a$ entonces $\log_b x < \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. Para todo x en $\mathbb{R}$ se tiene que $2^{\log_2 x} = x$.

7. Para cualquier valor a positivo diferente de 1 se tiene que $f(x) = a^x$ es una función creciente.

8. Existe algún valor x tal que $e^x = \ln x$.

Selección única

En los ejercicios 9 a 13 escoja la opción que responda o complete correctamente la proposición dada.

9. Si a es mayor que 1, $f(x) = a^x$ y $g(x) = \ln x$ entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

(a) $f'(x) > 0$ y $g'(x) < 0$

(b) $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$

(c) $f'(x) < 0$ y $g'(x) < 0$

(d) $f'(x) < 0$ y $g'(x) > 0$

10. El número de asíntotas verticales de $f(x) = \log_2 x$ es

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

11. Si $g(x) = f(\ln x)$ donde f es una función derivable entonces $g'(x)$ es igual a

(a) $\dfrac{f'(x)}{\ln(f(x))}$ (b) $f'(x) \cdot \ln(f(x))$

(c) $f'(x) \cdot \dfrac{1}{x}$ (d) $\dfrac{f'(\ln x)}{x}$

12. El límite $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} 3^{1/(2-x)}$ es igual a

(a) $-\infty$ (b) 1 (c) 0 (d) 1/2

13. Si $f(x) = e^{-x^2}$ entonces $f'(1)$ es igual a

(a) $2e^{-1}$ (b) $-2e^{-1}$ (c) $2e$ (d) e^{-1}

Problemas y ejercicios de desarrollo

En los ejercicios 14 a 17 escriba la expresión dada como sumas y restas de logaritmos de la forma más simple posible.

14. $\log_2(x^2-1)\sqrt[3]{2x-3}$

15. $\log_2 \dfrac{(\cos^5 x)\sqrt{3x-2}}{\sec^3 x}$

16. $\log_2 \sqrt{(1+x^2)^3(2x+1)^5}$

17. $\log_2 \dfrac{(3x+1)x^x\sqrt[3]{x^2+3}}{(x+2)\sqrt{2x+3}}$

En los ejercicios 18 a 24 calcule el límite indicado.

18. $\lim\limits_{x\to 3}(3x+e^x)$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x+\ln(x+1)}{2x+3^x}$

20. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2^x}{\ln(6+2x)}$

21. $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2+\log_2(-3x+x^2)\right)$

22. $\lim\limits_{h\to 0}(1-h)^{\frac{1}{h}}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{x}{5})^{\frac{1}{x}}$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

En los ejercicios 25 a 40 calcule la derivada de la función dada.

25. $f(x)=x^2\ln x$

26. $h(t)=\dfrac{\ln t}{t^2}$

27. $f(t)=(\ln t)^4$

28. $h(t)=\dfrac{1+\log_3 2t}{2+\log_4 2t}$

29. $f(x)=\ln 3t\sqrt[3]{2t+1}$

30. $f(x)=\ln\dfrac{x^3\cos x}{(2x+3)x^4}$

31. $f(t)=(t^2+3)e^t$

32. $f(x)=e^{x^2-8x+14}$

33. $g(x)=\dfrac{x^2+e^x}{x^2-e^x}$

34. $h(t)=\dfrac{t+\ln t}{t+e^t}$

35. $f(t)=x^2 2^x$

36. $g(x)=\ln(x^2+2x+1)$

37. $f(x)=\sqrt{3x+\ln(2x-1)}$

38. $g(x)=\log_2(3x^3+2x+1)$

39. $g(x)=\sqrt{x^2+1}\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$

40. $h(x)=\log_2[5x^4\tan 3x]$

En los ejercicios 41 a 48 utilice el método de derivación logarítmica para calcular la derivada de la función dada.

41. $f(x)=(x^2-4)\sqrt[4]{(3x+1)^3}$

42. $g(x)=\dfrac{(x+3)\sqrt{2x+1}}{(x-3)\sqrt[3]{2x-1}}$

43. $f(x)=x^{x^x}$

44. $g(x)=[\operatorname{sen} x]^x$

45. $g(t)=t^2t^{3t}$

46. $f(x)=\tanh x$

47. $h(x) = \dfrac{x^{2x}(x^2+1)}{(x^2-1)\sqrt[4]{x+1}}$

48. $g(x) = \dfrac{\tan^2 5x \operatorname{sen}^3 2x}{(x+1)\sqrt{2x}}$

En los ejercicios 49 a 52 utilice derivación implícita para calcular y'.

49. $e^{xy} + xy = 1$

50. $\ln(2x+2y) + x^2 = y^2$

51. $4x^2y - e^y = e^x$

52. $\ln(xy^2) + 2x - y = 5$

53. Pruebe que $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

54. Del ejercicio anterior deduzca que

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

55. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x + \log_2(x^2+4)$ en el punto $(2, 5)$

56. Pruebe que la recta $y = x$ es tangente a la gráfica de $y = \tanh x$.

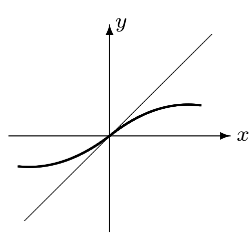


Figura 7.10.

57. Determine los puntos donde la recta tangente a la curva $y = e^x - x$ es horizontal.

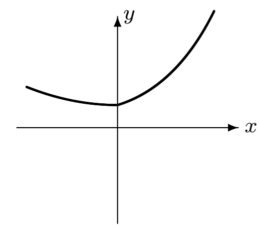


Figura 7.11.

58. La figura 7.12 representa la gráfica de la la función $f(x) = \ln x$. La recta L es tangente a la gráfica en el punto P. Pruebe que para cualquier P con estas condiciones se tiene que el segmento AB tiene longitud 1.

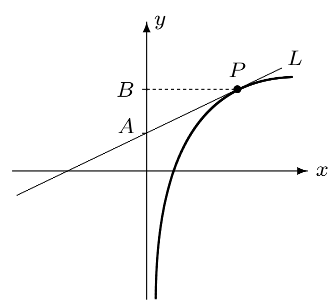


Figura 7.12.

59. Determine los puntos de la gráfica $y = x^2 + 4\ln x$ en los que la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y = 6x - 3$.

Arquímedes de Siracusa (circa 287–212, a. C.).
Uno de los grandes matemáticos y físicos de la Antigüedad griega.

CAPÍTULO 8
ALGUNAS APLICACIONES

Es innegable que algunas de las mejores inspiraciones en las matemáticas –en aquellas partes lo más puras que uno pueda imaginar– han venido de las ciencias naturales ... El hecho más vitalmente característico de las matemáticas es, en mi opinión, su bastante peculiar relación con las ciencias naturales o, de manera más general, con cualquier ciencia que interpreta la experiencia en un nivel superior que el puramente descriptivo.

John von Newmann

.

La música es un ejercicio matemático secreto, y la persona que la disfruta no se da cuenta que está manipulando números.

Wilhelm Gottfried Leibniz

Existe una gran cantidad de aplicaciones del Cálculo a las ciencias físicas y sociales. Sin embargo, la mayoría de las aplicaciones más interesantes requieren de un nivel mayor de matemáticas y, de igual manera, de un conocimiento bastante amplio de otras ramas del quehacer humano tales como la Física, la Química, la Biología, la Economía, etc.

En este capítulo solamente daremos un ligero vistazo a algunas de las más simples, pero que servirá para comprender la importancia de las ideas del Cálculo Diferencial e Integral en las aplicaciones científicas y tecnológicas.

Ya en capítulos anteriores dimos algunas ideas al respecto. En esta sección retomaremos algunas de esas ideas y las veremos con un poco más de detalle. El objetivo es ilustrar la importancia de los conceptos estudiados.

Aquí se ilustra el uso de los límites mediante algunas situaciones concretas

8.1 ALGUNAS SITUACIONES DONDE SE APLICAN LOS LÍMITES

En esta sección veremos dos ejemplos de situaciones en las cuales el cálculo de límites nos sirve para hacer algún tipo de predicción.

El interés compuesto está relacionado con e

Posiblemente usted ha oído hablar de intereses compuestos. Normalmente, si tiene una cuenta de ahorros en un banco, éste le paga intereses compuestos. Esto significa que los intereses se calculan sobre el monto que usted ha depositado como ahorro y, también, sobre los intereses que ya ha ganado al momento del cálculo.

Entre más corto es el período en que se calcule el interés, mayor será el capital al final del año.

Llamemos con h la fraccción del año en que se calculan los intereses. Por ejemplo, si el interés se calcula mensualmente entonces $h = \frac{1}{12}$. El capital al final del año será una función de h que llamaremos $C(h)$. Supongamos que la tasa de interés es $r\%$ anual; es relativamente sencillo obtener la siguiente fórmula para $C(h)$:

$$C(h) = C_0(1 + \frac{r}{100} \cdot h)^{\frac{1}{h}},$$

donde C_0 es el capital inicial (la cantidad de dinero que usted ahorra), suponiendo que no hace más depósitos durante el resto del año.

Según dijimos antes, entre más corto sea el período en que se calcule el interés, mayor será el interés devengado; esto se puede interpretar diciendo que el máximo beneficio se obtendrá si hacemos tender h a 0, en otra palabras el máximo capital que podríamos tener al final del año sería

$$\lim_{h \to 0} C(h) = \lim_{h \to 0} C_0(1 + \frac{r}{100} \cdot h)^{\frac{1}{h}}.$$

Pero este límite es un viejo conocido (vea el *Capítulo 7*), entonces:

$$\lim_{h \to 0} C_0(1 + \frac{r}{100} \cdot h)^{\frac{1}{h}}. = C_0 e^{r/100}$$

Se dice que si el interés se **compone continuamente**, entonces el capital al final del año será

$$C_0 e^{r/100}.$$

Ejemplo 21. Calculando un interés

Si se colocan ₡10 000 a un interés compuesto continuamente del 24% anual, ¿cuál será el capital al cabo de un año?

Solución: Según lo comentado antes, el capital al final del año será

$C = 10\,000e^{24/100} = 10\,000e^{0,24} = 10\,000 \cdot 1,2712492 = 12\,712,49$ colones

. △

Un caso en el que la resistencia del aire es importante

Si uno se lanza desde un avión en el aire posiblemente no tendrá un final muy feliz, a no ser que utilice un paracaídas que funcione adecuadamente. La idea básica de un paracaídas es que, por su forma, el aire presenta una gran resistencia que funciona como una especie de frenado. Desde luego, el frenado no es tanto como para quedar completamente suspendido en el aire; de manera que al caer al suelo con un paracaídas se lleva cierta velocidad (no tanta, para no sufrir un golpe fuerte).

Mediante algunos conocimientos de la física se puede demostrar que si un hombre se lanza a una velocidad de 55 m/seg hasta el momento de abrirse el paracaídas y si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, entonces la velocidad a la que baja el paracaidista es

$$v = \frac{5e^{-25,5t} + 6}{1,2 - e^{-24,5t}}.$$

Resulta que si se lanza desde una altura suficientemente grande, la velocidad comienza a estabilizarse (esto en particular significa que casi no tendrá aceleración) y con esa velocidad cae al suelo.

Efectivamente, si vemos qué sucede cuando t se hace cada vez mayor podemos calcular la velocidad de estabilización:

$$\lim_{t\to\infty} v = \lim_{t\to\infty} \frac{5e^{-25,5t} + 6}{1,2 - e^{-24,5t}} = \frac{6}{1,2} = 5$$

(esto es así porque $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-24,5t} = 0$).

Tenemos que: a medida que va bajando, la velocidad del paracaidista se hace cada vez más próxima a 5 m/seg.

8.2 FUNCIONES DISCONTINUAS APLICADAS

En esta sección se introduce una aplicación de las funciones discontinuas: la función de Heaviside y su aplicación en ingeniería.

Quizás a usted le parecieron extrañas algunas funciones definidas "por partes" que consideramos en el *Volumen 1* en el contexto de la continuidad; sin embargo, algunas de ellas son muy importantes en las aplicaciones. Aquí veremos algo con respecto a una función discontinua muy útil: la llamada **función de Heaviside**.

Esta función es de especial importancia en la ingeniería eléctrica. De hecho, se llama así en honor de un ingeniero eléctrico, Oliver Heaviside, quien hizo grandes aportes en la aplicación de las matemáticas en la ingeniería eléctrica.

Definición 8.1. La función de Heaviside

Se llama **función de Heaviside** o **función escalón unidad** a la función H definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Lo que esto significa es que la imagen de cualquier t negativo es 0, por ejemplo,

$$H(-2) = 0,\ H(-1) = 0,\ H(-\frac{1}{2}) = 0;$$

mientras que la imagen de 0 o de cualquier número t positivo es 1, por ejemplo

$$H(0) = 1,\ H(\frac{1}{2}) = 1,\ H(5) = 1, \text{ etc.}$$

La figura 8.1 representa la gráfica de esta función.

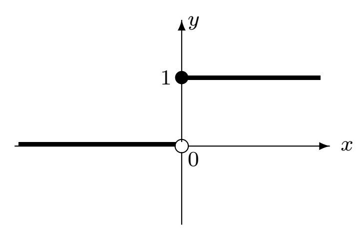


Figura 8.1. Función de Heaviside

Observe que la función de Heaviside es discontinua en 0 (presenta una discontinuidad de "salto") y es continua en el resto del dominio. La discontinuidad proviene de que

$$\lim_{t \to 0^-} H(t) = 0 \quad \text{mientras que} \quad \lim_{t \to 0^+} H(t) = 1.$$

La importancia de esta función en la ingeniería eléctrica radica en que puede considerarse como una **función conmutadora**. Esto es, suponga que usted tiene un bombillo que solo tiene dos estados: *encendido* o *apagado*; se puede asignar un número a cada estado:

$$\begin{aligned} \text{encendido} &= 1, \\ \text{apagado} &= 0. \end{aligned}$$

Si usted considera el momento exacto en que enciende la lámpara como el instante $t = 0$, entonces para los t "siguientes" ($t > 0$) la lámpara estará encendida: 1; para los t "anteriores" al encendido ($t < 0$), la lámpara estaba apagada: 0.

Así, la función de Heaviside, dada su definición y gracias precisamente al tipo de discontinuidad que presenta, es un buen modelo para situaciones que presentan dos estados.

Podemos también considerar el momento del encendido como un instante $t = a$ (en vez de $t = 0$). En este caso tendríamos la **función de Heaviside trasladada**:

$$H_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

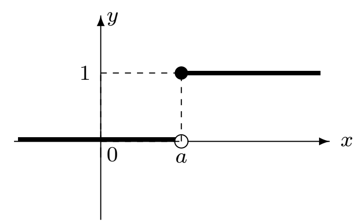


Figura 8.2. Función de Heaviside trasladada

Esto es, si $t < a$, entonces se le asigna el valor 0 (apagado) y si $t \geq a$ se le asigna el valor 1 (encendido).

Por ejemplo, si $a = 10$, entonces:

$$\begin{array}{rcll} H_{10}(1) & = & 0 & (\text{porque } 1 < 10) \\ H_{10}(8) & = & 0 & (\text{porque } 8 < 10) \\ H_{10}(10) & = & 1 & (\text{porque } 10 \geq 10) \\ H_{10}(11) & = & 1 & (\text{porque } 11 \geq 10) \\ H_{10}(14,4) & = & 1 & (\text{porque } 14,4 \geq 10) \\ \text{etc.} & & & \end{array}$$

Ejemplo 22. La función pulso

Suponga que deseamos, utilizando una función, describir una alarma que se activa en el instante 6 *seg* después de alguna acción determinada y se desactiva 5 *seg* después (es decir: a los 11 *seg* después de la acción).

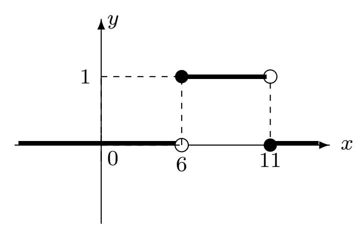


Figura 8.3. Función pulso

Podemos considerar que esta alarma corresponde a una función que vale 0 hasta antes del tiempo $t = 6$, luego, entre $t = 6$ y $t = 11$ vale 1 y vuelve a valer 0 para $t > 11$. Este tipo de funciones se llaman *funciones pulso* y en el caso que nos ocupa se puede escribir como

$$p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \leq t < 11 \\ 0 & \text{si } t \geq 11 \end{cases}$$

Esta función pulso se puede escribir en términos de funciones de Heaviside trasladadas:

$$p(t) = H_6(t) - H_{11}(t).$$

(¿Por qué?). △

De hecho todas las funciones con discontinuidades de "salto" se pueden escribir como suma o resta de múltiplos de funciones de Heaviside trasladadas. Esto es muy útil, por ejemplo, en el análisis del comportamiento de circuitos eléctricos.

8.3 VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Se amplía aquí el estudio de la velocidad y la aceleración en el contexto de una situación física particular.

Los conceptos de velocidad y razones de cambio instantáneas fueron introducidos en el *Capítulo 6*. Para usted ya es evidente que tanto la velocidad como las razones de cambio instantáneo no son más que derivadas. Como ya usted aprendió a calcular derivadas de una manera rápida podemos aquí resolver algunos ejemplos interesantes al respecto.

Antes recordemos lo siguiente:

- En general: dada una función $f(x)$ la razón de cambio instantáneo de f en el punto x es $f'(x)$.
- En particular, si un objeto se mueve en línea recta de modo que a los t segundos se encuentra a $s(t)$ metros de un punto de referencia llamado origen, entonces la velocidad del objeto en el instante t está dada por
$$\boxed{v(t) = s'(t)}$$
La función $s(t)$ se llama función de **desplazamiento** del objeto. La velocidad es la derivada de la función desplazamiento.
- Sabemos que la aceleración es la razón de cambio de la velocidad, de modo que la aceleración instantánea es la derivada de la velocidad:
$$\boxed{a(t) = v'(t)}$$
Como a su vez, la velocidad es la derivada del desplazamiento entonces la aceleración es la segunda derivada del desplazamiento:
$$\boxed{a(t) = s''(t)}$$

La aceleración

Ejemplo 23. Cálculo de la velocidad instantánea

La función de posición $s(t)$ de un objeto que se mueve sobre una recta está dada por
$$s(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$$
donde t está dado en segundos y $s(t)$ en centímetros. Determinar la velocidad del objeto en el instante $t = 1$ segundo.

Solución: La función velocidad es
$$v(t) = (t^3 - 12t^2 + 36t)' = 3t^2 - 24t + 36,$$
de modo que en el instante $t = 1$ la velocidad es
$$v(1) = 3(1)^2 - 24(1) + 36 = 15 \text{ cm/seg}.$$

Si se tiene un objeto que se mueve sobre una línea recta a partir de un punto de referencia O:

- si el objeto se está alejando de O, la velocidad es positiva (la distancia aumenta),
- y si se está acercando a O entonces la velocidad es negativa (la distancia disminuye).

En el caso del ejemplo anterior tenemos que

$$v(t) = 3t^2 - 24t + 36 = 3(t-2)(t-6).$$

Si hacemos una tabla de signos de la derivada tenemos

Tabla 8.1

intervalo	$]0,2[$	$]2,6[$	$]6,\infty[$
$t-2$	$-$	$+$	$+$
$t-6$	$-$	$-$	$+$
v(t)	$+$	$-$	$+$

De la tabla 8.1 resulta que el objeto comienza alejándose hasta los dos segundos, luego se devuelve hasta los 6 segundos y, finalmente, vuelve a alejarse. $\triangle$

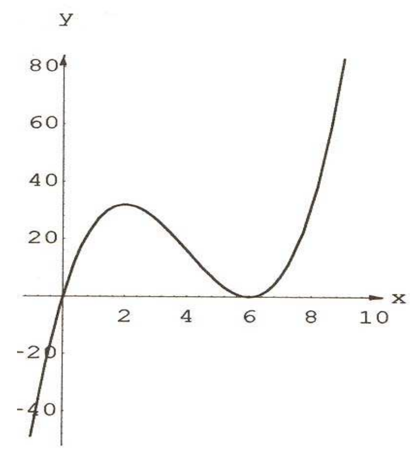


Figura 8.4. $s = t^3 - 12t^2 + 36t$

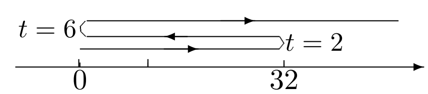


Figura 8.5.

Ejemplo 24. **Caída de los cuerpos**

Se arroja un cuerpo verticalmente hacia arriba (o hacia abajo) desde una altura inicial s_0 metros, con una velocidad inicial de v_0 metros por segundo. Sea s la altura del objeto con respecto al suelo (en metros). Entonces, después de t segundos, se obtiene que

$$\boxed{s = -4,9t^2 + v_0 t + s_0}$$

Lo anterior supone que se puede despreciar la resistencia del aire.

Suponga que desde un edificio de 48 metros de altura se lanza hacia arriba una piedra con una velocidad inicial de $19,6\ m/seg$ entonces:

a) ¿Cuándo alcanza la altura máxima? y ¿cuál es esa altura?

b) ¿Cuánto tarda la piedra en caer?

c) ¿Con qué velocidad cae al suelo?

d) ¿Cuál es la celeración en cada momento?

Solución:

a) En este caso tenemos que $v_0 = 19,6$ y que $s_0 = 48$, por lo tanto la función de desplazamiento es

$$s = -4,9t^2 + 19,6t + 48.$$

Observe que la función de desplazamiento s es cuadrática y su gráfica es cóncava hacia abajo, por lo tanto alcanza el máximo en su vértice. La abscisa del vértice es

$$t = \frac{19,6}{(-2)(-4,9)} = \frac{19,6}{9,8} = 2.$$

Esto quiere decir que alcanza la altura máxima a los 2 segundos. La altura máxima sería

$$s(2) = -4,9(2)^2 + 19,6(2) + 48 = 67,6 \text{ metros.}$$

b) Debemos ver en qué momento la altura se hace 0. Por eso resolvemos la ecuación $s(t) = 0$, es decir

$$-4,9t^2 + 19,6t + 48 = 0$$

y, utilizando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, obtenemos

$$t = \frac{-19,6 \pm \sqrt{(19,6)^2 - 4(-4,9)(48)}}{2(-4,9)} =$$

$$= \frac{-19,6 \pm \sqrt{1324,96}}{-9,8} = \frac{-19,6 \pm 36,4}{-9,8}.$$

Esto produce dos valores:

$$t_1 = 5,71 \quad \text{y} \quad t_2 = -1,71$$

El segundo, por ser negativo, en esta situación no vale. Concluimos que la piedra cae a los $5,71$ seg después de haber sido lanzada.

c) Sabemos que la velocidad es la derivada del desplazamiento, entonces la velocidad en cada momento es

$$v = s'(t) = -9,8t + 19,6$$

Como la piedra cae a los $5,71$ seg entonces la velocidad con que cae es

$$v(5,71) = (-9,8)(5,71) + 19,6 = -36,358 \text{ m/seg}.$$

El negativo significa que en ese momento la piedra iba bajando.

d) La aceleración es la derivada de la velocidad (o la segunda derivada del desplazamiento), de manera que

$$\boxed{a = v'(t) = -9,8 \text{ m/seg}^2}$$

Observe que es constante. Esta constante es la aceleración producida por la fuerza de la gravedad.

△

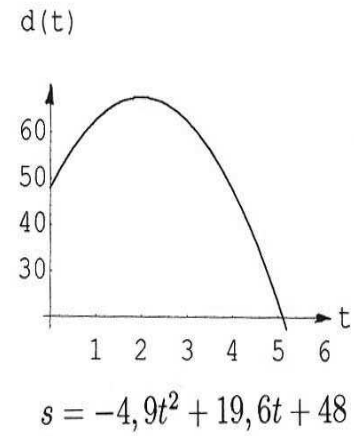


Figura 8.6.

8.4 LA CONSTRUCCIÓN DE LAS GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES

En esta sección se introducen algunos elementos sobre la construcción de gráficas, utilizando como herramienta conceptos del cálculo diferencial.

El Cálculo Diferencial e Integral se presta para hacer estudios bastante detallados de las gráficas de las funciones. A través de él podemos dibujar con bastante exactitud gráficas de funciones complicadas que de otra forma no podríamos realizar.

Aquí solo veremos algunos aspectos del tema. Consideremos la siguiente figura

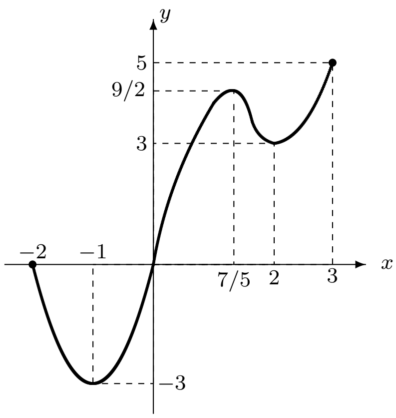


Figura 8.7.

Esta figura representa la gráfica de una función f. A partir de ella podemos obtener una gran cantidad de información con respecto a las características de f.
Por ejemplo, podemos ver que el dominio de f es $[-2, 3]$ y que su ámbito es $[-3, 5]$.
La información sobre el ámbito nos dice cuál es el menor valor y el mayor que alcanzan las imágenes en esta función.
En efecto, recuerde que el ámbito es el conjunto de imágenes de la función; en este caso, por lo tanto, las imágenes están entre -3 y 5 y por lo tanto el menor valor es -3 y el mayor valor es 5; éstos se llaman respectivamente el **mínimo absoluto** y **máximo absoluto** de la función.
Es decir -3 es el mínimo absoluto de f y 5 es el máximo absoluto de f.

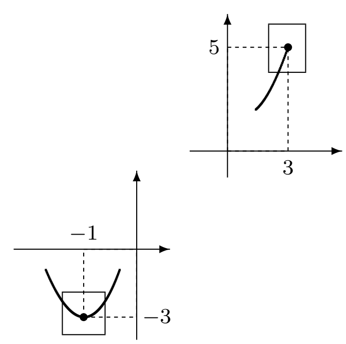


Figura 8.8. Mínimo y máximo

Podemos observar también que a medida que tomamos valores de x, desde -2 a -1, la gráfica de la función "va bajando"; se dice entonces que f es **estrictamente decreciente** en el intervalo $[-2, -1]$.

Por otra parte, si se van tomando valores de x desde -1 hasta $\frac{7}{5}$, la gráfica de la función "va subiendo", se dice, en este caso, que la función es **estrictamente creciente** en el intervalo $[-1, \frac{7}{5}]$.

También es decreciente en el intervalo $[\frac{7}{5}, 2]$ y creciente en el intervalo $[2, 3]$.

Otro aspecto que podemos ver en este caso es que la función tiene dos "puntos bajos", los puntos $(-1, -3)$ y $(2, 3)$; éstos se llaman **mínimos relativos** de la función.

También tiene un "punto alto"; éste es $(\frac{7}{5}\ \frac{9}{2})$, se llama **máximo relativo**.

Existen definiciones formales para estos conceptos, las cuales daremos a continuación.

Funciones crecientes y decrecientes

El concepto intuitivo de “subir” o “bajar”, cuando una función es creciente o decreciente, se formaliza mediante la siguiente definición.

Definición 8.2. Funciones crecientes y decrecientes

Decimos que una función f es **estrictamente creciente** en un intervalo I si dados dos valores a y b en I tales que $a < b$, entonces $f(a) < f(b)$ (esto es, f preserva la desigualdad).
Por otra parte, f es **estrictamente decreciente** en un intervalo I si dados dos valores a y b en I tales que $a < b$, entonces $f(a) > f(b)$ (esto es, f invierte la desigualdad).

Los casos más sencillos para establecer el sentido de crecimiento son las funciones lineales. En este caso, dada la función lineal $f(x) = mx+b$, sabemos que si m es positivo entonces la función es creciente en todo $\mathbb{R}$; mientras tanto, si m es negativo, entonces la función es decreciente en todo $\mathbb{R}$.

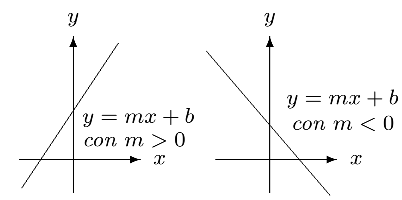


Figura 8.9.

Por ejemplo la función

$$f(x) = 2x + 5$$

es creciente en $\mathbb{R}$.

La función

$$f(x) = -3x + 2$$

es decreciente en $\mathbb{R}$.

Ahora consideremos una función cualquiera como la de la siguiente figura.

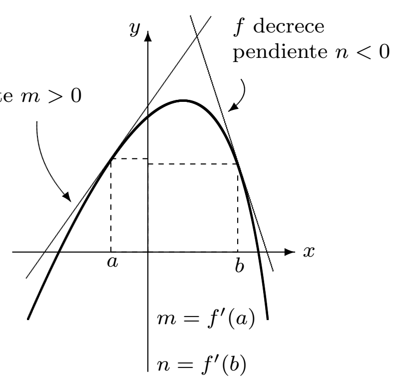


Figura 8.10. Crecimiento y decrecimiento

Intuitivamente podemos notar lo siguiente: en las partes en las que la función es creciente, las rectas tangentes son crecientes, mientras que, donde la función es decreciente, las tangentes son decrecientes. Pero sabemos que la pendiente de la tangente es la derivada de la función en el punto de tangencia. Entonces, de acuerdo con esto *donde la función es creciente su derivada tiene que ser positiva y donde es decreciente la derivada deberá ser negativa.*

El siguiente teorema nos dice que lo anterior es correcto:

Teorema 8.1. La derivada y el crecimiento de las funciones

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ entonces:

1. Si $f'(x) > 0$ para todo x en $]a, b[$ entonces f es creciente en $[a, b]$.
2. Si $f'(x) < 0$ para todo x en $]a, b[$ entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Ejemplo 25. Intervalos donde crece y decrece la función

Sea $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$.

Determine en qué intervalos es f creciente y en qué intervalos es decreciente.

Solución: Calculamos la derivada

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (3x + 5)(x - 1).$$

Para aplicar el teorema anterior debemos saber dónde es positiva y dónde es negativa. Lo más adecuado es hacer una tabla de signos como la siguiente

Tabla 8.2

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{-5}{3}$	$\qquad$ 1	$\qquad$ $+\infty$
$3x + 5$	$-$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

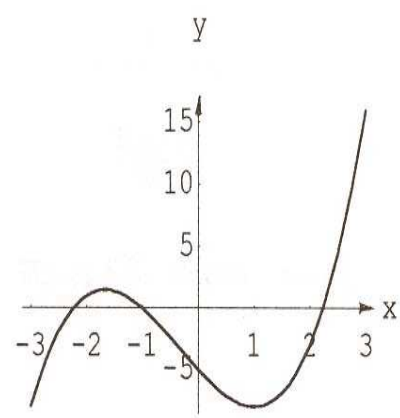


Figura 8.11. $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$

Lo anterior se interpreta diciendo que f es creciente en los intervalos $]-\infty, \frac{-5}{3}]$ y $[1, +\infty[$ y es decreciente en $[\frac{-5}{3}, 1]$. $\triangle$

Máximos y mínimos

La gráfica de una función nos permite determinar sus máximos y mínimos, ya sea absolutos o relativos. Estos son los puntos "más altos" y "más bajos" en la gráfica de la función, que mencionamos antes.

Definición 8.3. Máximos y mínimos

Sea f una función cuyo dominio es un conjunto A contenido en $\mathbb{R}$, definimos los siguientes conceptos:

1. Un número real M se llama **máximo absoluto** (o simplemente máximo) de la función f en A si existe un elemento a en A tal que $f(a) = M$ y $f(x) \leq M$ para todo $x \in A$.
2. Un número real m se llama **mínimo absoluto** (o simplemente mínimo) de la función f en A si existe un elemento b en A tal que $f(b) = m$ y $f(x) \geq m$ para todo $x \in A$.
3. Un **máximo relativo** (o **máximo local**) de la función f es un punto $(c, f(c))$ tal que existe un intervalo abierto I contenido en A en el que $f(c) \geq f(x)$ para todo x en I.
4. Un **mínimo relativo** (o **mínimo local**) de la función f es un punto $(c, f(c))$ tal que existe un intervalo abierto I contenido en A en el que $f(c) \leq f(x)$ para todo x en I.

Generalmente no es tan simple determinar analíticamente los máximos y mínimos tanto absolutos como relativos de las funciones; más adelante veremos un método para hacerlo. Sin embargo, en una gráfica es sumamente sencillo distinguir este tipo de puntos. Los máximos y mínimos absolutos (en caso de que existan) quedan determinados por el ámbito. Mientras tanto, si la función viene decreciendo y a partir de un punto “se devuelve” (comienza a crecer) entonces ese punto es un mínimo relativo; si sucede lo contrario: la función crece y luego comienza a decrecer, el punto de cambio es un máximo relativo.

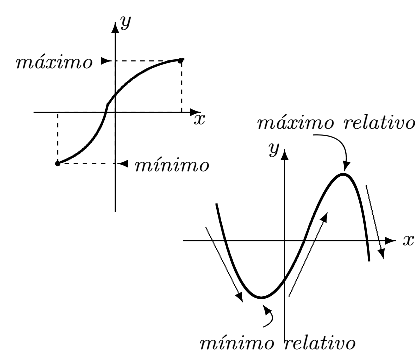


Figura 8.12. Máximo y mínimo

Ejemplo 26. Más máximos y mínimos

A partir de la siguiente figura determinar los máximos y mínimos relativos de la función que representa, así como su máximo y mínimo absoluto (si existen).

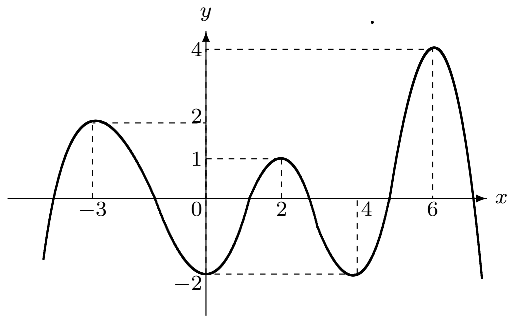


Figura 8.13.

Solución: Claramente del dibujo vemos que el ámbito es el intervalo $]-\infty, 4]$, esto nos dice que no hay un mínimo absoluto y que el máximo absoluto es 4.

También vemos tres “puntos altos” que representan los máximos relativos, estos son $(-3, 2)$, $(2, 1)$ y $(6, 4)$, y tres “puntos bajos” que son los mínimos relativos: $(0, -2)$ y $(4, -2)$. $\triangle$

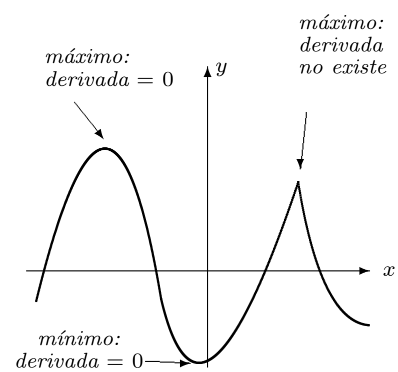


Figura 8.14.

La figura 8.14 nos sugiere que los máximos y mínimos relativos de la función se pueden encontrar entre los puntos en que la derivada existe o en los puntos en que la derivada es igual a 0.

Los puntos en los que la derivada es 0 o no existe se llaman **puntos críticos** porque corresponden a los posibles máximos o mínimos relativos, aunque no necesariamente el punto corresponde a un máximo o un mínimo.

Ejemplo 27. Cálculo de máximos y mínimos relativos

En la función del ejemplo anterior:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$$

tenemos que

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (3x + 5)(x - 1).$$

De manera que si $f'(x) = 0$, entonces

$$(3x + 5)(x - 1) = 0 \quad \text{y entonces} \quad x = \tfrac{-5}{3}, \quad x = 1$$

son los puntos críticos.

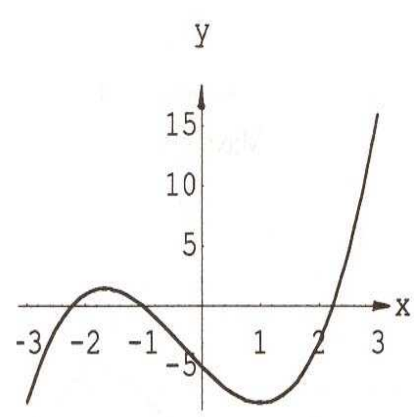


Figura 8.15. $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$

Previamente vimos dónde es creciente y dónde es decreciente la función. Esto nos sirve para ver si hay máximos o mínimos en esos puntos.

Tenemos que la función crece a la izquierda de $\frac{-5}{3}$ y luego decrece a la derecha, como la función es continua esto dice que hay un máximo relativo cuando $x = \frac{-5}{3}$. Por otra parte, como a la izquierda de 1 la función decrece y a la derecha de 1 la función crece, entonces hay un mínimo relativo cuando $x = 1$. El máximo relativo es

$$(-\frac{5}{3}, f(-\frac{5}{3})) = (-\frac{5}{3}, \frac{40}{27})$$

y el mínimo relativo es

$$(1, f(1)) = (1, -8).$$

Esta información incluso nos permite realizar una gráfica bastante aproximada de la función, tal como vemos en la figura 8.15. △

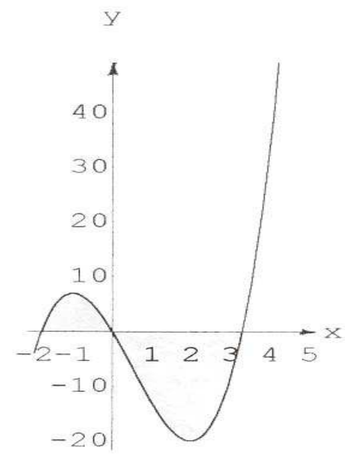


Figura 8.16. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

Ejemplo 28. Calculando máximos y mínimos absolutos

Si tenemos una función continua en un intervalo cerrado, entonces hay un teorema que nos garantiza que esa función tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en el intervalo. Encontremos esos valores para la función

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$$

en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución: La intuición nos dice que el máximo absoluto y el mínimo absoluto corresponden ya sea a puntos máximos o mínimos relativos o bien a los valores en los extremos del intervalo. Entonces procedemos en dos etapas:

1. Calculamos los valores críticos:

   $$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0$$

   entonces

   $$(x-2)(x+1) = 0$$

   y obtenemos que los valores críticos son $x = 2$ y $x = -1$.

2. Evaluamos en los valores críticos y en los extremos del intervalo, el mayor resultado es el máximo y el menor resultado es el mínimo:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) = -20 \\ f(-1) &= 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) = 7 \\ f(-3) &= 2(-3)^3 - 3(-3)^2 - 12(-3) = -45 \\ f(3) &= 2(3)^3 - 3(3)^2 - 12(3) = -9 \end{aligned}$$

De esto se deduce que el máximo de la función es 7 y el mínimo es -45. △

8.5 CALCULAR LÍMITES USANDO LA DERIVADA: *LA REGLA DE L'HÔPITAL*

En esta sección se estudia una técnica muy eficiente para el cálculo de ciertos límites. Esta técnica utiliza el cálculo de derivadas y recibe el nombre de **Regla de L'Hípital.**

Marqués de L'Hôpital

Cuando calculamos límites, en el *Volumen I*, nos encontramos con que muchos de ellos eran en principio límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$. Igualmente, calculamos límites que eran indeterminados de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. En ambas oportunidades establecimos algunos métodos que nos permitieron calcular dichos límites; sin embargo, existe una regla que permite esos cálculos de un modo más rápido y que está basada en el cálculo de derivadas.

Aunque el resultado que vamos a mencionar se llama la "regla de L'Hípital", ésta se debe al famoso matemático suizo Jean Bernoulli (1667–1748). Bernoulli (discípulo de Leibniz) había instruido en el Cálculo al marqués francés, G. F. A. de L'Hípital (1661–1704). Bernoulli y L'Hípital hicieron un pacto: el primero recibía un salario regular a cambio de enviarle a L'Hípital sus descubrimientos matemáticos para que este último los utilizase como quisiera.

L'Hípital incluyó la "regla" en lo que constituye el primer texto de Cálculo diferencial impreso: *Analyse des infiniment petits*, publicado en París en 1696. Este texto que influyó mucho en la mayor parte del siglo XVIII, contenía muchos resultados que hoy sabemos se debían a Jean Bernoulli.

Teorema 8.2. La regla de L'Hípital

Sean f y g funciones definidas en un intervalo abierto que contiene un número c, excepto tal vez en c. Suponga que f y g son derivables. Si $g'(x) \neq 0$ para $x \neq c$ y si el límite

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

es de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o de la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ entonces se tiene que

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ exista o sea infinito.

Veamos unos ejemplos que ilustran cómo se aplica esta regla.

Ejemplo 29. Un límite aplicando la regla de L'Hípital

Calcular
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x+4x-1}{3x}$$

Solución: Observe que la regla dice que tenemos un límite:
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)},$$
es decir, se toma el numerador como una función $f(x)$ y el denominador como otra función $g(x)$.

En este caso
$$f(x)=\cos 3x+4x-1$$
y
$$g(x)=3x.$$
Además
$$f(0)=\cos 3\cdot 0+4\cdot 0-1=1+0-1=0$$
y también
$$g(0)=3\cdot 0=0.$$
Todo esto significa que se puede aplicar la regla de L'Hípital porque el límite es de la forma $\frac{0}{0}$.

Ahora bien, la regla dice que tenemos
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
Es decir, se derivan el numerador y el denominador *separadamente* (no se deriva como un cociente). En el caso que nos ocupa tendríamos entonces:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x+4x-1}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 3x+4x-1)'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-3\operatorname{sen}3x+4}{3}=\frac{4}{3}$$
$\triangle$

Ejemplo 30. Aplicando dos veces la regla de L'Hípital

Calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}.$$

Solución: Tomamos

$$f(x)=e^x+e^{-x}-2 \qquad \text{y} \qquad g(x)=1-\cos 2x,$$

entonces

$$\begin{aligned} f(0) &= e^0+e^{-0}-2=1+1-2=0\\ g(0) &= 1-\cos 2\cdot 0=1-1=0 \end{aligned}$$

y se puede aplicar la regla de L'Hípital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(1-\cos 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2\operatorname{sen} 2x},$$

observando el límite de la derecha nos damos cuenta que también es de la forma $\frac{0}{0}$. Volvemos a aplicar la regla de L'Hípital (derivando el numerador y derivando el denominador):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2\operatorname{sen} 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(2\operatorname{sen} 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{4\cos 2x}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Concluimos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}=\frac{1}{2}.$$

$\triangle$

Esta regla también puede aplicarse a las formas $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ cuando $x\to c^+$ o $x\to c^-$ o $x\to\infty$ o $x\to-\infty$.

Ejemplo 31. Uso de la regla de L'Hípital cuando $x\to\infty$

Calcular

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}.$$

Solución: Tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

y

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$$

por lo que estamos ante un límite de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Entonces, según la regla de L'Hípital tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

$\triangle$

Finalmente, hacemos notar que siempre hay que verificar que el límite es de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ puesto que de lo contrario aplicar la regla de L'Hípital puede inducir a errores.

Ejemplo 32. Un caso en que la regla de L'Hípital no es aplicable

Suponga que tenemos $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x}{3x+1}$.

Como usted puede ver, este límite se puede obtener por simple evaluación:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x}{3x+1} = \frac{2^2+2\cdot 2}{3\cdot 2+1} = \frac{8}{7}$$

y esto indica que no es de las formas apropiadas para aplicar la regla de L'Hípital. ¿Qué sucedería si no nos damos cuenta de ello o aún dándonos cuenta insistimos en aplicarla?. En ese caso haríamos lo siguiente:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x}{3x+1} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+2x)'}{(3x+1)'} = \lim_{x\to 2} \frac{2x+2}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Y ésto es un error puesto que el límite es $\frac{8}{7}$ y no 2. $\triangle$

8.6 EULER Y LAS MATEMÁTICAS APLICADAS

En esta sección se hace un esbozo sobre la vida y obra de Leonhard Euler y de su influencia en las matemáticas puras y aplicadas.

En las páginas de este libro hemos incluido algunas referencias al gran matemático suizo Leonhard Euler. Resulta conveniente extendernos un poco en el trabajo de Euler y precisamente en este capítulo porque, sin duda, fue uno de los padres de las matemáticas aplicadas (tema que apenas hemos sugerido aquí).

En la descripción y uso del mundo

Podemos decir que las matemáticas aplicadas fueron históricamente el motor primario en la actividad matemática de la sociedad que emerge de las entrañas de la Edad Media. Si las matemáticas medievales no pudieron ir más lejos del legado de la Grecia Antigua (traducido), y sin contacto con ese legado solamente lograr los niveles más elementales de la aritmética y la geometría, fue debido a razones muy precisas. Se requería madurez social, cultural, económica y política. Y, muy especialmente, se necesitaba el estímulo que solo la indagación y uso de la naturaleza pueden proporcionar. Era necesario que la sociedad exigiera respuestas teóricas y prácticas, en las ciencias y las técnicas, para que las matemáticas pudieran despegar y llegar más lejos que en el mundo antiguo y medieval. Entonces: en el corazón de las matemáticas modernas está su aplicación, su uso, su integración a la explicación y a la manipulación del mundo que nos rodea.

Con la dinámica racional (matemática) de Galileo (y del mismo Newton) y con la teoría de la gravitación universal (y sus implicaciones en la mecánica) por Newton, podemos decir que se origina las modernas matemáticas aplicadas. En realidad, antes de Newton la astronomía era meramente *descriptiva*, no era el producto de la derivación matemática de leyes.

Aplicaciones matemáticas

Euler fue una de las grandes mentes que desarrolló las matemáticas y sus aplicaciones en casi todos los campos posibles en su época. Euler escribió sobre mecánica, álgebra, análisis matemático, geometría diferencial, cálculo de variaciones y mucho más. Se le considera el más prolífico de todos los matemáticos. Para que se tenga una idea de esto último: publicaba un promedio de 800 páginas de gran calidad al año.

El matemático más prolífico de todos los tiempos

Euler creó la mecánica analítica (es decir la que utiliza los métodos del Cálculo) y, también, la mecánica de los cuerpos rígidos. Elaboró una teoría de las mareas y trabajó en el diseño y navegación de barcos.

Estudió el movimiento de los proyectiles en medios resistentes. Hizo contribuciones al estudio de las perturbaciones de los cuerpos celestes en la órbita de un planeta. Estudió acústica y, también, los instrumentos ópticos, contribuyó al diseño de telescopios y microscopios. Obtuvo resultados en la refracción y dispersión de la luz, a la cual consideraba como ondas y no partículas (el único científico del siglo XVIII con ese criterio). Dio las ecuaciones diferenciales para el movimiento de un fluido y, en particular, aplicó su modelo al flujo sanguíneo del cuerpo humano. A Euler también le interesó la geografía, la química y la cartografía (incluso hizo un mapa de Rusia).

Euler y su influencia

Leonhard Euler (1707–1783) nació en Basilea, Suiza. Como era usual en esa época, trabajó fuera de su país muchos años: en San Petersburgo, Rusia, y en Berlín, Alemania. Este gran matemático, que vivió sus últimos años ciego, poseía una memoria prodigiosa. Por ejemplo, se sabía de memoria las fórmulas de trigonometría y análisis y las primeras 6 potencias de los primeros 100 números primos.
Euler siguió la tradición de Newton en las matemáticas aplicadas, pero eso no quiere decir que su trabajo solo fue "aplicado". De hecho hizo grandes contribuciones a campos sin aplicación como la teoría de los números. Tampoco se debe pensar, generalizando, que la esencia de las matemáticas es su aplicación.

Leonhard Euler

Los aspectos más generales de la realidad física o social son los que interesan a las matemáticas, puedan ser aplicados o no sus resultados.

Para las matemáticas son importantes los aspectos generales, aplicados o no.

La influencia de Euler en las matemáticas de los siglos XVIII y XIX fue muy grande. Laplace, el gran matemático francés que escribió la *Mecánica celeste*, recomendaba:

"Leer a Euler, leer a Euler, él es el maestro de todos nosotros."

8.7 EJERCICIOS DEL *CAPITULO 8*

Interpretación gráfica

1. En la figura 8.17 se presenta la gráfica de dos funciones. Una corresponde al interés compuesto del $r\%$ devengado por un capital inicial durante 10 años y la otra corresponde al interés simple devengado por el mismo capital a la misma tasa de interés y durante el mismo período. Responda: ¿cuál curva correponde al interés simple y cuál al interés compuesto?, ¿cuál es el capital inicial? y ¿cuál es el valor de r?

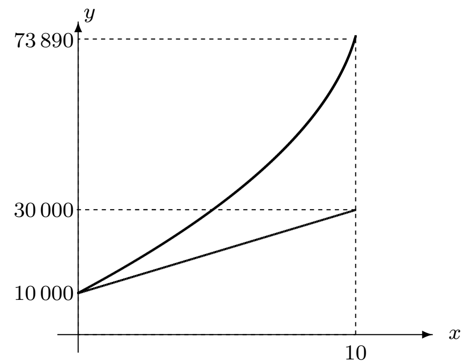


Figura 8.17.

En los ejercicios 2 a 4 se da la gráfica de una función, en cada caso diga en qué intervalos se tiene que: (a) $f'(x) > 0$, (b) en qué intervalos $f'(x) < 0$, (c) en qué valores de x se tiene que $f'(x) = 0$ y (d) en qué valores de x se tiene que $f'(x)$ no existe.

2.

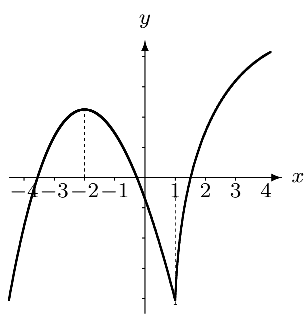


Figura 8.18.

3.

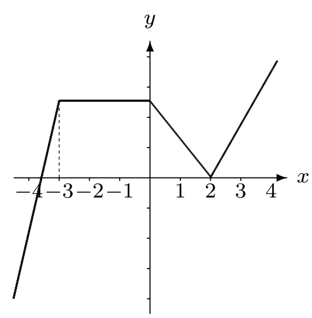


Figura 8.19.

4.

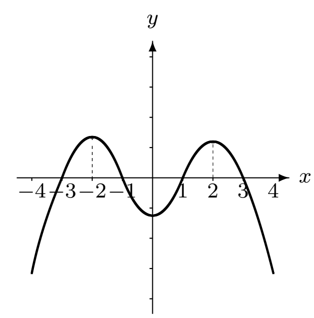


Figura 8.20.

Problemas y preguntas de desarrollo

5. Suponga que se depositan ₡100 000 en una cuenta de ahorros que paga el 24% de interés anual compuesto continuamente. ¿Cuánto interés devenga esa cuenta al cabo del primer año?

6. Se coloca una cierta cantidad de dinero C a un interés del 12% anual compuesto continuamente. ¿En cuánto tiempo se duplicará?

7. Escriba la función de Heaviside trasladada $H_5(t)$, dibuje su gráfica y calcule $H_5(0)$, $H_5(\frac{1}{2})$, $H_5(3)$, $H_5(5)$, $H_5(8)$ y $H_5(7,3)$.

8. Suponga que usted va a diseñar una alarma para un automóvil de manera que al abrirse la puerta suena un timbre durante dos segundos, luego el timbre deja de sonar durante un segundo, vuelve a sonar por dos segundos y se vuelve a apagar por un segundo, suena otra vez por dos segundos y luego se apaga definitivamente. Escriba una función para describir este dispositivo y dibuje su gráfica. ¿Cuáles son los puntos de discontinuidad de la función?, ¿cuál es la derivada de la función en los puntos donde es continua?

9. Suponga que el pulso de una persona (latidos/minuto) a los t segundos de haber iniciado una carrera es $P(t) = 56 + 2t^2 - t$. Calcule la velocidad a la que cambia P con respecto a t cuando $t = 2$ y cuando $t = 6$.

10. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba del suelo con una velocidad inicial de 40 metros por segundo. Su altura a los t segundos es $s(t) = 40t - 4,9t^2$ metros.

(a) ¿En qué tiempo alcanza la máxima altura y cuál es ésta?

(b) ¿En qué momento toca el suelo y con qué velocidad lo hace?

11. Un insecto camina sobre una línea recta de manera que su distancia desde el origen a los t segundos de iniciado el movimiento es $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ centímetros.

(a) ¿En qué momentos se está moviendo hacia la izquierda?

(b) ¿Cuándo es positiva su aceleración?

(c) ¿Qué significa que la aceleración es negativa?

12. Cierta población de insectos crece en un recipiente. A las t semanas el número de insectos en el recipiente es $N(t) = 12t^2 - t^4 + 5$.

(a) ¿Cuándo deja de crecer la población?

(b) ¿En qué intervalos de tiempo es positiva y en qué intervalos es negativa la tasa de crecimiento de la población?

En los ejercicios 13 a 16 determine el máximo y mínimo absolutos de la función dada en el intervalo indicado.

13. $f(x) = -x^2 + 8x + 3$ en $[0, 6]$

14. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ en $[-3, 3]$

15. $g(t) = t^3 - 3t + 1$ en $[-\frac{3}{2}, 3]$

16. $h(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ en $[-1, 4]$

17. Dibuje la gráfica de una función continua que satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones: el dominio de f es $[-2, 5]$, $f(-2) = 5$, $f(2) = 2$, $f(5) = 0$, $f'(x) < 0$ cuando $x \in]-2, 0[\cup]2, 5[$, $f'(x) > 0$ si $x \in]0, 2[$, $f'(2) = 0$, $f'(0)$ no existe.

En los ejercicios 18 a 22 determine dínde es creciente y dónde decreciente la función dada, así como sus máximos y mínimos relativos. En cada caso haga un bosquejo de la gráfica de la función.

18. $f(x) = x^2 - 6x + 3$

19. $g(t) = 2t^3 + 9t^2 - 13$

20. $g(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 1$

21. $f(t) = \dfrac{2 - t}{t^2}$

22. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ para $x \in [0, 2\pi]$

23. Dibuje la gráfica de una función continua que satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones: el dominio de f es $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f(3) = 4$, $f'(x) = -1$ para todo $x < 0$, $f'(0)$ no existe, $f'(x) > 0$ para todo $x \in]0, 3[$, $f'(3) = 0$ y $f'(x) < 0$ para todo x en $]3, +\infty[$.

En los ejercicios 24 a 28 utilice la Regla de L'Hípital para calcular el límite dado.

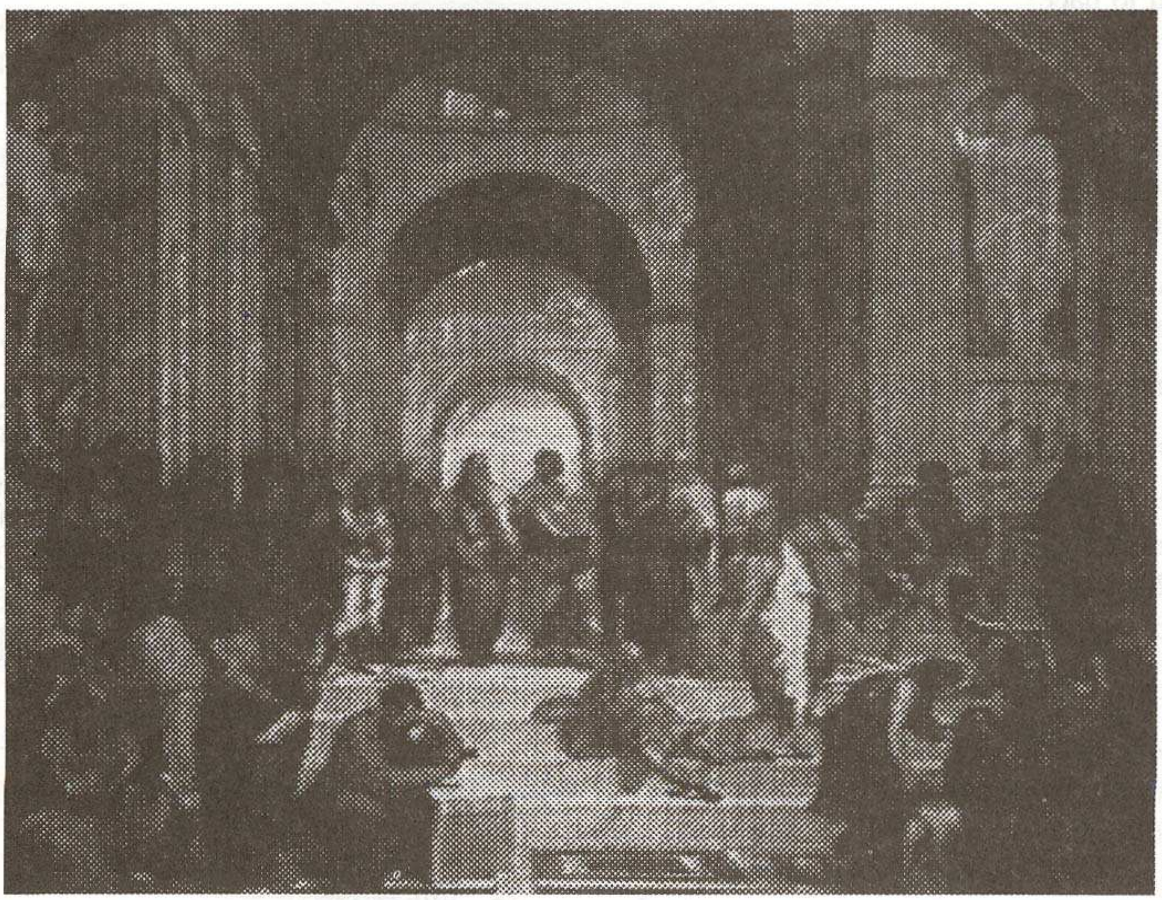
24. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{3x^2 - 8x + 4}$

25. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^x}{x}$

26. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x + 1 - e^x}{x^2}$

27. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x}$

28. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x}$



Matemáticas y perspectiva en el Renacimiento.
"La Escuela de Atenas" del pintor italiano Rafael.

CAPÍTULO 9

TEMAS ADICIONALES: UNA INTRODUCCIÓN

... con relación a la investigación fundamental en matemáticas, no hay un final último, y entonces, por otro lado, no hay un primer principio.

Felix Klein

El objetivo de este libro ha sido el de servir de introducción a los temas principales del Cálculo. Hemos desarrollado con detalle y rigor lo relativo al Cálculo diferencial: *límites, continuidad y derivadas.* Sin formar parte del tronco central del texto, hemos considerado también el estudio de algunas aplicaciones en las ciencias físicas y en las mismas matemáticas. Sin embargo, existe una colección adicional de temas propios o vinculados al Cálculo que, aunque no es nuestro propósito desarrollarlos aquí plenamente, consideramos importante ofrecerlos al lector.

Incluimos en este capítulo los temas de la integración, la antiderivación, las series infinitas, las ecuaciones diferenciales, las funciones de varias variables y las derivadas parciales. El alcance del tratamiento que se encontrará en las siguientes páginas es introductorio. Se busca familiarizar al lector con los términos y algunos de los principales conceptos con que tratan los temas mencionados. El propósito es permitirle al lector tener una perspectiva cultural más amplia del Cálculo diferencial e integral y de sus líneas de desarrollo.

Si el lector completa su formación matemática con este libro, esta perspectiva más amplia le brindará un mejor retrato de una importante parte de las matemáticas modernas. Si el lector prosigue sus estudios matemáticos con una mayor profundidad, la perspectiva que promovemos aquí le servirá mucho para avanzar con gran solidez y una mejor visión teórica.

En esta sección se proporciona un rípido vistazo al concepto de serie infinita a partir de la situación planteada por la paradoja del corredor y la tortuga.

9.1 SERIES INFINITAS

Zenón de nuevo y las series infinitas

Recordemos el problema del corredor y la tortuga: el corredor debe recorrer una distancia d para alcanzar una tortuga que se encuentra parada en cierto lugar.

Este asunto se puede plantear en términos de sucesiones y series infinitas.

Consideremos la sucesión formada por

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

Llamaremos a esta sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con término $n-$ésimo

$$a_n = \frac{1}{2^n}.$$

Si el corredor está a una distancia d de la tortuga, deberá recorrer la distancia

$$S_n = \frac{d}{2} + \frac{d}{2^2} + \frac{d}{2^3} + \cdots + \frac{d}{2^n}$$

Claramente se puede ver que

$$S_n = d\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

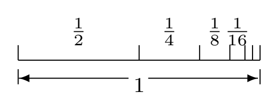


Figura 9.1.

Puede demostrarse por un método que se llama *inducción matemática* que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Entonces

$$S_n = d \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

El razonamiento de Zenón conducía a considerar $\lim_{n\to\infty} S_n$, lo que sería

$$\lim_{n\to\infty} d\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

No es difícil darse cuenta que $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$, y por eso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} d\overbrace{\Big(1-\frac{1}{2^n}\Big)}^{1} = d.$$

Es decir, la suma infinita de las longitudes

Serie infinita

$$\frac{d}{2}+\frac{d}{2^2}+\frac{d}{2^3}+\cdots+\frac{d}{2^n}+\cdots = d$$

Series

Una suma infinita

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

se llama **serie infinita** (o simplemente serie). Se expresa así

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

El término a_n se denomina **término** $n-$**ésimo de la serie**.

Por ejemplo, si $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Decimos que esta suma **converge** y su suma es 1. Cuando no converge se dice que la serie **diverge**.

También puede considerarse series en las cuales sus términos son funciones. Por ejemplo, si consideramos $a_n = \operatorname{sen} nx$, entonces tenemos una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} nx = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \cdots + \operatorname{sen} nx + \cdots$$

Estas series se llaman **series de funciones** y juegan un importante papel en matemáticas.

Si en una serie de funciones, los términos son potencias, la serie se llama **serie de potencias**. Por ejemplo, una serie de potencias es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \cdots$$

Las series de potencias son importantes porque muchas de las funciones conocidas se pueden expresar (bajo ciertas condiciones) como series de potencias, por ejemplo

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

El símbolo $\sum$

$\sum$: sigma es una letra griega que simboliza sumas. Ejemplos:

- *"$1+2+3+4+5$" se escribe*

$$\sum_{n=1}^{5} n.$$

- *"$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}$" se escribe*

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{2^n}.$$

- *"$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k$" se escribe*

$$\sum_{n=1}^{k} a_n.$$

El símbolo $n!$ se lee n factorial y significa lo siguiente:

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \ldots, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

(se multiplican todos los números enteros desde 1 hasta n)

Las series infinitas fueron en el siglo XVII y son en nuestros días de una gran importancia. Newton, por ejemplo, las consideraba inseparables de su "método de fluxiones". Eso es así en parte porque muchas funciones se pueden expresar por medio de series y, entonces, derivar (o integrar) una función es equivalente a derivar (o integrar) cada término de la serie, y eso era muchas veces más conveniente.

Una nota histórica: *sumas infinitas*

La paradoja de la Dicotomía se resuelve en el siglo XVII

Las sumas infinitas fueron consideradas por Aristóteles en la Grecia antigua, por Nicole Oresme en el medievo y por Francois Viíte más recientemente (1593). En la mitad del siglo XVII Gregory de Saint Vincent (*Opus Geometricum*, 1647) mostró que la paradoja de la *Dicotomía* de Zenón (que hemos mencionado aquí) podía resolverse sumando una serie infinita (geométrica). Fue el primero en establecer que una serie representa una magnitud.

Newton obtuvo la expresión en serie de muchas funciones, entre ellas: $\operatorname{sen} x, \quad \cos x, \quad \operatorname{sen}^{-1} x \quad$ y $\quad e^x$. Uno de los objetivos de las series fue también el de computar mejores aproximaciones de números como π y e. Por ejemplo, Leibniz en 1674 obtuvo un resultado muy famoso

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots, \quad \text{lo que escribimos} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

[Al parecer, según algunos historiadores, este resultado fue descubierto primero por James Gregory (1638–1675)]

En este libro no vamos a desarrollar la temática de las series de manera amplia, nuestro objetivo con estas pequeñas acotaciones históricas es simplemente introducir al lector en el conocimiento de algunos temas muy importantes en el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral.

9.2 LA INTEGRACIÓN Y LA ANTIDERIVACIÓN

El otro gran tema del *Cálculo* lo constituye el Cálculo integral. Se proporciona en esta sección una pequeña introducción a esta temática, utilizando la motivación del cálculo de áreas.

En el *Capítulo 4* describimos un procedimiento para calcular el área bajo la curva $y = x^2$ en el intervalo $[0, a]$ con $a > 0$.

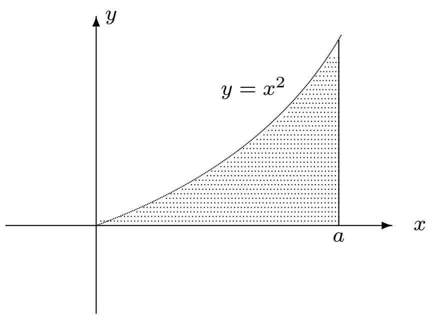


Figura 9.2.

El Area $= \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$ dijimos es la *integral definida* de $y = x^2$ entre 0 y a.

Básicamente el procedimiento consiste en:

Primer paso: construir n rectángulos

1. Partir el intervalo en n partes o subintervalos, y construir n rectángulos tal que
   - el ancho o base es siempre $\frac{a}{n}$,
   - y el largo o altura es el valor de la función en un punto (el final) de cada subintervalo definido por la partición realizada.

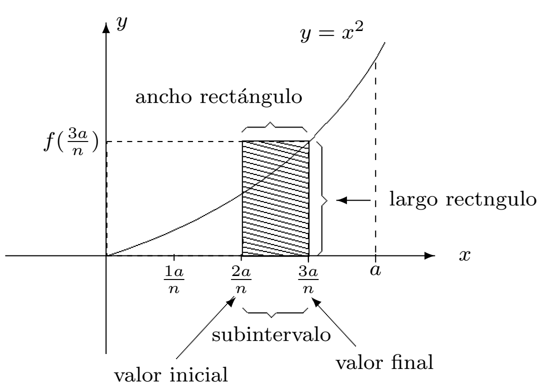


Figura 9.3.

Podemos llamar

$$x_1 = \frac{a}{n}, \quad x_2 = 2 \cdot \frac{a}{n}, \quad x_3 = 3 \cdot \frac{a}{n}, \ldots$$

$$x_{n-1} = (n-1) \cdot \frac{a}{n}, \quad x_n = n \cdot \frac{a}{n}$$

y se tiene

$$0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = a$$

2. El segundo paso es aproximar el área buscada con una suma de los n rectangulitos construidos. Se puede escribir

$$A \cong R_1 + R_2 + R_3 + \cdots R_n = S_n$$

Donde cada R_i, $1 \leq i \leq n$ es el área de cada rectángulo.

Segundo paso: sumar rectángulos para aproximar el área

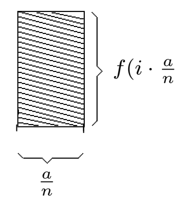


Figura 9.4. R_i

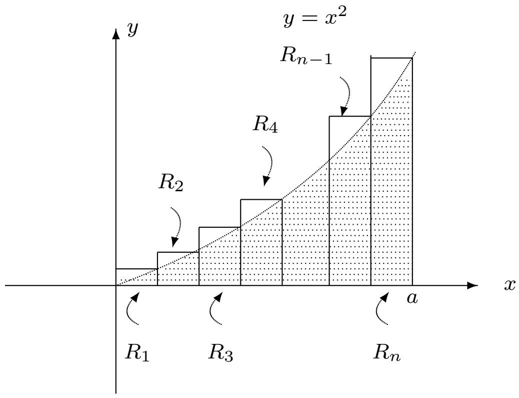


Figura 9.5. n rectangulitos

Aquí se realizan algunas operaciones algebraicas para simplificar y expresar adecuadamente la expresión S_n.

3. El tercer paso es tomar el *límite* cuando $n \to \infty$:

$$\text{Area} = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

Tercer paso: tomar el límite cuando $n \to \infty$

Del área a la integral

La lógica de este procedimiento está en la base de la definición más moderna de la *integral definida* para diversas funciones y en diferentes intervalos. Es decir, se utiliza los tres pasos: partición de n subintervalos y construcción de *rectángulos*, y obtención del límite de la suma cuando $n \to \infty$.

La definición moderna se hace con rectángulos, pero construidos de manera algo diferente: una **partición** con subintervalos de longitud diferente, y, además, el largo del rectángulo no se define por el valor de la función en el punto terminal de cada subintervalo, sino por cualquier punto en el subintervalo.

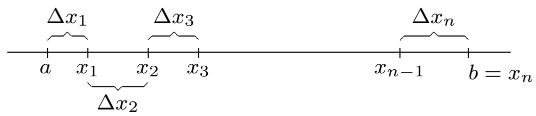
Se usan nuevos rectángulos

Se forma las sumas

$$\boxed{S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + f(c_3)\Delta x_3 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n}$$

donde

- Los Δx_1, Δx_2, $\ldots$, Δx_n son las longitudes de los subintervalos que se generan al partir el intervalo $[a, b]$ en n pedazos (no necesariamente de igual longitud).



$$x_0 = a < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

- y los c_1, c_2, c_3, $\ldots$, c_n son valores arbitrarios de x pero con la condición:

$$\begin{array}{ccccc} a & \leq & c_1 & \leq & x_1 \\ x_1 & \leq & c_2 & \leq & x_2 \\ x_2 & \leq & c_3 & \leq & x_3 \\ & & \vdots & & \\ x_{n-1} & \leq & c_n & \leq & x_n = b \end{array}$$

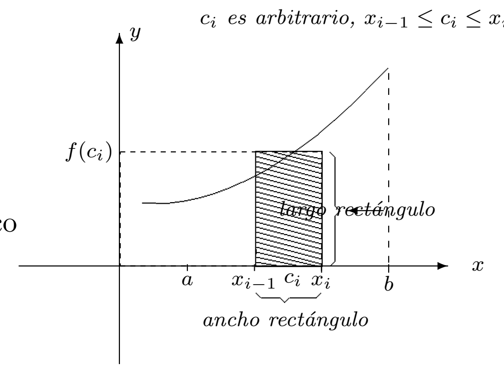


Figura 9.6.

La idea es crear los rectángulos:

$$f(c_1)\Delta x_1, \quad f(c_2)\Delta x_2, \quad \ldots \quad f(c_n)\Delta x_n.$$

Vea la figura 9.6. La situaciín general se aprecia en el siguiente grífico (figura 9.7):

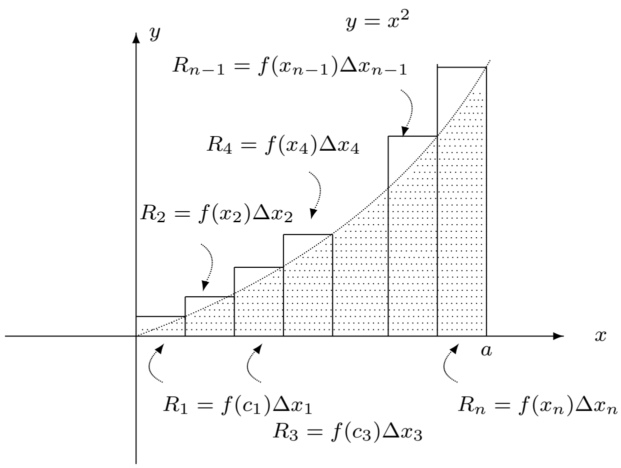


Figura 9.7.

Ahora, cuando $n \to \infty$, la suma

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n$$

nos da la integral para cualquier función definida en $[a, b]$. Es decir, la integral definida es un límite.

No obstante, para lograr más generalidad, se suele poner la idea $n \to \infty$ así:

- Se denota $\|\Delta\|$ al subintervalo más grande de la partición realizada (se llama la **norma de la partición**);

- y en lugar de $n \to \infty$ se pone $\|\Delta\| \to 0$ (pues cuando $n \to \infty$ la longitud de los subintervalos tiende a 0).

La integral se define entonces así:

Definición 9.1. Integral definida

Sea f una función definida en $[a, b]$, entonces la **integral definida** es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} S_n$$

La notación $\int_a^b f(x)\,dx$ significa: "La integral definida de f entre a y b."
a se llama el **límite inferior de integración** y b se llama el **límite superior de integración**.

Claro, si $\lim_{\|\Delta\|\to\infty} S_n$ no existe, entonces no hay integral definida y se dice que la función **no es integrable en** $[a, b]$. Note que con esta definiciín se puede calcular integrales de funciones no siempre positivas.

Función integrable y no integrable

La integral definida si bien tuvo su origen vinculada a áreas bajo curvas, se ha generalizado de tal manera que no se refiere necesariamente a una área. El tratamiento que de manera informal hemos reseñado aquí se debe al gran matemático alemán Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866). El generalizó el concepto de integral de manera que permitía "integrar" muchas funciones.

La idea de la integración como un límite de sumas (históricamente asociado al cálculo del área bajo una curva) fue vinculado en el siglo XVII a la derivación (cálculo de rectas tangentes a una curva). Veamos esto con un poco más de detalle.

La antiderivación

Como su nombre lo indica se trata del proceso inverso de la derivación. La idea de proceso "inverso" es similar al que supone "elevar al cuadrado" (x^2) y "extraer la raíz cuadrada" ($\sqrt{x}$). Es decir: *dada la derivada de una función, se trata de hallar la función original*.

Un ejemplo:

Si $G'(x) = x^2$ ¿qué es $G(x)$?

Una respuesta es $G(x) = \dfrac{x^3}{3}$, puesto que

$$\frac{d\big(G(x)\big)}{dx} = \frac{d\big(\frac{x^3}{3}\big)}{dx} = x^2.$$

Si $F'(x) = \cos x$ ¿qué es $F(x)$?

Podemos decir que

$$F(x) = \operatorname{sen} x$$

pues

$$F'(x) = (\operatorname{sen} x)' = \cos x.$$

Decimos que G y F son **antiderivadas** de x^2 y $\cos x$ respectivamente. También se les llama con el término de **primitivas**.

Se puede observar que existe más de una antiderivada de una función. Por ejemplo, si

$$G'(x) = x^2,$$

las funciones

$$\frac{x^3}{3} + 1,$$

$$\frac{x^3}{3} - 8,$$

$$\frac{x^3}{3} + \sqrt{245}$$

también son *primitivas* (¿Por qué?). En realidad, cualquier expresión de la forma

$$\frac{x^3}{3} + K,$$

donde K es un valor arbitrario constante, es una antiderivada de x^2. *Existe un número infinito de antiderivadas para una función*, pero todas difieren entre sí a lo sumo en una constante. (¿Por qué?)

La integración indefinida

Si consideramos

$$F'(x) = x^2$$

como una ecuación (puede escribirse si se quiere: $F'(x) - x^2 = 0$), decimos que

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$$

(con C una constante arbitraria) representa la **solución general**, o que todas las antiderivadas de x^2 son de la forma

$$\frac{x^3}{3} + C,$$

donde $C \in \mathbb{R}$.

La anterior situación se expresa simbólicamente así:

$$\boxed{\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C, \quad C \text{ constante arbitraria}}$$

Se dice: la integral **indefinida** de la función x^2 con relación a la variable x es $\dfrac{x^3}{3} + C$.

variable de integración

$$\int f(x)\,dx = G(x) + C$$

integrando constante de integración

Observe que la notación que se usa es la de Leibniz.

Otro ejemplo:

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$$

En general: si $G'(x) = f(x)$ se tiene que $\int f(x)\, dx = G(x) + C$.

★ *Nota:* A pesar de la similitud entre los símbolos $\displaystyle\int f(x)\, dx$ y $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$, representan conceptos diferentes. Son el resultado de procesos teóricos distintos:

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ del límite al infinito de sumas: *la integración*

(2) $\displaystyle\int f(x)\, dx$ a partir de revertir **la derivación** (límite de cocientes $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$)

El cálculo de antiderivadas, primitivas o integrales indefinidas se puede realizar con gran facilidad usando las múltiples propiedades de la derivación que hemos estudiado.

Por ejemplo:

- $\displaystyle\int x^4\, dx = \frac{x^5}{5} + C$
- $\displaystyle\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (pues $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = (n+1)\frac{x^{n+1-1}}{n+1} = x^n$)

  En noviembre de 1776 Leibniz, por ejemplo, dio las reglas generales

  $$dx^n = nx^{n-1}dx$$

  para n entero o racional y

  $$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

  (escritas en aquel entonces de esta forma).
- $\displaystyle\int (\cos x + e^x)\, dx = \int \cos x\, dx + \int e^x\, dx = \operatorname{sen} x + e^x + C$ (recuerde $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$)

El Teorema Fundamental del Cálculo

La razón por la que hemos llamado la antiderivada como *integral* indefinida, y hemos usado símbolos casi idénticos $\int \cong \int_a^b$, es porque aunque la derivación y la integración definida son conceptualmente diferentes **son procesos inversos**. Esta relación tan interesante fue conocida por el maestro de Newton, Isaac Barrow, pero no fue sino hasta

Newton y Leibniz que se comprendió y elaboró plenamente. El resultado se llama el:

Teorema 9.1. Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f definida en $[a,b]$ *integrable* (es decir existe $\int_a^b f(x)\,dx$) y sea F una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Cálculo de integrales definidas usando el Teorema fundamental del Cálculo

Ejemplo 33.

Calcular $\int_1^2 x^2\,dx$

Solución: Calculamos la antiderivada de x^2 (con la integración indefinida):

$$F(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x^2\,dx &= F(2) - F(1)\\
&= \underset{\substack{\uparrow\\ F(2)}}{\left(\frac{2^3}{3} + C\right)} - \underset{\substack{\uparrow\\ F(1)}}{\left(\frac{1^3}{3} + C\right)}\\
&= \frac{8}{3} + C - \frac{1}{3} - C
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3}}$$

△

Ejemplo 34.

Calcular $\int_5^{10} (x^5 + 2x^2 + 1)\,dx$

Solución: Tenemos

$$\begin{aligned}F(x) &= \int (x^5+2x^2+1)\,dx\\ &= \int x^5\,dx + \int 2x^2\,dx + \int 1\,dx\\ &\quad \text{(aquí usamos propiedades de la integración indefinida)}\\ &= \Big(\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^3+x\Big)+C\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_5^{10}(x^5+2x^2+1)\,dx &= F(10)-F(5)\\ &= \Big(\frac{10^6}{6}+\frac{2}{3}10^3+10\Big)-\Big(\frac{5^6}{6}+\frac{2}{3}5^3+5\Big)\\ &= \frac{987\,905}{6}\end{aligned}$$

[Note que no es necesario poner la constante C, porque el Teorema establece que sirve una primitiva cualquiera]. $\triangle$

En general, si $F'(x)=f(x)$ se usa la notación

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{F(x)\Big|_a^b}_{F \text{ evaluada entre } a \text{ y } b} = F(b)-F(a)$$

Por ejemplo

$$\int_a^b x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_a^b = \frac{b^4}{4}-\frac{a^4}{4}$$

★ *Nota:* Mientras $\int_a^b f(x)\,dx$ representa un número real (cuando a y b son números fijos), $\int f(x)\,dx$ da una función.

El Teorema Fundamental del Cálculo conecta la derivada y la integral, y con ello el *Cálculo diferencial* y el *Cálculo integral.* Este resultado permite hacer el cálculo de integrales definidas (límites de sumas) de una manera fácil y efectiva a través de la antiderivación o la integración indefinida.

Se da la definición de ecuación diferencial, el concepto de solución de una ecuación diferencial y se proporciona algunos ejemplos de situaciones en las que se aplican.

9.3 ECUACIONES DIFERENCIALES

Crecimiento poblacional

En un modelo bastante simplificado se puede suponer que en una población (puede ser una cría de peces en un estanque, un cultivo de bacterias para un experimento de laboratorio, etc.) la razón de cambio instantáneo de la población es proporcional a la población presente.

Esta situación lleva al planteamiento de cierto tipo especial de ecuaciones que juegan un importantísimo papel en las aplicaciones del Cálculo: las **Ecuaciones Diferenciales**. Las ecuaciones diferenciales surgen en una gran cantidad de contextos para describir fenómenos físicos, químicos, eléctricos, mecánicos, radiactivos, calóricos, de vibraciones y muchos más.

Definición 9.2. Ecuación diferencial

Una **ecuación diferencial** es aquella en que la incógnita es una función y en la cual aparece una o más de las derivadas de la función.

Ejemplo 35. Algunas ecuaciones diferenciales

Las siguientes son ecuaciones diferenciales:

1. $y'' + y' + y = 2x$
2. $\dfrac{2xy' + y^2}{x+1} = 2$
3. $xy'' - x^2 y = y'$

En todos los casos se supone que y es una función de x. $\triangle$

Todas las ecuaciones diferenciales que se dan en el ejemplo anterior se dice que son **ordinarias** porque dependen de solo una variable independiente. La primera y la tercera son de **segundo orden** porque la derivada de orden mayor que aparece es y'' y la segunda es de **primer orden** porque la derivada de mayor orden que aparece es y'.

Una función $f(x)$ es **solución** de una ecuación diferencial si al ser sustituida en la ecuación la satisface.

Ejemplo 36. Verificando una solución

Verificar que la función $f(x) = e^{2x}$ es solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Probar también que $g(x) = e^{3x}$ no es solución de esta ecuación diferencial.

Solución: Tomamos en el lugar de y la función $f(x)$. Tenemos que

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

y

$$f''(x) = 4e^{2x}$$

y por lo tanto:

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x} - 3(2e^{2x}) + 2(e^{2x}) = 4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x} = 0,$$

tal como se quería.

Tomando ahora en vez de y la función $g(x)$ tenemos que

$$g'(x) = 3e^{3x},$$

$$g''(x) = 9e^{3x}$$

y sustituyendo:

$$y'' - 3y' + 2y = 9e^{3x} - 3(3e^{3x}) + 2(e^{3x}) = 9e^{3x} - 9e^{3x} + 2e^{3x} = 2e^{3x}.$$

El resultado no es 0, por lo tanto g no es solución de la ecuación diferencial. △

★ *Actividad:* Pruebe que $h(x) = e^x$ sí es solución de la ecuación diferencial del ejemplo anterior.

Como usted vio, probar que una función dada es solución de una ecuación diferencial es un proceso relativamente sencillo, sin embargo, encontrar las soluciones (esto es, resolver la ecuación) no es en general un problema tan fácil. Desde luego, no es nuestro propósito resolver aquí estas ecuaciones. Cabe advertir que existen muchísimas familias de ecuaciones diferenciales, que se resuelven por métodos particulares. Por otra parte, el uso del cálculo integral en la resolución de ecuaciones diferenciales es fundamental.

Poblaciones

Volvamos a nuestro **modelo de poblaciones**; veamos la ecuación que plantea dicho modelo.

Sea $N(t)$ la población en el instante t (puede ser que t sea segundos, horas, días, años, etc., dependiendo de la población de que se trate). Entonces, la razón instantánea de cambio es $N'(t)$. El modelo dice que esta razón de cambio es proporcional a la población

$$\boxed{N'(t) \propto N(t)}$$

Dos cantidades son proporcionales si su cociente es una constante, digamos k. De manera que en este caso particular tenemos

$$\boxed{\frac{N'(t)}{N(t)} = k}$$

que es la ecuación diferencial que describe el modelo. Esta es una ecuación diferencial muy sencilla y podemos encontrar su solución de un modo relativamente fácil.

En efecto, si integramos a ambos lados de la ecuación obtenemos

$$\int \frac{N'(t)}{N(t)}\, dt = \int k\, dt \Longrightarrow$$

$$\ln N(t) = k\,t + M$$

(recuerde que $(\ln N(t))' = \frac{N'(t)}{N(t)}$, M constante arbitraria). Si aplicamos la exponencial a ambos lados tenemos

$$N(t) = e^{kt+M},$$

que, por las propiedades de la exponencial, se puede escribir como

$$N(t) = Ce^{kt}$$

(donde $C = e^{M}$). Se puede comprobar que C es la población inicial.

Por la forma de la solución este modelo se llama de **crecimiento exponencial**.

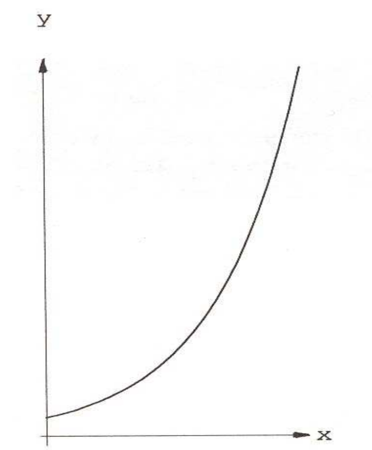


Figura 9.8. Crecimiento exponencial

★ *Actividad:* Pruebe que efectivamente la constante C representa la población inicial.

Ejemplo 37. Bacterias y crecimiento

Una población de bacterias crece según el modelo de crecimiento exponencial. Si inicialmente había 1 500 bacterias y a los 20 minutos ya había 2 000 bacterias, encontrar una función que describa el número de bacterias presente en cada instante t. ¿Cuántas habrá a los 30 minutos?

Solución: La función es

$$N(t) = Ce^{kt},$$

sabemos que C es la población inicial, en este caso 1 500; entonces

$$N(t) = 1\,500e^{kt}.$$

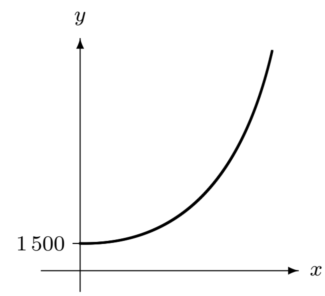


Figura 9.9. $N(t) = 1\,500e^{kt}$

Para tener la función completa debemos encontrar k; ésta la determinamos a partir de la otra información:

$$N(20) = 1500e^{20k} = 2000 \Rightarrow e^{20k} = \frac{2000}{1500} = \frac{4}{3}.$$

Es decir

$$e^{20k} = \frac{4}{3},$$

pero esta ecuación se puede poner en forma logarítmica como

$$20k = \ln \frac{4}{3}$$

Se trata de calcular C y k

y entonces, echando mano a una calculadora, se tiene

$$20k = 0,287682 \Rightarrow k = \frac{0,287682}{20} = 0,0143$$

y, por lo tanto, la función es

$$N(t) = 1500e^{0,0143t}.$$

Para saber el número de bacterias a los 30 minutos evaluamos la función en 30 (usamos una calculadora):

$$N(30) = 1500e^{(0,0143)30} = 1500e^{0,429} = 1500 \cdot 1,535721 = 2303,58$$

Podemos decir que a los 30 minutos habrá alrededor de 2 300 bacterias.

. △

Otros ejemplos

Como dijimos antes, son muchas las situaciones que se pueden describir mediante ecuaciones diferenciales. A continuación damos dos ejemplos de ello.

Ejemplo 38. Un circuito eléctrico

Consideremos un sistema eléctrico que consiste de una **inductancia** L, una **capacitancia** C, una **resistencia** R y un generador como una **batería** o una **dínamo**. La leyes de la electricidad dicen que la **corriente** I en el circuito satisface la ecuación diferencial

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E,$$

donde E es la fuerza electromotriz producida por el generador. △

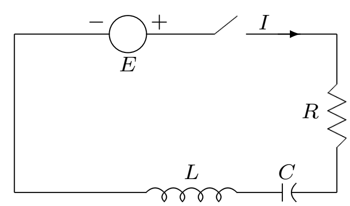


Figura 9.10. Circuito eléctrico

★ *Actividad:* Investigue sobre los circuitos eléctricos; específicamente el significado de los términos que aparecen en el ejemplo anterior: inductancia, capacitancia, resistencia, corriente, generador.

Ejemplo 39. Reacciones químicas

Consideramos una **reacción química elemental** de la forma

$$A_2 + B_2 \longrightarrow 2AB,$$

donde una molécula A_2 consistente de dos átomos A y una molécula B_2 consistente de dos átomos B se combinan para formar dos moléculas del compuesto AB. La reacción solo tiene lugar en ciertas circunstancias. Si se denota por y la concentración del compuesto AB en el tiempo t, entonces y satisface la ecuación diferencial

$$y' = k\left(a_0 - \frac{y}{2}\right)\left(b_0 - \frac{y}{2}\right),$$

donde k es una constante de proporcionalidad, a_0 es la concentración inicial de A_2 y b_0 es la concentración inicial de B_2. △

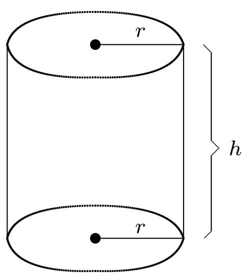
En esta sección se introduce otro importante concepto: las funciones de varias variables. Se introduce también el concepto de derivación parcial. Conceptos muy útiles en las aplicaciones.

9.4 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES Y DERIVADAS PARCIALES

Se ha visto la gran utilidad de las funciones en la descripción de los diferentes fenómenos de la naturaleza. Hasta el momento se ha considerado solamente **funciones de una variable**

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

La explicación y uso del mundo natural y social han planteado, sin embargo, la necesidad de considerar funciones de más de una variable. Por ejemplo, considere el volumen de un cilindro circular recto:



h: altura

r: radio de la base o tapa

Figura 9.11. Cilindro circular recto

$$V = \pi r^2 h.$$

El volumen depende de r y de h. Por eso se puede escribir

$$V(r,h) = \pi r^2 h.$$

Es decir, como una función de dos variables r y h.

$$V : (r,h) \longmapsto \pi r^2 h$$

Por ejemplo:

$$V(1,2) = \pi 1^2 \cdot 2 = 2\pi$$

Los ejemplos son muchísimos:

$$V(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

es una función de tres variables: x, y, z.

En general, se puede hablar de **funciones de varias variables**.

Funciones de dos variables

En el caso de las funciones de 2 variables es posible obtener una representación gráfica, al igual que se hace con las funciones de una variable. Sin embargo, la representación se hace en el espacio (en 3 dimensiones) y no en el plano. En lugar de dos ejes de coordenadas x, y:

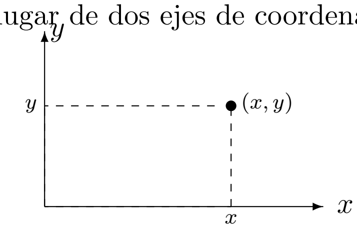


Figura 9.12.

se tienen 3 ejes de coordenadas x, y y z:

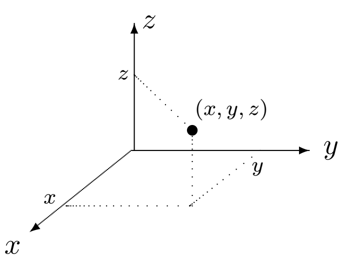


Figura 9.13.

Por ejemplo, si

$$z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

se obtiene la mitad de la superficie de la esfera de radio $r = 3$, y con centro en el punto origen $(0, 0, 0)$ (figura 9.14).

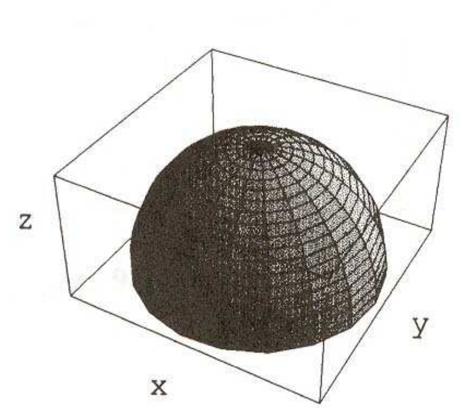


Figura 9.14. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

★ *Nota:* La ecuación

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2 \quad \text{o} \quad z^2 + x^2 + y^2 = 3^2$$

brinda la superficie de la esfera completa.

Otro ejemplo: sea $f(x, y) = 1$.

Esto representa un plano paralelo al plano xy (constituido por todos los puntos $(x, y, 1)$).

Es interesante señalar que a las funciones de varias variables se les puede aplicar también los métodos del Cálculo Diferencial e Integral, con algunas modificaciones.

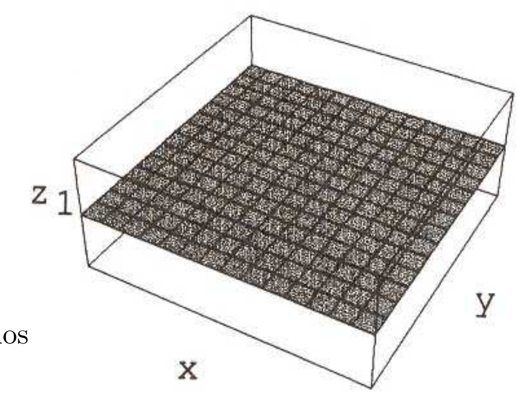


Figura 9.15. El plano $z = 1$

Las derivadas parciales

Considérese la función

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Si x, y, z varían entonces $f(x,y,z)$ varía, y tiene sentido preguntarse, por ejemplo, por las razones de cambio y por las derivadas. Esto se hace de la siguiente forma: se considera que 2 de las variables son fijas, como constantes, y se calcula la derivada para la otra variable.

Por ejemplo: la derivada de

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

si asumimos y y z constantes y x variable, es solamente $2x$ (pues la derivada de (y^2) y (z^2) es cero).

Cuando esto sucede se dice que se obtiene la **derivada parcial de** $f(x,y,z)$ **con respecto a** x, y se denota

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

(símbolos un poco diferentes a los $\dfrac{dy}{dx}$),

$$\text{o } D_x f, \quad \text{o } D_1 f.$$

Entonces

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = D_x f(x,y,z) = 2x.$$

Si se hace variar y (x y z se asumen constantes), entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} &= \frac{\partial (x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (y^2)}{\partial x} + \frac{\partial (z^2)}{\partial x} \\ &= 0 + 2y + 0 \\ &= 2y \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & + & y^2 & + & z^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 2x & & 0 & & 0 \end{array}$$

Esta se denota

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad D_y f, \quad \text{o } D_2 f.$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2x}$$

También

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2z,$$

se denota $\dfrac{\partial f}{\partial z}$, $D_z f$, o $D_3 f$.

Derivadas parciales de orden superior

La segunda derivada parcial (y en general todas las de orden superior) también se pueden calcular.

Si $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2x$, se repite el procedimiento para esta expresión

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right) = \frac{\partial (2x)}{\partial x} = 2$$

y se denota por $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (el 2 indica que se trata de la segunda derivada parcial) o por $D_x^2 f$.

Ahora bien, si se empieza con $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (manteniendo y y z constantes), luego se puede seguir calculando la derivada parcial de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ con relación a y. Esto se escribe

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \quad \text{o } D_{xy}^2 f \quad \text{o } D_{12}^2 f.$$

Ejemplo 40. Cálculo de derivadas parciales

Dada $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$ calcular

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x}$$

Solución:

$$\rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial (e^x \operatorname{sen} y)}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y \quad (y \text{ constante y } \tfrac{d(e^x)}{dx} = e^x).$$

$$\rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (e^x \operatorname{sen} y)}{\partial x} = e^x \cos y \quad (x \text{ constante y } \tfrac{d(\operatorname{sen} y)}{dy} = \cos y).$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial (e^x \operatorname{sen} y)}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial (e^x \cos y)}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial (e^x \operatorname{sen} y)}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial (e^x \cos y)}{\partial x} = e^x \cos y$$

$$\to \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x}\right) = \frac{\partial\,(e^x \cos y)}{\partial x} = e^x \cos y$$

△

Las diferentes propiedades que hemos estudiado en las funciones de una variable se pueden generalizar y adaptar a funciones de varias variables.

Cuando se habla de **ecuaciones diferenciales parciales** se refiere a ecuaciones diferenciales en las que aparecen derivadas parciales de una función de varias variables. Estas son probablemente las ecuaciones de mayor interés para la física–matemática y sus aplicaciones. Una de las más conocidas y útiles es la famosa *ecuación de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

que apareció por primera vez en la teoría newtoniana de la atracción gravitacional. También aparece en las teorías de elasticidad, sonido, luz, calor, electromagnetismo y del movimiento de fluidos.

Pierre Laplace

9.5 EJERCICIOS DEL *CAPÍTULO 9*

Falso o verdadero

En los ejercicios 1 a 6 diga si la afirmación es verdadera o falsa (¿por qué?).

1. Toda serie infinita tiene un último término.

2. Una serie es un tipo especial de sucesión.

3. El área de la región sombreada en la figura 9.16 se puede calcular mediante la integral $\int_{-4}^{4} f(x)\,dx$.

4. La función $f(x) = x^8 + 5$ tiene infinitas primitivas.

5. La función $f(x) = e^{2x}$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - y' - 2y = 0$.

6. Una función de tres variables se puede representar en un sistema de tres ejes coordenados.

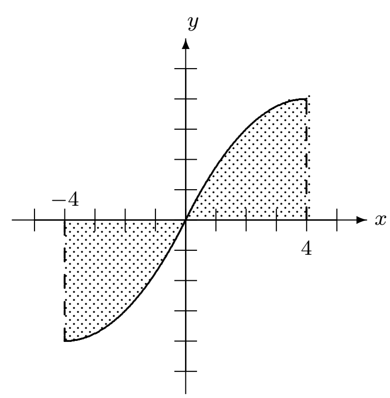


Figura 9.16.

Selección única

En los ejercicios 7 a 14 escoja la opción que responda o complete correctamente la proposición dada.

7. Un ejemplo de serie de potencias es el siguiente:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^n x}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$

8. Suponga que deseamos aproximar el área bajo la curva $y = x^3$ en el intervalo $[1, 3]$ usando una partición que consiste en 10 subintervalos de la misma longitud, entonces la norma $\|\Delta\|$ de la partición es

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{10}$ (c) 10 (d) 5

9. Para calcular el área sombreada en la figura 9.17 se efectúa la partición que se indica, ¿cuál es la norma de esa partición?

(a) 3 (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{3}{2}$

10. Si $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$ entonces $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ es igual a

(a) $\operatorname{sen} y$ (b) $\cos y$ (c) $-x \operatorname{sen} y$ (d) 0

11. Un solución de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$ es la siguiente función:

(a) $f(x) = 2\cos x$ (b) $f(x) = 2\operatorname{sen} x$

(c) $f(x) = \cos 2x$ (d) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$

12. Si $f(x, y) = xy + x^2 + y^2$ entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ es igual a

(a) $y + 2x$ (b) $x + 2y$ (c) $y + 2x + 2y$

(d) $x + 2y + 2x$

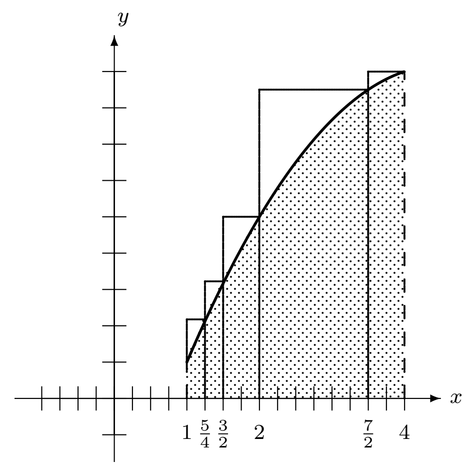


Figura 9.17.

13. El problema de obtener la ecuación de la curva que pase por un punto dado y que en cada uno de sus puntos (x, y) la pendiente de la recta tangente sea $\frac{2y}{x}$, se puede resolver mediante la siguiente ecuación diferencial.

(a) $2yy' - x = 0$ (b) $2yy' + x = 0$

(c) $xy' - 2y = 0$ (d) $xy' + 2y = 0$

14. Si $F(x) = \operatorname{sen}(2x)$ es primitiva de cierta función f, entonces $\displaystyle\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$ es igual a

(a) 0 (b) 1 (c) $\pi/4$ (d) $\pi/2$

Problemas y preguntas de desarrollo

En los ejercicios 15 a 35 resuelva la situación planteada.

15. Escriba los cinco primeros términos de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. ¿Cuál es el vigésimo término?

16. Utilizando la serie para $\frac{\pi}{4}$ dada en la sección 9.1, explique cómo se obtendría la aproximación $\frac{3156}{945}$ como una aproximación para π. Usando una calculadora estime cuántos términos de esa serie habrá que sumar para obtener la conocida aproximación $3,14$ para π.

17. Cuando una serie es convergente se puede aproximar su suma tomando unos cuantos de los primeros términos de la serie. Desde luego, entre más términos sumemos mejor será la aproximación obtenida. Según esto, obtenga una aproximación de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ sumando los cinco primeros términos de ella.

18. Dado que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,
(a) escriba la serie que corresponde a e^2.
(b) utilice los cinco primeros términos de la serie de la parte (a) para dar una aproximación de e^2.

En los ejercicios 19 a 21 escriba integrales definidas que correspondan al área sombreada dada.

19.

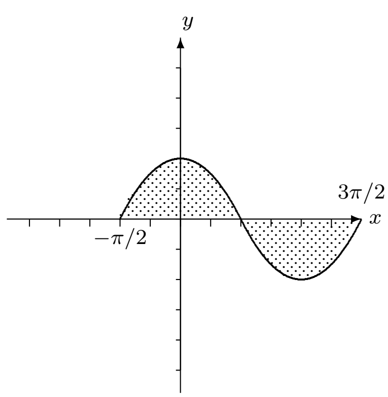


Figura 9.18. $f(x) = \cos x$

20.

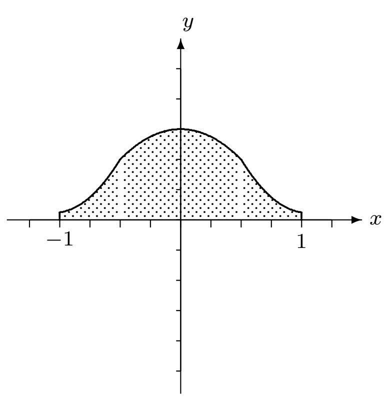


Figura 9.19. $f(x) = e^{-x^2}$

21.

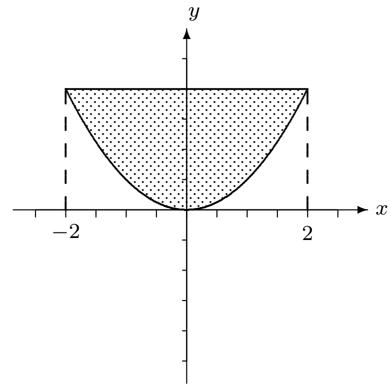


Figura 9.20. $f(x) = x^2$

22. Calcule las siguientes integrales indefinidas.

(a) $\int x^5\,dx$ (b) $\int (x^5 + 2x)\,dx$

(c) $\int e^{2x}\,dx$ (d) $\int \operatorname{sen} 3x\,dx$

23. Calcule las siguientes integrales definidas.

(a) $\int_0^1 (x^2 + 4x + 3)\,dx$ (b) $\int_{-1}^2 (x^3 + x^2)\,dx$

(c) $\int_0^1 e^{2x}\,dx$ (d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx$

24. ¿Cuáles de las siguientes funciones son solución de la ecuación diferencial $y'' - y' - 6y = 0$?

(a) $f(x) = e^{2x}$ (b) $f(x) = e^x$ (c) $f(x) = x^2$
(d) $f(x) = e^{-2x}$ (e) $f(x) = \operatorname{sen} x$

25. Sabiendo que $y = \operatorname{sen} kx$ es solución de la ecuación diferencial $y'' + 9y = 0$, determine el valor o los valores de k.

26. Plantee una ecuación diferencial que describa el problema de encontrar la ecuación de una curva que pase por un punto dado y tal que en cualquiera de sus puntos (x, y) la pendiente de la recta tangente es $\frac{y-1}{1-x}$.

27. Una población de bacterias en un experimento crece cada segundo en forma proporcional a la cantidad presente. Si la constante de proporcionalidad es 2 y si inicialmente hay 1 000 bacterias, ¿cuántas bacterias habrá un minuto después? (utilice una calculadora)

28. Un material radiactivo se desintegra siguiendo el modelo exponencial. Si en el instante $t = 0$ minutos hay 20 gramos del material y a los 30 minutos hay 16 gramos, ¿escriba una fórmula que le permita saber cuántos gramos del material hay en cada momento?, ¿en cuánto tiempo quedarán 8 gramos? (use calculadora)

29. Se llama *vida media* o *semivida* de un material radiactivo al tiempo que tarda en reducirse a la mitad de la cantidad inicial. Suponga que se tienen 400 gramos de un material cuya vida media es de 8 horas. ¿Cuánto tardará en reducirse a 100 gramos?, ¿cuántos gramos habrá a las 4 horas? (use calculadora).

30. Una zapatería produce zapatos de hombre y de mujer. Producir cada zapato de hombre le cuesta ₡600 y producir cada zapato de mujer le cuesta ₡650; además tiene costos fijos (agua, luz, teléfono, alquiler, etc.) semanales por un monto de ₡200 000. Si en una semana produce un número x de zapatos de hombre y un número y de zapatos de mujer, escriba la función de costo C como una función de las variables x e y.

31. Utilice la información que se proporciona en la figura 9.21 para dar una aproximación del área sombreada.

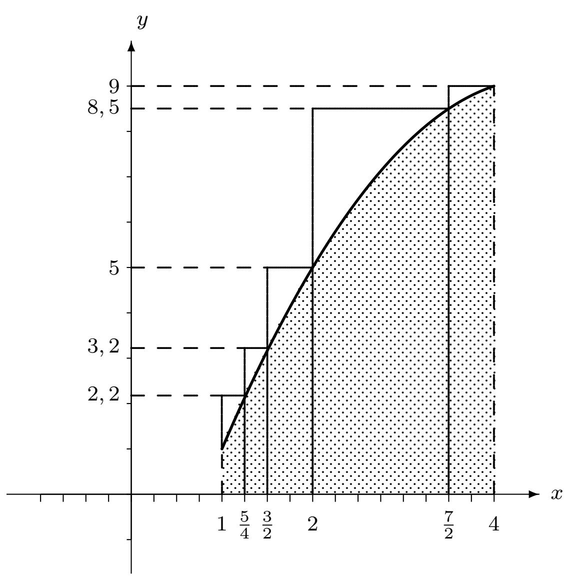


Figura 9.21.

32. Escriba una función de tres variables que permita calcular el área sombreada en la figura 9.22.

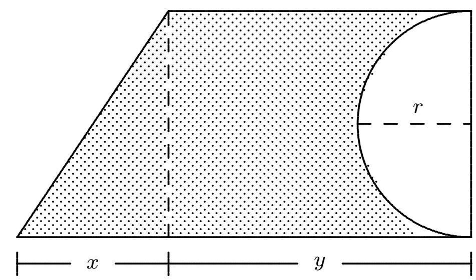


Figura 9.22.

33. Escriba una función de tres variables que permita calcular el volumen del sólido dado en la figura 9.23.

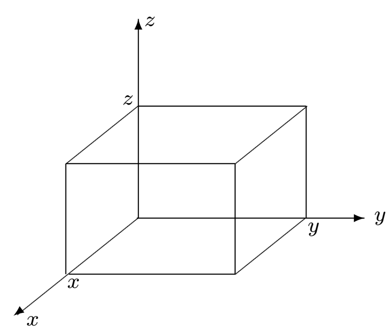


Figura 9.23.

34. Para la función $f(x) = \operatorname{sen}(xy)$ calcule

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

(c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

(e) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

35. Para la función $f(x) = 2zxy + x^2y^2z^2$ calcule

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (c) $\dfrac{\partial f}{\partial z}$

(d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (e) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (f) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

(g) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (h) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$

(i) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$

CAPÍTULO 10

DEFINICIONES Y MÉTODOS FORMALES

Existen tres niveles de entender una prueba. El más bajo es el sentimiento placentero de haber entendido la argumentación; el segundo es la habilidad de repetirla; y el tercero o el nivel superior es el de ser capaz de rebatirla.

Karl Popper

La *demostración* en las matemáticas es una de sus dimensiones más importantes. Esto significa, esencialmente, la necesidad de realizar la prueba de las proposiciones y teoremas matemáticos a partir de una serie de premisas y criterios y usando la deducción lógica. Antes de los griegos, por ejemplo, se sabían muchos resultados, como el Teorema de Pitágoras. Pero se trataba de ejemplos particulares y no de una prueba general y universalmente válida (para todos los triángulos rectángulos). Los griegos definieron criterios y procedimientos (construcciones con regla y compás) y, usando siempre la deducción lógica, ofrecieron pruebas de muchos resultados conocidos antes, y de muchos pero muchísimos más. Esto fue una gran conquista intelectual.

La demostración matemática es importante

¿Para qué la demostración?

La demostración permite asegurar que el teorema o proposición considerado no sea incorrecto y, también, ofrece a la comunidad matemática el medio para que ésta decida si un teorema o proposición se acepta o no. Cuando un matemático publica un resultado, rápidamente varios otros matemáticos revisan si se han respetado la lógica y los criterios (o si hay inconsistencias, errores, etc.).

Los criterios para establecer una demostración son dados por la comunidad matemática, cambian con la historia

Un matemático suele llegar a un resultado por caminos muy diversos (intuitivos, constructivos, etc.), pero una vez que llega a éste debe demostrar su resultado y expresarlo (escribirlo) de acuerdo con los criterios aceptados por la comunidad matemática.

Si los criterios aceptados dependen de la comunidad matemática, estos criterios usualmente cambian con el desarrollo histórico. Por ejemplo, en un momento fue válido definir las curvas solo por construcciones geométricas (en la Grecia Antigua), pero en otro momento era también válido definir curvas por medio de ecuaciones algebraicas (después de Descartes y Fermat).

Para Newton, Leibniz, Euler y muchos matemáticos de los siglos XVII y XVIII la geometría, e incluso la física, era buen criterio para desarrollar el Cálculo (y así lo hicieron con mucho éxito). Esto, por diversas razones, cambiaría.

En el siglo XIX uno de los criterios que introdujo la comunidad matemática en sus demostraciones alrededor del Cálculo fue establecer que éstas descansaran exclusivamente en la lógica, el álgebra y la aritmética, y no en la geometría (y mucho menos en la física).

En el siglo XIX se fundamenta las matemáticas

Debe reconocerse que, a pesar del gran éxito en resultados y aplicaciones que se logró en el siglo XVIII, se había filtrado una gran cantidad de inconsistencias lógicas y errores, situación que demandaba la realización de un proceso de fundamentación y mayor rigor en el Cálculo. Esta fundamentación se realizó asumiendo como nuevo criterio la "aritmetización" y la "desgeometrización".

Menos física y geometría, y más álgebra, aritmética y lógica para fundamentar las matemáticas

Cauchy y Weierstrass

Agustin Cauchy

Los dos matemáticos más relevantes en la historia de la "rigorización" fueron el francés Augustin Louis Cauchy (1789–1857) y el alemán Karl Weierstrass (1815–1881). El tratamiento finalmente establecido para las nociones de límite, continuidad, derivada, integral, convergencia, plenamente "desgeometrizado", así como la "aritmetización" del Cálculo, o el Análisis, fue dado por Weierstrass. Un ejemplo, la definición de límite dada por Weierstrass:

> "Si, dado cualquier ε, existe un η_0 tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$."

Como se puede ver, aquí ya no hay referencia a cantidades que se mueven o que se hacen infinitamente pequeñas. Nada de física ni de geometría.

Debe decirse que Bernhard Bolzano (1781–1848) también había elaborado un enfoque similar al de Weierstrass y, también, que Cauchy en buena parte tiene la misma aproximación.

Hasta el momento, en este libro, hemos puesto el énfasis en los *con-*

ceptos (la mayoría de las veces intuitivamente), y sus aplicaciones, y alguna que otra prueba bastante informal. Creemos que esto es lo más adecuado para un curso introductorio de Cálculo. En lo que sigue de este capítulo vamos, sin embargo, a usar un tratamiento más formal y a realizar algunas demostraciones. Esto con el objetivo de familiarizar al lector con el lenguaje, procedimientos y criterios (algunos), que se usan en la comunidad matemática para expresar y aceptar sus resultados intelectuales.

Un énfasis conceptual

10.1 EL CONCEPTO DE LÍMITE

Se proporciona en esta sección el concepto formal de límite y de límite al infinito y límite infinito. Se utilizan para demostrar algunos límites específicos y para probar algunas propiedades de los límites

En esta sección daremos la definición formal de límite, tal como modernamente se acepta, y la utilizaremos para demostrar algunos de los resultados sobre límites que se dieron en el *Capítulo 2*.

Definición 10.1. Definición de límite

Sea f una función que está definida en todo elemento de un intervalo abierto que contiene a c, excepto tal vez en c. Se dice que el **límite** de $f(x)$ cuando x tiende a c es igual a L si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\text{si } 0 < |x - c| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se denota por:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Lo anterior significa que no importa cuán pequeño sea el intervalo alrededor de L, siempre podemos conseguir un intervalo alrededor de c de manera que todas las imágenes de los elementos en este intervalo quedan “atrapadas” en el intervalo alrededor de L. De esta manera se traduce el concepto de “cercanía” que se indicó en la definición informal que dimos en el *Capítulo 2* (vea la figura 10.1).

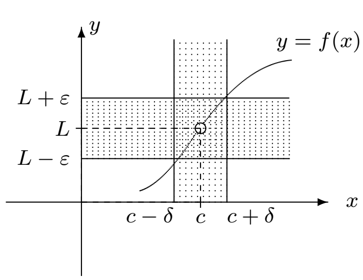


Figura 10.1.

Ejemplo 41. Demostrando un límite con el uso de la definición

Demostrar que $\lim\limits_{x \to 2}(3x+1) = 7$.

Solución: Aquí tenemos que

$$f(x) = 3x + 1, \quad c = 2 \quad \text{y} \quad L = 7.$$

Siguiendo la definición para este caso particular debemos demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 7| < \varepsilon. \quad 1$$

Usualmente se trata de tener una idea de la forma en que se debe elegir δ y para eso se estudia la desigualdad en que interviene ε. Tenemos:

$$|(3x+1) - 7| < \varepsilon \quad 2 \tag{10.1}$$
$$|3x - 6| < \varepsilon \quad 3 \tag{10.2}$$
$$|3(x-2)| < \varepsilon \quad 4 \tag{10.3}$$
$$3|x - 2| < \varepsilon \quad 5 \tag{10.4}$$
$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} \quad 6 \tag{10.5}$$

La última de estas desigualdades da una idea: si tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, entonces si

$$0 < |x - 2| < \delta$$

entonces la desigualdad (6) anterior sería satisfecha y como todas las desigualdades (5), (4), (3) y (2) son equivalentes entonces la primera (1) también se satisface. De esta manera hemos probado lo que se pide. $\triangle$

Ejemplo 42. Usamos la definición para demostrar que un límite no existe

Sea $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe.

Solución: Si $x > 0$ entonces

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1.$$

Es decir, a la derecha del eje y la gráfica coincide con la recta $y = 1$. Para $x < 0$ tenemos que

$$\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

y entonces a la izquierda del eje y la función coincide con la recta $y = -1$.

Supongamos que sí existe L tal que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = L.$$

Lo anterior diría entonces que

$$-1 \leq L \leq 1.$$

Pero para cualquiera que sea L con esa condición y si $\varepsilon > 0$, al considerar cualquier intervalo $]-\delta, \delta[$ (conteniendo a 0), existen elementos en este intervalo cuyas imágenes están fuera del intervalo $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ (vea la figura 10.2).

Esto dice que el límite indicado no existe. △

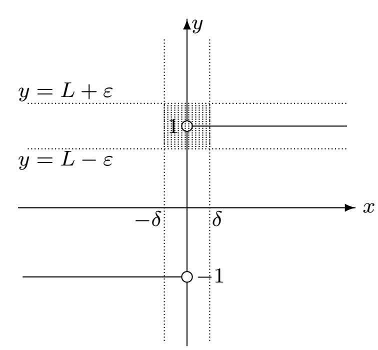


Figura 10.2.

No siempre es tan sencillo demostrar un límite a partir de la definición. En algunos casos se requieren verdaderos "malabares" para obtener lo que se desea. Pero no es nuestro objetivo profundizar más en esto. Por otra parte, la importancia de la definición no reside en que podamos o no demostrar límites particulares; de todas maneras el límite hay que encontrarlo por otros métodos. Su importancia está en que a través de ella podemos demostrar propiedades generales de los límites y luego se pueden usar esas propiedades (como ya lo hicimos en los capítulos pasados) para encontrar límites particulares con la certeza de que son válidos.

En el *Capítulo 2* dimos un par de teoremas sobre límites (lea la parte correspondiente). Estos teoremas son demostrados precisamente utilizando la definición. El Teorema 2.1 es una lista de propiedades de los límites (en realidad cada propiedad puede considerarse como un teorema por separado). Como ilustración demostraremos aquí una de esas propiedades.

Teorema 10.1. El límite de una suma es la suma de los límites

Sean f y g dos funciones que están definidas en un intervalo abierto que contiene a c, excepto tal vez en c. Si existen los límites $\lim_{x\to c} f(x)$ y $\lim_{x\to c} g(x)$ entonces también existe $\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)$ y se tiene que:

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$$

Prueba. Supongamos que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} g(x) = M$. Entonces tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existen δ_1 y δ_2 tales que:

$$\text{si} \quad 0 < |x-c| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\text{si} \quad 0 < |x-c| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(según la definición lo anterior vale para cualquier ε, por conveniencia entonces tomamos $\frac{\varepsilon}{2}$).

Tomemos δ como el menor entre δ_1 y δ_2, simbólicamente esto se escribe

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Como $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ entonces

$$0 < |x-c| < \delta$$

significa que

$$0 < |x-c| < \delta_1$$

y por lo tanto

$$|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Del mismo modo,

$$0 < |x-c| < \delta$$

significa que

$$0 < |x-c| < \delta_2$$

y por lo tanto

$$|g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
|(f(x)+g(x))-(L+M)| &< |(f(x)-L)+(g(x)-M)| \\
&\leq |f(x)-L| + |g(x)-M| \\
&\qquad \text{(propiedad del valor absoluto)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

En resumen tenemos que:

$$\text{si} \quad 0 < |x - c| < \delta \quad \text{entonces} \quad |(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \varepsilon$$

y esto, según la definición, demuestra lo que se indica:

$$\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$$

(el límite de una suma es la suma de los límites). ■

También se dieron en el *Capítulo 2* las definiciones informales de límite por la derecha y límite por la izquierda; límites infinitos y límites al infinito. A continuación daremos formalmente algunas de esas definiciones.

Definición 10.2. Límite por la derecha

Sea f una función que está definida en algún intervalo, $]c, d[$. Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c **por la derecha** es igual a L si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\text{si } 0 < x < c + \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se denota por:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Definición 10.3. Límite infinito

Sea f una función que está definida en un intervalo abierto que contiene a c, excepto tal vez en c. Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es $+\infty$ si para todo número real $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - c| < \delta \quad \text{entonces} \quad f(x) > M.$$

Se denota por:

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$$

Ejemplo 43. Demostrando un límite infinito

Demostrar que $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

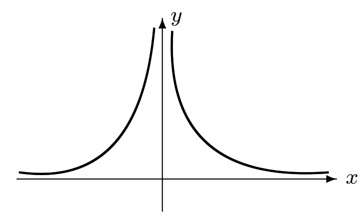


Figura 10.3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Solución: Aquí tenemos que $c = 0$; tomemos un M cualquiera positivo. Debemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta$ entonces $f(x) > M$.

Pero $f(x) > M$ significa que $\dfrac{1}{x^2} > M$, entonces

$$1 > Mx^2 \Longrightarrow \frac{1}{M} > x^2 \Longrightarrow x^2 < \frac{1}{M} \Longrightarrow |x| < \sqrt{\frac{1}{M}}$$

Lo anterior significa que si tomamos $\delta = \sqrt{\frac{1}{M}}$ se tiene el resultado deseado. △

Definición 10.4. Límite al infinito

Sea f definida en un intervalo de la forma $]a, +\infty[$, decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ es igual a L si para todo $\varepsilon > 0$ existe M tal que

$$\text{si } x > M \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se denota por:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

Ejemplo 44. Demostración de un límite al infinito

Demostrar que si k es un número entero positivo entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

Solución: Sea $\varepsilon > 0$ un número fijo. La expresión $|f(x) - L| < \varepsilon$ significa en este caso que $\left|\dfrac{1}{x^k} - 0\right| < \varepsilon$; esto es:

$$\left|\frac{1}{x^k}\right| < \varepsilon \Longrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < x^k \Longrightarrow x^k > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow x > \sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}}$$

Lo anterior significa que si tomamos $M = \sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}}$ se tiene el resultado deseado. △

★ *Actividad:* Escriba definiciones formales para los siguientes límites:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L, \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Se da la definición de derivada y dos propiedades de las funciones continuas: la existencia de extremos de la función en un intervalo cerrado y el teorema de los valores intermedios.

10.2 EL CONCEPTO DE CONTINUIDAD

En el *Capítulo 3* se dio la definición de continuidad en un punto. Recordemos:

Definición 10.5. Continuidad

Una función f es continua en $x = c$ está definida en un intervalo abierto que contiene a c y además

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Ejemplo 45. Continuidad en un punto

Demostramos en el ejemplo 1 que si $f(x) = 3x + 1$ entonces

$$\lim_{x \to 2}(3x + 1) = 7$$

y además $f(2) = 3(2) + 1 = 7$. Concluimos que esta función es continua en $x = 2$. △

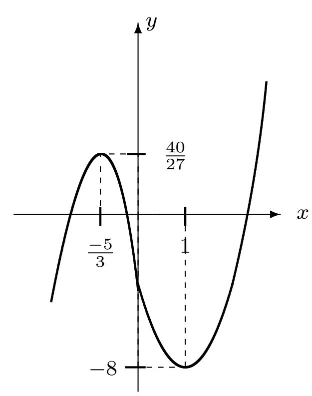


Figura 10.4.

Las propiedades de continuidad que se dieron en el Teorema 3.3 del *Capítulo 3* provienen directamente de la propiedades correspondientes de los límites. Proporcionaremos aquí dos teoremas referidos a funciones continuas.

Teorema 10.2. Existencia de máximos y mínimos

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces f tiene un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo; esto es, existen valores c y d ambos en $[a, b]$ tales que $f(c) \leq f(x)$ y $f(d) \geq f(x)$ para todo x en $[a, b]$.

Este teorema es conocido con el nombre de *Teorema de Weierstrass*. Lo usamos en el ejemplo 8 del *Capítulo 8*, para asegurarnos la existencia de un máximo y un mínimo de la función.

Teorema 10.3. Valor intermedio

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y si r es un valor entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces existe c en el intervalo $]a, b[$ tal que $f(c) = r$.

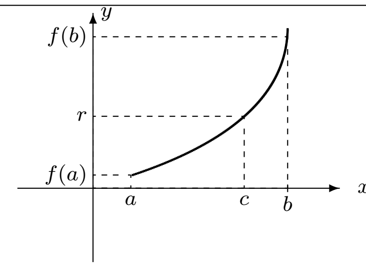


Figura 10.5. Valor intermedio

Observando la figura 10.5 nos podemos convencer de la veracidad del teorema (aunque de ningún modo esto constituye una demostración). Este teorema también es conocido con el nombre de *Propiedad de Darboux*. Es muy utilizado para verificar la existencia de soluciones de ecuaciones en un intervalo determinado.

Ejemplo 46. Verificando la existencia de una raíz

Considere la ecuación

$$x^5 + x - 1 = 0.$$

Aunque no podemos resolver esta ecuación sí podríamos determinar una aproximación tan cerca como quisiéramos de alguna solución. En efecto, la función

$$f(x) = x^5 + x - 1$$

es continua en $\mathbb{R}$, en particular es continua en $[0, 1]$. Además,

$$f(0) = -1 \quad \text{y} \quad f(1) = 1;$$

como 0 está entre -1 y 1, entonces

$$\text{existe } c \in]0, 1[\text{ tal que } f(c) = 0.$$

En otras palabras, existe una solución de la ecuación en el intervalo $]0, 1[$.

Si consideramos la misma función en el intervalo $[0,7,\ 0,8]$, tenemos que

$$f(0,7) = -0,13193 \quad \text{y} \quad f(0,8) = 0,12768$$

(use una calculadora para verificar estos resultados); como

$$-0,13193 < 0 < 0,12768$$

entonces

$$\text{existe } c \in]0,7,\ 0,8[\text{ tal que } f(c) = 0.$$

Esto significa que la ecuación tiene una solución en ese intervalo.

Por lo tanto $0,7$ es una solución aproximada de la ecuación.

Podríamos tomar un intervalo aún más pequeño (contenido en el anterior) y obtendríamos una mejor aproximación (y así hasta donde usted quiera). △

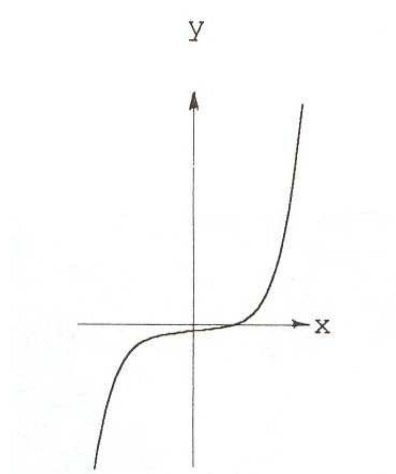


Figura 10.6. $f(x)=x^5+x-1$

★ *Nota:* No existen métodos para resolver una ecuación de grado 5 o mayor, por eso solo algunas de ellas, muy especiales, se pueden resolver explícitamente. Existen métodos muy eficientes para aproximar soluciones con el grado de precisión que se desee. Este es uno de los aspectos que trata una rama de las matemáticas llamada Análisis Numérico.

Aquí se da el concepto de derivada y se prueban algunos teoremas relativos a las funciones derivables.

10.3 EL CONCEPTO DE DERIVADA

Aquí recordaremos la definición de derivada en un punto y algunos teoremas importantes en conexión con este concepto.

Definición 10.6. Derivada en un punto

Sea f definida en un intervalo abierto que contiene a c. Se llama *derivada* de f en $x = c$ al límite

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

si es que existe, en cuyo caso se dice que f *es derivable* en c. Si el límite no existe se dice que f *no es derivable* en $x = c$.
También se usa alternativamente, para la derivada:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

En el *Capítulo 5* utilizamos esta definición para calcular algunos límites. Aquí la vamos a usar para demostrar algunas de las propiedades de las derivadas.

Teorema 10.4. Derivabilidad implica continuidad

Si f es derivable en $x = c$ entonces f es continua en $x = c$.

Prueba. En primer lugar, si f es derivable en c entonces $f(c)$ existe. Por otra parte, existe $f'(c)$, es decir existe

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Si x está en el dominio de f y $x \neq c$, entonces podemos escribir

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c).$$

Usando los teoremas sobre límites tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{x\to x} f(c) + \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot\lim_{x\to c}(x-c)\\ &= f(c)+f'(c)\cdot 0\\ &= f(c)\end{aligned}$$

Y esto quiere decir que f es continua en c. ■

Recuerde que hay funciones que son continuas pero no derivables en algunos puntos, tal es el caso de $f(x)=|x|$ (vea el *Capítulo 5* para más detalles).

Teorema 10.5. Derivada de una suma

Si f es derivable en $x=c$ y g es derivable en $x=c$, entonces $f+g$ es derivable en $x=c$ y se tiene que
$$(f+g)'(c)=f'(c)+g'(c).$$

Prueba. Si f y g son derivables en $x=c$ entonces existen los límites

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0}\frac{g(c+h)-g(c)}{h}$$

Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(c+h)-(f+g)(c)}{h} =\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)+g(c+h)-f(c)-g(c)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(c+h)-f(c)]+[g(c+h)-g(c)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(c+h)-g(c)}{h}\\ &= f'(c)+g'(c)\end{aligned}$$

Esto significa que $(f+g)'(c)$ existe y $(f+g)'(c)=f'(c)+g'(c)$. ■

Teorema 10.6. Derivada de un producto

Si f es derivable en $x=c$ y g es derivable en $x=c$, entonces $f\cdot g$ es derivable en $x=c$ y se tiene que
$$(f\cdot g)'(c)=f'(c)\cdot g(c)+f(c)\cdot g'(c).$$

Prueba. Si f y g son derivables en $x=c$ entonces existen los límites

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0}\frac{g(c+h)-g(c)}{h}$$

Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(c+h)-(fg)(c)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)g(c+h)-f(c)g(c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)\,g(c+h)-f(c+h)g(c)+f(c+h)g(c)-f(c)g(c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[f(c+h)\cdot\frac{g(c+h)-g(c)}{h}+g(c)\cdot\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} f(c+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(c+h)-g(c)}{h}+g(c)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\
&= f(c)\cdot g'(c)+g(c)\cdot f'(c)
\end{aligned}$$

Esto significa que $(f\cdot g)'(c)$ existe y que

$$(f\cdot g)'(c) = f'(c)\cdot g(c) + f(c)\cdot g'(c). \quad \blacksquare$$

A continuación enunciaremos dos teoremas muy importantes en la teoría del Cálculo diferencial. Estos no aparecieron explícitamente en ninguna parte de los capítulos anteriores pero son fundamentales en la demostración de muchos otros teoremas importantes.

Teorema 10.7. Teorema de Rolle

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y tal que $f(a)=f(b)$, entonces existe al menos un número $c\in\,]a,b[$ tal que $f'(c)=0$.

Prueba. La función f tiene que cumplir alguna de las siguientes condiciones:

1. $f(x)=f(a)$ para todo x en $]a,b[$. En este caso f es una función constante y por lo tanto $f'(x)=0$ para todo x. Es decir, todo $c\in\,]a,b[$ satisface que $f'(c)=0$.

2. $f(x)>f(a)$ para algún $x\in\,]a,b[$. Como f es continua en $[a,b]$ entonces f alcanza su máximo en ese intervalo (por el teorema de Weierstrass); al haber algún x $(x\neq a)$ con $f(x)>f(a)$ y como $f(a)=f(b)$ entonces ese máximo se alcanza en algún número $c\in\,]a,b[$. Puesto que la derivada existe en todo $]a,b[$ entonces necesariamente $f'(c)=0$.

3. $f(x)<f(a)$ para algún x en $]a,b[$. En este caso f tiene un mínimo en $[a,b]$ y por un razonamiento semejante al del punto anterior se concluye que existe c en $]a,b[$ con $f'(c)=0$. $\blacksquare$

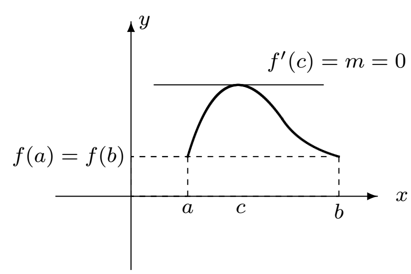
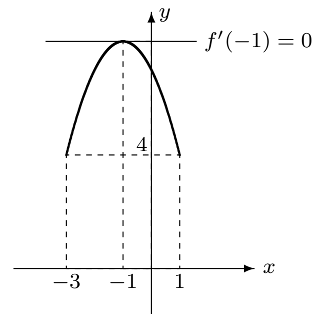


Figura 10.7. Teorema de Rolle

Básicamente lo que el teorema establece es que bajo las hipótesis que se piden la gráfica de la función debe tener al menos un punto en el cual la recta tangente es horizontal.



$f(x)=-x^2-2x+7$

Figura 10.8.

Ejemplo 47. Aplicando el Teorema de Rolle

Sea $f(x)=-x^2-2x+7$. Probar que f satisface las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[-3,1]$ y encontrar el o los números c en $]-3,1[$ tales que $f'(c)=0$.

Solución: En efecto f es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, en particular en los intervalos deseados. Por otra parte

$$f(-3)=-3^2-2(-3)+7=4$$

y

$$f(1)=-1^2-2(1)+7=4.$$

De manera que se satisfacen las hipótesis del Teorema de Rolle.

Ahora tenemos $f'(x)=-2x-2$ y resolvemos $f'(c)=0$, o sea,

$$-2c-2=0 \Longrightarrow -2c=2 \Longrightarrow c=\frac{2}{-2}=-1$$

es el valor que buscábamos. △

Teorema 10.8. Teorema del Valor Medio

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, derivable en $]a,b[$, entonces existe al menos un número $c\in\,]a,b[$ tal que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

La demostración de este teorema es algo larga y no la presentaremos por completo aquí. Consiste en construir otra función g a partir de la función dada f:

$$g(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right],$$

que satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a,b]$. Como

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

según el Teorema de Rolle existe un $c \in]a, b[$ tal que $g'(c) = 0$ o en otras palabras, tal que

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

pero esto significa que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

tal como queríamos.

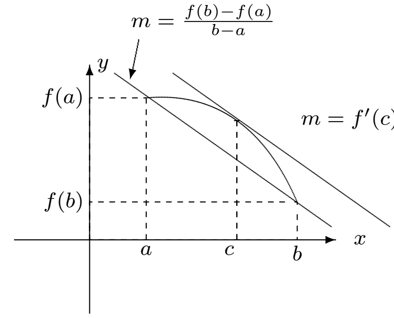


Figura 10.9. Teorema del Valor Medio

Observe que si una función f es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ entonces su gráfica va desde el punto $(a, f(a))$ hasta el punto $(b, f(b))$. Si unimos estos dos puntos mediante una recta L resulta que su pendiente es

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Entonces lo que el teorema enuncia es que bajo estas condiciones existe algún punto en la gráfica de f en el que la tangente es paralela a la recta L.

Ejemplo 48. Aplicando el Teorema del Valor Medio

Verificar que la función

$$f(x) = 5x^2 - 3x + 1$$

satisface las hipótesis del teorema del Valor Medio en el intervalo $[1, 3]$ y determinar el valor c que el teorema predice.

Solución: Puesto que f es un polinomio entonces es continua y derivable y por lo tanto satisface las hipótesis del teorema en cualquier intervalo.

Por otro lado tenemos que

$$f'(x) = 10x - 3;$$

para encontrar el c que predice el teorema debemos resolver la siguiente ecuación:

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{37 - 3}{2} = 17.$$

Esto es

$$10c - 3 = 17 \Longrightarrow 10c = 20 \Longrightarrow c = 2$$

es el valor que buscábamos. △

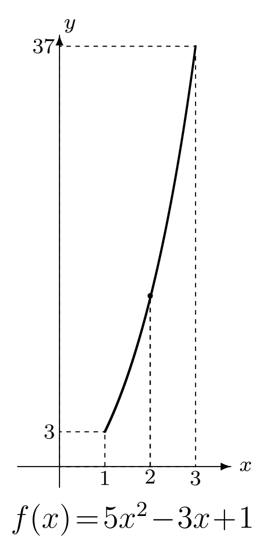


Figura 10.10.

Finalizamos el capítulo demostrando un teorema, del cual hicimos uso en el *Capítulo 2*, referido al crecimiento de las funciones. La demostración de este teorema se basa en el Teorema del Valor Medio.

Teorema 10.9. Crecimiento de la función

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$, entonces:

1. Si $f'(x) > 0$ para todo x en $]a, b[$ entonces f es creciente en $[a, b]$.
2. Si $f'(x) < 0$ para todo x en $]a, b[$ entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Prueba. Para demostrar el punto (1.) supongamos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$. Tomemos x_1 y x_2 en $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$, como queremos f creciente, debemos demostrar que $f(x_1) < f(x_2)$. Aplicando el Teorema del Valor Medio en el intervalo $[x_1, x_2]$ tenemos que existe c en $]x_1, x_2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Por hipótesis $f'(c) > 0$ y al ser $x_2 > x_1$ también la diferencia $x_2 - x_1$ es positiva; esto implica que $f'(c)(x_2 - x_1) > 0$ y por lo tanto $f(x_2) - f(x_1) > 0$. De esto se deduce que $f(x_2) > f(x_1)$ tal como queríamos.

Pruebe usted el punto (2.) como ejercicio (es muy parecido a lo anterior) ■

El objetivo central de este capítulo fue dar un rápido recorrido ilustrativo por algunos de los aspectos formales de los temas que desarrollamos en el resto del libro. Algunos de los teoremas que enunciamos tienen un sentido gráfico muy claro pero sus demostraciones no son nada sencillas (tal el caso del teorema de Weierstrass). Desde el punto de vista formal un buen dibujo es una gran ayuda de tipo intuitivo pero de ninguna manera constituye una demostración de un hecho general.

10.4 INFINITESIMALES Y ANÁLISIS NO–STANDARD

Se hace un breve comentario sobre dos enfoques distintos presentes en la historia del Cálculo: los infinitesimales y el análisis no–standard.

Resulta interesante mencionar que el proceso de "rigorización" y "aritmetización" que realizó Weierstrass eliminó lo que se suele llamar los "infinitesimales" en el Cálculo. Muchos matemáticos habían considerado la existencia (matemática) de números o elementos que eran infinitamente pequeños (infinitesimales), es decir, más pequeños que cualquier número, pero diferentes de cero. También la existencia de números infinitamente grandes, es decir, más grandes que cualquier número real. Estos infinitesimales (y estas propiedades) se usaron con éxito para lograr los resultados del Cálculo Diferencial e Integral. Leibniz formuló

Los infinitesimales: una teoría dominante en el Cálculo hasta Cauchy sus diferenciales dx, dy, como infinitesimales, y Euler y el mismo Cauchy asumieron plenamente la existencia de estos entes especiales.

El enfoque Weierstrassiano, que ha dominado las matemáticas hasta nuestros días, sepultó la teoría de los infinitesimales desde el siglo pasado como carente de sentido, precisión y rigor matemáticos. Sin embargo, en los años 1960, Abraham Robinson, un brillante matemático, demostró que la teoría que aceptaba los infinitesimales, los infinitamente pequeños y los infinitamente grandes, no tenía por qué ser carente de rigor matemático. Construyó un sistema matemático asumiendo estos entes o números especiales que se llama *Análisis No-Standard*, y demostró que los resultados del análisis clásico (Weierstrassiano) se pueden obtener en el análisis no-standard.

El Análisis No–standard "reconstruyó" la teoría de los infinitesimales

La naturaleza de las matemáticas

Como se ve, las teorías y resultados matemáticos son obra de los individuos y de su entorno social. Que sean aceptados como válidos depende de la comunidad matemática y ésta puede cometer "errores", "injusticias" y, sobre todo, cambiar de criterios. Que un resultado se acepte como verdadero o falso depende de esa comunidad. Por eso las matemáticas no son una colección de verdades universales, infalibles, por encima de la historia y los individuos. Es una ciencia sujeta al error, al cambio, al movimiento. Es una ciencia, al igual que las otras, dinámica e histórica.

La matemáticas: ciencia falible, dinámica, histórica, humana

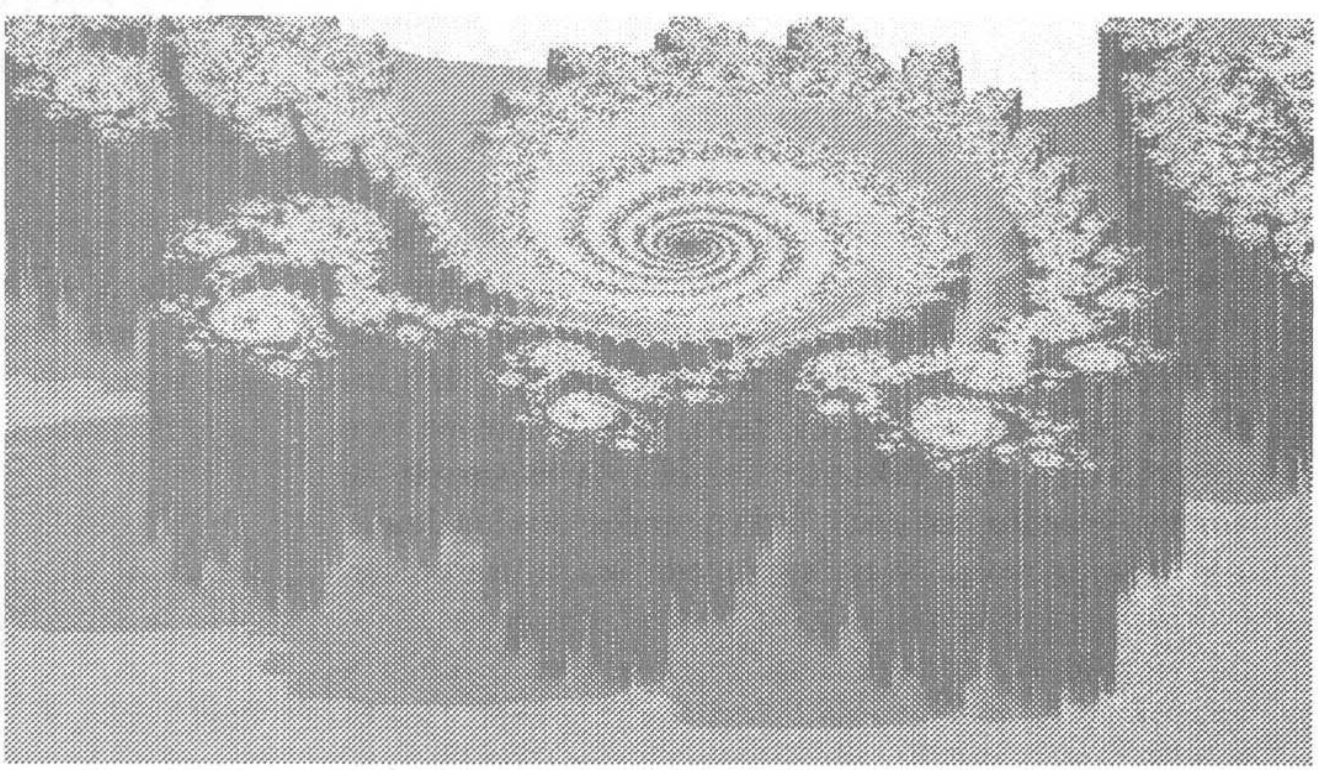


Imagen construida utilizando un fractal

10.5 EJERCICIOS DEL *CAPITULO 10*

Iterpretación gráfica

En los ejercicios 1 a 5 se dan gráficas de funciones definidas en el intervalo $[a, b]$. *En cada caso diga si es aplicable*

(a) el Teorema de Rolle,

(b) el Teorema del Valor Medio.

1.

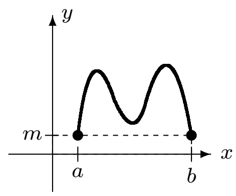


Figura 10.11.

2.

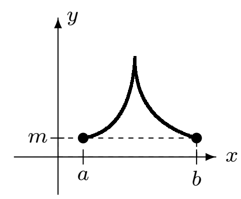


Figura 10.12.

3.

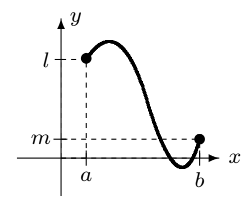


Figura 10.13.

4.

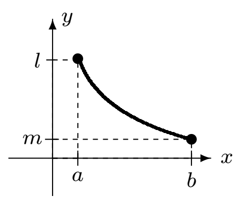


Figura 10.14.

5.

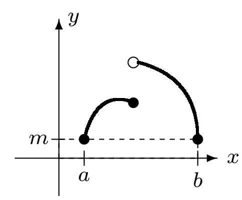


Figura 10.15.

Falso o verdadero

En los ejercicios 6 a 10 diga si la afirmación es verdadera o falsa (¿por qué?).

6. Dado que
$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2},$$
entonces podemos asegurar que existe $\delta > 0$ tal que si $|x - 1| < \delta$ entonces
$$\left|\frac{2-x}{x}\right| < 1.$$

7. Si
$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$$
entonces podemos asegurar que existe M tal que $f(x) \geq M$ para todo x en el dominio de f.

8. Si una función f satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a, b]$ entonces también satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio en $[a, b]$.

9. Considere dos funciones f y g definidas en un intervalo $[a, b]$ tales que cumplen las siguientes condiciones: f es positiva, creciente y derivable en $[a, b]$; g es negativa, decreciente y derivable en $[a, b]$, entonces la función $h(x) = f(x)g(x)$ es creciente en $[a, b]$.

10. Si f es continua en c, entonces podemos asegurar que el siguiente límite existe:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Problemas y preguntas de desarrollo

11. Use la definición para probar que

$$\lim_{x\to -2}(3x+1) = -5$$

12. Use la definición para probar que

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{|x-1|} = \infty$$

13. Use la definición para probar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$

14. Dé un ejemplo de un número δ tal que

$$|x^2-4| < 1 \quad \text{si} \quad |x-2| < \delta$$

15. Dada $f(x) = x^3$, determine δ tal que para

$$|x| < \delta$$

se tenga

$$|x^3| < \frac{1}{1000}$$

16. ¿Cuáles de las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[0,2]$? En cada caso justifique su respuesta.
(a) $f(x) = x^2+1$ (b) $f(x) = |x-1|$

(c) $f(x) = x^3-4x+2$ (d) $f(x) = (x-1)^{-2}$

17. Pruebe que la ecuación

$$x^5 + 3x^4 + x - 2 = 0$$

tiene al menos una solución en el intervalo $[0,1]$.

18. Pruebe que la ecuación

$$x^5 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$$

tiene al menos una solución en el intervalo $[1,2]$.

19. Si $f(x) = x^2 - 2x$ en $[-1,4]$, ¿por qué se puede garantizar la existencia de un valor c tal que $f(c) = 5$?

20. Pruebe que la ecuación

$$2^x - 3x = 0$$

tiene una solución en el intervalo $[0,1]$.

Respuestas a los ejercicios impares

Capítulo 6

1. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

3. $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

5. a

7. a

9. b

11. c

13. F

15. V

17. V

19. 36^o, -630^o, 540^o, -240^o, $22,5^o$

27. -3

29. 5

31. 1

33. No existe

35. $\frac{5}{3}$

37. $\frac{1}{2}$

39. $\frac{1}{2}$

41. $\frac{1}{2}$

43. 6

45. $\operatorname{sen} x + x \cos x$

47. $5 - 3 \operatorname{sen} 3x$

49. $6 \tan 3s \cdot \sec^2 3s$

51. $\dfrac{3 \sec 3t \, \tan 3t}{1 + \tan 3t}$

53. $\cos x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}}$

55. $3s^2 \cos s^3$

57. $4 \tan s \cdot \sec^2 s$

59. $-5 \operatorname{sen} x - 3 \csc^2 3x$

61. $y' = \dfrac{\cos y - 2x}{2y + x \operatorname{sen} y}$

63. $y' = -\frac{y}{x}$

65. Sugerencia: si $0 \leq f(x) \leq K$, entonces
$0 \leq x^2 f(x) \leq x^2 K$ y use el teorema de intercalación.

67. Tangente: $y = -x$; normal: $y = x - 2\pi$.

Capítulo 7

1. (a) $\log_3 81 = 4$, (b) $\log_8 1 = 0$, (c) $\log_{10} 0,001 = -3$, (d) $\log_4 64 = 3$, (e) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, (f) $\log_{1/3} \frac{1}{27} = 3$

3. F

5. F

7. F

9. b

11. d

13. b

15. $5 \log_2(\cos x) + \frac{1}{2} \log_2(3x - 2) - 3 \log_2(\sec x)$

17. $\log_2(3x+1) + x \log_2 x + \frac{1}{3} \log_2(x^2 + 3) - \log_2(x+2) - \frac{1}{2} \log_2(2x+3)$

19. 1

21. 3

23. $e^{1/5}$

25. $x^2 + x$

27. $\dfrac{4(\ln t)^3}{t}$

29. $\dfrac{\sqrt[3]{2t+1}}{t} + \dfrac{2 \ln 3t}{3\sqrt[3]{(2t+1)^2}}$

31. $2te^t + (t^2 + 3)e^t$

33. $\dfrac{e^x(2x^2 - 4x)}{(x^2 - e^x)^2}$

35. $x2^x(2 + x\ln 2)$

37. $\dfrac{6x-1}{2(2x-1)\sqrt{3x+\ln(2x-1)}}$

39. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)+\dfrac{2}{x}$

41. $\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{3x+1}\right)\cdot (x^2-4)\sqrt[4]{(3x+1)^3}$

43. $x^{x^x}\left[x^x(\ln x+1)\ln x + x^{x-1}\right]$

45. $t3t+1(2+3t+3t\ln t)$

47. $\dfrac{x^{2x}(x^2+1)}{(x^2-1)\sqrt[4]{x+1}}\left(2+2\ln x+\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{5}{4(x+1)}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

49. $y' = -\frac{y}{x}$

51. $y' = \dfrac{-x-2x^2-2xy}{1-2xy+2y^2}$

55. $y = \dfrac{2\ln 2+1}{2\ln 2}x+\dfrac{3\ln 2-1}{\ln 2}$

57. En $(0,1)$

59. En $(1,1)$ y $(2, 4+4\ln 2)$

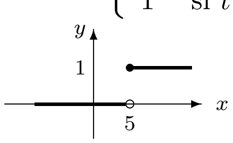
Capítulo 8

1. Interís compuesto: f; interís simple: g; capital inicial 10 000; $r = 2\%$.

3. $f'(x) > 0$ en $]-\infty,-3[\cup]2,+\infty[$; $f'(x) < 0$ en $]0,2[$; $f'(x) = 0$ si $x \in]-3,0[$; $f'(x)$ no existe si $x=-3$, $x=0$, $x=2$.

5. 27 124, 9 colones

7. $H_5(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 5 \\ 1 & \text{si } t \geq 5 \end{cases}$



$H_5(0) = H_5(\frac{1}{2}) = H_5(3) = 0$; $H_5(5) = H_5(8) = H_5(7,3) = 1$

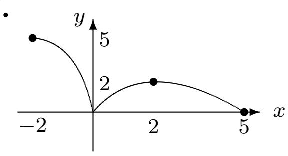
9. $P'(2) = 7$, $P'(6) = 23$

11. (a) entre el primer y el tercer segundo, (b) a partir del segundo número dos, (c) que la velocidad disminuye.

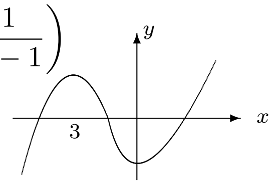
13. Mínimo: 3, máximo: 19

15. Mínimo: -1, máximo: 19

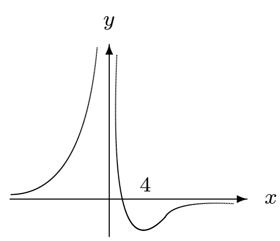
17.



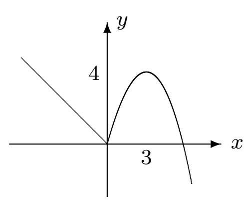
19. Crece en $]-\infty,-3]$ y $[0,+\infty[$, decrece en $[-3,0]$



21. crece en $]-\infty,0[$ y $[4,+\infty[$, decrece en $]0,4]$



23.



25. -1

27. $+\infty$

Capítulo 9

1. F

3. F

5. V

7. c

9. d

11. c

13. c

15. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{5}{32}$, el vigísimo: $\frac{20}{2^{20}}$

17. $\frac{242}{243}$

19. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} |\cos x| dx$

21. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2 dx$

23. (a) $\frac{16}{3}$, (b) $\frac{27}{4}$, (c) $\frac{1}{2}(e^2-1)$, (d) -2

25. $k=3$, $k=-3$

33. $V = xyz$

Capítulo 10

1. Aplicable Teorema de Rolle y Teorema del Valor Medio

3. Aplicable el Teorema del Valor Medio

5. Ninguno de los dos

7. F

9. F

11. Tomar $\delta = \frac{\epsilon}{3}$

13. Tomar $M = 1 + \frac{2}{\epsilon}$

15. $\delta = \frac{1}{10}$

17. $f(0) = -2$ y $f(1) = 3$; entonces: por el teorema de los valores intermedios hay una solucińn en $[0,1]$.

19. $f(-1) = 3$ y $f(4) = 8$, como $3 < 5 < 8$ entonces existe c tal que $f(c) = 5$.

INDICE

Conceptos y resultados

Nombres
