ELEMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL

HISTORIA Y EJERCICIOS RESUELTOS

ÁNGEL RUIZ
HUGO BARRANTES

ELEMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL

HISTORIA Y
EJERCICIOS RESUELTOS

ÁNGEL RUIZ
HUGO BARRANTES

PREFACIO

El Cálculo Diferencial e Integral es uno de los principales campos de las matemáticas modernas. Sus usos y aplicaciones no solo conciernen a las matemáticas mismas sino a casi todos los campos de la ciencia moderna.

Durante muchos años, el aprendizaje y enseñanza del Cálculo se ha realizado internacionalmente de una manera que enfatiza los aspectos operatorios, calculatorios y algebraicos, y no tanto los aspectos conceptuales. Esto ha conducido, muchas veces, a que no se entienda bien la naturaleza de los conceptos y métodos que se plantean en el Cálculo, y a que los cursos de Cálculo se vean como una colección de recetas y fórmulas matemáticas que pueden ser substituidas por simples libros de tablas, por calculadoras y computadoras modernas. La realidad es que los textos y cursos de Cálculo no poseen utilidad si no se trasmite en ellos las ideas medulares, los métodos esenciales y su utilización en otras partes de las matemáticas como de otras ciencias y tecnologías.

Afortunadamente, en los últimos años, se ha empezado a desarrollar en algunos de los países más adelantados del mundo una tendencia hacia la comprensión del Cálculo de una nueva manera, con énfasis en los conceptos y su utilización en contextos apropiados. En esa dirección ha contribuido mucho la generación de nuevas tecnologías como las calculadoras graficadoras y las computadoras personales. Nuestro libro *Elementos de Cálculo Diferencial. Historia y Ejercicios Resueltos* se inscribe, precisamente, en las líneas de desarrollo de las mejores tendencias actuales en torno al aprendizaje y enseñanza del Cálculo. No se trata sin embargo de una traducción de otras experiencias, sino de una elaboración propia. Es decir: corresponde a una rica experiencia de trabajo y una sistemática elaboración de propuestas metodológicas en la Educación Matemática que hemos realizado los autores de este libro durante muchos años.

Aunque está dividido en dos partes, en cada una de ellas se busca apoyar la comprensión de los conceptos y métodos fundamentales del Cálculo Diferencial.

La *Primera Parte: Historia del Cálculo*, constituye una rigurosa introducción histórica a los principales temas del Cálculo Diferencial e Integral. Se busca siempre introducir los temas dentro del marco más amplio de la historia de la cultura y el pensamiento. Las explicaciones son sencillas y precisas y buscan proporcionar los contextos históricos de los resultados y sus autores. En algunos casos se detallan algunos razonamientos matemáticos para obtener una mejor comprensión del significado de los mismos.

Esta parte se acompaña con secciones de ejercicios, que permitan realizar autoevaluaciones del estudio de los temas o promover la reflexión y la discusión sobe asuntos especialmente relevantes. En general, los ejercicios se dirigen a las ideas centrales que se plantean en cada capítulo.

Para favorecer el uso didáctico de este libro por parte de docentes y estudiantes no se incorporan notas de pie de página, pero sí se incluye una amplia bibliografía general que ha servido para fundamentar los hechos y las apreciaciones que contiene este libro.

El uso de la historia de las matemáticas es uno de los mejores recursos para motivar su comprensión, aprendizaje y enseñanza. Sin ser lo único, ésta permite desarrollar una perspectiva humana y social de las matemáticas y las ciencias; perspectiva esencial para hacer de las matemáticas una realidad tangible, útil y capaz de despertar sensaciones de belleza y satisfacción intelectuales.

La *Segunda Parte: Ejercicios Resueltos*, busca estudiar los conceptos y temas del Cálculo de una manera más precisa y técnica. Esta parte es un complemento de la *Primera Parte*, y constituye un apoyo especial a los temas desarrollados en nuestro libro de texto *Elementos de Cálculo Diferencial* (en sus dos volúmenes), que publica la Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Ambas partes son, sin embargo, independientes. Pueden ser utilizadas de acuerdo al interés y al deseo de los lectores. Además, este libro no solo sirve para quienes utilizan *Elementos de Cálculo Diferencial*, también es útil para aquellas personas que usen otros textos de Cálculo.

Con la introducción de gran cantidad de materiales, información, referencias y descripción de técnicas hacia una mejor apreciación y utilización del Cálculo, este libro constituye un extraordinario apoyo para los estudiantes y docentes, tanto en la educación secundaria como la universitaria.

Por último, los autores deseamos expresar nuestro agradecimiento a la Editorial de la Universidad de Costa Rica por su apoyo en la publicación de esta obra.

Angel Ruiz
Hugo Barrantes
Ciudad Universitaria Rodrigo Facio
Universidad de Costa Rica
28 de enero de 1997

Índice general

Parte I

HISTORIA DEL CÁLCULO

Capítulo 1

ENTRE INCONMENSURABLES Y PARADOJAS

OBJETIVOS

- *Describir algunas de las principales características de las matemáticas en la Grecia Antigua.*
- *Explicar los conceptos de conmensurabilidad y también inconmensurabilidad.*
- *Promover la comprensión de las diferencias entre cantidades continuas y discontinuas.*
- *Explicar el nacimiento de los números irracionales.*
- *Reseñar algunos datos sobre la vida y la obra de Pitágoras y Thales.*
- *Descripción de las dos principales paradojas de Zenón de Elea.*

Podemos decir que los dos conceptos centrales que están en la base del Cálculo Diferencial e Integral son los de *continuidad* e *infinito*. Ambos se refieren a situaciones que encontramos en nuestra relación con el mundo físico y social. El movimiento de un objeto de una posición a otra nos ofrece un ejemplo de continuidad y así, también, encontramos continuidad en la materia.

Cuando una bola de fútbol es pateada, su movimiento no se describe sólo a través de una colección finita de instantes. Existe algo más: una continuidad en el movimiento de un cuerpo. Aunque la materia ha revelado poseer grandes vacíos microatómicos, lo que aparece como realidad en nuestras percepciones es la continuidad de la materia. El conocimiento asume como punto de partida las percepciones físicas que los seres humanos poseemos en nuestra relación con el mundo.

Si una colección finita de puntos no describe suficientemente el movimiento de un cuerpo, entonces la recurrencia al infinito es imposible de evitar: lo infinitamente grande y, también, lo infinitamente pequeño constituyen una referencia a nuestra forma de responder a los problemas de la continuidad tanto en el espacio como en el tiempo y en la relación entre ellos.

En los primeros dos capítulos de este libro vamos a estudiar algunas de las ideas del Cálculo en tres situaciones planteadas en la Grecia Antigua:

- la emersión de los números irracionales,
- las paradojas de Zenón, y
- el Método de Exhauscíón desarrollado por Eudoxo y Arquímedes.

Vamos a empezar con una breve descripción de los orígenes de las matemáticas griegas, en particular con la obra de Thales y Pitágoras.

1.1. Thales y Pitágoras

Las grandes *Civilizaciones del Bronce* que se desarrollaron en Egipto y Mesopotamia cedieron su papel intelectual dominante ante la cultura que se concentraba a lo largo de las costas del Mar Mediterráneo. Se suele llamar al período dominado por las civilizaciones del Mediterráneo la Era Talásica ("Edad del Mar"): digamos entre los años 800 a. C. y 800 d. C..

La primera parte de esta "era" se suele llamar helénica y hace referencia a la gran cultura griega que, sin duda, creó un fundamento decisivo de la civilización occidental.

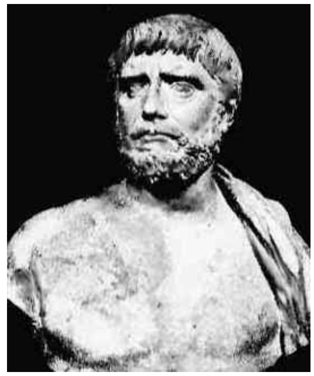


Foto 1.1. *Thales de Mileto (c. 625- c. 545 a.C.)*

Thales de Mileto y Pitágoras de Samos constituyen la primera referencia del quehacer matemático de la cultura griega, entendiendo las matemáticas como una disciplina con sus características propias. No se sabe cuánto de lo que se les atribuye como resultados matemáticos les corresponde en efecto. No existen obras que directamente nos den prueba de su labor como tal vez se puede decir de las de Herodoto, Platón o Hesíodo. Tampoco podemos estar seguros de cuánto fue producto del trabajo de matemáticos de siglos posteriores o si se trataba de logros adquiridos en las tradiciones egipcias o mesopotámicas. Es necesario recordar que tanto Thales como Pitágoras viajaron por aquellos maravillosos centros de cultura (incluso a la India en el caso de Pitágoras) que, aunque habían perdido su impulso creador y su fortaleza socioeconómica, todavía constituían un poderoso punto de referencia del que se nutrió el pensamiento helénico. (De los babilonios, por ejemplo, se conocen resultados matemáticos de 1000 años antes de Thales). Sí parece ser un dato incuestionable que Thales fue el primer sabio al que se le atribuye progresos concretos en las matemáticas y lo mismo sucede con Pitágoras. A Thales se le atribuye el inicio de la geometría deductiva y con relación a Pitágoras la tradición pone énfasis en dimensiones aritméticas y de la teoría de números aunque se mencionan importantes resultados geométricos.

A Thales se le atribuye el teorema de que un ángulo inscrito en una semicircunferencia tiene que ser recto y, también, que el círculo se divide en dos partes iguales por un diámetro.

Para los pitagóricos las fracciones, por ejemplo, eran razones entre dos números abstractos y, aunque consideraban a los números como fundamento de la naturaleza, le daban un sentido muy abstracto a los números. Precisamente a la par de la importancia de la lógica, esta separación intelectual de la medición y el cálculo utilitario es una concepción que se acerca a nuestra matemática moderna. La transición a una visión no solo técnica y práctica sino teórica de la aritmética, que se suele atribuir a los pitagóricos y que caracterizó la matemática griega, fue decisiva para el progreso de las matemáticas como ciencia.

En esta primera etapa del desenvolvimiento cultural griego tuvieron gran importancia las ideas de los pensadores jónicos: la *escuela jónica*, de la que se afirma que su fundador y dirigente fue precisamente Thales. Posteriormente, la producción intelectual iría trasladándose a otras ciudades.

Hablemos un poco más de Pitágoras. Este fue un filósofo y matemático griego cuya existencia se ha llegado a dudar. Se dice que nació en Samos, en una familia acomodada de un grabador o comerciante de piedras preciosas preocupado por la educación del cuerpo y el espíritu de su hijo.

Se afirma que viajó por Egipto, Asia Menor y otros lugares de Oriente, en los que aprendió los secretos de la vida religiosa y de las matemáticas de aquellos pueblos. La influencia babilónica en los resultados que se le atribuyen es notable. Tanto que se afirma que el famoso *Teorema de Pitágoras* ya había sido demostrado por los babilónicos. En algunas ocasiones se ha dicho que fue discípulo de Thales, pero la diferencia cronológica (no menos de 50 años) hace esto algo no tan seguro.

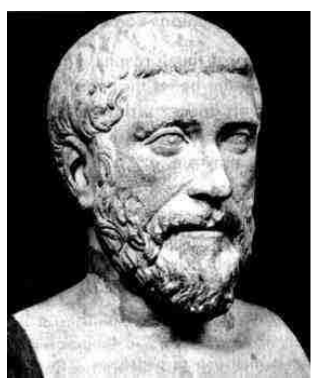


Foto 1.2. *Pitágoras de Samos (c. 580?- 500 a.C.)*

Cuando regresó a Samos encontró la isla en ruinas y bajo la dictadura de Polícrates. Se trasladó a Atenas y, poco después, se retiró a Crotona, colonia doria del sur de Italia, donde fundó una comunidad religiosa, política y científica, que se relacionó con el orfismo y con los cultos dionisíacos. La finalidad de esta secta era una vida más perfecta con ejercicios de purificación y elaboración de las matemáticas. Como era una secta secreta y dada la falta de escritos no se sabe qué resultados pueden decirse fueron de Pitágoras y cuáles de sus discípulos.

El fundamento de su doctrina consiste en la teoría de los números: cada cosa es un número específico y distintas cosas significan únicamente distintos números. En música descubrieron la relación entre los sonidos y la longitud de la cuerda vibrante y, por lo tanto, entre la música y las matemáticas: esto abrió el camino de la armonía de las esferas, pues sostenían que la relación entre los diámetros de las órbitas de los astros es proporcional a la que existe entre las longitudes de las cuerdas musicales. Creyeron en la esfericidad de la Tierra y en su movimiento alrededor de un fuego central y se dice que explicaron los eclipses y las fases lunares.

En matemáticas, se les atribuye el Teorema de Pitágoras, la aplicación de la aritmética a la geometría y la tabla de multiplicar.

1.2. Continuidad, infinito e inconmensurables

El famoso filósofo griego Zenón formuló unas paradojas que hacían referencia precisamente a temas relacionados con las nociones de continuidad e infinito. Desde entonces sus planteamientos han cautivado la imaginación de la humanidad.

Antes de analizar estas paradojas, vamos a recordar el descubrimiento de los *"inconmensurables"* en la Grecia antigua. Sobre la introducción de los inconmensurables se han tejido muchas historias y leyendas y, como ha sucedido con casi todos los asuntos de la Antigüedad, las explicaciones históricas no llegan a ser tan precisas y exactas como nos gustaría. Podemos decir que el descubrimiento de los irracionales emergió de varios asuntos tratados matemáticamente: la razón entre la diagonal de un cuadrado y su lado, de un pentágono regular o un cubo con su lado (o, en general, por el uso del teorema de Pitágoras en triángulos isósceles). Estas razones no eran números racionales. Su descubrimiento significó gran conmoción en la comunidad matemática y científica de la época y, se supone, que especialmente en las filas de los pitagóricos (un grupo mitad científico y matemático y mitad religioso).

El impacto en el *pitagorismo* habría sido grande en particular debido a su principio filosófico de que los números enteros y racionales (las fracciones) describían la realidad (constituían su esencia). Evidencia de este impacto se recoge en los *Diálogos* de Platón y en fragmentos de la obra de Aristóteles. Expliquemos un poco más este asunto tan interesante y trascendental para la evolución de las matemáticas.

Lo continuo y lo discreto

Los números *enteros* fácilmente sirven para representar objetos (por ejemplo: 5 naranjas, 28 metros, etc.), y una razón *conmensurable* representa una relación entre dos colecciones de objetos ($\frac{1}{2}$ de naranja, $\frac{4}{5}$ de kilómetro, etc). Se usa la palabra *discreto* para señalar esta característica de algunas cosas reales (puntos, cosas o elementos separados y contables). La razón de distancias puede ser conmensurable:

$$\frac{5m}{2m} = \frac{5}{2}$$

5 y 2 representan colecciones discretas de objetos. Pero no siempre la razón entre dos longitudes, dos áreas, dos volúmenes, dos tiempos y otras cantidades es conmensurable. Más bien, generalmente se dan razones inconmensurables. Podemos decir que esas cantidades son *continuas*. Por ejemplo, los griegos sabían que $\sqrt{2}$ existía puesto que en el triángulo rectángulo ABC

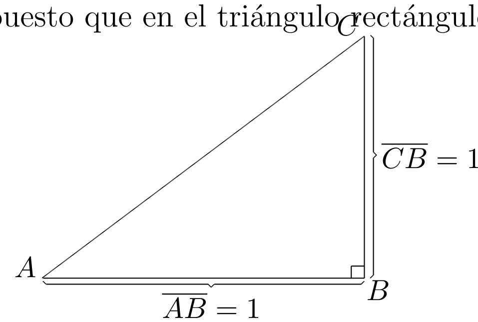


Figura 1.1. *Triángulo rectángulo*

con $\overline{AB} = 1$ y $\overline{CB} = 1$ por el teorema de Pitágoras

$$[\overline{CB}]^2 + [\overline{AB}]^2 = [\overline{AC}]^2$$

y tenemos que

$$\overline{AC} = \sqrt{2}.$$

Y $\sqrt{2}$ no es conmensurable, es decir: no existen dos números p y q enteros tales que

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}.$$

Razón de la diagonal del cuadrado y su lado

La razón de la diagonal de un cuadrado y su lado no es conmensurable (es irracional).

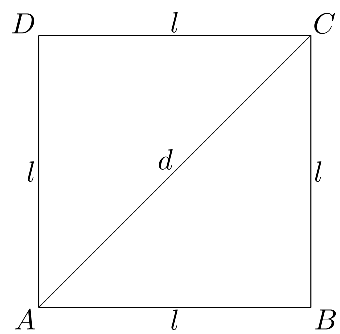


Figura 1.2. *Razón: cuadrado y lado*

La demostración que d no es racional se puede hacer de manera "indirecta", considerando lo contrario. Se busca llegar a una "contradicción". Si se llega a una contradicción, lo contrario no es cierto, y se establecería lo que se desea. En términos lógicos: si queremos demostrar la proposición P, asumimos que "no P" es cierta. Mediante deducciones lógicas a partir de "no P" llegamos a una contradicción. Entonces se concluye que "no P" no es cierta y, por lo tanto, P debe ser verdadera. Este método se llama también de *reducción al absurdo*.

Vayamos a la demostración: suponga que $\frac{d}{l}$ (la razón de la diagonal y el lado del cuadrado) es conmensurable. Entonces:

$$\left(\frac{d}{l}\right) = \frac{a}{b}$$

donde a y b son conmensurables (enteros) y no tienen factores en común (lo que modernamente se llama ser "primos relativos"). Por el teorema de Pitágoras se tiene

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2}{l^2} = 2 \qquad \Longrightarrow \left(\frac{d}{l}\right)^2 = 2.$$

Por la hipótesis y la ecuación anterior:

$$\left(\frac{d}{l}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2.$$

Entonces:

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

$$\Longrightarrow \qquad a^2 = 2b^2.$$

Esto significa que a^2 es par y, por eso, a es también par. Note que b no puede ser par porque si a y b fueran pares, tendrían factores en común (lo que se supuso no era el caso). Entonces b es impar. Por ser par, $a = 2k$ (para algún k entero) y sustituyendo en la ecuación

$$(2k)^2 = 2b^2$$

$$\Longrightarrow \qquad 4k^2 = 2b^2$$

$$\Longrightarrow \qquad 2k^2 = b^2$$

$\Longrightarrow \qquad b^2$ es par y, también, b es par. Pero b no puede ser par e impar a la vez. Por lo tanto, la hipótesis que $\frac{d}{l}$ era conmensurable nos lleva a contradicción. Entonces $\frac{d}{l}$ no es conmensurable.

Veamos ahora otro caso famoso.

Razón de la diagonal del cubo y su lado

El cálculo de la razón de la diagonal de un cubo y su lado también da un inconmensurable: $\sqrt{3}$.

Considere el siguiente cubo donde hemos señalado algunos puntos (esquinas): A, B, C, y D.

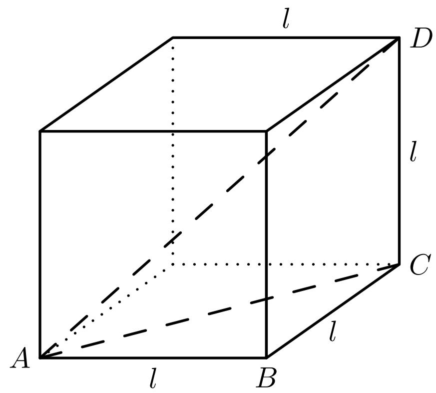


Figura 1.3. *Razón: cubo y lado*

Por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$
$$\overline{AC}^2 = l^2 + l^2 = 2l^2.$$

Para calcular la diagonal d del cubo, se debe encontrar el segmento $\overline{AD}$. Note que la respuesta está en el triángulo rectángulo

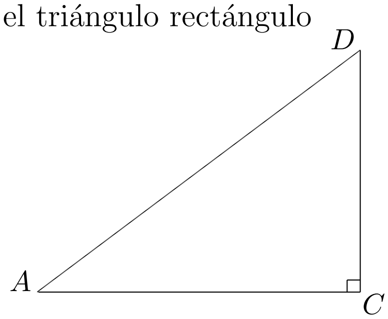


Figura 1.4. *Diagonales en el cubo*

$$d^2 = \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$$

(por el teorema de Pitágoras otra vez)

$$\Longrightarrow \qquad \overline{AD}^2 = 2l^2 + l^2 = 3l^2$$

$\Longrightarrow \qquad d^2 = 3l^2$ y $\frac{d^2}{l^2} = 3$

$$\Longrightarrow \qquad \left(\frac{d}{l}\right)^2 = 3 \Longrightarrow \qquad \frac{d}{l} = \sqrt{3}$$

un irracional.

La sección áurea

Otro asunto que condujo a la existencia de irracionales se dio en torno a la construcción y propiedades del pentágono estrellado. Considere el pentágono regular $ABCDE$:

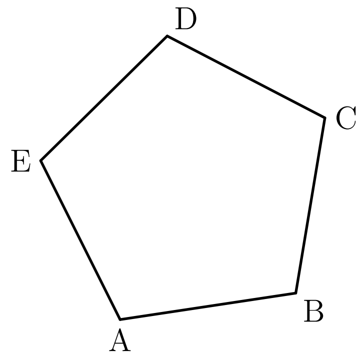


Figura 1.5. *Razón: cubo y lado*

y tracemos las 5 diagonales del mismo.

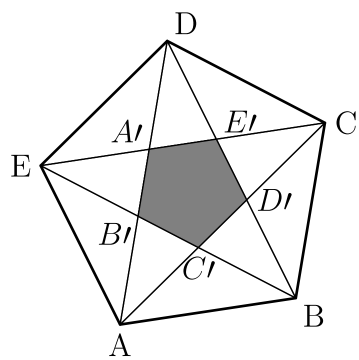


Figura 1.6. *Razón: cubo y lado*

Se obtiene otro pentágono regular $A'B'C'D'E'$. Cada punto A', B', C', D', E' divide la diagonal correspondiente en 2 segmentos.
El resultado que se obtiene es extraordinario:

> "La razón de la diagonal al segmento más largo es igual a la razón del mismo segmento al segmento más pequeño".

Por ejemplo, en la figura anterior:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'D}}.$$

También:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD'}} = \frac{\overline{AD'}}{\overline{D'C}}.$$

Llamemos la diagonal con d y el segmento mayor con x (piense en $\overline{AD} = d$ y $\overline{AA'} = x$). Entonces la razón se puede escribir

$$\frac{d}{x} = \frac{x}{d-x}$$

lo que modernamente decimos da una ecuación de segundo grado:

$$d(d-x) = x^2$$

$$\Longrightarrow \qquad d^2 - dx = x^2$$

$$\Longrightarrow \qquad x^2 + dx - d^2 = 0.$$

Si d es racional, no existe x racional que satisfaga esa ecuación. Es decir, x es inconmensurable.

No se sabe si los pitagóricos plantearon efectivamente la división de la diagonal de esa forma, ni tampoco si utilizaron algunos métodos algebraicos babilonios para estudiar lo que esta ecuación representa. Lo más probable es que usaron los métodos geométricos que luego aparecieron en los *Elementos* de Euclides.

La subdivisión de la diagonal del pentágono regular de la forma que hemos visto, recibió el nombre de "sección áurea" dos mil años más tarde.

Note que el proceso de trazar diagonales en el pentágono se puede repetir indefinidamente. Podemos decir que se podría construir un número infinito de pentágonos inscritos dentro de uno original. O bien: que a partir de un segmento, la primera diagonal, se puede ir creando segmentos cada vez más pequeños, de manera indefinida.

Irracionales

Para que se tenga idea de la importancia de este tipo de asuntos, baste decir que el dominio absoluto de la geometría y la debilidad del álgebra en la Grecia Antigua se suele considerar asociados a esa incapacidad para dar cuenta de la existencia de los números irracionales.

El Libro X de los *Elementos* de Euclides, tiempo después de los pitagóricos, incluyó un estudio de $a+\sqrt{b}$, $\sqrt{a}+b$, $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, y $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Se trataba de un libro sobre los inconmensurables, donde a y b son conmensurables. Euclides, haciéndose eco de la época, no consideró éste como aritmética sino como parte de la geometría.

No poder explicar teórica y matemáticamente los números irracionales y, entonces, no poseer el concepto de número real, impidió a los griegos avanzar más en el progreso de las matemáticas y la ciencia en general.

Cuando los pitagóricos descubrieron los *inconmensurables* estaban precisamente tocando con sus manos el asunto de la continuidad y, también, el infinito. Podemos decir que existe *una oposición entre lo discreto y lo continuo*. Y, adelantándonos, ese paso de lo discreto a lo continuo es la esencia de lo que tratan los *métodos infinitesimales*. Lo que llamaremos el "paso al límite" es un paso de lo discreto a lo continuo. En la comprensión y manipulación matemáticas de ese "paso" es que se basa el Cálculo Diferencial e Integral y el mismo constituye todavía uno de los temas centrales y no plenamente comprendidos de la historia de las matemáticas hasta nuestros días.

1.3. Zenón y las paradojas

Los pitagóricos habían asumido a los números como principio para todas las cosas, al igual que Thales de Mileto había señalado el agua como ese principio fundamental. Otros plantearon el fuego o el aire. Heráclito de Efeso decía que la esencia de la realidad era el cambio: "todo cambia". Los pitagóricos con los números también asumieron la diversidad y el cambio.

La principal escuela filosófica contraria a los pitagóricos fue la de Parménides de Elea (alrededor de 460 a. C.). Los eleáticos decían que el ser era unidad y permanencia: nada cambia, todo es permanente, no hay diversidad sino unidad.

Zenón de Elea fue el principal discípulo de Parménides en el siglo V a. C. Zenón formuló cuatro paradojas dirigidas contra dos visiones del espacio y tiempo de la época:

- una que espacio y tiempo eran infinitamente divisibles (por lo que el movimiento sería continuo y suave),
- y otra que se dividían en un conjunto infinito de pequeños intervalos (el movimiento sería una sucesión de saltos).

Las cuatro paradojas se llaman: la de la *Dicotomía*, la de *Aquiles*, la de la *Flecha* y la del *Estadio*.

La paradoja de la *Dicotomía*

La primera paradoja, recogida en la *Física* de Aristóteles, establece que no hay movimiento y el argumento es sumamente interesante:

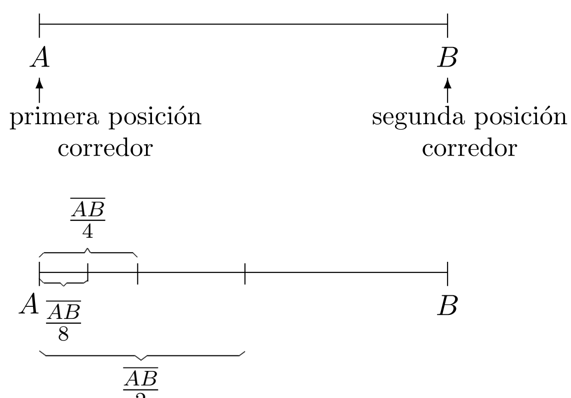


Figura 1.7. *Las paradojas de Zenón*

Un corredor debe recorrer una distancia $\overline{AB}$.
Para ello debe recorrer la mitad de la distancia

$$\frac{\overline{AB}}{2},$$

pero también la mitad de la mitad

$$\frac{\overline{AB}}{4}$$

y también

$$\frac{\overline{AB}}{8}, \qquad \frac{\overline{AB}}{16}$$

y así sucesivamente.

El corredor debe recorrer, entonces, un número de distancias que es infinito
:

$$\frac{\overline{AB}}{2}, \frac{\overline{AB}}{4}, \frac{\overline{AB}}{8}, \frac{\overline{AB}}{16}....$$

Pero lo tiene que hacer en un tiempo finito.
Entonces nunca alcanzaría a la tortuga. De hecho, nada tendría movimiento. Pero sabemos que eso no puede suceder. He ahí la paradoja.

La referencia al infinito es clara y, particularmente, la posibilidad de realizar una partición en forma infinita nos conecta con la continuidad. Zenón opone un tiempo finito (lo discreto) y una longitud (lo continuo). Lo discreto y continuo enfrentados.

Hoy podemos formular el asunto en los siguientes términos: la distancia a recorrer por el corredor es una serie infinita

$$S = \frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{AB}}{4} + \frac{\overline{AB}}{8} + \frac{\overline{AB}}{16} + \cdots.$$

que es *convergente*. Es decir, con lenguaje y símbolos modernos:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{AB}}{2^n} = \overline{AB}.$$

Pero para obtener lo anterior tendría que pasar mucha agua bajo el puente. En esta paradoja se asume que el proceso se puede repetir indefinidamente (infinito) y que una operación repetida un infinito de veces da por resultado algo infinito.

La paradoja de *Aquiles*

La paradoja de Aquiles y la tortuga es parecida a la anterior. Aquiles debe alcanzar a una tortuga adelantada una cierta distancia. Cuando Aquiles alcance la primera posición donde estaba la tortuga, ésta ya se habrá movido hacia una segunda posición (aunque lo haya hecho muy lentamente). De la misma manera, cuando Aquiles llegue a la segunda posición, la tortuga muy despacito se habrá movido ya a una tercera posición.

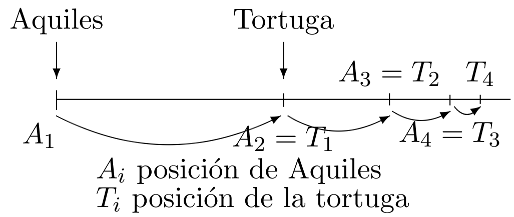


Figura 1.8. *La paradoja de Aquiles y la tortuga*

El proceso se puede repetir indefinidamente. Por eso Aquiles, por mejor corredor que sea, nunca podrá alcanzar a la tortuga.

Estas 2 paradojas buscaban demostrar que si se asume la subdivisibilidad indefinida del espacio y del tiempo, entonces el movimiento es imposible.

En las paradojas de la Flecha y del Estadio, Zenón buscaba demostrar que si se asume que la subdivisibilidad no era indefinida sino que termina en indivisibles, y entonces tampoco hay movimiento.

Es decir, se asuma la subdivisibilidad indefinida o los indivisibles, para Zenón no había movimiento. Todo era permanente y estático. El movimiento era una ilusión.

Las paradojas de Zenón lograron un impacto importante entre los griegos. Si a eso se añade la existencia de los inconmensurables, inexplicables entonces, podemos comprender mejor la situación histórica.

Los números "válidos", naturales y racionales, daban cuenta de lo discreto sin problema. Sin embargo, las magnitudes continuas tenían que estudiarse separadas del número. La geometría fue el medio para abordar la continuidad y el infinito sin aritmética ni álgebra. Esto fue decisivo históricamente: marcó las características esenciales de la matemática griega.

1.4. Ejercicios

FALSO O VERDADERO

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. En cada caso brinde una justificación breve de su respuesta

1. La civilización helénica nació de la cultura desarrollada por los romanos.

2. A Pitágoras se le atribuye el teorema de que el círculo se divide en dos partes iguales por un diámetro.
3. Thales fue maestro de Pitágoras.
4. Los números enteros son conmensurables.
5. La razón de la diagonal del cubo y su lado es un número irracional.
6. Los pitagóricos con los números asumieron que la realidad era estática y permanente.
7. Para Zenón el movimiento era una ilusión.

PREGUNTAS DE DESARROLLO

1. Explique algunas de las dificultades que poseen los historiadores en el estudio de la Antigï¿$\frac{1}{2}$edad.
2. Explique el significado de la teoría que establece el número como fundamento de la realidad?
3. Mencione tres resultados matemáticos que se atribuyen a Pitágoras.
4. Cite tres problemas matemáticos que originaron el estudio de los irracionales.
5. Explique las diferencias entre los conceptos de conmensurable e inconmensurable.
6. Explique los pasos de la demostración que la razón de la diagonal del cuadrado no es conmensurable. Brinde ejemplos de ambos conceptos.
7. Explique qué quiere decir "se podría construir un número infinito de pentágonos inscritos dentro de uno original (...) se pueden ir creando segmentos cada vez más pequeños de manera indefinida".
8. Explique la relación entre los conceptos de infinito, continuidad e inconmensurabilidad.
9. Mencione y explique cuáles eran las dos visiones sobre el espacio y el tiempo que existían en la época de Zenón. Coméntelas con relación al pensamiento moderno.

10. ¿Hacia cuál visión del espacio y tiempo iban dirigidas las paradojas de la Dicotomía y la de Aquiles y la tortuga? Explique por qué estas paradojas cuestionaban esa visión cosmológica.

11. ¿Cuál medio usaron los griegos antiguos para abordar la continuidad y el infinito, sin aritmética y álgebra? Explique cómo era posible no usar la aritmética y el álgebra. Y, además, señale algunas de las consecuencias que tuvo esta característica de la matemática griega.

Capítulo 2

CÁLCULO DE ÁREAS EN LA GRECIA ANTIGUA

OBJETIVOS

- *Ubicar históricamente la obra de Eudoxo y Arquímedes en la evolución de las matemáticas de la Grecia Antigua.*
- *Describir algunos aspectos del Método de Exhausción utilizado en la Antigüedad.*
- *Describir los principios fundamentales que usaron los griegos antiguos con relación a los métodos infinitesimales.*

La etapa *helenística* o *alejandrina* de la cultura griega se dio a partir de la conquista del mundo griego de la época por los macedonios, un pueblo que vivía al norte de la Grecia continental. Estas acciones destruyeron lo que se llama la civilización griega clásica y abrió el nuevo período. La conquista empezó alrededor del año 352 a. C. por Filipo II de Macedonia. Atenas fue derrotada en el año de 338 a. C. El hijo de Filipo, Alejandro el Grande, conquistó Grecia, el Cercano Oriente, Egipto y llegó cerca de la India. Alejandro murió muy pronto y su imperio se dividió en tres partes. La que más trascendencia tendría para la ciencia y las matemáticas fue el Imperio de los Tolomeos cuya ciudad más importante se llamó Alejandría.

2.1. Eudoxo y Arquímedes

Para las matemáticas, antes de Arquímedes varios momentos fueron importantes: un primer momento con Thales y Pitágoras, después los trabajos de la escuela de Eudoxo, luego el período de Euclides y Apolonio de Perga. El trabajo de Eudoxo (que nació en Cnido alrededor del año 408 a.C.) es considerado uno de los más importante del mundo griego.

Eudoxo fue discípulo de Arquitas en Tarento y fundó su escuela en Cícico. Formó parte también de la escuela de Platón. Su principal contribución a las matemáticas tiene que ver con la teoría de las proporciones y el método para calcular el área de ciertas figuras geométricas que se llama el *método de Exhausción*.

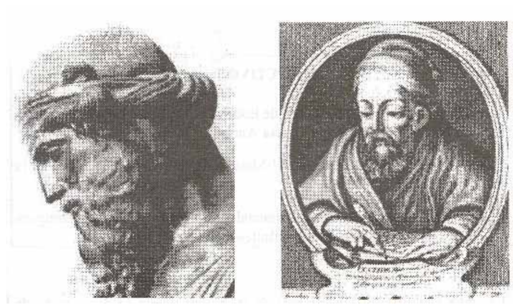


Foto 2.1. *Platón (429-348 a.C.) y Euclides (c. 300 a.C.)*

Euclides y Apolonio se conocen más por el trabajo realizado por los matemáticos griegos del período clásico, que perduró a través de obras escritas por estos matemáticos. Ambos vivieron en el período alejandrino, pero se afirma que en el caso de Apolonio su trabajo llamado *Secciones Cónicas* posee en su contenido el espíritu del período anterior. El libro los *Elementos*, de Euclides, que tanta influencia tuvo en la historia, fue un gran compendio de las matemáticas griegas escrita en forma lógica y axiomática. En particular, se sabe que los *Elementos* le debe mucho a los matemáticos platónicos como Eudoxo y Teeteto.

Arquímedes estudió en Alejandría, centro de cultura y aprendizaje del antiguo mundo griego. Se supone que estuvo en contacto con discípulos de Euclides en esa ciudad. Los detalles de su vida se saben a través de una historia del general Marcelo escrita por Plutarco. Su trabajo matemático incluye el cálculo de áreas y volúmenes por el método de Exhausción, el cómputo del número π, la representación de números muy grandes en forma verbal, centros de masas, hidrostática y astronomía. En su juventud, construyó un planetario que reproducía los movimientos del Sol, los planetas, etc.. También construyó un artefacto ingenioso para quemar las naves romanas basado en espejos parabólicos que concentraban la luz solar en un punto.

Escribió una gran cantidad de tratados, entre los que más impactó a sus sucesores fue *Sobre las espirales*. Aunque parece que Arquímedes tuvo predilección por otro: *Sobre la esfera y el cilindro*. Incluso pidió que sobre su tumba se pusiera la representación de una esfera inscrita en un cilindro circular recto de igual altura al diámetro de la esfera. Esto porque él demostró que la razón de los volúmenes del cilindro a la esfera es la misma razón que la razón de sus áreas: de tres a dos.

2.2. El método de Exhausción

El método de Exhausción, inventado por los antiguos griegos, también planteaba el uso del infinito. Este nace del problema de comparar las figuras curvilíneas y las rectilíneas. Uno de los grandes problemas de la Antigüedad era cómo reducir el círculo, o longitudes curvas, a segmentos de recta. También cómo reducir cualquier línea curva a líneas rectas y círculos (o lo que es igual construir figuras curvas solo con regla y compás). Aunque se conoce como "método de Exhausción", no fue llamado así por los griegos, sino mucho tiempo después por Gregoire de St. Vincent (1589-1667). Este método fue usado ampliamente por Eudoxo y Arquímedes y su origen lo atribuyó este último al primero.

Los matemáticos previos a Eudoxo de Cnido (alrededor de 408-355 a.C.) sabían que era posible inscribir y circunscribir figuras rectilíneas a una curvilínea y aumentar el número de lados o caras indefinidamente. Pero, precisamente, ahí estaba el problema: *el infinito*. Eudoxo fue el principal matemático de la Academia fundada por Platón. No sólo se dedicó a las matemáticas sino también a la ciencia en general. Algunos piensan que la estimación de Aristóteles de que la circunferencia de la Tierra era unos 400.000 estadios (40.000 millas) se debía a Eudoxo.

Antes de ver los detalles del método de Exhausción conviene mencionar 2 principios generales sobre los números y sus relaciones con el infinito, que aparecieron de diferente forma en el trabajo de los matemáticos griegos.

Principios sobre límites

En torno a los procesos de límite el mundo griego usó dos principios:

- *Primer principio*:

  “Cualquier cantidad, por más pequeña que sea, puede hacerse tan grande como se quiera multiplicándola por un número suficientemente grande”.

  También se puede formular así:

  “Dadas dos magnitudes diferentes α y β (con $\beta < \alpha$) existe entonces:

  a) un número n tal que $n\beta > \alpha$ (esto se encuentra en el Libro V de los *Elementos* de Euclides, Def. 4);

  b) un número n tal que $n(\alpha - \beta) > \gamma$ donde γ es cualquier magnitud de la misma clase (esto se llama el *Axioma de Arquímedes*, en el trabajo *Sobre la esfera y el cilindro* de Arquímedes Libro I)”.

- *Segundo principio*:

  > “Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano”.

  Lo anterior se puede poner también así:

  > “Dadas dos magnitudes diferentes α y β (con $\beta < \alpha$, existe un número n tal que $(1-p)^n\alpha < \beta$, donde $p \geq \frac{1}{2}$ (esto se encuentra en los *Elementos* de Euclides, Libro X, Def. 1)”

Veamos cómo funciona el primer principio:
Consideremos $\alpha = 2000$, $\beta = 2$ y $\gamma = 8000$.
La primera forma del principio dice que podemos encontrar un n tal que

$$\beta \times n \geq \alpha;$$

es decir:

$$2 \times n \geq 2000.$$

Basta considerar n mayor que 1000 y ya sale.
Por ejemplo, si $n = 1500$ entonces

$$2 \times 1500 = 3000 \geq 2000.$$

En la segunda forma del principio:

$$\alpha - \beta = 2000 - 2 = 1998.$$

Debemos encontrar un n tal que

$$n \times (\alpha - \beta) \geq \gamma.$$

Es decir, tal que

$$n \times 1998 \geq 8000.$$

El mismo $n = 1500$ más que sirve; pues

$$1500 \times 1998 \geq 8000.$$

Ahora el segundo principio:
Consideremos $p = \frac{3}{4}$, y los mismos α y β de antes. Se trata de encontrar ahora un n tal que

$$(1 - p)^n \times \alpha \leq \beta.$$

Es decir, tal que:

$$\left(1 - \frac{3}{4}\right)^n \times 2000 \leq 2.$$

O sea:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n \times 2000 \leq 2.$$

Si $n = 5$ obtenemos

$$\left(\frac{1}{4}\right)^5 \times 2000 = 0,000976563 \times 2000 = 1,953125.$$

Tenemos: $1,953125 \leq 2$.

Estos principios no pensamos desarrollarlos extensamente en este libro, solamente debemos señalar que fueron utilizados en varias demostraciones esenciales de la Antigüedad.

De los polígonos al círculo

El Libro XI de los *Elementos* de Euclides incluye el método de Exhausción en los 18 teoremas sobre áreas y volúmenes que posee, especialmente de figuras curvilíneas acotadas por superficies. El método se usa, por ejemplo, para demostrar que algunas propiedades de los polígonos se dan en los círculos. Por ejemplo, para probar si se tiene dos círculos que:

> "la razón de sus áreas es la misma que la que existe entre los cuadrados de sus diámetros respectivos".

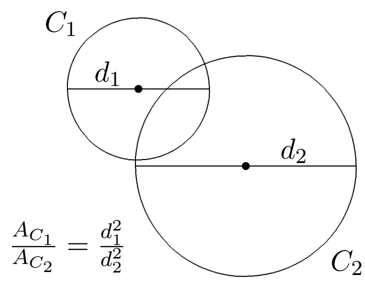


Figura 2.1. *Razón:áreas de círculos y diámetros al cuadrado*

El método consistía en:

- aproximar el área de los círculos con polígonos regulares inscritos y circunscritos,
- (y como esa propiedad se cumplía para los polígonos) entonces se deducía que se cumplía para los círculos. Es decir, se cumplía para los polígonos que:

> "la razón de las áreas de dos polígonos similares inscritos en círculos es la misma que existe entre los cuadrados de los diámetros de los círculos".

Foto 2.2. *Arquímedes de Siracusa (c. 287-212 a. C.)*

Cuadrados inscrito y circunscrito en un círculo

Veamos cómo funcionaba la Exhausción por medio de polígonos regulares inscritos.

1) Constrúyase un cuadrado inscrito y otro circunscrito al círculo

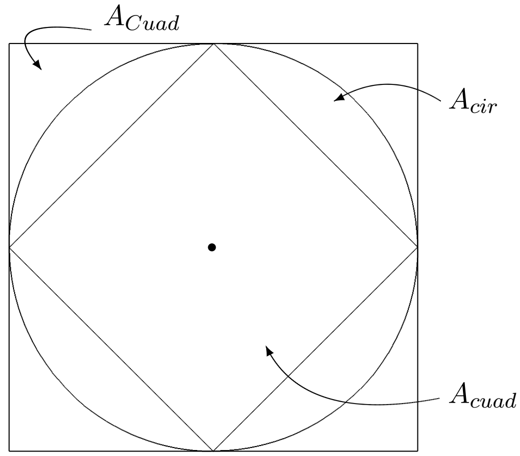


Figura 2.2. *Circunscribir e inscribir cuadrados en el círculo*

A_{cir} : área del círculo
A_{cuad} : área cuadrado inscrito
A_{Cuad} : área cuadrado circunscrito
Un detalle importante es que

$$A_{cuad} > \frac{A_{cir}}{2}.$$

2) En la siguiente figura el cuadrado circunscrito se divide en 8 triángulos iguales: $A_1, A_2, \ldots, A_8$.

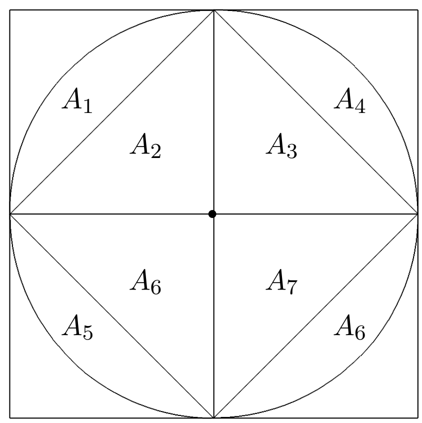


Figura 2.3. *La suma de las áreas*

Es fácil ver que:

$$A_{cuad} = A_2 + A_3 + A_6 + A_7 = \frac{A_{Cuad}}{2}$$

(cuatro triángulos hacen la mitad del cuadrado circunscrito).
Ahora obsérvese el rectángulo formado por

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4,$$

que también es la mitad del cuadrado grande.
Claramente este rectángulo es mayor que la mitad del área del círculo. Entonces:

$$A_{cuad} > \frac{A_{cir}}{2}.$$

Un octógono mejora la aproximación

Ahora vamos a construir un octógono ABCDEFGH a partir del cuadrado inscrito.

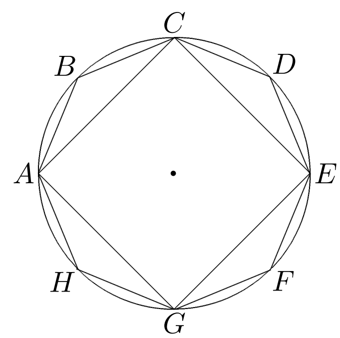


Figura 2.4. *El octágono a partir del cuadrado inscrito*

Esto se hace para mejorar la aproximación al área del círculo que hacía el cuadrado.
Si llamamos con A_{dif} la diferencia entre el área del círculo y el área del cuadrado inscrito, vamos a mostrar que este octógono va a tener un área que cubre más de la mitad de A_{dif}.
Es decir, la mejoría de la aproximación es muy precisa.
Para simplificar concentrémonos en el lado AC. Vea la figura

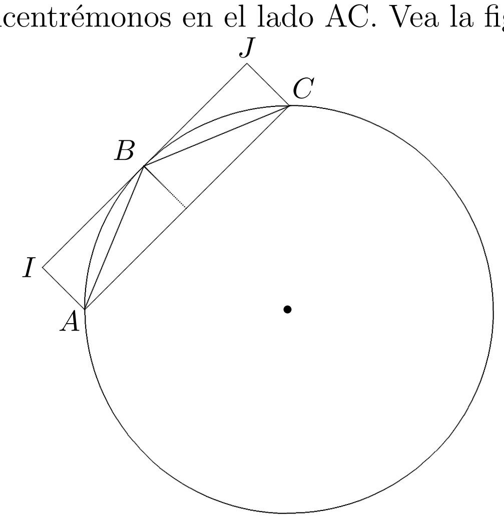


Figura 2.5. *Construcción del octágono*

B es el punto del círculo donde se bisecta el arco AC (D, F, H se construyen de igual manera).

El área del rectángulo ACJI es claramente mayor que el área del segmento de círculo encerrado por ABC.
Entonces la mitad del área del rectángulo ACJI es mayor que la mitad del segmento de círculo mencionado.
Ahora, note que el área del triángulo ABC es la mitad del área del rectángulo ACJI.
Entonces:

$$Area \quad ABC = \frac{Area \quad ACJI}{2} > \frac{Area \quad Segmento\ círculo \quad ABC}{2}.$$

Note que el área del triángulo ABC es lo que se añade al cuadrado para formar el octógono a partir del lado AC.
De esta forma el área del octógono es la suma de las siguientes áreas:

$$cuadrado\ inscrito + \triangle ABC + \triangle CDE + \triangle EFG + \triangle GHA.$$

El octógono así construido permite mejorar la aproximación en más de la mitad de la diferencia del área del círculo y la del cuadrado inscrito.

Si se construye ahora un polígono de 16 lados, siguiendo el procedimiento se obtiene una aproximación aún mejor (con más de la mitad de la diferencia entre el área del círculo y el área del octógono).

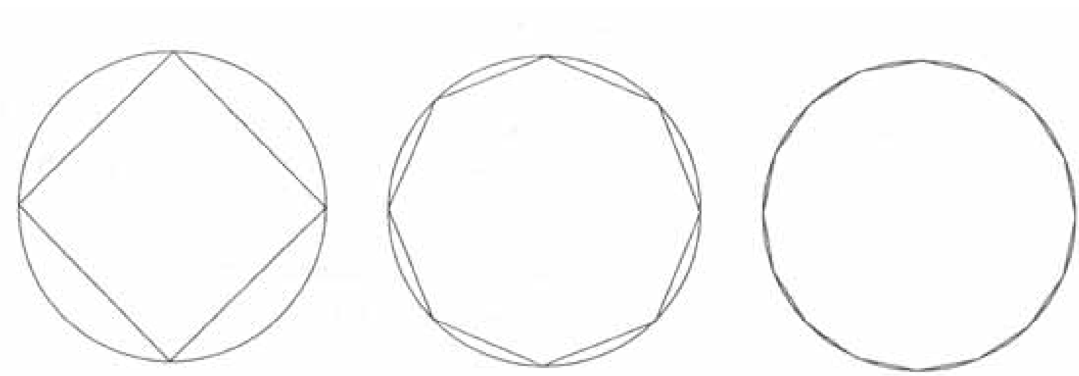


Figura 2.6. *El método de Exhausción*

El límite infinito

La idea es que el proceso se puede hacer *indefinidamente*, de tal manera que las propiedades de los círculos se pueden conocer estudiando los polígonos regulares (que resultan más fáciles de "manejar"). Es en este momento donde se ocupa el *segundo principio* que mencionamos arriba, para poder garantizar ese salto de los polígonos de un número finito de lados a un círculo (que sería como el límite infinito de esos polígonos).

En resumen: el método permitía demostrar la posibilidad de aproximar áreas por polígonos, aumentando el doble de lados en cada ocasión.

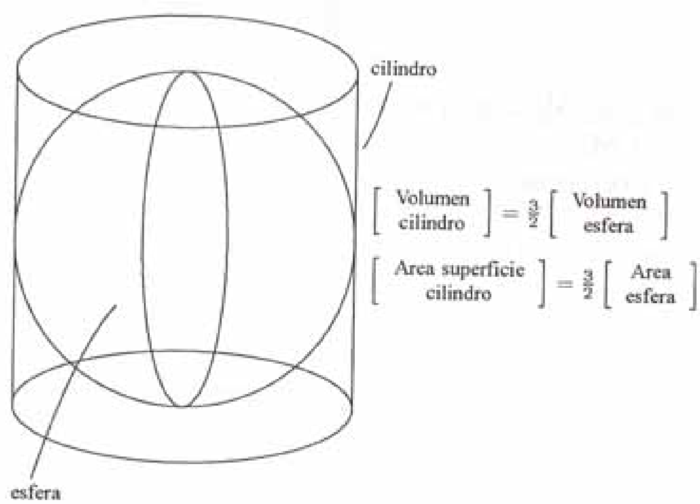


Figura 2.7. *Las razones de Arquímedes*

Fue Arquímedes quien más lejos llevaría el método de Exhausción.

Uno de los resultados más famosos en ese sentido se encuentra en la obra *Sobre la esfera y el cilindro*:

> "Una esfera cualquiera es igual a cuatro veces el cono que tiene como base un círculo máximo de la esfera y altura igual al radio de la esfera".

Y, también, se encuentra el siguiente:

> "Cualquier cilindro cuya base es el círculo más grande de una esfera y cuya altura es igual al diámetro de la esfera, es $\frac{3}{2}$ (del volumen) de la esfera, y su superficie junto con sus bases es $\frac{3}{2}$ de la superficie de la esfera."

Arquímedes quizo que este resultado con el cilindro circunscrito en la esfera fuera colocado en su tumba. El romano Cicerón relata haber encontrado en Siracusa, años después, una tumba con esta inscripción gravada, por lo que asumió que era la tumba de Arquímedes

El Axioma de Arquímedes mencionado antes ha sido usado por más de dos mil años; sin embargo, algunos matemáticos en los siglos XIX y XX han desarrollado resultados muy interesantes sin asumirlo: el *Análisis No-Standard*.

Podemos decir que el asunto de la continuidad y el infinito se escapaba y, aún más, entraba en contradicción con los métodos geométricos y algebraicos tradicionales desarrollados por los griegos antiguos. Los resultados de Zenón, Eudoxo, Arquímedes (y también otros asuntos presentes en la *Lógica* de Aristóteles) introducían tensión en el mundo matemático griego. En la misma dirección apuntaba la existencia de las incomensurables, los números irracionales que, como se encargaría de demostrar la historia, estarían íntimamente conectados con el infinito y la continuidad.

2.3. Ejercicios

FALSO O VERDADERO

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. En cada caso brinde una justificación breve de su respuesta

1. Macedonia fue conquistada por Alejandro el Grande.
2. Arquímedes fue discípulo de Apolonio de Perga.
3. Platón fue maestro de Eudoxo.
4. Arquímedes calculó una aproximación del número π.
5. El Método de Exhausción involucra polígonos inscritos y circunscritos en círculos.

6. Euclides fue el primero en desarrollar el Método de Exhausción en el Libro XI de sus Elementos.

7. Era más fácil para los griegos estudiar las propiedades de los polígonos para así descubrir la de los círculos.

8. Las paradoja de Zenón y los inconmensurables fortalecieron el uso del álgebra en detrimento de la geometría.

PREGUNTAS DE DESARROLLO

1. Ubique históricamente la obra de Eudoxo y Arquímedes: mencione la etapa histórica a la que perteneció cada uno, los lugares de nacimiento y trabajo, y un detalle de su obra.

2. Resuma en pocas frases lo que es el Método de Exhausción.

3. Explique los dos principios que usaron los griegos con relación a los griegos con relación a los métodos infinitesimales. Dé 2 ejemplos (diferentes a los que ofrece este libro).

4. Explique la proposición "la razón de sus áreas es la misma que la que existe entre los cuadrados de sus diámetros respectivos".

5. ¿Por qué se afirma que el Método de Exhausción usa métodos infinitesimales? Ofrezca una definición informal de lo que es un método infinitesimal.

6. Explique: "una esfera cualquiera es igual a 4 veces el cono que tiene como base un círculo máximo de la esfera y altura igual al radio de la esfera".

Capítulo 3

MEDIEVO, CIENCIAS Y MATEMÁTICAS

OBJETIVOS

- *Describir las características de la Europa Medieval previa al* Renacimiento*.*
- *Entender la naturaleza de la ciencia y la cultura en el Medievo.*
- *Comprender lo que era la* Escolástica*.*
- *Conocer algunos elementos de la contribución árabe a la cultura occidental.*

Alrededor del siglo VI d.C. y si no consideramos Italia y Grecia, lo que hoy conocemos como Europa constituía un conglomerado de pueblos aislados con poco desarrollo cultural. La estructura económicopolítica era agraria, con la intervención multifacética de bandas armadas, y con la Iglesia Católica como albacea y guardián religioso de las ideas, la educación y la moral. Todo dentro de un contexto de decadencia con relación a la sociedad mediterránea que había florecido siglos atrás bajo el influjo cultural y político griego.

3.1. De los romanos a la Escolástica

Hasta el siglo XII la sociedad europea había logrado construir una colección de jerarquías y reglas sociales diversas, asociadas a veces bajo el término "feudalismo.º, simplemente, con el de "Edad Media"(hasta el siglo XV). De hecho, se trataba más bien de una colección de realidades sociales no idénticas. Por ejemplo: las ciudades y regiones pegadas al Mediterráneo, con altas y bajas, lograron mantener ciertos contactos comerciales y culturales en medio de un mar controlado política, económica, militar y culturalmente por el Imperio Islámico, que desde los siglos VII y VIII había iniciado su expansión. No sucedía así con el resto de Europa. Incluso, las reglas sociales en los pocos centros urbanos no correspondían desde un principio a las predominantes en el campo.

Culturalmente en toda la época no existió relación con la mayor parte del pensamiento clásico griego, distanciamiento que, de hecho, se había desarrollado desde el mismo Imperio Romano. La diversidad social, económica, técnica y política de la Europa medieval era un factor que, sin duda, jugaría su papel en la evolución histórica siguiente.

Cultura y educación

Algo de conocimiento recibieron algunos de estos pueblos por haber estado bajo la bota del Imperio Romano (por ejemplo, con toda claridad: Francia e Inglaterra). Desde antes de la caída del Imperio Romano de Occidente ya la Iglesia Católica empezó a ocupar un papel preponderante en la organización política, social, ideológica y cultural de esta región. Durante siglos el aprendizaje y el poco conocimiento que se había rescatado de las culturas griegas y romana, estuvieron asociados a la Iglesia, y a sus necesidades institucionales. Por ejemplo, en las escuelas ligadas a monasterios lo importante era la lectura de los servicios religiosos y los libros sagrados. Con el correr de los siglos, la necesidad de formar al clero promovió la creación de centros educativos de mayor nivel y alcance. [Tal vez como excepción deba mencionarse que Carlomagno usó otro tipo de escuelas seculares con la ayuda de Alcuino de York, 730-804]. Ya en los siglos XI y XII, fueron creadas las primeras universidades: Salerno, Bolonia y París, aunque independientes estas universidades estuvieron bajo la tutela cultural y religiosa de la Iglesia.

Como el latín fue escogido como la lengua oficial de la Iglesia, durante este período tanto la educación como los principales medios de conocimiento se hicieron en esa lengua. Debe añadirse que hubo traducciones de textos matemáticos de la Grecia Antigua, como por ejemplo los *Elementos* de Euclides (algunas partes del libro original), realizados por Boecio (alrededor 480-524) y, otras, por Casiodoro (alrededor 475-570).

Esto nos da una primera idea de las características de la época durante todos aquellos siglos.

Matemáticas

En toda la época no había mucha matemática disponible, pero el currículo de las escuelas puso cierto énfasis en las matemáticas. El esquema educativo estaba formado por lo que se suele llamar el *quadrivium* y el *trivium*. El *quadrivium* era: aritmética, geometría, música y astronomía. El *trivium*: retórica, dialéctica y gramática. No obstante el nivel matemático era bajo: aritmética y geometría elementales.

No podía haber mucha matemática por varias razones: la principal era la ausencia de estímulos provenientes de las ciencias físicas y experimentales. Para la Iglesia en esos tiempos los criterios y fuentes de la verdad estaban solo en la revelación divina, y los estudios debían ser dirigidos hacia el análisis de los libros sagrados. La indagación de la naturaleza con métodos empíricos y experimentales estaba excluída. Los temas de reflexión y estudio eran las doctrinas del pecado, del temor al infierno, la salvación y la aspiración de ascender al cielo. El estudio del mundo físico se consideraba entonces no solo al margen de los objetivos definidos por la Iglesia, sino opuesto pues resultaba sin valor e incluso herético.

Los cambios

Un influjo notable empezó a sacudir este mundo bastante estático alrededor del siglo XII. Los europeos descubrieron la existencia de las grandes contribuciones culturales, científicas y matemáticas de la Grecia Antigua. A través del comercio y diversos viajes entraron en contacto con estas obras que habían sido conservadas, traducidas (y también ampliadas) por los árabes. Por ejemplo, fueron traducidas obras de Euclides, Ptolomeo, Teodosio, Aristóteles, Herón y muchos otros.

Los trabajos griegos fueron incorporados a los principios intelectuales europeos dominados por las ideas religiosas de la época. Entre 1100 a 1450 la actividad intelectual y científica fue realizada esencialmente por los *escolásticos*, quienes buscaron compaginar el dogma cristiano con algunas de las teorías de Aristóteles.

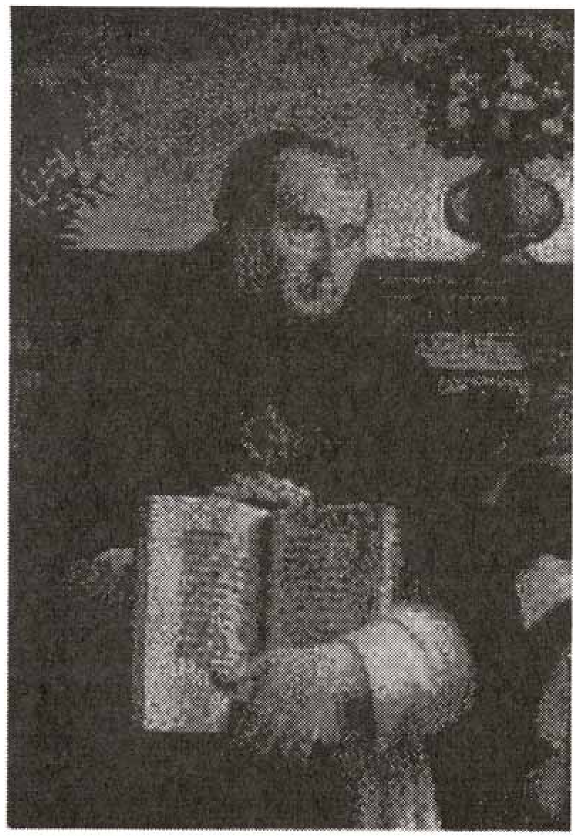


Foto 3.1. *Santo Tomás de Aquino (1224 o 1225-1274). Teólogo y filósofo dominico. Su obra principal fue la* **Summa Theologiae**.

La Escolástica

Los dirigentes espirituales cristianos europeos tomaron de las fuentes clásicas especialmente algunas secciones del pensamiento de Aristóteles: su *Lógica*, *Metafísica* y partes de su *Física*, y buscaron una asimilación del cristianismo con las mismas (o viceversa). En un proceso de tres siglos (XII-XV) se construyó y asentó una visión del mundo, la sociedad, del hombre y la cultura, partiendo de la filosofía aristotélica y recreando la doctrina cristiana en una nueva dimensión. La configuración de los nuevos contenidos teóricos así como la forma de su explicación y defensa es lo que se llamó la *Escolástica*. Santo Tomás de Aquino fue la figura más relevante en la constitución teórica de esta fundición del dogma revelado con la filosofía pagana.

Si bien el impacto amplió los horizontes culturales y educativos de la época, el progreso científico y matemático sufrió, además de la existencia de un marco intelectual rígido dominante, por una razón precisa. Desafortunadamente, los escolásticos enfatizaron dos características de la obra de Aristóteles:

- una era el no recurrir a la experimentación empírica para demostrar o contrastar una teoría;

- y otra el hecho que Aristóteles no le dio mucha importancia a las matemáticas.

Por supuesto que no se debe achacar a Aristóteles la responsabilidad del uso de ideas y actitudes metodológicas en la forma que lo hicieron los escolásticos. Ni tampoco esto que sucedió puede devaluar el monumento al pensamiento que significó la obra de este gran filósofo griego. Lo importante a tener en cuenta es que, por haberse dado esa situación histórica, muchos de los progresos científicos se debieron hacer, en los siglos siguientes, *contra* ideas de Aristóteles y, por supuesto, de la Escolástica.

A pesar de este marco histórico, y en lo que se refiere a las matemáticas, hubo algunos resultados matemáticos; por ejemplo, asociados a Leonardo de Pisa (alrededor 1170-1250), y a Nicole Oresme (alrededor 1323-1382). La situación solo cambiaría cualitativamente bajo el influjo de poderosos cambios que estallarían en lo que se llamó el *Renacimiento* y la *Revolución Científica* (que nosotros hemos asociado en este libro).

3.2. Los árabes y las matemáticas

Pocas veces se mencionan las contribuciones árabes en los textos escolares de matemáticas y otras disciplinas, debido, en parte, a una equivocada idea de la historia de la cultura.

Foto 3.2. *Al-Khoarizmi (c. 780- c.850)*

Se suele tener una visión muy *eurocentrista*, es decir en la cual lo único importante a tomar en cuenta es lo que pasó en Europa y que llegó a extenderse en el resto del mundo. Se suele subestimar el aporte a la cultura, las ciencias y las matemáticas de otros pueblos. En ese sentido, poco se nos enseña en las escuelas y colegios de los grandes aportes árabes, chinos, hindúes y mayas; o se enseñan solo en función de lo europeo. No es este lugar para ampliar o demostrar nuestras apreciaciones, pero sí para hacer un llamado de cuidado.

Los árabes de pueblos nómadas (ocupaban lo que hoy es Arabia), fueron integrados y dirigidos por el gran líder religioso Mahoma, constituyendo un gigantesco imperio a lo largo y ancho del Mediterráneo. Para el año 632 d.C., mientras Europa era una colección de pueblos aislados y retrasados, el Imperio árabe iba de la India a España, incluía el norte de África y el sur de Italia. Se trató de una civilización que muy rápido cultivó las ciencias y las artes y que, a pesar de su carácter religioso, promovió una atmósfera bastante flexible y tolerante con los pueblos y otras religiones de la región. Hasta por lo menos el siglo XV el imperio árabe constituía el principal centro de cultura, educación y ciencias de la región.

Arabes y griegos

Los árabes esencialmente poseyeron el conocimiento griego antiguo a través de fuentes griegas obtenidas de versiones sirias o hebreas. Ellos tomaron contacto con lo que quedaba de los griegos en Bizancio (restos del Imperio Romano de Oriente que duró más que el Imperio Romano de Occidente), de Egipto y de las escuelas sirias de Antioquía, Emesa y Damasco y, también, de los cristianos nestorianos en Edessa (que conservaron obras griegas muy importantes después de la destrucción de Alejandría en el año 640 d. C).

En recientes investigaciones se ha ido demostrando que los árabes no solo fueron traductores y comentaristas del griego, sino que en muchos campos hicieron contribuciones muy importantes, que luego la mentalidad eurocentrista se encargaría de opacar.

El álgebra y la aritmética árabes

Una de las más importantes contribuciones para las matemáticas fue el papel preponderante que le dieron al álgebra y a la aritmética. Recordemos que los griegos geometrizaron el álgebra y la aritmética, restringiendo sus posibilidades de desarrollo. La influencia árabe e hindú se filtraría en los trabajos de matemáticos renacentistas y tiempo después, particularmente, en la obra de Descartes y Fermat. Por ejemplo, los árabes al igual que los hindúes usaron libremente los números irracionales, aquellos que habían sido casi purgados por los griegos (eran inconmensurables). La notación posicional en base 10 y la introducción de los números negativos es también de origen hindú y árabe.

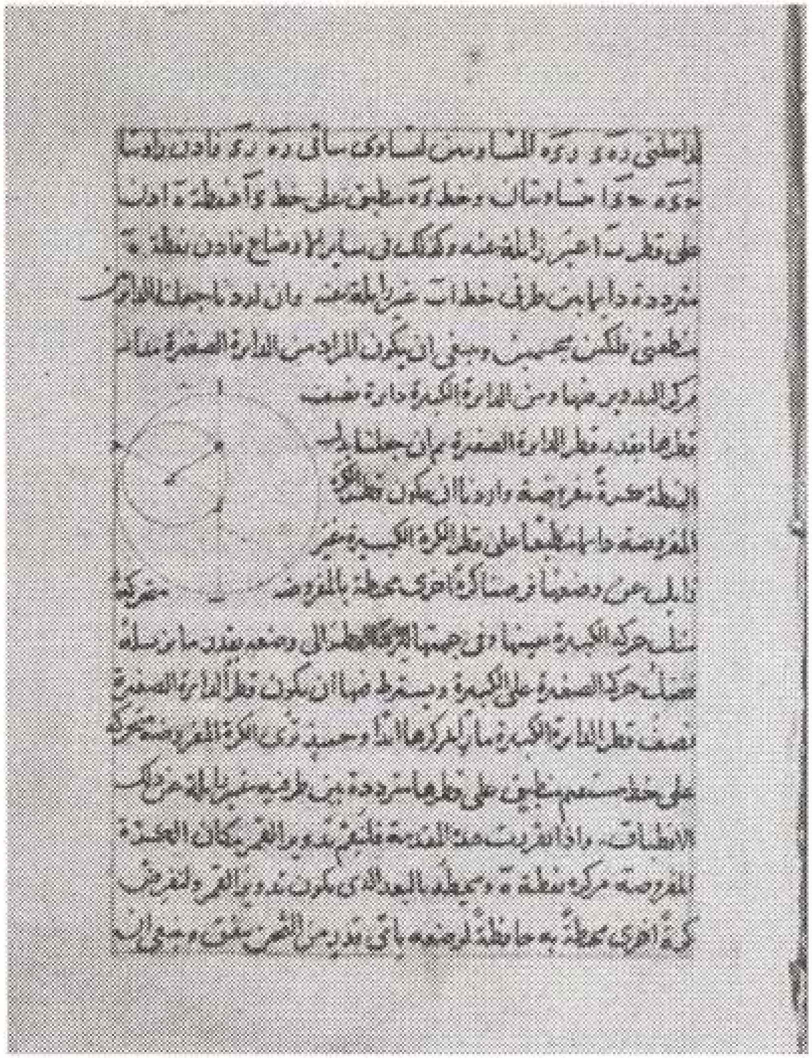


Figura 3.1. *Página del libro* **Tadhkira fi ilm al-Haya (Memorias sobre Astronomía)***, por el astrónomo árabe Nasir-ad-Din at-Tusi en Persia, quien al final del siglo XIII modificó los modelos de Ptolomeo basados en principios mecánicos para preservar la rotación uniforme de las esferas. Se encuentra en la Biblioteca del Vaticano.*

Figura 3.2. *Página del libro* **Tadhkira fi ilm al-Haya (Memorias sobre Astronomía)**.

Se puede decir que el momento clave en la historia de las matemáticas griegas se dio con *Mohamed ibn mūsā Al-Khoārizmī* alrededor del año 825 d. C. Este científico escribió varios libros de matemáticas y astronomía. En su aritmética explicaba el sistema hindú de numeración posicional y de base diez. Fue a través de su libro que Europa occidental entró en contacto con los numerales hindúes y con este tipo de sistema de numeración que hoy es el nuestro. Los términos "algoritmoz "álgebra"que usamos provienen de la latinización de su nombre y del título de su libro de álgebra: *Ḥisāb al-jabr wal-muqābala;* "*al-jabr*"se tomó por álgebra, significando la "ciencia de las ecuaciones".

Otro de los grandes matemáticos árabes, también astrónomo, filósofo y poeta, fue Omar Khayyam (c. 1038-1123). Omar reformó el calendario persa con uno que instituía un error de 1 día en 5000 años (mientras nuestro calendario gregoriano comete un error de 1 día en 3330 años). Realizó una investigación sistemática de las ecuaciones cúbicas, encontrando las raíces de esas ecuaciones como la intersección de dos secciones cónicas (método que habían usado los griegos). También remplazó la teoría euclidiana de proporciones por una teoría numérica, en donde ofreció una teoría de los irracionales y del concepto de número real en general.

El influjo árabe empezó a tener impacto especial a partir del siglo XII, lo que representó, en primer lugar, un contacto con la Antigüedad griega. Los islámicos habían traducido al arábigo buena parte de los textos clásicos griegos, así como también habían obtenido importantes resultados en matemáticas, medicina, química y otros conocimientos y técnicas. España y Portugal (por su ubicación geográfica) fueron el mejor puente para esta transmisión, pero también Italia.

3.3. Técnicas, ideología y sociedad

Desde el punto de vista de la evolución técnica es necesario señalar que hubo un mejoramiento de las técnicas durante la última parte del medievo: algunas "artefactos"se construyeron, técnicas agrícolas mejoraron y el uso de otras se extendió. Sin embargo, en esta época Europa estaba francamente retrasada en sus técnicas con respecto, por ejemplo, a las civilizaciones orientales como China. Algunos de los inventos chinos serían transmitidos a Europa: la imprenta, la pólvora y la brújula magnética. Sin embargo, su introducción se haría en condiciones sociopolíticas diferentes a las chinas o a las predominantes en la Europa medieval, jugando un papel muy diferente.

La doctrina cristiana se convirtió en el cemento ideológico de las instituciones políticas y culturales de la época. El cuestionamiento de sus "verdades"no era inocuo, representaba o podía representar grietas en el edificio sociopolítico y afectar la estabilidad política o social. La Inquisición, encargada de velar por la defensa del dogma, velaba también por la preservación del ordenamiento político. Se trataba, entonces, de una red social caracterizada por el autoritarismo y la represión del pensamiento libre; una jerarquización y rigidez en el devenir social, político e ideológico. Sin embargo, no todo era homogéneo. Se sucedieron voces discordantes y grupos y (luego) órdenes religiosas que criticaban la administración de la Iglesia. Las pestes del siglo XIV y las guerras provocaron un debilitamiento de la red europea controlada por la Iglesia y abriría las posibilidades para importantes transformaciones políticas, ideológicas y sociales.

3.4. Ejercicios

FALSO O VERDADERO

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. En cada caso brinde una justificación breve de su respuesta

1. En el siglo XII Europa era un conjunto de pueblos muy cultos con una estructura social homogénea.
2. El Latín fue la lengua oficial de la Iglesia Católica.
3. La Iglesia Católica favoreció los métodos empíricos y experimentales para obtener el conocimiento.
4. Los escolásticos usaron las doctrinas de Platón contenidas en La Lógica.
5. Aristóteles fue discípulo de Arquímedes.
6. El imperio árabe se desarrolló en lo que hoy conocemos como Reino Unido.
7. Los árabes fueron más que traductores y comentaristas del legado cultural y cognoscitivo griego.
8. La geometría árabe influyó notablemente en Europa.

9. Europa Medieval estuvo siempre más avanzada que China en cuanto al desarrollo científico y tecnológico.

10. El término álgebra proviene de un libro de Omar Khayyam.

PREGUNTAS DE DESARROLLO

1. Explique la relación de la cultura y educación europeas con el pensamiento griego antiguo y con la Iglesia Católica, entre los siglos VI y XII.

2. Explique qué era *quadrivium* y *trivium* durante esta época.

3. ¿Qué lugar ocupaban las matemáticas y las ciencias naturales en el pensamiento medieval previo al siglo XII?

4. ¿Qué fue la Escolástica?

5. ¿Porqué se afirma que los progresos científicos se debieron hacer contra ideas de Aristóteles y la escolástica?

6. ¿Cómo se desarrolló el puente entre el pensamiento griego antiguo y la Europa Medieval?

7. Mencione los campos de las matemáticas que más importancia ocuparon para los árabes.

Capítulo 4

EL RENACIMIENTO: *UN NUEVO PUNTO DE PARTIDA*

OBJETIVOS

- *Describir las principales características del* Renacimiento *en Europa.*
- *Conocer el lugar de las matemáticas y de las ciencias naturales durante la época del* Renacimiento*.*

El *Renacimiento* arrancó primeramente en la misma Italia, donde las ciudades más grandes como Venecia, Génova, Florencia y Milán se hicieron independientes política y económicamente, y se llegó a una negociación y equilibrio político y militar con el poder de la Iglesia en Roma. Cuando el *Renacimiento* se extendió por Europa las cosas no fueron tan apacibles. En Alemania y otros países se buscó la independencia religiosa y nacional, lo que sería un fundamento importante de lo que se llamaría la *Reforma Luterana*. La *Reforma* protestante se propagó a Gran Bretaña, los Países Bajos y Francia, donde adoptó la forma del *calvinismo*. En todos los casos el control y autoridad de la Iglesia se debilitó estableciendo cambios políticos y sociales y generando una dinámica social fructífera para la innovación cultural. Se puede decir que el *Renacimiento* y la *Reforma* fueron aspectos de un mismo movimiento y, sin duda, en ellos jugaron un papel importante otros aspectos no políticos o culturales como: la extensión del comercio y la existencia de excedentes económicos obtenidos como producto de mejoras técnicas.

4.1. Renacimiento y humanismo

El *Renacimiento* significó un reencuentro con la Antigüedad Clásica, pero no con la lógica formal y la especulación abstracta que encontraron los escolásticos en Aristóteles, sino con la vinculación y preocupación por la naturaleza, en su vitalismo, su *humanismo*. Todo lo anterior fue cuestionado abriendo un período extraordinario en la producción intelectual:

- Las artes técnicas se colocaron en una posición especial, con lo que se debilitó, en cierta medida, la separación abismal que había existido en el medievo entre la tradición erudita y la artesanal. El *Renacimiento* aumentó la importancia de las prácticas artesanales, como por ejemplo los tejidos, la vidriería, la minería y la metalurgia.

- Las artes plásticas adquirieron una relevancia importante que contribuiría a una indagación y a importantes conocimientos sobre la naturaleza y el hombre (los estudios de perspectiva, anatómicos, la descripción realista de la naturaleza, etc), en esta época los artistas fueron patrocinados y respetados.

- Las matemáticas fueron desarrolladas (aunque sin grandes resultados) de manera sutil, como producto del impacto provocado por la transmisión árabe de la cultura clásica y, especialmente, por los requerimientos de las técnicas, las artes plásticas, y de las guerras (que necesitaban métodos y armamentos más sofisticados técnicamente).

- En la filosofía se generó un extraordinario cambio de actitud frente a la Escolástica y el pensamiento aristotélico y, por ejemplo, la filosofía de las "causas finales"(que todas las cosas tienen una finalidad última) sería sustituida por un énfasis en la búsqueda de las causas "eficientez "material"(la descripción física de los procesos de la naturaleza); es decir, por los agentes del "cómoz no del "para qué"(Telesio 1509-1588).

Con el *Renacimiento* italiano se inició una auténtica revolución de las ideas y una nueva actitud ante la sociedad, el hombre y la naturaleza: se inició la revolución cultural y cognoscitiva moderna. El reencuentro con la Antigüedad Clásica fue una condición necesaria para desencadenar esta revolución intelectual moderna, pero no fue condición suficiente. Se combinaron muchas cosas: cultura clásica antigua, las influencias árabes y chinas, y una larga serie de condiciones históricas particulares de Europa, entre ellas cambios económicos, políticos y sociales, técnicos y cambios en el intercambio, la comunicación y la relación entre los diferentes pueblos. (Estas últimas fueron decisivas; los árabes, por ejemplo, en posesión de la mayoría de los resultados griegos, no pudieron hacer el salto que sí daría Europa Occidental).

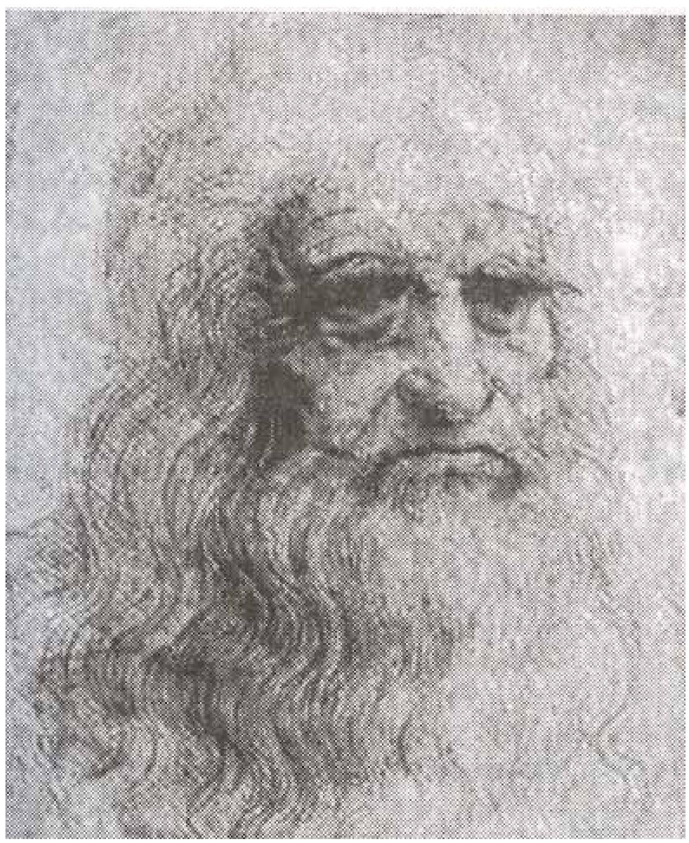


Foto 4.1. *Leonardo da Vinci (1452-1519): arquetipo del hombre del Renacimiento*

La combinación de estas variables generó en la región europea una visión del mundo distinta y una nueva forma de sociedad. Este nuevo orden social es lo que se llama la sociedad moderna occidental, que ha influido decisivamente en los destinos de toda la humanidad. Tanto ha sido su impacto que muchas veces se ha llegado a subestimar y despreciar el valor de la cultura, valores, civilización y forma de vida de otras sociedades humanas.

Algunos factores deben subrayarse al estudiar el *Renacimiento*:

- Para el siglo XV, lo europeos contaban ya con una colección extraordinaria de los textos griegos, más allá de los que habían servido a los escolásticos para crear una nueva visión del mundo “mitad cristiana mitad aristotélica”. Esto aumentaba las posibilidades culturales y científicas de los intelectuales.

- Alrededor de 1450, Johann Gutemberg inventó la imprenta con lo que la proyección de ideas a más personas y países generó una auténtica revolución. Un ejemplo: la primera edición por imprenta de los *Elementos* de Euclides (en latín) apareció en Venecia en 1492.

- Aunque provenientes de la China, la brújula y la pólvora revolucionaron la navegación en un caso y el “arte de la guerra.en el otro. Esto estimulaba estudios astronómicos, para trazar cartas de navegación, diseños de fortificaciones militares, estudio de proyectiles, sus trayectorias e impactos posibles.

- Nuevos desarrollos económicos en la minería, la manufactura, la agricultura en gran escala y el comercio generaron reclamos técnicos en una nueva dimensión.

- Las nuevas líneas económicas y comerciales y la emersión de nuevos o más fuertes grupos sociales promovieron descubrimientos geográficos, expansiones políticas y sociales.

Todos estos factores incidieron en un cuestionamiento de las ideas defendidas por los escolásticos. Muchos datos geográficos, biológicos y astronómicos, por ejemplo, entraban en contradicción con lo que se creía, y promovieron una nueva visión del mundo. En la nueva visión del mundo, como veremos, empezaron a ocupar relevancia la indagación sobre la naturaleza, el disfrute del mundo físico, el perfeccionamiento de la mente y el cuerpo, la libertad de pensamiento y la confianza en la razón humana; en general: *una actitud humanista*. El humanismo fue una primer actitud del *Renacimiento*: se podría decir que se inició en Italia desde Petrarca y Bocaccio a principios del siglo XIV. Era una ruptura con el modelo de pensamiento anterior que enfatizaba absolutamente la contemplación espiritual, de la divinidad y la salvación de las almas. Los nuevos tiempos promovían un cambio de enfoque hacia el individuo, la persona y la vida terrenal. El cambio supuso transformaciones en todo: arquitectura, arte, y el pensamiento; la literatura y la ciencia en particular.

Como detalle debe mencionarse que los intelectuales renacentistas favorecieron una visión de las matemáticas como descripción cuantitativa del mundo. Algo así como la idea de Pitágoras y Platón de que la esencia de la realidad es matemática.

Puede señalarse también que el *Renacimiento* no produjo grandes resultados en matemáticas, lo que contrasta con lo sucedido en las otras dimensiones culturales. Pero se estaba creando en la época las condiciones para el salto que vendría luego en el siglo XVII: con la absorción de la matemática griega y árabe, y el desarrollo de las ciencias físicas y la tecnología, los que fueron estímulos decisivos.

4.2. Navegación y ciencias matemáticas

Con relación a la técnica renacentista: muchos avances se dieron en el terreno de la minería, la química, y la metalurgia, pero conviene señalar la extraordinaria importancia de aquellas técnicas relacionadas con la navegación. Con el descubrimiento de América y nuevas rutas comerciales al Asia (lo que benefició inicialmente a España y Portugal) la navegación ocuparía un lugar decisivo en toda esta época. No es totalmente extraño que fuese en la Astronomía donde se abrieran los primeros fuegos por la nueva ciencia. Es precisamente en torno a la navegación que se puede decir se dio la primera aplicación de la ciencia.

Es interesante señalar que siempre existió una relación importante entre navegación y astronomía y matemáticas. En los resultados de los sumerios, babilonios y egipcios es posible detectar esa estrecha relación de influencias recíprocas. Sin duda, el desarrollo del comercio y la navegación que se abriría con los nuevos descubrimientos geográficos fueron muy importantes en el desarrollo de la Astronomía y las matemáticas asociadas. En esta ocasión, además, gracias a los resultados de la cultura antigua, se contaba con una buena colección de teorías e hipótesis (bastante elaboradas) y, especialmente, un conjunto muy grande de observaciones y datos astronómicos.

Esta relación (así como la captación vía islámica de matemáticas hindúes y chinas) fue esencial en la configuración de la revolución matemática y científica del siglo XVII.

En otro orden de cosas: los nuevos descubrimientos geográficos tuvieron con los años otra consecuencia: afectaron el desarrollo y equilibrio europeos al trasladar los centros de importancia económica, política, intelectual a aquellas regiones o países colocados frente al Atlántico. La importancia italiana (que había sido ruta obligada para ir a Oriente) empezó a declinar, y en su lugar empezó a expandirse primero España y Portugal y, luego, los Países Bajos e Inglaterra.

4.3. Un poco de matemáticas

La recepción de obras matemáticas clásicas a través de los árabes no tuvo la acogida tan trascendental que se dio con las obras de literatura o incluso otras de ciencias naturales. La dificultad de los textos griegos de Apolonio o Arquímedes, por ejemplo, no permitía que en esas época muchas personas pudieran apreciar la profundidad de estos trabajos. Entonces, aun existiendo traducciones de los clásicos, tomó mucho tiempo hasta que esos trabajos pudieran ser plenamente apreciados. Así pues, la atención se concentró especialmente en los aspectos más elementales de las matemáticas.

Foto 4.2. *Regiomontano (1436-1476) y Albrecht Durero (1471-1528)*

Oresme y Nicolás de Cusa (1401-1464) pusieron énfasis en las medidas. Este último, que llegó a cardenal, se conoce por ser el primer europeo moderno en intentar resolver el problema de la cuadratura del círculo (lo que hizo cometiendo errores). Precisamente, Regiomontano (1436-1476), el matemático que ejerció mayor influencia en el siglo XV, le señaló a de Cusa algunos de sus errores en su razonamiento. Regiomontano había estudiado en Leipzig y Viena y también en Italia. Cuando regresó a Alemania instaló una imprenta y un observatorio en Nuremberg. Su propósito era imprimir traducciones de Arquímedes, Apolonio, Herón y Ptolomeo, lo cual no pudo desarrollar debido a su muerte prematura a los 40 años. También resulta interesante mencionar que trató de organizar la trigonometría como una rama independiente de la astronomía (en el libro *De triangulis*, que no sería publicado sino hasta 1533).

Entre la segunda mitad del siglo XV a primera mitad del XVI, algunas ciudades de la Europa central se volvieron importantes centros de elaboración o publicación en matemáticas y astronomía: Viena, Cracovia, Praga y Nuremberg.

Dos obras esencialmente aritméticas parecen haber tenido cierta influencia en las matemáticas de la época: el *Triparty en la science des nombres* del francés Nicolás Chuquet, que apareció como manuscrito en 1484, y la *Summa* del italiano Luca Pacioli (1445-1514) que apareció en Italia en 1494. Esta última obra fue la que más influencia tendría.

Resulta interesante mencionar que Pacioli publicó un libro de geometría que se intituló *De divina proporcione*, que estudia poligonos y poliedros regulares y la llamada "sección áurea". Lo interesante no es debido a la calidad y originalidad matemáticas del texto (que no las tiene) sino a que las múltiples figuras que aparecen en el libro se le atribuyen a Leonardo da Vinci, el gran ingeniero, pintor y futurista italiano que siempre ha sido visto como arquetipo del hombre renacentista.

Parece haber consenso entre los historiadores de este periodo en que las matemáticas del Renacimiento se caracterizaron por el desarrollo del álgebra, no siguiendo el influjo geométrico griego, sino más bien las tradiciones medievales. Aunque las ciudades italianas sirvieron para la penetración de la ciencia árabe y griega antigua, también debe reconocerse la existencia de trabajos germánicos en el algebra. Una de las más importantes de éstas fue la *Aritmética integra* de Stifel (un tratado del álgebra muy completo de lo que existía en la época publicado en 1544).

En 1545 se produjo un importante resultado que influyó notablemente en el trabajo de los algebristas de la época: la resolución de la ecuación cúbica y de la cuártica. Estas soluciones fueron publicadas por Hierónimo Cardano (1501-1576) en su libro *Ars Magna*. Sin embargo, como Cardano reconoce, éstas no le son propias: en cuanto a la cúbica, la obtuvo de Niccolo Tartaglia (c. 1500-1557) y, en cuanto a la cuártica, de su antiguo secretario Ludovico Ferrari (1522-1565).

Foto 4.3. *Hierónimo Cardano (1501-1576) y Niccolo Tartaglia (c. 1500-1557)*

El gran historiador de las matemáticas, Carl Boyer, evalúa este hecho de la siguiente forma:

> "La solución de las ecuaciones cúbica y cuártica fue probablemente la mayor contribución al álgebra desde que los babilonios, casi cuatro milenios antes, habían aprendido a completar el cuadrado para resolver las ecuaciones cuadráticas. Ningún otro descubrimiento había supuesto un estímulo tal para el desarrollo del álgebra como el que representaban los descubrimientos que se revelaban en el *Ars Magna*."

Otros matemáticos del siglo XVI fueron Robert Recorde (1510-1558), Georg Joachim Rheticus (1514-1576), Pierre de la Ramée (1515-1572), Johannes Werner (1468-1522), Albrecht Dürer (1471-1528), Francesco Maurolico (1494-1575), y Gerard Mercator (1512-1594). Recorde, galés, se afirma ser casi el único matemático de cierta calidad en la Inglaterra del XVI. Rheticus prosiguió la organización de la trigonometría que había realizado Regiomontano. Calculó tablas detalladas de todas las funciones trigonométricas. De la Ramée contribuyó a la enseñanza de las matemáticas (lo que también había hecho Recorde). Dürer (o Durero) en Alemania y Maurolico en Italia hicieron geometría, y Werner, también en Alemania, promovió una renovación del interés en la geometría de curvas. Mercator, flamenco, fue un geógrafo importante que se separó de las teorías geográficas de Ptolomeo y usó instrumentos geométricos para su labor geográfica.

En el Renacimiento las matemáticas tuvieron aplicación en la mecánica, el arte, la agrimensura, la contabilidad, la cartografía y la óptica. En general, se trataba de aplicaciones elementales o que recurrían a dimensiones de poco nivel matemático. También, en el mismo periodo, hubo interés por las obras griegas de mayor complejidad, pero no de una manera muy extendida. La ausencia de traducciones latinas de autores como Apolonio, Arquímedes, o Pappus era una debilidad.

La geometría, entonces, no tuvo mucho desarrollo, concentrándose los resultados en el álgebra, la cual, sin embargo, sería fundamental para la geometría analítica y el Cálculo diferencial e integral.

Paralelismo con los jónicos

El *Renacimiento* italiano tal vez puede ponerse en paralelo con la revolución del pensamiento que representaron los naturalistas jónicos en el siglo VII a. C.. Las condiciones sociales, económicas y sobre todo las culturales y políticas fueron una base para el "milagro griego": cierta participación democrática y alguna libertad del pensamiento en Jonia y en otras partes de las islas griegas fueron muy importantes. Sólo a partir de éstas y a pesar de las limitaciones y las continuas reacciones de siempre fue posible romper con la estabilidad de las Civilizaciones del Bronce, jerarquizadas y rígidas social y políticamente. Estas condiciones especiales permitieron utilizar y multiplicar insospechadamente los recursos técnicos y los resultados que ellas habían adquirido en sus incursiones y contactos comerciales con esas sociedades. La actitud intelectual de los jónicos representó un punto de partida de la ciencia griega. La actitud intelectual renacentista también constituyó un nuevo punto de partida, esta vez para la Ciencia Moderna.

4.4. Ejercicios

FALSO O VERDADERO

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. En cada caso brinde una justificación breve de su respuesta

1. El Renacimiento significó un reencuentro con la Antigüedad Clásica.
2. El Renacimiento promovió un cambio de enfoque hacia el individuo y la vida terrenal.
3. La matemática tuvo un extraordinario desarrollo en el Renacimiento.
4. La navegación fue poco importante para el progreso de la astronomía.
5. Cardano descubrió la solución de la ecuación cuártica.
6. *De divina proporcione* fue escrito por Leonardo da Vinci.
7. La libertad de ideas es importante para la ciencia.

PREGUNTAS DE DESARROLLO

1. Explique dos características fundamentales del Renacimiento en Europa.
2. Mencione dos factores generales que dieron origen al Renacimiento. ¿Por qué revolucionaron la cultura europea?
3. ¿Qué relación existió entre pólvora y brújula y las matemáticas?
4. ¿Qué era el humanismo renacentista? Mencione tres características.
5. Explique la importancia de la utilización de la imprenta en el desarrollo cultural y educativo.
6. ¿Cuáles son las principales características de las matemáticas en la última parte del Renacimiento?
7. ¿Por qué se afirma la existencia de un paralelismo entre el Renacimiento y la actividad intelectual de jónicos en la Grecia Antigua?

Capítulo 5

REVOLUCIÓN EN LA COSMOLOGÍA

OBJETIVOS

- *Describir las principales teorías cosmológicas en la historia de la humanidad: el* heliocentrismo *y el* geocentrismo.
- *Explicar la contribución de Copérnico.*
- *Conocer la contribución de Kepler y en particular las tres Leyes de Kepler.*
- *Describir la contribución en la cosmología de Galileo*
- *Conocer el contexto cultural, ideológico y político en la historia de la nueva astronomía.*

El Cálculo fue un resultado central de la época que fundamentó la sociedad moderna de la que somos parte. No se podría entender cabalmente su significado conceptual e histórico si no es con relación a la gran reforma del pensamiento que representó el *Renacimiento* y especialmente como resultado privilegiado de la *Revolución Científica*. Podemos decir que las contribuciones científicas y, especialmente, metodológicas del siglo XVII transformaron el pensamiento científico y podemos señalar que crearon el modelo moderno de la ciencia occidental. Fue el siglo de grandes figuras intelectuales como Galileo, Harvey, Descartes, Fermat, Newton. La física newtoniana engendró un paradigma (es decir: un modelo téorico mayoritariamente aceptado) que hace menos de cien años todavía regía sobre el conocimiento de las leyes de la naturaleza e incluso hoy, todavía, en muchas de sus partes, se enseña en colegios y universidades.

Esta llamada *Revolución Científica* representó una ruptura cualitativa con el pensamiento anterior (griego y medieval), y la apertura de una nueva época. Para algunos, como Butterfield "...se debería colocar -junto con el éxodo de los antiguos o la conquista de los grandes Imperios de Alejandro el Grande y de la Antigua Roma- entre las aventuras épicas que han hecho de la raza humana lo que es hoy".

La *Revolución Científica* debe considerarse no como un proceso separado de otras revoluciones de la época sino, precisamente, como parte especial de otros procesos sociales: el *Renacimiento*, la Reforma protestante, las Revoluciones políticas de los siglos XVII y XVIII y décadas después la Revolución Industrial del XVIII. Estos procesos, integrados en un movimiento general, engendraron la sociedad occidental moderna. Más aún, aunque se trató de procesos autónomos, las influencias y relaciones recíprocas fueron en sí partes constitutivas de su desarrollo.

Las actitudes e ideas cognoscitivas, políticas y morales que se fueron generando desde el siglo XV, al mismo tiempo que expresaban intereses y voluntades políticas y económicas, fueron factor activo de la edificación de un nuevo orden social.

Para el progreso de los métodos y la orientación de la ciencia fue decisiva la contribución de Francis Bacon, René Descartes y Galileo Galilei en la primera mitad del siglo XVII. Los tres hicieron aportes fundamentales en la promoción del método experimental y empírico y una descripción matemática y mecánica de los fenómenos de la naturaleza. Además, la proyección y defensa de sus ideas contribuyó a favorecer la independencia de la ciencia y a fortalecer espacios de tolerancia, racionalidad y respeto en la evolución de las ideas.

Los nuevos métodos fueron dirigidos contra el modelo de pensamiento anterior, aristotélico y escolástico, y especialmente contra el corazón mismo de la ideología dominante: la cosmología geocéntrica. Muchas de las batallas se tuvieron que dar precisamente en la astronomía. La revolución en la cosmología abrió una nueva percepción del mundo, pero también de la especie humana (a la que se añadiría, ya en el siglo XIX, otra revolución: la teoría de la evolución por Charles Darwin). Por ahí es que vamos a penetrar en las nuevas ideas.

5.1. Copérnico: *el heliocentrismo*

La teoría heliocéntrica de Copérnico se rebeló contra la cosmología aristotélica y ptolomeica. Retomó la idea antigua de los pitagóricos y de Aristarco que los planetas giran alrededor del Sol. Debe señalarse que los pitagóricos habían afirmado que los planetas (incluyendo el Sol) se movían alrededor de un gran fuego central. Plantearon el movimiento circular de los cuerpos celestes y su forma esférica. Tiempo después, Aristarco de Samos (*circa* 310 a. C.), el principal astrónomo del período alejandrino, creó métodos ingeniosos para calcular las distancias relativas entre el Sol, Luna y Tierra; y la relación entre el diámetro terrestre y lunar. Afirmó (según el testimonio de Arquímedes) que el Sol permanecía inmóvil con relación a las estrellas fijas y que la Tierra se movía alrededor de éste en forma circular una vez al año.

Foto 5.1. *Tycho Brahe (1546-1601) y Nicolás Copérnico (1473-1543)*

Nicolás Copérnico nació en 1473 en Polonia, y estudió matemáticas y ciencias en la Universidad de Cracovia. A la edad de 23 años fue a estudiar a Bolonia (Italia). También estudió medicina y derecho canónico (de la Iglesia). De regreso a Polonia fue administrador de la Catedral de Frauenburg (hoy Frombork) durante más de 30 años hasta su muerte en 1543.

Copérnico escribió su *De rebolutionivus orbium coelestium* (*"La revolución de los cuerpos celestes"*) que salió a la luz el año de su misma muerte, 1543. Aunque desde joven se inclinaba por el heliocentrismo, no se atrevió a hacer una defensa muy fuerte de sus ideas. El libro salió a la luz incluso, gracias a los oficios de Osiander, con un prólogo que decía que las ideas vertidas eran meras hipótesis matemáticas y no verdaderas posiciones de Copérnico. Al publicarse la obra nadie quiso defenderla o propagarla. Sería Galileo quien asumiría ese reto. Sin embargo, una vez que la obra empezó a difundirse la Iglesia calificó de herético el sistema de Copérnico por estar en contradicción con las Escrituras, y el libro fue colocado en el *Indice Expurgatorio de la Curia Romana* el 5 de marzo de 1616 (73 años después de su publicación).

Es interesante señalar que en el mismo año de 1543 Vesalio publicaba su *De humani corporis fabrica*, la primera descripción anatómica completa del cuerpo humano. En 1537, Vesalio fundó la Escuela de Medicina de la Universidad de Padua, cuya tradición empataría directamente años después con el trabajo del mismo William Harvey.

El mérito de la tesis heliocentrista

Para entender mejor lo que significó la tesis copernicana conviene resumir antes algunas de las ideas aristotélicas y escolásticas que dominaban en aquellos tiempos. Nadie mejor que el célebre físico británico de nuestra época, Stephen Hawking, para sintetizar este contexto:

> "Aristóteles creía que la Tierra era estacionaria y que el Sol, la Luna, los planetas y las estrellas se movían en órbitas circulares alrededor de ella. Creía eso porque estaba convencido, por razones místicas, de que la Tierra era el centro del Universo y el movimiento circular era el más perfecto. Esta idea fue ampliada por Ptolomeo en el siglo II después de Cristo, hasta constituir un modelo cosmológico completo. La Tierra permaneció en el centro, rodeada por 8 esferas que transportaban la Luna, el Sol, las estrellas y los cinco planetas conocidos en aquel tiempo, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno. Los planetas se movían en círculos más pequeños engarzados en sus respectivas esferas, para que así se pudieran explicar sus relativamente complicadas trayectorias celestes. La esfera más externa transportaba a las llamadas estrellas fijas las cuales

siempre permanecían en las mismas posiciones relativas, las unas con respecto de las otras, lo que había detrás de la última esfera nunca fue descrito con claridad, pero ciertamente no era parte del Universo observable por el hombre.

El modelo de Ptolomeo proporcionaba un sistema razonablemente preciso para predecir las posiciones de los cuerpos celestes en el firmamento. Pero, para poder predecir dichas posiciones correctamente, Ptolomeo tenía que suponer que la Luna seguía un camino que la situaba en algunos instantes dos veces más cerca de la Tierra que otro. ¿Y esto significaba que la Luna debería aparecer a veces con tamaño doble del que usualmente tiene?

Ptolomeo reconocía esta inconsistencia, a pesar de lo cual su modelo fue amplia aunque no universalmente aceptado. Fue adoptado por la Iglesia Cristiana como la imagen del Universo que estaba de acuerdo con las Escrituras, y que, además, presentaba la gran ventaja de dejar fuera de la esfera de las estrellas fijas una enorme cantidad de espacio para el cielo y el infierno."

Stephen Hawking
Historia del tiempo
1988.

El mérito de la teoría heliocéntrica de Copérnico no era que estuviera en mayor acuerdo con las observaciones registradas que la teoría de Ptolomeo (con sus modificaciones posteriores). El mérito residía en que el nuevo punto de vista simplificaba las explicaciones sin tener que introducir muchos elementos (los llamados *epiciclos* de la teoría de Ptolomeo eran de complejidad creciente conforme aumentaban las nuevas observaciones). Por ejemplo, con solo usar el Sol como centro y no la Tierra el esquema copernicano ocupaba solamente 34 círculos y no los 77 del esquema ptolomeico (para no entrar en contradicción con las ideas dominantes).

Asumir el punto revolucionario en esos tiempos no era fácil. El mismo Tycho Brahe (1546-1601), un gran astrónomo danés, se distanció de las ideas copernicanas y trató de mejorar el esquema ptolomeico.

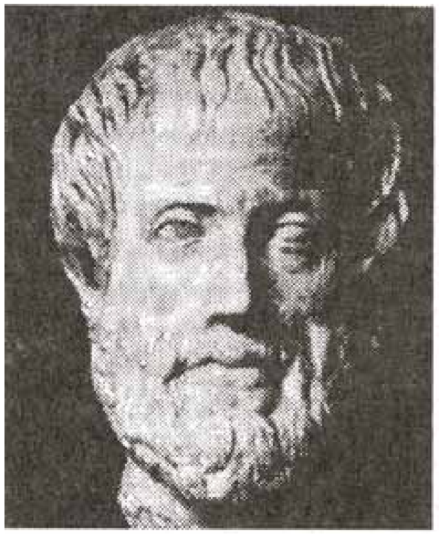



Foto 5.2. *Aristóteles (384-322 a.C.) y Claudio Ptolomeo (c. 85-165 d.c.)*

5.2. Kepler: la geometría celeste

Para el progreso del heliocentrismo fue muy importante el trabajo de Johannes Kepler (1571-1630). Toda su vida estuvo llena de dificultades. Nació en Leonberg (hoy Alemania). Hijo de un alcohólico que pasó de ser mercenario a cantinero. Su esposa y varios de sus hijos murieron. Su madre fue acusada de brujería y, siendo luterano, fue perseguido por los católicos. Aun así, Kepler siguió sus investigaciones científicas y matemáticas. Kepler estudió en la Universidad de Tübingen, donde conoció las teorías astronómicas de Ptolomeo y Copérnico. Originalmente Kepler quería ser cura, pero fue convencido de enseñar matemáticas en Graz. Desde muy pronto, en 1596, Kepler argumentó a favor de las tesis copernicanas (en su libro *Mysterium Cosmographicum*). En 1600 Kepler fue a Praga como asistente de Tycho Brahe, quien murió en 1601. Kepler continuó entonces el trabajo de Tycho de codificar las observaciones planetarias.

Foto 5.3. *Johannes Kepler (1571-1630)*

Desde el punto de vista de la historia de la ciencia, su trabajo fue tal vez más revolucionario que el del mismo Copérnico. No solo adoptó el heliocentrismo sino que, además, usó la elipse en sus descripciones del movimiento planetario, y no el círculo tradicional y casi sagrado. Siempre afirmó que la ciencia es independiente de las doctrinas filosóficas y religiosas, y que las teorías deben probarse en la experiencia física. Tanto Copérnico como Kepler eran muy religiosos, pero ambos negaron la idea escolástica de que el hombre y la Tierra son el centro de la creación (lo que se apoyaba con la teoría geocéntrica de Ptolomeo).

Muchas otras importantes obras científicas y técnicas fueron publicadas en la época: la *Pyrotechnica* de Biriguccio (1480-1539), *De re metallica* de Agrícola (1490-1555) o, más tarde, libros como los de Gesner (1516-1565), Rondelet (1507-1566) y Belón (1517-1564). La proyección de las ideas y actitudes nuevas fue multiplicada por el uso de la imprenta.

Las leyes keplerianas

Kepler enunció en su obra de 1609 *Astronomía Nova* sus primeras 2 leyes de la astronomía:

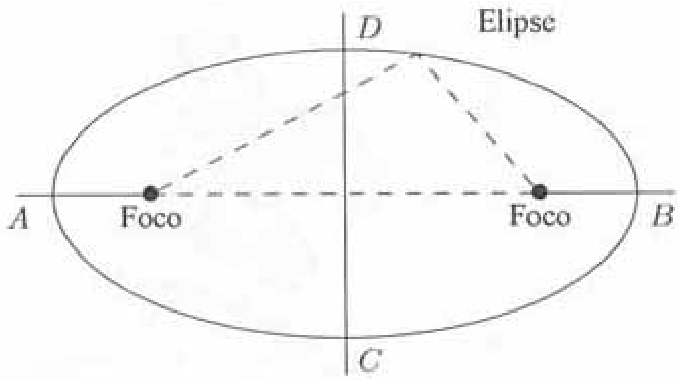


Figura 5.1. *Las órbitas planetarias*

(a) que los planetas se mueven alrededor del Sol con órbitas elípticas y que el Sol es uno de los focos de la elipse;

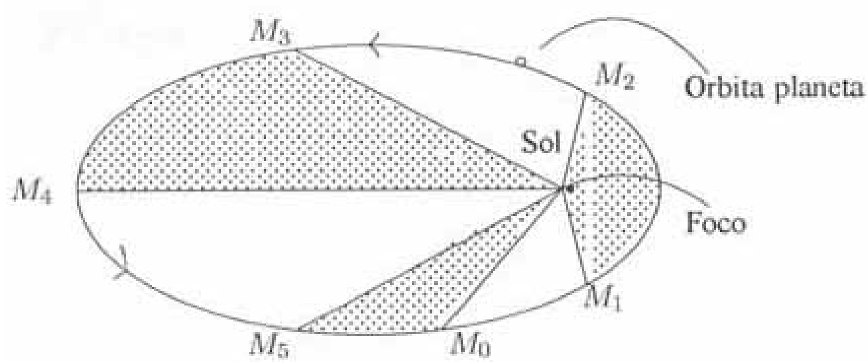


Figura 5.2. *La segunda ley de Kepler*

(b) y que el radio vector que va del Sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

Los astrónomos de la época no aceptaron estas 2 leyes de Kepler con mucho entusiasmo. Con relación a la primera, tuvo una fría aceptación y se pensó que requería mucha investigación adicional para ser confirmada. La segunda fue esencialmente ignorada por cerca de 80 años.

Una tercera ley presentó Kepler en 1619 en el libro *Harmonice mundi*:

> "Los cuadrados de los periodos de los planetas son proporcionales a los cubos de los radios medios de sus órbitas".

Esta ley sí fue aceptada desde el primer momento.

Las primeras dos leyes fueron formuladas para el planeta Marte, y la segunda involucraba una técnica numérica que se asemeja al cálculo integral.

Kepler publicó dos libros que contribuyeron mucho al progreso del copernicanismo: *Epitome astronomiae copernicanae* (1618-1621) y *Tablas Rodolfinas* (1627), este último basado en las observaciones de Tycho Brahe y las leyes keplerianas.

5.3. Galileo y la nueva cosmología

Galileo Galilei asumió la defensa de las ideas de Copérnico, integrando en sus trabajos los resultados fácticos obtenidos por Brahe y Kepler.

Para sus resultados Galileo (al igual que Kepler) usó como base los avances hechos por los matemáticos renacentistas (Cardano y Tartaglia), pero su principal instrumento de batalla fue el telescopio (producto de la tradición artesanal). A través del telescopio pudo descubrir importantes hechos que desestimaban el geocentrismo y favorecían la interpretación copernicana: que la Luna tenía depresiones y montañas, que Venus muestra fases como la Luna, que Saturno parece estar dividido en tres partes, que el Sol posee manchas y que en torno a Júpiter giran tres estrellas o lunas.

Galileo había estudiado primero medicina en Pisa, pero su interés en la obra de Arquímedes y Euclides lo llevó hacia las matemáticas. Después de enseñar privadamente en Florencia y luego en la Universidad de Pisa, Galileo fue contratado como profesor de matemáticas en la Universidad de Padua (Venecia) en 1592. Venecia era un principado independiente de la Roma papal y ofrecía extraordinarias condiciones de libertad para el ejercicio del pensamiento crítico y reformador, y para el progreso de la nueva ciencia. Casi 20 años después, Galileo se convirtió en el matemático y filósofo natural del Gran

Duque de Tuscana (Cosimo II de'Medici). En Florencia continuó su trabajo y empezó a tener conflictos alrededor del copernicanismo.

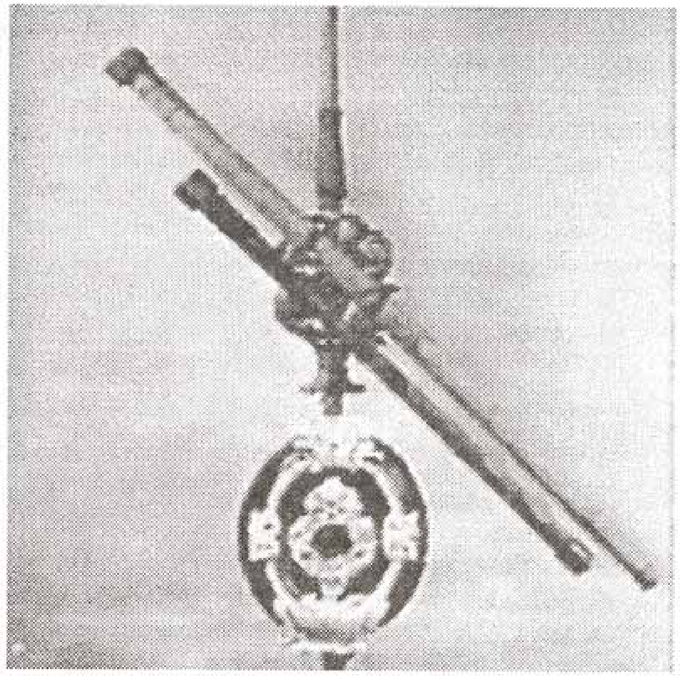


Foto 5.4. *El telescopio: instrumento fundamental hacia una nueva cosmología.*

Frente al esquema medieval

En 1610, publicó *Sidereus Nuncius* (*Mensajero de las estrellas*), condensando sus observaciones revolucionarias. Las observaciones de Galileo ponían en aprietos al modelo aristotélico y escolástico. Aristóteles establecía tres principios centrales en su *Física*: un universo limitado, incorruptible y geocéntrico. El firmamento es inmutable en ese esquema y el número de astros es fijo. Por medio del telescopio Galileo demostró que el número fijo de estrellas que se veía a simple vista era muy pequeño, cambiaba toda la perspectiva si se usaba el telescopio. Aristóteles había contado menos de 2000 estrellas; con el telescopio Galileo multiplicaba ese número. La observación empujaba hacia que el firmamento no era inmutable. De igual forma, en 1609 Galileo mostraba que la Luna no era una esfera perfecta, lisa y brillante (como había establecido Aristóteles), y se podía comparar con la Tierra (lo que tampoco se aceptaba entonces). Galileo decía:

> "Cuando alguno quisiera parangonarla a la Tierra, las manchas de la Luna corresponderían a los mares y la parte luminosa a los continentes de la superficie terrestre, y yo verdaderamente he tenido desde antes la opinión de que, si se viera de gran distancia el globo terrestre, iluminado por el Sol, más lúcido sería el aspecto del terreno y más oscuro el de los mares".

En la época no era admisible la existencia de astros que giraran alrededor de otros aparte de la Tierra. Por eso al mostrar Galileo las lunas de Júpiter atacaba objetivamente el geocentrismo: *La Tierra no era excepcional.* [Galileo descubrió 4 de los 17 satélites que tiene Júpiter]. De la misma manera, al descubrir las fases de Venus (como las que tiene la Luna), se mostraba que Venus debía poseer una órbita alrededor del Sol y no de la Tierra. El descubrimiento de manchas solares iba contra la "incorruptibilidad"del Sol que afirmaban los aristotélicos. Con el estudio de las manchas Galileo logró determinar el movimiento de rotación del Sol.

En el centro del universo

En esa época se pensaba que la Tierra era el centro del universo (y por eso se asumía como cierta la teoría geocéntrica) porque Dios había creado al hombre sobre la faz de la Tierra. El cardenal jesuita Roberto Bellarmino decía en una carta famosa:

> "Como es de vuestro conocimiento, el Concilio de Trento prohibe la interpretación de las Escrituras de modo contrario a la común opinión de los santos padres. Ahora bien, si Vuestra Reverencia lee, no ya a los padres, sino a los modernos comentaristas del Génesis, los Salmos, el Eclesiatés y Josué, descubrirá que todos están de acuerdo en su interpretación de que literalmente enseñan que el Sol se halla en el firmamento y gira alrededor de la Tierra con enorme velocidad, que la Tierra se halla muy distante del cielo, en el centro del universo e inmóvil".

Con gran honestidad, en esta carta dirigida al padre Paolo Foscarini, Bellarmino declara los temores de la Iglesia de entonces:

> "... querer afirmar de manera certísima que el Sol se halla en el centro del universo y solo gira alrededor de su eje, sin efectuar movimiento de oriente a poniente, es una actitud muy peligrosa y que se supone que agitaría no solo a los filósofos y teólogos escolásticos sino que a la vez perjudicaría a nuestra santa fe al contradecir a las Sagradas Escrituras". (12 de abril de 1615).

Una historia de intolerancia

Se supone que Galileo recibió en 1616 una advertencia por parte de la Inquisición en el sentido de que no debía seguir defendiendo el copernicanismo. El contenido de esa advertencia no se conoce con certeza.

En 1632, veintidos años después de aquel libro, en su *Dialogo dei massimi sistemi* (*Diálogo concerniente a los dos sistemas del mundo: el ptolomeico y el copernicano,*) publicado en Florencia y dedicado al Papa, Galileo se dirigió frontalmente contra la cosmología aceptada y la filosofía aristotélica. El *Diálogo* fue escrito en italiano para buscar una mayor audiencia para sus ideas. El Papa Urbano VIII le había concedido permiso a Galileo para publicar este libro si lo hacía matemático y no doctrinario.

Galileo fue llevado a juicio por la Inquisición en 1633 y condenado a arresto domiciliario durante el resto de su vida. También fue obligado a retractarse de sus ideas y a no publicar más. El *Diálogo* era una auténtica "provocación"de Galileo. Tal vez consideró que ya viejo no importaba su audacia o, tal vez, pensó que por su prestigio y por su amistad con el Papa Urbano VIII tenía asegurado el camino. Sea como sea su proceso significó, de hecho y a pesar de su sufrimiento personal, una proyección mayor de las ideas copernicanas.

No obstante Galileo escribió otra gran obra sobre su trabajo de años en torno al movimiento: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove szience* (*Diálogo y Demostraciones Matemáticas Concernientes Dos Nuevas Ciencias.*) Sacado de Italia, el libro fue publicado en Leiden (Holanda) en 1638, influyendo decisivamente en el pensamiento científico.

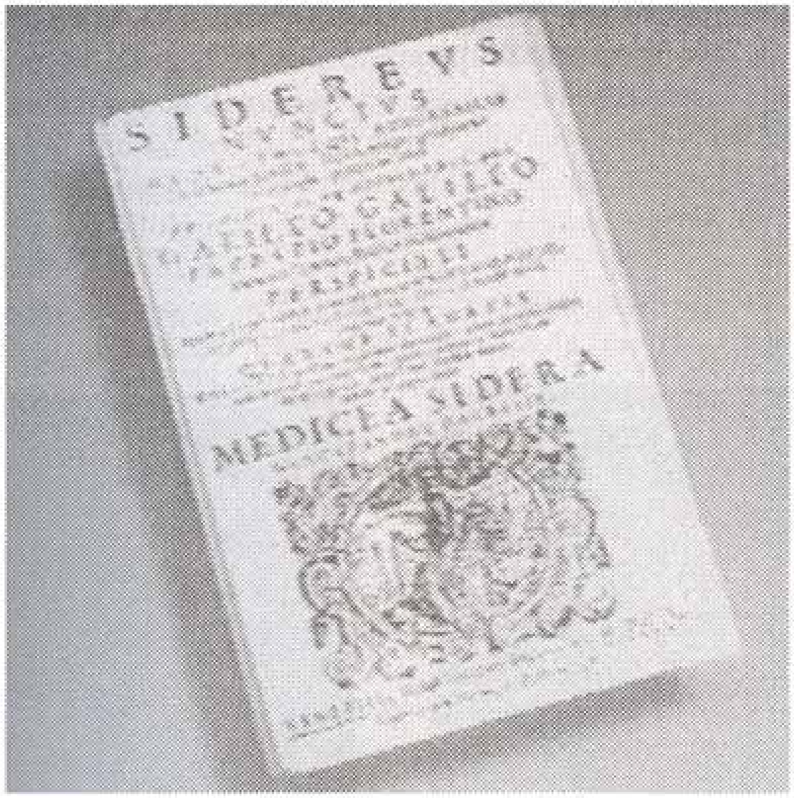


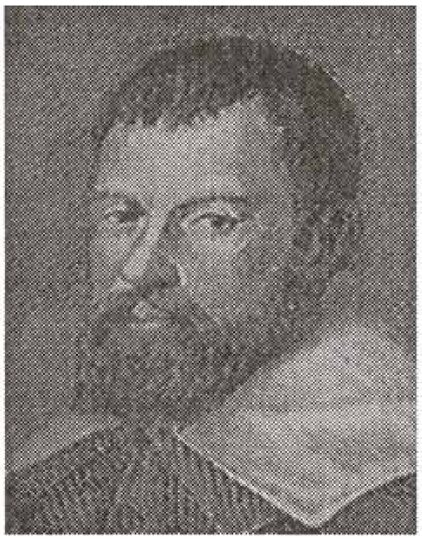
Foto 5.5. *Portada de una edición del libro* **Mensajero de las estrellas**.

Durante muchos años nada se pudo publicar a favor de Galileo. Fue hasta abril de 1757 que el Papa Benito XIV declaró nulo el decreto de 1616 que prohibía sostener o enseñar el sistema de Copérnico. En 1893 las opiniones de Galileo fueron aceptadas por la Iglesia Católica (Encíclica *Providentissimus Deus*, con el Papa León XIII). Ya, más recientemente, en los últimos años la Iglesia reconoció que el juicio de Galileo había sido un error.

La historia de intolerancia con el copernicanismo no fue exclusivo de la Iglesia Católica. Por ejemplo, el mismo Lutero se llegó a expresar así:

> "... las gentes prestan oido a un astrónomo advenedizo que trató de demostrar que la Tierra gira, no el cielo o el firmamento, el Sol

y la Luna. Quien quiere aparecer inteligente debe concebir algún sistema nuevo o que sea, por cierto, el mejor de ellos. Este necio desea dar vuelta a toda la ciencia astronómica; pero la Sagrada Escritura nos dice que Josué ordenó al Sol que se detuviera y no a la Tierra".



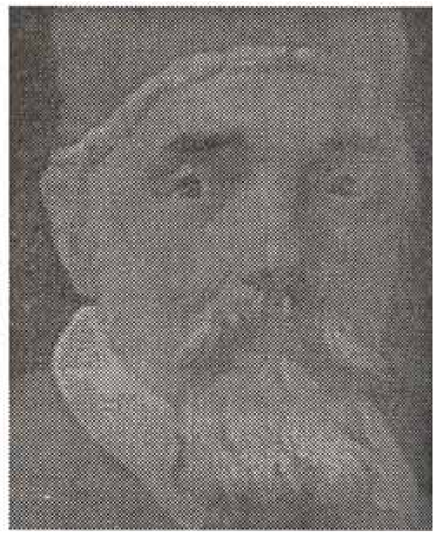


Foto 5.6. *Un retrato de Galileo Galilei (1564-1642), aun joven, y del cardenal jesuita Roberto Bellarmino (1542-1621)*

En 1679, la Facultad de Teología Protestante de Upsala (Suecia) condenó al científico Niels Celsius por defender y enseñar el sistema copernicano. Y el mismo Miguel Servet fue quemado vivo con todos sus libros, en Ginebra (Suiza) el 27 de octubre de 1553, y fue nada menos que Calvino el gran inquisidor en este terrible hecho.

Stephen Hawking resume esta historia sobre Galileo de la siguiente forma:

"El libro, *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo*, fue terminado y publicado en 1632, con el respaldo absoluto de los censores, y fue inmediatamente recibido en toda Europa, como una obra maestra, literaria y filosófica. Pronto el Papa, dándose cuenta de que la gente estaba viendo el libro como un convincente argumento en favor del copernicanismo, se arrepintió de haber permitido su publicación. El Papa argumentó que aunque el libro tenía la

> bendición oficial de los censores, Galileo había contravenido el decreto de 1616. Llevó a Galileo ante la Inquisición, que lo sentenció a prisión domiciliaria de por vida y le ordenó que renunciara públicamente al copernicanismo. Por segunda vez Galileo se sometió. Galileo siguió siendo un católico fiel, pero su creencia en la independencia de la ciencia no había sido destruída. Cuatro años antes de su muerte, en 1642, mientras estaba aún preso en su casa, el manuscrito de su segundo libro importante fue pasado de contrabando a un editor en Holanda. Este trabajo, conocido como Dos nuevas ciencias, más incluso que su apoyo a Copérnico, fue lo que iba a constituir la génesis de la física moderna.”

Stephen Hawking
Historia del tiempo
1988.

La lucha por una nueva cosmología fue un motor formidable no solo de la ciencia moderna sino especialmente del progreso de la libertad de pensamiento.

5.4. Ejercicios

FALSO O VERDADERO

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. En cada caso brinde una justificación breve de su respuesta

1. El heliocentrismo de Copérnico era heredero de las ideas de Aristóteles.
2. Copérnico defendió fuertemente el heliocentrismo desde joven.
3. La cosmología de Copérnico simplificaba las explicaciones de Ptolomeo.

4. Kepler descubrió que los planetas se trasladan alrededor del Sol con órbitas circulares.

5. Las dos primeras leyes de Kepler fueron aceptadas rápidamente por los intelectuales de la época.

6. Galileo contó con la ayuda del telescopio del Monte Palomar para hacer sus descubrimientos.

7. Para Aristóteles el Universo era limitado, incorruptible y geocéntrico.

8. Ya anciano y ciego, Galileo fue condenado a arresto domiciliario.

9. El *Diálogo concerniente a los dos sistemas del mundo* fue la obra revolucionaria de Copérnico.

PREGUNTAS DE DESARROLLO

1. Explique brevemente el modelo cosmológico de Ptolomeo. Ofrezca tres características del mismo.

2. Explique la "inconsistencia"del modelo de Ptolomeo con relación a la Luna.

3. ¿Por qué el modelo de Ptolomeo fue adoptado por la Iglesia Católica de aquella época?

4. ¿Qué era la *Teoría Heliocéntrica*? ¿En qué consistió el mérito principal de la obra de Copérnico?

5. Enuncie las tres Leyes de Kepler.

6. Explique el significado de la Tercera Ley de Kepler.

7. Mencione dos resultados de Galileo que pusieron en aprietos la visión cosmológica de la época. Explique en cada caso por qué.

8. Resuma la posición asumida por el cardenal jesuita Roberto Bellarmino con relación a la cosmología heliocéntrica.

9. Explique la posición de Lutero con relación a Copérnico (citada en este libro).

Foto 5.7. *Andreas Vesalio (1514-1564). Médico y anatomista flamenco. Padre de la Anatomía moderna. Otra dimensión de las nuevas ideas científicas.*

Capítulo 6

LOS MÉTODOS DE LA NUEVA CIENCIA

OBJETIVOS

- *Explicar las características fundamentales de la ciencia moderna.*
- *Señalar algunos aspectos de la metodología científica presentes en Galileo, Bacon y Descartes.*
- *Explicar el significado de los términos epistemológicos* empirismo *y* racionalismo.
- *Conocer el papel que jugaron las sociedades científicas en la construcción de la nueva ciencia.*

El principal problema del sistema escolástico era que las "verdades" pretendían ser obtenidas por la revelación divina y no por el ejercicio de la experiencia y la razón. Antes del *Renacimiento* los pocos intentos de acudir a la experiencia como fuente de conocimiento (por ejemplo, Roger Bacon) no contaron con mucho éxito y proyección. El método experimental integrado a la descripción matemática estableció el mecanismo motor de la ciencia moderna. De hecho, en la Antigüedad (se afirma que desde Hipócrates y, con más seguridad, con los discípulos del *Liceo* del período *alejandrino*) se habían realizado, pero no en las extraordinarias condiciones y con relación a la cuantificación matemática del siglo XVII.

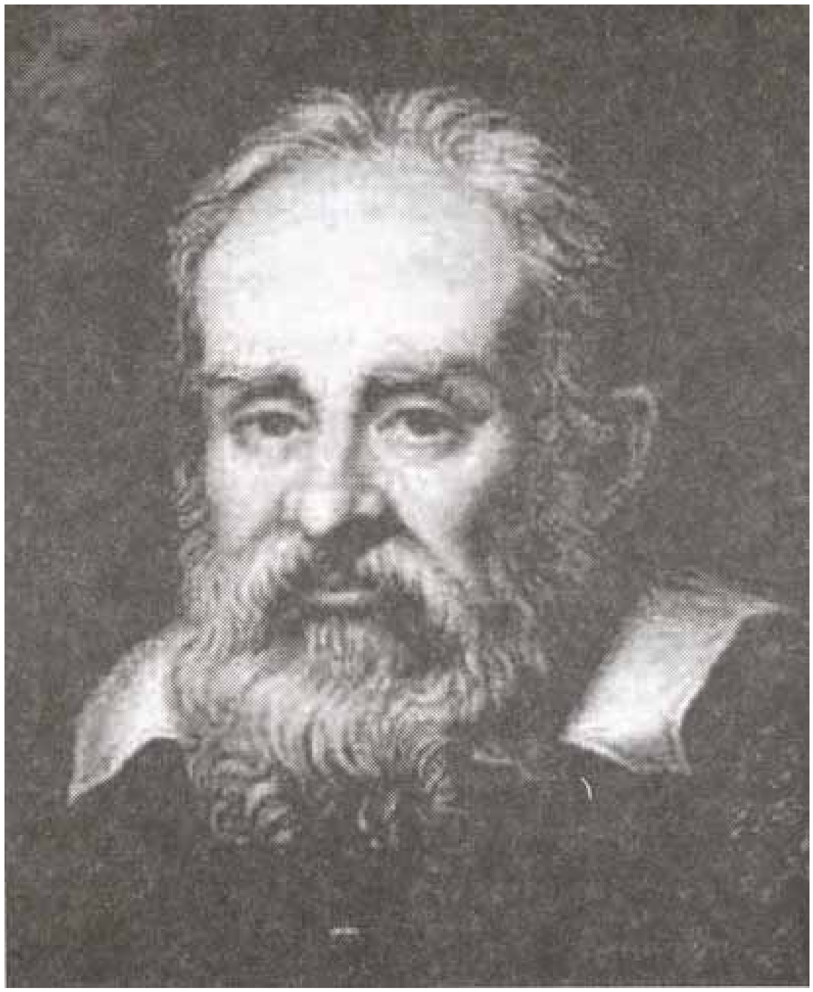


Foto 6.1. *La imagen más conocida de Galileo.*

6.1. Galileo y la nueva ciencia

Para la ciencia propiamente debe decirse que el trabajo fundamental de Galileo no fue, sin embargo, en la Astronomía. Fue en el estudio de la mecánica y la descripción matemática del movimiento. La cuantificación matemática de las proposiciones sobre la naturaleza representó una ruptura cognoscitiva con relación al modelo cualitativo, rígido y abstracto medieval y aristotélico. Pero, además, lo esencial fue la metodología que empleó en el proceso: la realización de experimentos controlados para demostrar sus teorías, o modificarlas.

La visión galileana del método de la ciencia fue de una gran profundidad teórica. No solo establecía que la naturaleza de las leyes del mundo se podían describir con las matemáticas, sino que los primeros principios o axiomas (de los que se podía partir para luego deducir las leyes matemáticamente) debían establecerse por la vía de la experiencia y la experimentación. En esto Galileo se separaba radicalmente no solo de los griegos y los medievales, sino también incluso del mismo Descartes (filósofo y matemático francés que estudiaremos luego). Pues, para Descartes y los pensadores previos a Galileo, los primeros principios debían ser extraídos de la mente. Durante siglos el método dominante fue el de acoplar y ajustar las observaciones empíricas a las ideas preconcebidas. Galileo rompió decisivamente con ese modelo, aunque en su caso el énfasis metodológico de su propio trabajo residiera más bien en la formulación matemática (teórica).

A manera de comentario, debemos señalar que todos estos grandes científicos (cuya obra luego retomaremos) Kepler, Galileo, Descartes, Huygens, Newton, eran (unos más otros menos) más bien matemáticos tratando de dar descripciones cuantitativas y matemáticas de la realidad física, y no tanto "experimentadores.ªctivos que encontraban a partir de su experiencia empírica las relaciones matemáticas. El punto de partida era más bien teórico.

El método experimental representaba, bien entendido, un peligro contra el orden intelectual aristotélico y escolástico tal vez más peligroso que el heliocentrismo. Galileo fue un auténtico profeta de la nueva ciencia, que ayudaría a echar por tierra la visión y el orden social anteriores.

Contemporáneo a Galileo fue Harvey (1578-1657) que intentó una explicación mecánica de la circulación de la sangre. En 1628 publicaba *Exencitatio anatomica de motu cordis et sanguinis in animalibus* que representaba (aunque en la tradición de Vesalio) una nueva anatomía y fisiología. Este estudio de la circulación de la sangre fue realizado en el marco de la metodología experimental y la visión mecanicista del mundo. [Debe mencionarse que fue el español Miguel Servet el descubridor de la circulación sanguínea].

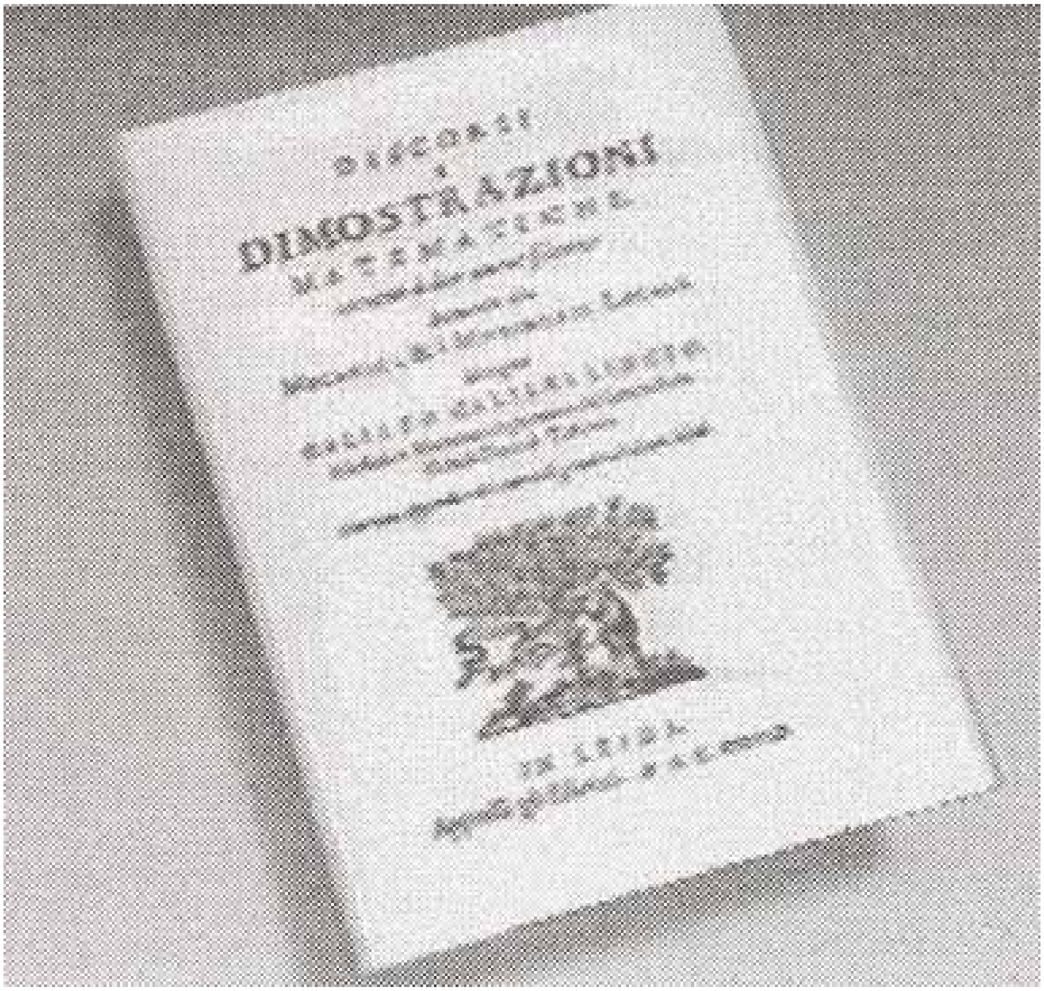


Foto 6.2. *Portada del libro de Galileo:* **Diálogo y Demostraciones Matemáticas Concernientes Dos Nuevas Ciencias**.

La descripción matemática

No puede dejar de subrayarse que el trabajo de Galileo no solo en astronomía (lo que le opuso al orden ideológico y político de su época), sino en la *formulación matemática* de las leyes del movimiento (que incluye el movimiento uniforme, el uniformemente acelerado, el de los proyectiles), expandió la idea de que *las leyes de la naturaleza son matemáticas* (lo que fue importante en el siglo XVII). Pero no de una manera dogmática y abstracta como en Platón (que más bien trataba de reducir la realidad a las matemáticas), sino como una armonía entre matemáticas y realidad establecida a partir del experimento y la observación crítica. Por ejemplo, si el círculo, figura mítica para los platónicos, no servía para explicar el movimiento planetario, entonces había que usar otra que correspondiera a la experiencia. Galileo subrayaba el papel central de las matemáticas, pero a su vez su carácter instrumental asociado a la experiencia controlada. Esto es esencial para la ciencia moderna.

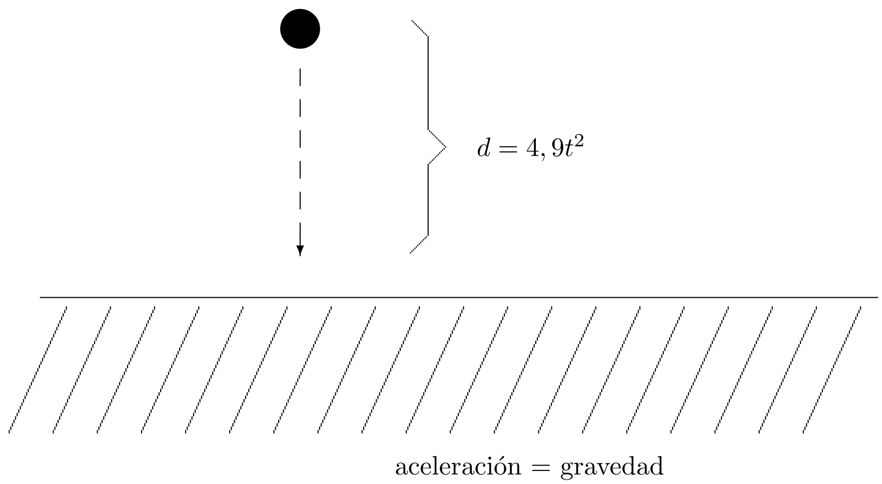


Figura 6.1. *La caída de los cuerpos*

Un ejemplo que ilustra el punto de vista –claramente revolucionario– de Galileo: Los seguidores del gran filósofo griego Aristóteles (y también los pensadores medievales) veían el asunto de la caída libre en forma cualitativa. Decían que los cuerpos caen porque tienen un peso y caen hacia la tierra porque todos los objetos buscan su *lugar natural* y el lugar natural de todos los cuerpos celestes es el centro de la Tierra. Según Aristóteles, además, los cuerpos caen con una velocidad que depende del peso que posee; un cuerpo más pesado cae más rápido que uno liviano. Galileo descubrió que ese razonamiento es incorrecto: los cuerpos caen a la misma velocidad (si se elimina la fricción del aire).

Este resultado ya era conocido en su época. De hecho, el matemático Simón Stevin (1546-1620), en la obra *Estática e Hidrostática* (1586), describió sus experimentos sobre la caída de los cuerpos. Galileo llegó a las mismas conclusiones que Stevin.

Hawking resume la situación de una manera muy clara:

> "La tradición aristotélica también mantenía que se podían deducir todas las leyes que gobiernan el Universo por medio del pensamiento puro: no era necesario comprobar por medio de la observación. Así nadie antes de Galileo se preocupó de ver si los cuerpos con pesos diferentes caían con velocidades diferentes. Se dice que Galileo demostró que las anteriores ideas de Aristóteles eran falsas dejando caer diferentes pesos desde la torre inclinada de Pisa. Es casi seguro que esta historia no es cierta, aunque lo que sí hizo Galileo fue algo equivalente, dejó caer bolas de distintos pesos a lo largo de un plano inclinado. La situación es muy similar a la de los cuerpos pesados que caen verticalmente, pero es más fácil de observar porque las velocidades son menores. Las mediciones de Galileo determinaron que cada cuerpo aumentaba su velocidad al mismo ritmo, independientemente de su peso. Por ejemplo, si se suelta una bola en una pendiente que desciende un metro por cada diez metros de recorrido, la bola caerá por la pendiente con una velocidad de un metro por segundo después de un segundo, de 2 metros por segundo después de dos segundos, y así sucesivamente, sin importar lo pesada que sea la bola. Por supuesto que una bola de plomo caerá más rápidamente que una pluma, pero ello se debe únicamente a que la pluma es frenada por la resistencia del aire. Si uno soltara dos cuerpos de plomo caerían con la misma rapidez.
>
> Las mediciones de Galileo sirvieron de base a Newton para la obtención de sus Leyes del Movimiento."

Stephen Hawking
Historia del tiempo
1988.

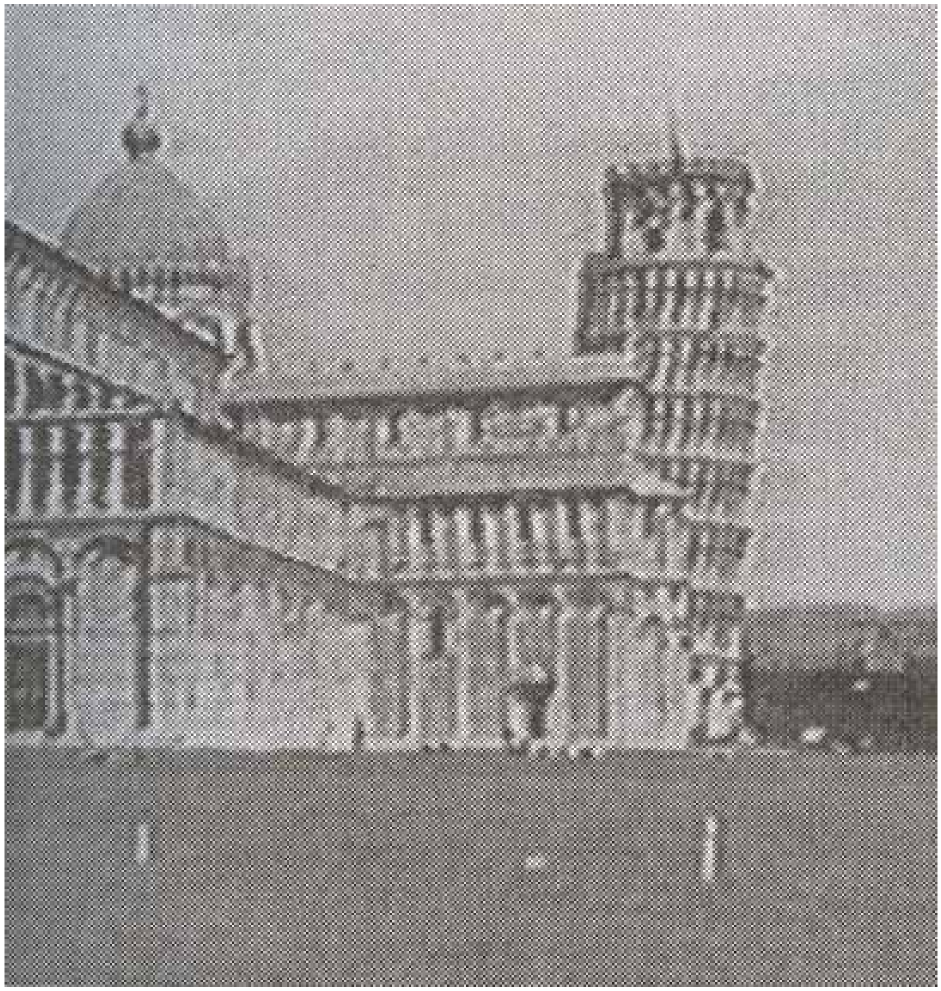


Foto 6.3. *La torre inclinada de Pisa, Italia.*

Lo importante en este asunto es que Galileo cuestionaba la metodología aristotélica y la sustituía por una experimental. Además, para Galileo el asunto se expresaba por ejemplo con las fórmulas: $v = 9,8 \times t$ o $d = 4,9 \times t^2$.

Términos como "lugar natural.º "esencias", "movimientos violentos y naturales", que usaban los aristotélicos *no son cuantificables. El método de Galileo ofrecía descripciones cuantificables del mundo que se podían contrastar a través de la experiencia.*

6.2. Otros profetas de la nueva ciencia: Bacon y Descartes

Otros importantes profetas de la nueva ciencia fueron el inglés Francis Bacon (1561-1626) y René Descartes (1596-1650).

Bacon: *profeta del método experimental*

Bacon fue un filósofo más que un científico. Fue Lord Canciller de Inglaterra bajo Jaime I. Fue de los primeros en tomar conciencia del significado de la nueva ciencia y se dedicó a la promoción del método experimental y a la búsqueda de instrumentos institucionales que fomentaran la ciencia. En 1605 publicó *El avance del saber* y en 1620 (parcialmente) el *Novum Organum*, en la que se establecía un análisis del método científico.

Bacon se enfrentó contra el fundamento del pensamiento aristotélico afirmando el método experimental con base en la inducción científica: el conocimiento debe ser producto de la repetición de observaciones de hechos particulares, que se organizan y analizan sistemáticamente. Bacon no quiso constituir un sistema filosófico. Asumió las tradiciones de Roger Bacon y otros primeros empiristas; y empujó cierto sentido utilitario en la nueva ciencia. De hecho, se esforzó por unificar las tradiciones eruditas y artesanales. Por otra parte, su empirismo no incluía privilegiadamente a las matemáticas y a la lógica deductiva. Esto último era una importante debilidad de su aproximación.

Descartes y la filosofía moderna

Descartes nació en La Haya, Turena (Francia) en 1596. Aunque se había graduado como abogado en la Universidad de Poiters, muy pronto inició el estudio de las matemáticas y no las abandonó incluso mientras participaba como soldado durante 9 años de su vida. La mayoría de sus obras fueron escritas durante los 20 años que vivió en Holanda. Aunque Descartes no quizo entrar en contradicción con la religión y las leyes de Francia, prefirió instalarse en Holanda (desde 1629) para trabajar con mayor libertad. Murió en Suecia en 1650, de neumonía, luego de haber estado un año en la corte de la reina Cristina.

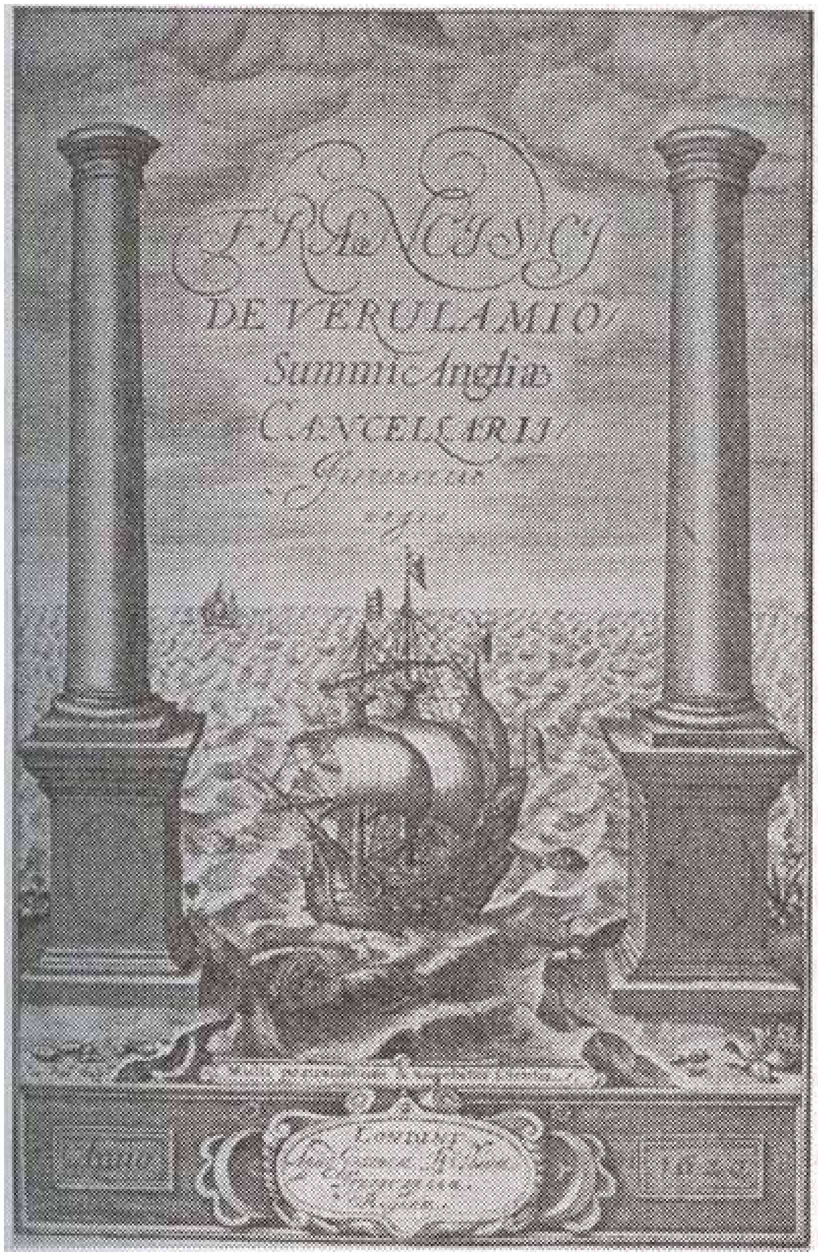


Foto 6.4. *Portada del libro de Francis Bacon* **Instauratio Magna (La Gran Instauración)** *de 1620. Nótese los pilares de Hércules en el frontespicio. Este libro incluía el* **Novum Organum**.

Descartes fue un gran filósofo, uno de los fundadores de la biología moderna, físico y matemático. Sus ideas fueron dominantes durante el siglo XVII. Sus dos primeros libros fueron *Regulae ad Directionem Ingenii ("Reglas para la dirección de la mente")* en 1628, y *Le Monde ("Sistema del mundo")* en 1634. La primera fue publicada póstumamente y la segunda Descartes no la publicó por temor a la persecución de la Iglesia Católica, pues explicaba cómo los planetas orbitaban alrededor del Sol.

Aunque escribió otras obras de interés, la más decisiva intelectualmente y más famosa fue el *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences ("Discurso del Método")*, en 1637. Este libro contiene 3 apéndices que no suelen incorporarse en las típicas ediciones modernas del libro: *La Géométrie, La Dioptrique* y *Les Méteores.*

A pesar de que Descartes era religioso devoto, e incluso había ofrecido una prueba de la existencia de Dios, la Inquisición consideró que sus obras debían castigarse y fueron colocados en el *Indice* de libros prohibidos poco tiempo después de su muerte.

El método cartesiano

Descartes rechazó la filosofía escolástica y buscó ofrecer un método diferente para establecer el conocimiento verdadero de la realidad: era en esencia el método de las matemáticas, o lo que él interpretaba como método de las matemáticas. Fundamentalmente el método establecía tres cosas:

- aceptar como cierto solo aquello que aparecía a la mente como cierto y verdadero;
- este proceso nos debe brindar ideas básicas, claras y distintas; y, finalmente,
- a partir de estas ideas y por medio de la deducción lógica se obtiene conocimiento verdadero.

Descartes utiliza entonces el principio de la evidencia de verdades innatas, claras y distintas. Por medio de la duda metódica exige evidencia racional para el conocimiento. Concluyó así varias verdades según él: la primera es la propia existencia ("pienso luego existo"), y la segunda es la percepción del mundo exterior (el mundo existe). La tercera es la comprensión de la estructura matemática del mundo (la estructura del mundo es matemática). Para

Descartes, que estas evidencias (según él) no sean producto de un genio maléfico, y sean entonces reales, lo garantiza la existencia de Dios. Es decir, para Descartes la existencia de Dios es el fundamento de sus evidencias racionales.

Foto 6.5. *René Descartes (1596-1650)*

Con lo anterior, Descartes ponía en relieve dos características de las matemáticas: *la axiomática, y la derivación lógica*. Pensaba que se podía aplicar a todas las áreas del conocimiento y, precisamente, los 3 apéndices mencionados antes buscaban ser un ejemplo de la aplicación de su método.

El *mecanicismo* y la influencia cartesiana

Se añade a su método filosófico y científico la defensa del *mecanicismo*, es decir la teoría que afirma que todos los fenómenos de la naturaleza se pueden describir a través de las leyes de la mecánica. El mecanicismo ha ocupado un papel muy importante en la cultura y ciencia occidentales hasta nuestros días.

Descartes se separó también de las ideas dominantes en su tiempo al afirmar que la Tierra y los astros (la Tierra y el cielo) son de la misma naturaleza y, además, que el universo era "indefinidoz admitía alteraciones momentáneas de las leyes de la naturaleza. Para la tradición aristotélica y escolástica, el mundo era creado y se mantenía inmutable, se conservaba perpétuamente. Descartes además afirmaba que existía una separación entre los dominios de la ciencia y la fe: los argumentos de fe y autoridad deben estar excluidos del razonamiento crítico y científico.

El cartesianismo tuvo mucha influencia en Francia y Europa. Para el entierro de Descartes, a pesar de haber sido religioso e incluso haber ofrecido una demostración de la existencia de Dios, los jesuitas lograron que el Rey de Francia prohibiese la usual oración pública del canciller de la Universidad de París en elogio al gran filósofo. También se prohibió entonces la enseñanza del cartesianismo en las universidades francesas.

Descartes promovió más bien el método deductivo y el poder de la razón. Como matemático estableció la geometría analítica (simultáneamente con Fermat) que sería un fundamento del Cálculo infinitesimal. Lo más importante de sus ideas físicas fue la concepción mecanicista del mundo. De hecho, reduciendo el espacio a la extensión y al movimiento establece una cosmología regulada por las leyes de la mecánica, y luego va a tratar de reducir esta última a la geometría.

Nuevas tradiciones en los métodos de la ciencia

Descartes atacó el modelo organicista de la Escolástica. Lo que estableció fue, entonces, una descripción mecánico-matemática del universo que influiría notablemente en el resto del siglo XVII y en el siguiente. Descartes, a diferencia de Bacon, sí construyó un sistema filosófico. Buscó crear un sistema alternativo al aristotélico y escolástico, que integrara de alguna forma la nueva ciencia.

El caso es que a partir de las ideas de Bacon y Descartes se generaron dos tradiciones en la filosofía (la metodología) de la ciencia moderna: el *empirismo* y el *racionalismo*. En la primera se enfatiza la experiencia sensorial como fuente de verdad, y la razón en la segunda. En la práctica la tradición racionalista ha ido cediendo terreno a la empirista. Sin embargo, las discusiones epistemológicas sobre este asunto todavía no han sido agotadas.

Con las ideas de Galileo, Bacon y Descartes se edificó una parte de las bases metodológicas del camino por el que transitarían los esfuerzos científicos siguientes. La visión que ofrecían se puede resumir: método experimental, descripción matemática y comprensión mecanicista del universo.

Hay que comprender aquí que no se trató solamente de oponer la experimentación a la especulación. Dentro de la visión aristotélica que sustentaba el orden intelectual anterior cabía lugar para la experiencia. Galileo además de afirmar la experimentación, introdujo una condición precisa: la relación con las matemáticas. Lo que aparece como esencial es, entonces, la descripción matemática de los procesos físicos. Es una visión intelectual de la física y de la ciencia en general diferente a la aristotélica (Aristóteles no introdujo en su física y cosmología la intervención matemática); una visión cuantitativa. Es esta visión la que asumirán Newton y los principales científicos de los siglos siguientes, y que hoy es parte común de lo que conocemos como ciencia.

Bacon hizo de la experiencia el punto medular de la nueva ciencia pero descuidó el papel jugado por las matemáticas. Descartes afirmó una visión matemática y un carácter mecanicista de la realidad, pero eliminó prácticamente las referencias a la experiencia.

Se podría decir que las visiones metodológicas de Bacon y Descartes encuentran convergencia y complementariedad en la actitud metodológica de Galileo.

6.3. Las sociedades científicas

La lucha por la nueva ciencia en el siglo XVII sería acompañada de los mecanismos y recursos de otras luchas políticas. Galileo usó "militantemente" su telescopio, y buscó dotarse de un mayor respaldo social al escribir en italiano y no, como era común, en latín culto.

Bacon entendió con lucidez la necesidad de la organización de los intelectuales y científicos, así como la institucionalización y patrocinio de la ciencia.

Es con este espíritu que se debe entender la función de la *Royal Society* de Londres (1662) y la *Académie Royale de Sciences* de Francia (1666). La *Royal Society* fue producto de un largo proceso de organización de hacedores y amigos de la ciencia que de una manera práctica tuvo el sello personal de John Wilkins (1614-1672). Wilkins había creado un grupo desde 1644 que se llamó a sí mismo "Colegio Invisible"; y más tarde crearía la "Sociedad filosófica"que duraría hasta 1690.

También es importante señalar que desde 1579 ya se había fundado el *Gresham College*, el centro científico de Inglaterra que también sería la sede de la *Royal Society*. La *Royal Society* y la *Académie* en realidad funcionaron activamente hasta más o menos 1690.

En Italia la primera sociedad notable fue la *Academia Secretorum Naturae*, de Nápoles (alrededor de 1560); la siguiente fue la *Academia dei Lincei* en Roma, que estuvo activa entre 1601 y 1630 bajo el patrocinio del duque Federico Cesi (entre sus miembros estaba el mismo Galileo). La última de esas sociedades científicas Italianas fue la *Academia del Cimento* de Florencia, entre 1657 y 1667 (ésta incluyó entre sus miembros a Vincenzo Viviani 1622-1703, y a Torricelli, ambos discípulos de Galileo)

En Francia, antes de la fundación de la *Académie* varios grupos se reunían: en Aix, en la casa del padre Claude de Peiresc (1620); en París, en la celda de Marin Mersenne (entre ellos Desargues, Descartes, Gassendi, Fermat y Pascal) y luego también en la de Montmor. La *Académie* contó con el apoyo de Luis XIV.

En Alemania se había establecido la *Societas Ereunética* en Rostock en 1622 por obra del botánico Joachim Jung, y también el *Collegium Curiosum sive Experimentale* en 1672 en Altdorf, sin embargo en estos casos no tuvieron mucha trascendencia. En 1700 se fundó la Academia de Ciencias de Berlín, que tuvo como primer presidente nada menos que a Leibniz.

Tiempo después, en 1724, Pedro el Grande de Rusia fundó la Academia de Ciencias de San Petersburgo.

Los nuevos círculos, organizaciones y sociedades que impulsaban las nuevas ideas eran una alternativa frente a las universidades, dogmáticas y oscurantistas, fuertemente controladas todavía por el viejo orden intelectual y la organización escolástica. Para que se tenga una idea de lo atrasadas que eran las universidades de esta época, baste mencionar que Cambridge (donde estudió Newton) entre 1600 y 1630 no tuvo ningún profesor de matemáticas. Durante las primeras décadas del siglo XVII en Inglaterra el currículo no incluía matemáticas. En las universidades francesas la situación no era muy diferente.

Aparte de favorecer el contacto directo entre los científicos de la época, y para promover el intercambio de las ideas, estas sociedades crearon diferentes revistas académicas. La primera revista, aunque no fue creada por una sociedad sirvió a los mismos propósitos: *Journal des Savants* se inició en 1665. También se creó en el mismo año *Philosophical Transactions of the Royal Society*. La *Académie* inició *Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématique et de Physique*. También publicó *Mémoires de Mathématique et de Physique Présentés à l'Académie Royale des Sciences par Divers Sçavants et Lus dans ses Assemblées*. Ya hemos mencionado el *Acta Eruditorum* fundada por Leibniz en 1682. La Academia de Berlín apoyó *Histoire de l' Académie Royale de Sciences et Belles-lettres*.

Estas sociedades y academias apoyarían el trabajo de los científicos y matemáticos de la época no solo con el desarrollo de la comunicación, sino pagando investigaciones, ofreciendo premios y defendiendo la labor científica que todavía no constituía una profesión reconocida socialmente.

La *Revolución científica* se establecería sobre los hombros del *Renacimiento*, en una revolución intelectual que impulsó a su vez importantes transformaciones políticas y económicas. Las teorías de Newton serían introducidas en Francia por Voltaire y usadas políticamente contra el orden establecido. La Ilustración del siglo XVIII sería heredera directa del *Renacimiento* y la *Revolución científica*.

6.4. Ejercicios

FALSO O VERDADERO

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. En cada caso brinde una justificación breve de su respuesta

1. Galileo le dio prioridad a la experimentación más que a las matemáticas.
2. Según Galileo los cuerpos caen con igual velocidad en busca de su "lugar natural".
3. Bacon construyó un sistema filosófico.
4. Según Descartes, la axiomática era central en las matemáticas.
5. Descartes promovió el mecanicismo en la física y la cosmología.

6. Los científicos revolucionarios fueron respaldados por las universidades europeas.

PREGUNTAS DE DESARROLLO

1. ¿Cuáles son los dos principales elementos de la ciencia moderna reunidos en la obra de Galileo?
2. Explique qué quiere decir que los primeros principios no se extraen de la mente, en la metodología de Galileo.
3. ¿Cómo analizaban la caída libre Galileo y Aristóteles? Explique.
4. ¿Cuál era la principal idea de Francis Bacon acerca del método de la ciencia?
5. ¿Cuál era el método que Descartes usó para separarse de la filosofía escolástica?
6. Mencione las dos características que Descartes enfatizaba más en las matemáticas.
7. Mencione el significado de empirismo y racionalismo.
8. ¿Por qué piensa usted se crearon las sociedades científicas?
9. Comente brevemente las ideas expresadas en el siguiente párrafo:

> “La *Revolución científica* se establecería sobre los hombros del *Renacimiento*, en una revolución intelectual que impulsó a su vez importantes transformaciones políticas y económicas. Las teorías de Newton serían introducidas en Francia por Voltaire y usadas políticamente contra el orden establecido. La Ilustración del siglo XVIII sería heredera directa del *Renacimiento* y la *Revolución científica*.”

Capítulo 7

PROBLEMAS PARA LAS MATEMÁTICAS DEL SIGLO XVII

OBJETIVOS

- *Explicar algunas de las limitaciones de la geometría euclídea frente a las nuevas condiciones culturales, sociales, económicas y cognoscitivas que fueron creándose especialmente durante el Renacimiento.*
- *Conocer los principales asuntos que motivaron la creación de los métodos infinitesimales.*

La discusión sobre la naturaleza del infinito, el continuo, los indivisibles e infinitesimales habían continuado con los escolásticos en la Edad Media y más tarde el mismo Galileo Galilei conoció la multitud de paradojas heredadas de la época medieval.

Con el *Renacimiento* y luego la *Revolución Científica* en el siglo XVII, la invención profusa de nuevos resultados en la astronomía y física presionaron a los matemáticos y científicos en la dirección de encontrar los métodos matemáticos apropiados que describen el movimiento de longitudes, áreas, y volúmenes.

Kepler desarrolló sus métodos infinitesimales en respuesta a las necesidades prácticas de los medidores de vino. Galileo usó sus indivisibles para estudiar el movimiento de los cuerpos en caída libre, Huygens para investigar el movimiento circular y Pascal con Leibniz estudiando el principio de momentos. Los diversos estudios en geografía, cartografía, en la medición, supervisión y navegación de esta época presionaban a los matemáticos de muchas maneras. Las necesidades prácticas estimulaban los métodos de cálculo y cómputo dirigidos hacia los conceptos matemáticos modernos (como el de función).

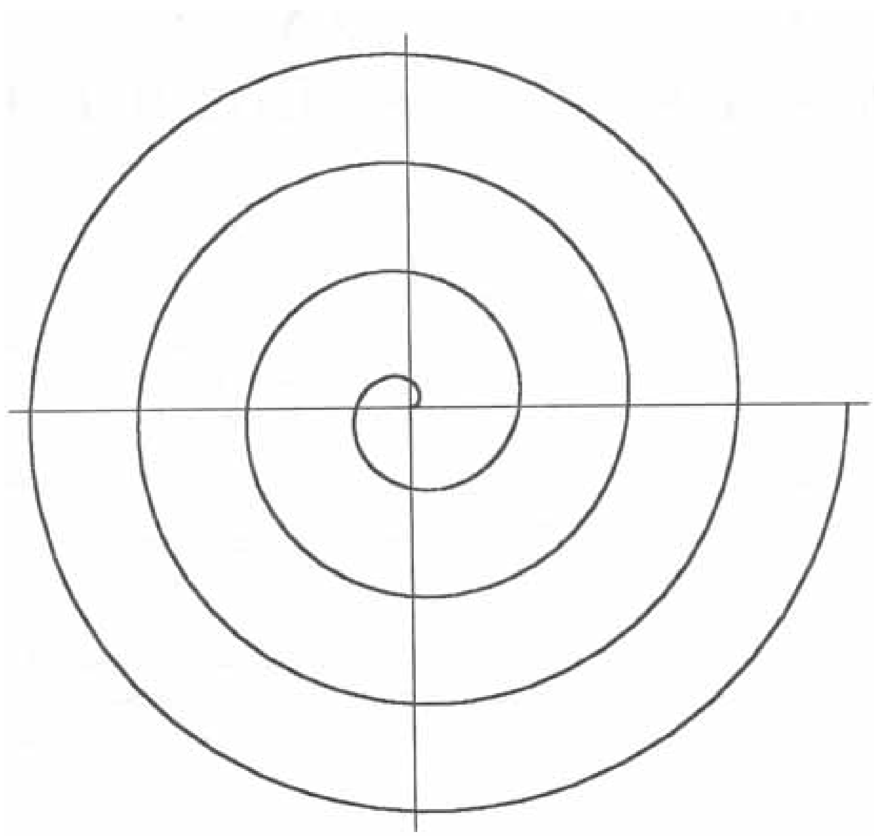


Figura 7.1. *La Espiral de Arquímedes.*
Ecuación polar: $r = a\theta$

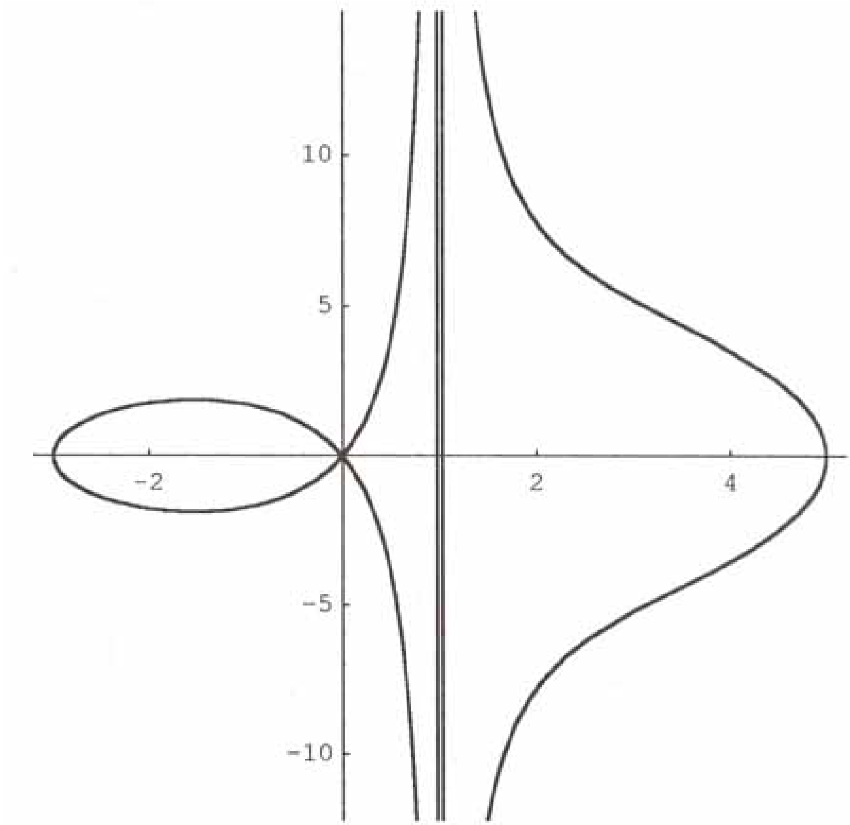


Figura 7.2. *La Conchoide de Nicomedes.*
Ecuación cartesiana: $(x-b)^2(x^2+y^2)-a^2x^2=0$.

7.1. Los límites de la matemática antigua

La geometría euclideana que dominó la historia de las matemáticas por tantos siglos codificaba a su vez un esquema de rigor y deducción lógicas que, y a pesar de su importancia científica, era insuficiente para integrar los métodos infinitesimales. La geometría euclideana era esencialmente estática y excluía, por ejemplo, el elemento de tiempo en los fenómenos físicos a los que respondía. El álgebra y la aritmética griegos fueron extraordinariamente geometrizados, pero precisamente por una geometría estática.

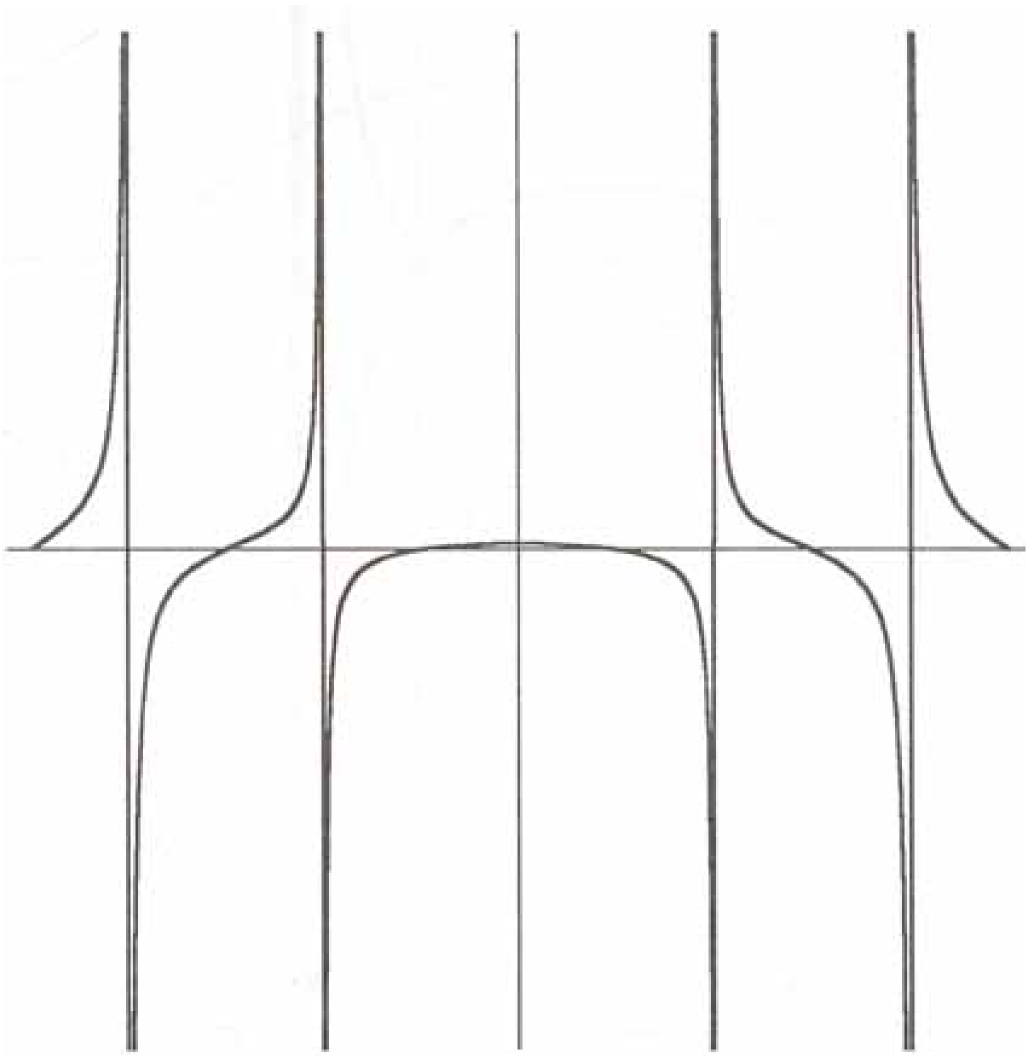


Figura 7.3. *La Cuadratriz de Hippias.*
Ecuación cartesiana: $y = x\cot(\frac{\pi x}{2a})$.

Los fenómenos cinemáticos no podían ser integrados fácilmente por la geometría tradicional antigua. La *espiral* de Arquímedes, la *cuadratriz* de Hippias, la *conchoide* de Nicomedes, son curvas definidas en términos de movimiento y no encontraban su lugar. Igual sucedía con muchos de los métodos usados por Pappus en sus *Collectiones* (*Colección Matemática*). Mucho menos podía integrarse en este marco teórico el movimiento de los cuerpos físicos, el cambio espacial, temporal, la variación de las cantidades y demás asuntos que el siglo XVII puso delante de la comunidad matemática y científica. Por eso es que la utilización de los métodos infinitesimales se hizo en cierta forma separándose de los estándares (incluso de rigor y deducción lógica) que estableció la geometría euclidiana. Por eso cuando se estudia los trabajos de Kepler, Galileo, Wallis, e incluso de Newton y Leibniz, se siente a veces lo intuitivo, vago, impreciso y lo "poco riguroso".

El Cálculo Diferencial e Integral nació en parte como respuesta a asuntos que fueron abordados por los griegos antiguos (curvas no estáticas dadas por el movimiento de un punto, o procedimientos que usaban procesos de naturaleza infinita). Sin embargo, fueron los problemas planteados por las ciencias físicas, especialmente durante los siglos XVI y XVII, los que motivaron respuestas más apropiadas y, sobre todo, de una generalidad y aplicación mayores.

7.2. Cuatro problemas fundamentales

Se suele identificar cuatro asuntos centrales:

- El primero de ellos fue la determinación de la *velocidad y la aceleración instantáneas* de un cuerpo, dada la distancia en función del tiempo. De la misma forma, si se tenía la velocidad o la aceleración, se trataba de encontrar la distancia o la velocidad respectivamente en un momento determinado. Para los matemáticos de la época resultaba claro que la distancia recorrida dividida por el tiempo transcurrido no brindaba la velocidad de un cuerpo cuya velocidad se sabía variaba en cada instante. De la misma manera, con una velocidad variable no se podía calcular la distancia recorrida con la fórmula, multiplicando la velocidad por el tiempo.

- El segundo problema era el de determinar *la tangente* a una curva en un punto. Resolver este asunto era importante, por ejemplo, si se quería determinar una *dirección* de un cuerpo cuya trayectoria se puede describir por una curva y una ecuación matemática. Calcular rectas tangentes y normales a curvas también tenía interés para los nuevos desarrollos en la descripción de las leyes del comportamiento de la luz y, en particular, del diseño de lentes y también era un asunto que nacía de la evolución propia de la nueva geometría que describía las curvas con coordenadas.

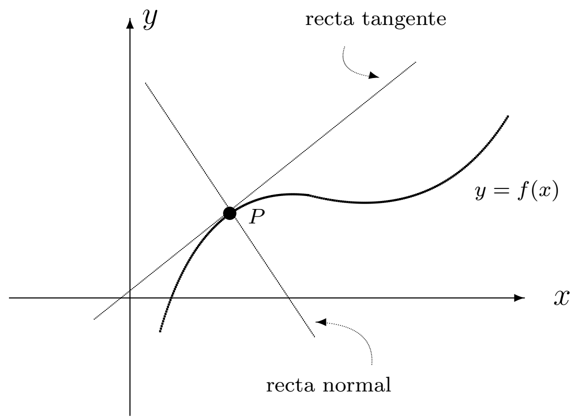


Figura 7.4. *Cálculo de rectas tangentes y normales a una curva.*

- Otro de los asuntos planteados era encontrar *el máximo o el mínimo* de una función. Por ejemplo, si se tenía la ecuación que describía el movimiento de un planeta alrededor del Sol, resultaba de interés calcular las distancias máxima y mínima que asumía el planeta en su movimiento traslacional. Otro ejemplo, calcular la inclinación de un cañón para que una bala golpee a la máxima distancia posible. Este último es un asunto que Galileo lo resolvió a principios del siglo XVII, determinando que debía ser 45º (en el vacío); también estudió otros asuntos relacionados, pero no poseía un resultado general.

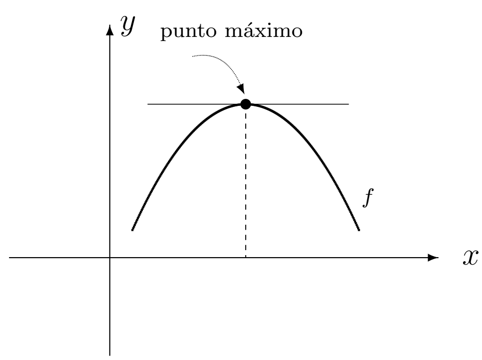


Figura 7.5. *Cálculo de valores máximos o mínimos a una curva.*

- El cuarto problema era cómo encontrar las longitudes de curvas, áreas y volúmenes determinadas por curvas o superficies, y centros de gravedad de cuerpos. Por ejemplo, dada una curva que describía el movimiento de un planeta, ¿cómo calcular la distancia recorrida o el área "barrida" por el planeta en un intervalo definido? Este último problema es el de mayor "edad" pues de formas diferentes fue abordado desde la Antigüedad. Podemos decir que antes del siglo XVII, calcular áreas, longitudes y volúmenes era el asunto que más resultados generó (con relación a los temas del Cálculo). Los otros asuntos (velocidades instantáneas, tangentes, máximos y mínimos) empezaron a tener sentido y ocupar la atención de los matemáticos en los siglos XVI y XVII, especialmente cuando se logró tratar los problemas geométricos con métodos algebraicos.

Estos asuntos fueron estudiados por los mejores matemáticos de la época, quienes realizaron significativas contribuciones, pero no fue sino con Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz que se coronarían exitosamente todos los esfuerzos. Debe reconocerse que su trabajo representó la culminación de un largo proceso de resultados matemáticos y científicos obtenidos durante más de dos mil años. Las principales ideas del Cálculo fueron consideradas por los griegos antiguos, por los matemáticos medievales y del *Renacimiento* y, finalmente, por los de la llamada *Revolución Científica*. Podemos decir que Newton y Leibniz construyeron un método general para la derivación e integración, con la comprensión plena de que ambos eran procesos operatorios inversos referidos a la misma situación, y sentaron los fundamentos conceptuales y de notación (en el caso de Leibniz) para el trabajo de los matemáticos siguientes.

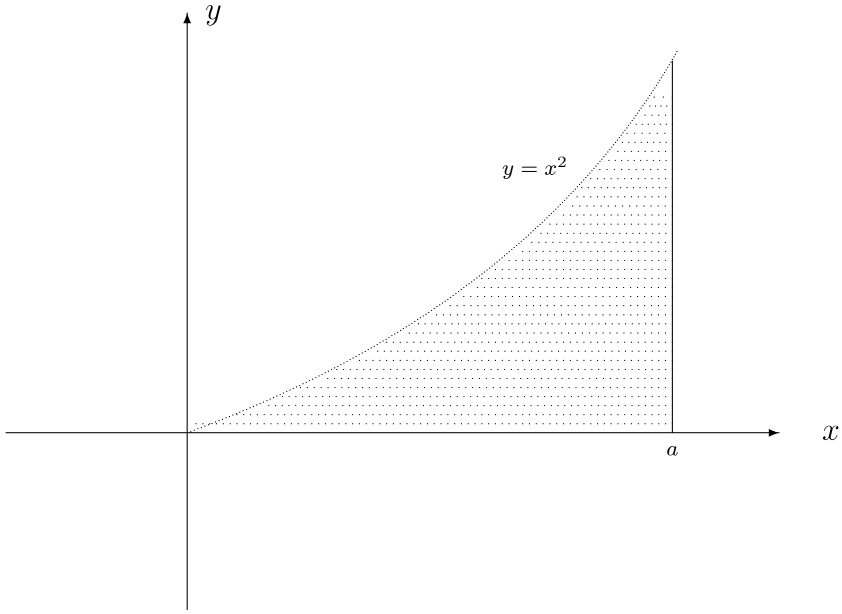


Figura 7.6. *El área bajo la curva parabólica* $y = x^2$.

7.3. Las matemáticas del siglo XVII

El desarrollo del Cálculo fue posible, sin embargo, gracias al desarrollo de conceptos, métodos y resultados nuevos o más generales que se dieron como parte de esta Revolución Científica. Para que se tenga una clara idea de lo que representó para las matemáticas esta época intelectual podemos citar las principales creaciones: la geometría analítica de Descartes y Fermat (1637 y 1629 respectivamente), el Cálculo de Newton (1666, 1684) y Leibniz (1673, 1675), el análisis combinatorio (1654), y en particular la teoría matemática de probabilidades, de Fermat y de Pascal, la aritmética superior (1630-1665) por Fermat, la dinámica de Galileo (1591,1612) y de Newton (1666, 1684), y la gravitación universal (1666,1684-7) de Newton. Además se puede citar la geometría proyectiva de Desargues y Pascal (1636-9) y el comienzo de la lógica simbólica (1665 y 1690) por Leibniz.

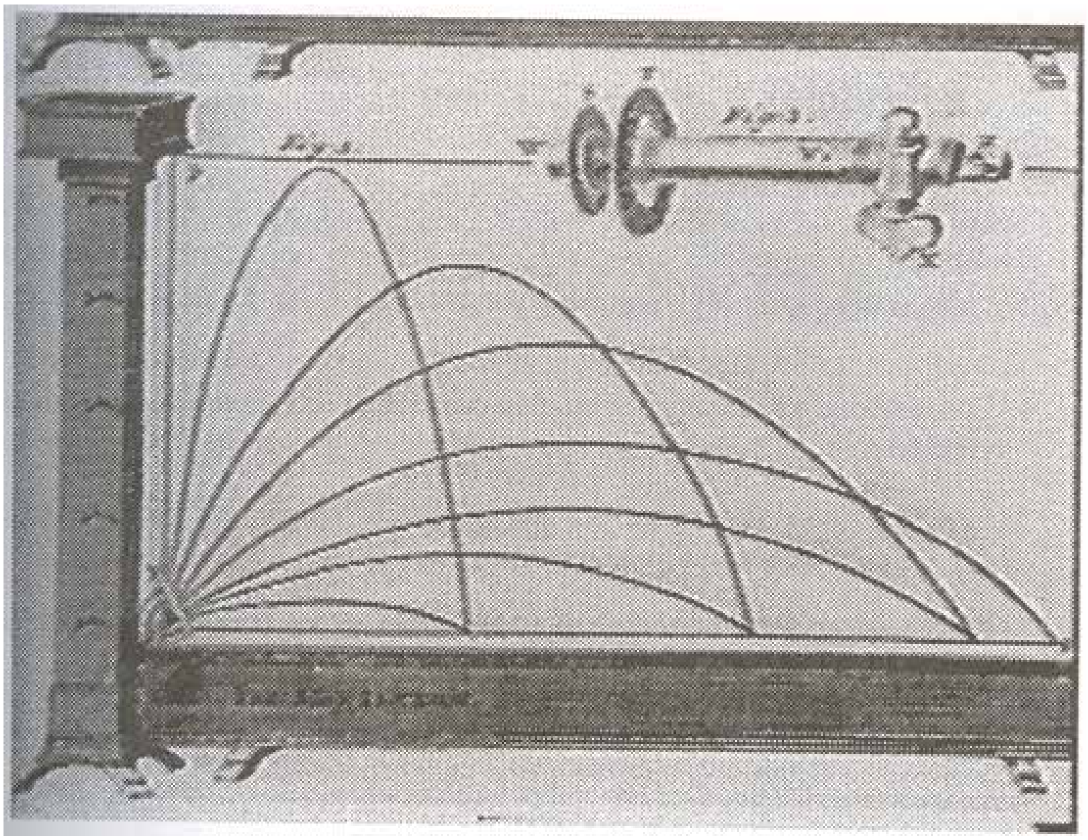


Figura 7.7. *Representación del movimiento parabólico de los proyectiles (año de 1648).*

En la Revolución Científica del XVII la revolución en las matemáticas fue un componente central. En un tiempo relativamente corto se crearon buena parte de los rudimentos de la matemática moderna. Los nuevos métodos y resultados tendrían una repercusión inmediata en astronomía y mecánica y, después, en el resto de las ciencias.

Un lugar especial ocupa la geometría analítica, que estableció la posibilidad de un lazo entre los conceptos intuitivos de las cantidades que varían continuamente (provenientes de la realidad física) y la geometría de los griegos. Esto fue vital para el Cálculo.

7.4. Ejercicios

FALSO O VERDADERO

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. En cada caso brinde una justificación breve de su respuesta

1. Los métodos infinitesimales estaban contenidos íntegramente en la geometría clásica.
2. Los problemas planteados por los científicos empujaron hacia la creación del Cálculo diferencial e integral.
3. Distancia recorrida entre tiempo transcurrido ofrece la velocidad instantánea.
4. Encontrar el máximo y mínimo de una función era importante a pesar de no tener aplicaciones en la astronomía de la época.
5. El problema de encontrar la recta tangente fue desarrollado antes del cálculo de áreas.
6. Newton y Leibniz sabían que la integración y la derivación eran procesos inversos.

PREGUNTAS DE DESARROLLO

1. Explique cuáles eran las principales debilidades de la geometría euclídea para servir a la nueva ciencia en el siglo XVII.
2. Explique qué significa determinar la velocidad y la aceleración instantáneas.
3. ¿Cuál era el "problema" de "la tangente"?

Capítulo 8

GEOMETRÍA ANALÍTICA Y CÁLCULO DE TANGENTES

OBJETIVOS

- *Breve descripción de la geometría analítica.*
- *Descripción de la contribución de Apolonio y Oresme a la geometría.*
- *Síntesis del método de Descartes en la geometría analítica.*
- *Descripción de algunas de las contribuciones de Fermat a la geometría analítica.*
- *Estudio breve del concepto de función.*
- *Descripción del problema de los máximos y mínimos.*
- *Explicación del problema de la tangente.*

Aunque pueda considerarse como un resultado de no tanta complejidad teórica y, más bien, llama la atención que no se haya creado anteriormente, fue decisivo para el desarrollo de las matemáticas modernas. Podría decirse que sin la geometría analítica no hubiera sido posible el Cálculo.

8.1. La geometría analítica

Comencemos por una breve explicación de lo que significa la geometría analítica. Hoy en día es común el uso de coordenadas rectangulares para representar los puntos:

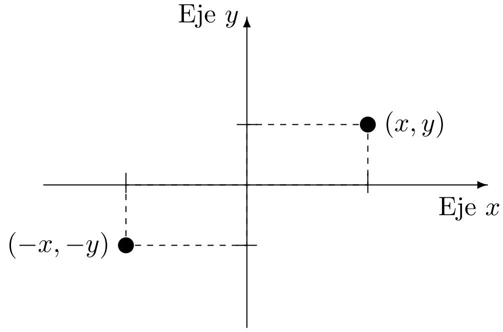


Figura 8.1. *Representación cartesiana*

Una elipse

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

por ejemplo, se representaría así:

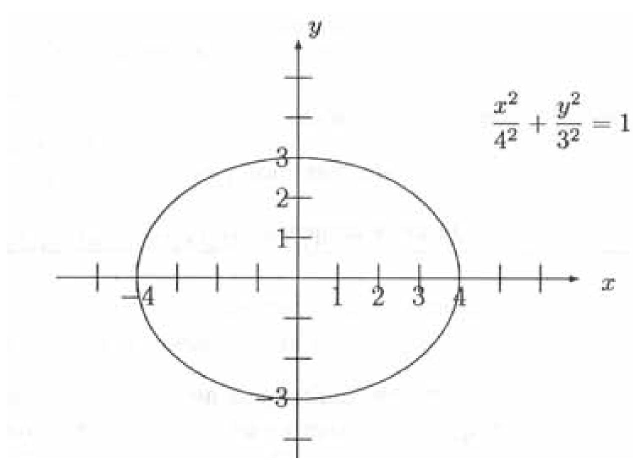


Figura 8.2. *La elipse*

Los puntos (x, y) del plano que satisfacen la ecuación son los que están en la elipse, y si están en la elipse: satisfacen la ecuación.

En la Antigüedad, la elipse se estudiaba sin representación algebraica como la intersección entre un cono circular recto y un plano inclinado.

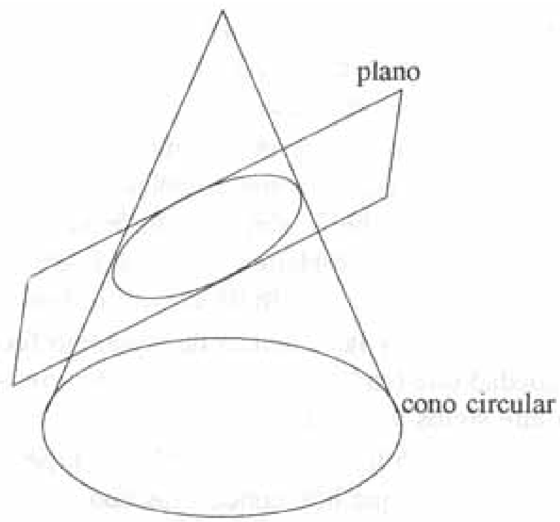


Figura 8.3. *La elipse*

Apolonio

Para algunos historiadores, Menecmo (discípulo de Eudoxo) conocía la geometría analítica, pero esto es poco probable dadas las limitaciones del álgebra de los griegos. Tal vez sea interesante, sin embargo, recordar que es a Menecmo a quien se le atribuye el descubrimiento de la elipse. Esta la encontró en una investigación que buscaba estudiar las propiedades de la parábola y la hipérbola.

Más cerca de la geometría analítica puede decirse que estuvo Apolonio de Perga en su obra las *Cónicas*. Se supone que vivió entre los años 262 y 190 a. C. (aproximadamente). Apolonio usó rectas de referencia para sus puntos y, también, un diámetro y una tangente a ésta para expresar esos puntos. Si se tenía una curva usaba distancias a lo largo del diámetro y a partir del punto de tangencia obtenía lo que llamaríamos hoy la coordenada en el eje de las abcisas. Y, también, trazaba segmentos paralelos a la tangente que eran interceptados por el diámetro y la curva, lo que serían las ordenadas de hoy en día.

Apolonio daba entonces las ecuaciones de la curva con estos recursos. Debe decirse, sin embargo, que para Apolonio la curva determinaba una representación algebraica específica y particular. Pero la viceversa no. Es decir, la curva no salía de una ecuación dada. La preeminencia "existencial.[er]a de la curva geométrica. Esto le impediría alcanzar la generalidad de los recursos algebraicos en la geometría, ese ir de la geometría al álgebra y del álgebra a la geometría que es la esencia de la moderna geometría analítica.

No obstante, la profundidad de una obra como las *Cónicas* es extraordinaria. Del original de la misma en griego se conserva solamente la mitad (4 de 8 libros). Sin embargo, un matemático árabe Thabit ibn Qurra había traducido al árabe 3 de los libros faltantes. Fue Edmund Halley (un amigo cercano de Newton) quien publicaría en 1710 una traducción al latín de estos 7 libros.

Los *Elementos* de Euclides y las *Cónicas* de Apolonio fueron los libros matemáticos de la Antigüedad que (cada uno en su género) tuvieron históricamente un mayor impacto durante siglos y siglos.

Fue Apolonio quien utilizó los nombres de elipse, hipérbola y parábola para designar las secciones cónicas que hoy conocemos con esos términos.

Oresme

El proceso histórico posterior no fue tan rápido. Giovanni di Casoli, Oresme y otros ya habían estudiado los conceptos de tiempo, rapidez, distancia y velocidad instantánea y colocado un cierto nivel de representación gráfica.

Oresme para representar la velocidad que cambia con el tiempo representaba el tiempo a lo largo de una línea horizontal (que llamó *longitud*), y las velocidades en varios momentos con líneas verticales (*latitudes*).

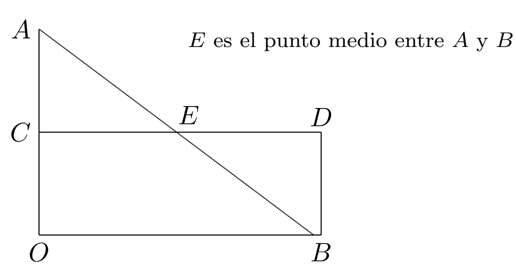


Figura 8.4. *Oresme*

Este diagrama representa la velocidad decreciente de manera uniforme de $\overline{OA}$ a $\overline{OB}$ (donde es 0). Oresme señalaba que el rectángulo OBDC tiene la misma área que OAB. Faltaría más tiempo para llegar al sistema de coordenadas que conocemos, pero el camino señalado era claro: asociar conceptos físicos y curvas matemáticas. La descripción del movimiento se puede hacer por curvas; y la viceversa: el estudio de curvas da conocimiento sobre el movimiento.

Con la representación gráfica era posible para Galileo sacar conclusiones acerca del movimiento de proyectiles o para Torricelli usar conceptos de movimiento para calcular el área bajo una curva. Galileo organizó las ideas de Oresme y las precisó matemáticamente. Por ejemplo en el movimiento de proyectiles, para los cuales demostró que siempre dan parábolas (en el vacío). Esto lo descubrió estableciendo dos componentes del movimiento: una el vertical (la altura) y otro el horizontal.

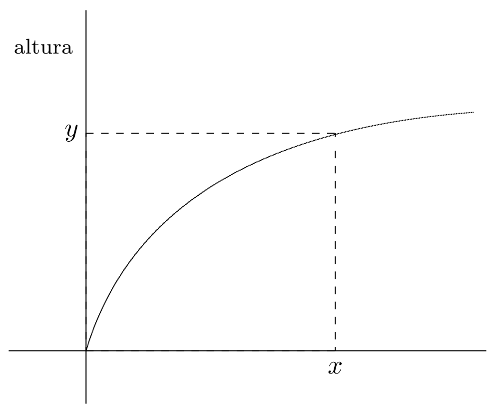


Figura 8.5. *Longitudes horizontales y verticales*

Esta dirección teórica recibiría un gran impulso con la obra de Descartes.

Descartes, considerado el primer filósofo moderno, incluyó *La Géométrie* como un apéndice de su libro de 1637 *El Discurso del Método. La Géométrie* fue el único libro de Descartes escrito sobre las matemáticas, pero éste fue muy importante. Descartes tuvo una gran influencia en el pensamiento del siglo XVII.

La geometría cartesiana

Con una perspectiva intelectual amplia y general es que Descartes realizó sus contribuciones matemáticas. Cuando estableció la *geometría analítica*, Descartes entendía perfectamente que su enfoque tenía una fuerza revolucionaria, se escapaba de los esquemas dominantes entre los griegos antiguos y los matemáticos medievales.

La idea matriz de Descartes se puede describir en tres pasos:

1. expresar un problema geométrico (una construcción) en forma algebraica,

2. resolver las ecuaciones algebraicas,

3. y luego construir geométricamente lo que planteaba las soluciones.

Por ejemplo, si un problema de geometría conduce al problema de encontrar la x que satisface

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Descartes resolvería la ecuación así

$$x = \frac{-b + \sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a} afico$$

(solo la raíz positiva). Y buscaría construir ese x de manera geométrica dándole el sentido por ejemplo de un segmento.

Descartes buscaba liberar a la geometría de un exceso de figuras (que salían de la tradicional construcción geométrica) y, por otra parte, pretendía darle significado al álgebra por medio de la interpretación geométrica.

Es interesante señalar, sin embargo, que en *La Géométrie*, a pesar de lo que hemos dicho, hay poco de lo que hoy llamaríamos “geometría analítica”. Las *coordenadas rectangulares* (llamadas “cartesianas”) no son usadas sistemáticamente; más bien se usa coordenadas oblicuas para cada problema estudiado. Y, entonces, no hay, por ejemplo: fórmulas para distancias, pendientes, ángulo entre dos rectas, etc. Ni tampoco hay una sola curva nueva representada geométricamente. No obstante, resulta evidente que el método usado poseía implicaciones muy serias. Por ejemplo, en la Antigüedad el criterio de existencia para una curva era su constructibilidad por regla y compás. Descartes rechazó ese criterio al establecer que una curva es *aquella que posee una ecuación algebraica*. Aunque en *La Géométrie* Descartes no representara una nueva curva con el nuevo criterio, lo cierto es que dejó planteada su posibilidad metodológicamente. Y esto era lo decisivo.

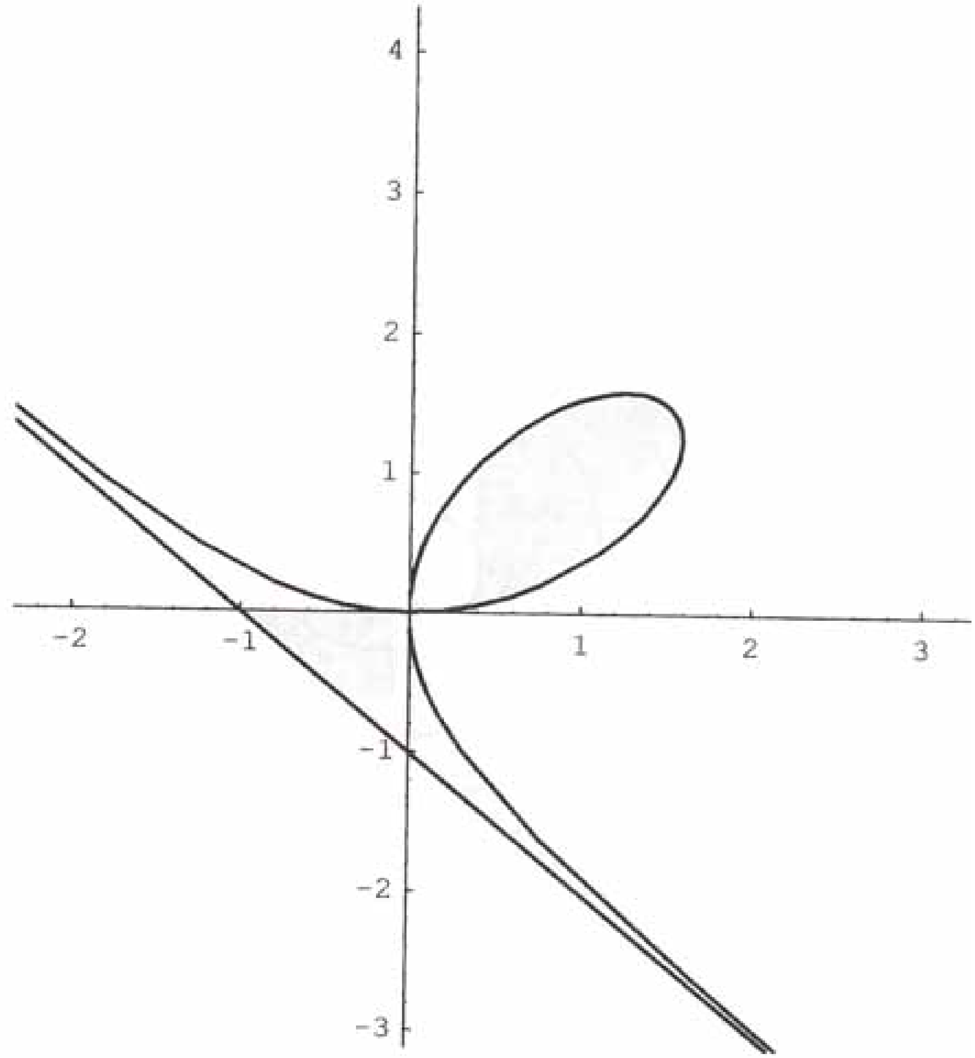


Figura 8.6. *Folium de Descartes.*
Ecuación cartesiana: $x^3 + y^3 = 3axy$.

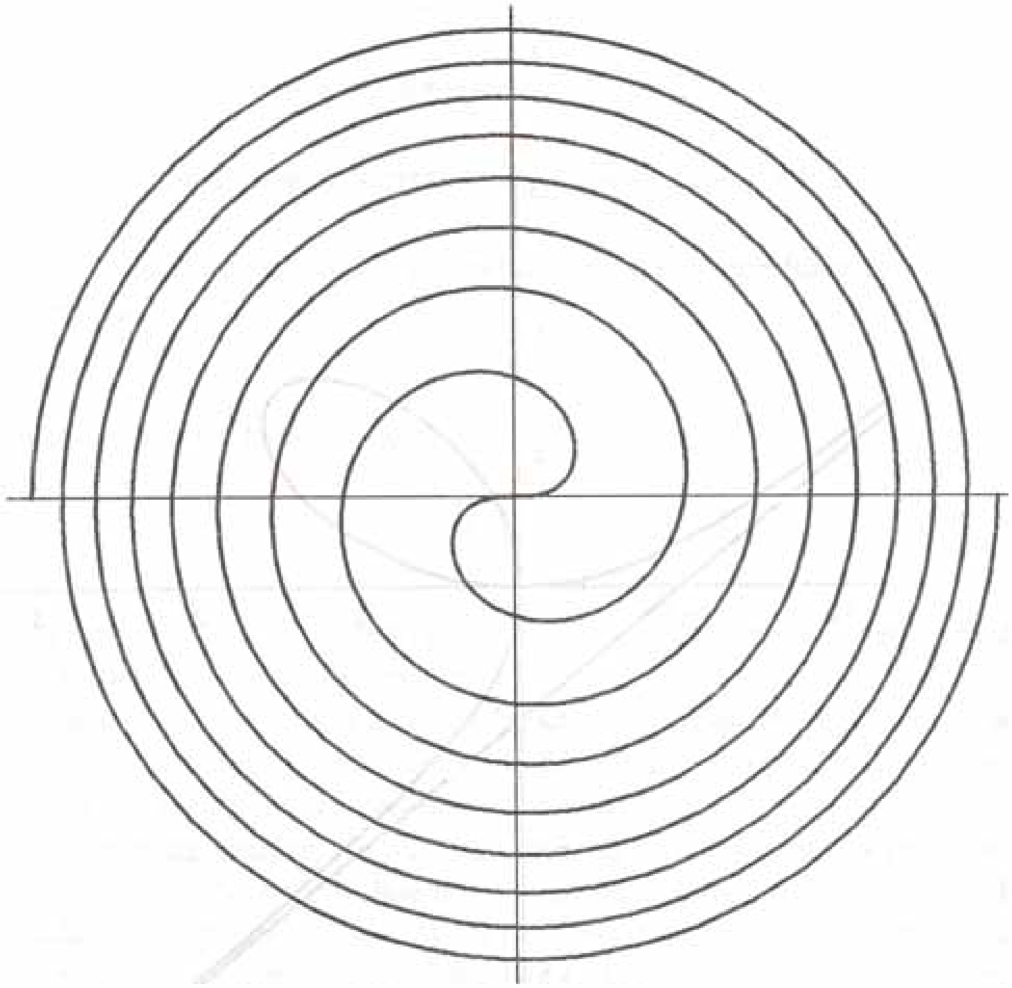


Figura 8.7. *Espiral de Fermat.*
Ecuación polar: $r^2 = a^2\theta$.

Fermat

Más cercano a lo que hoy conocemos como geometría analítica estuvo Pierre de Fermat, que escribió un artículo sobre geometría antes incluso que *La Géometrie* de Descartes, pero que fue publicado póstumamente hasta 1679.

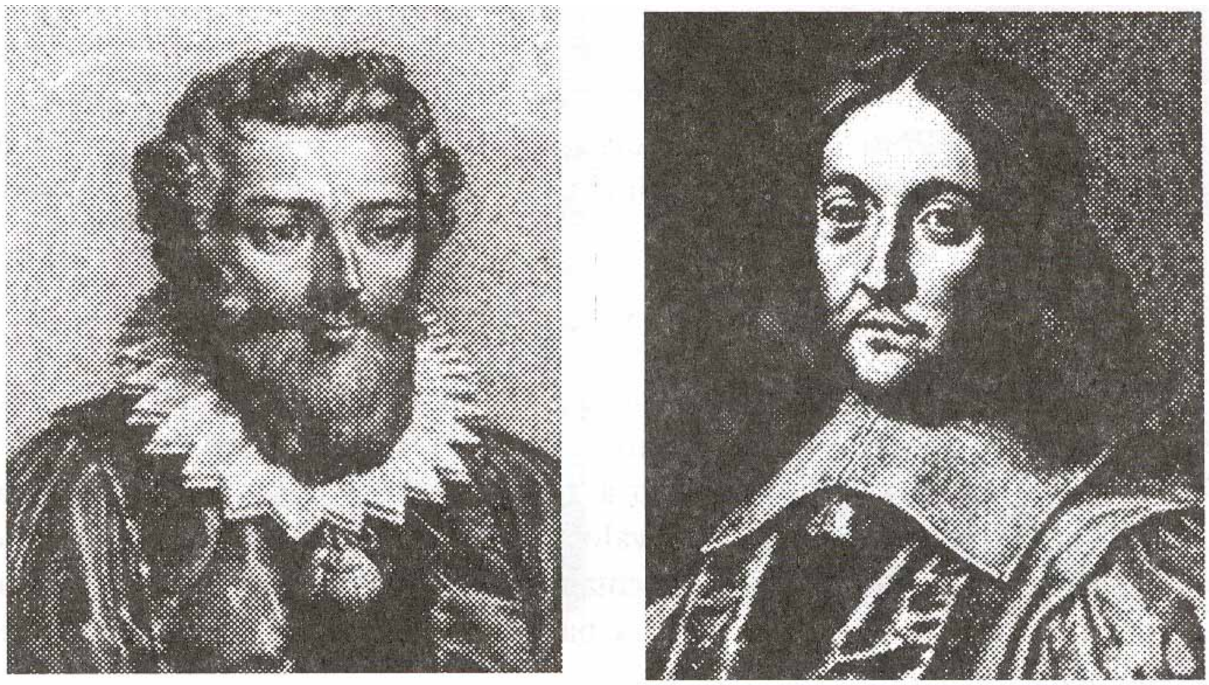


Foto 8.1. *François Viète (1540-1603) y Pierre de Fermat (1601-1665)*

Al parecer, alrededor del año 1629 Fermat inició la restauración del libro de Apolonio *Lugares Planos*, con base en referencias que había en la *Colección Matemática* de Pappus, siguiendo ideas de Vieta y aplicándolas al estudio del método.

Señalaba Fermat:

> "Siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva".

La exposición de Fermat era más didáctica y sistemática que la de Descartes. Fermat, por ejemplo, sí usó generalmente coordenadas rectangulares.

Un detalle interesante es que ni en Descartes ni en Fermat hay coordenadas negativas.

Tal vez uno de los asuntos claves en cuanto a la geometría analítica es subrayar el uso de los métodos algebraicos. Se puede decir que hasta el siglo

XVII el álgebra siempre estuvo subordinada a la geometría, pero a partir de entonces el rol se ha invertido influenciando significativamente el destino de la historia universal de las matemáticas.

Se debe mencionar que la geometría analítica como la presentaron Descartes y Fermat no tuvo mucha repercusión en sí misma. Fue solo hasta el trabajo de Gaspard Monge (1746-1818) y sus discípulos en la Escuela Politécnica francesa que llegó a tener la proyección, vitalidad y el impacto que hoy le reconocemos.

Algebra y geometría

Un elemento decisivo en el desarrollo matemático previo al Cálculo fue el desarrollo del álgebra, lo que recibiría el impulso fundamental con Descartes y Fermat en la creación de la geometría analítica. Podemos decir que el proceso encuentra apoyo primeramente en el valor propio que los árabes e hindúes dieron al álgebra y la aritmética (como ya comentamos). Un segundo momento lo constituye el uso por parte de Vieta del álgebra para resolver problemas de contrucciones geométricas.

François Viète (o Vieta, latinizado el apellido) fue educado como abogado, y hacía investigaciones matemáticas como un pasatiempo. Él se veía a sí mismo como un continuador de la obra de los griegos. Fue el primero en establecer una clara diferencia entre aritmética (*logística numerosa*) y álgebra (*logística speciosa*). Fue el primero en usar de manera sistemática letras para representar no solo las incógnitas, o potencias, sino también coeficientes. Aunque él veía el álgebra como un medio especial para hacer geometría, le reconocía a ésta un valor propio. Descartes diría, años después, que él empezó donde Vieta terminó.

Para que se aprecie la diferencia entre Vieta y Descartes: la común expresión x^2 significaba para Vieta un área (es decir: un elemento geométrico), mientras que para Descartes era un número. El mismo Descartes era consciente que con eso se separaba de sus predecesores.

Tiempo después, John Wallis, amigo de Newton, e influenciado por Vieta, Fermat y Descartes, avanzó mucho en la "algebrización de la geometría". De hecho, en su libro *Álgebra* (de 1685) dedujo en forma algebraica todo el Libro V de los *Elementos* de Euclides.

Mientras Wallis asumía esa línea, Barrow, el maestro de Newton, seguía considerando que las matemáticas eran esencialmente geométricas y que el álgebra y la aritmética eran una formalización de la lógica.

Foto 8.2. *Isaac Barrow (1630-1677) y John Wallis (1616-1703)*

A pesar de todo, y para que se note la forma lenta como avanzan las ideas nuevas, mencionemos que el mismo Descartes pensaba que la geometría era la rama más importante de las matemáticas.

El elemento decisivo para el desarrollo del álgebra podríamos decir que fue el propio Cálculo, pues éste exigía un amplio tratamiento algebraico para poder establecerse. El trabajo de Newton y Leibniz en esto también fue determinante.

8.2. Cálculo de tangentes, máximos y mínimos

Antes de mencionar el asunto de los máximos o mínimos conviene hacer un par de pinceladas sobre otro de los conceptos de la matemática moderna que se vio motivado por creación de la geometría analítica, y que estuvo presente en la creación del Cálculo: la *función*, como relación entre variables.

La función

Vamos a hacer una introducción al concepto con la perspectiva moderna antes de mencionar un par de elementos históricos.

Una función se puede ver como un tipo particular de curva en el plano coordenado. Por ejemplo, observe las tres gráficas siguientes:

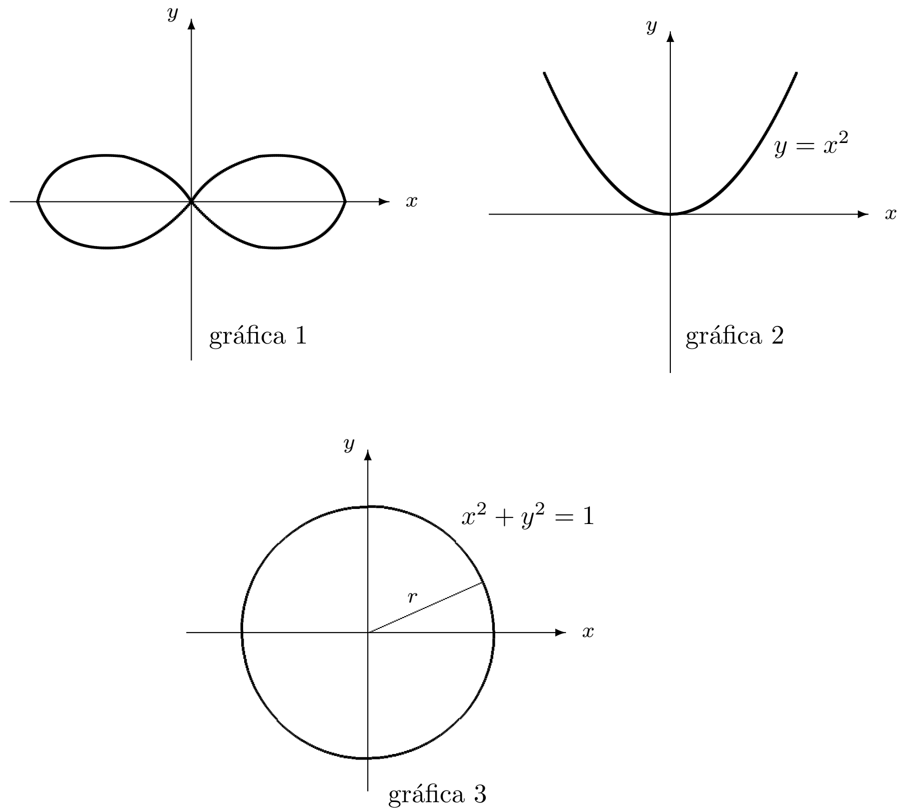


Figura 8.8. *Curvas en el plano*

La gráfica 2 describe una función, pero las gráficas 1 y 3 no corresponden a funciones. Lo esencial es que la función asigna a cada x (en el eje de las x) un solo valor $f(x)$ (en el eje de las y). De manera no gráfica: una función f asigna valores a los miembros de un conjunto (uno solo para cada miembro). Por ejemplo: si

$$f(x) = x^3,$$

se tiene

$$f(2) = 2^3 = 8 \quad y \quad f(1) = (-1)^3 = -1.$$

El conjunto de salida se llama "dominio", y el de llegada "codominio".
Por ejemplo, para

$$f(x) = x^3$$

el dominio es R (el conjunto de todos los números reales). El codominio también es R. Se suele expresar modernamente así:

$$f : R \longrightarrow R$$

$$f : x \longmapsto f(x) = y$$

No en todos los números reales es posible definir una función.
Por ejemplo, si

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

en $x = 0$ la función no tiene sentido, pues

$$\frac{1}{0}$$

es una expresión indeterminada.
Otro ejemplo: si

$$f(x) = \sqrt{x}$$

la función no está definida en los valores negativos de la x. El máximo dominio real son los x tales que $x \geq 0$.

Por ejemplo, a las funciones de la forma

$$x^3 + 2x^2 - 1, \frac{x^4 + x - 8}{x^3 - 9}, \sqrt{x^2 - 1}$$

se les llama funciones *algebraicas*. En general: son las funciones que resultan de la aplicación de las 4 operaciones básicas o la extracción de raíces. Si no son algebraicas se llaman funciones *trascendentes*. Las funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas son trascendentes. Por ejemplo: $logx$, e^x, $sen\ x$, $tan\ x$ son trascendentes.

El concepto de función ha sido fundamental en las matemáticas y las ciencias modernas. El término se encuentra en Galileo en su libro *Dos nuevas ciencias*. Muchas de las funciones usadas en el siglo XVII lo fueron primero como curvas como $\log x$, $sen\ x$, a^x. Antes de ser vistas como funciones se conocían muy bien los valores tabulares de estas funciones y se usaban en infinidad de cálculos astronómicos y físicos. La idea de función respondía a la variación de cantidades, a la existencia de variables de descripción del movimiento, y a la continuidad. Newton usó el término "fluente"para designar cualquier variable que varía de punto en punto de una curva. En 1714 Leibniz usó la palabra "funciónçomo cantidades que dependen de una variable. La notación $f(x)$ fue introducida por el gran matemático Euler en 1734.

Máximos y mínimos

Uno de los asuntos que demandó métodos infinitesimales fue el del cálculo del máximo y mínimo de una función. Por ejemplo, si

$$f(x) = -x^2 + 1,$$

tenemos el gráfico

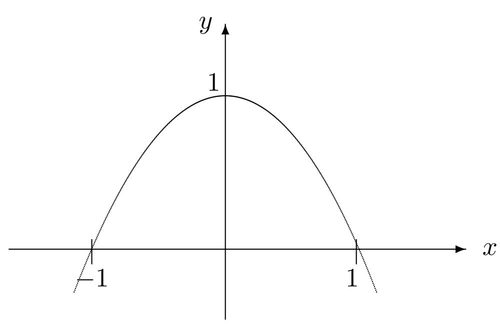


Figura 8.9. *Máximo de una parábola*

Observe que el máximo valor que alcanza la función es en

$$x = 0$$

(el máximo se da cuando el valor y está más arriba, el mínimo cuando éste está más abajo en la gráfica).

Si se trata de funciones sencillas como esta parábola, el cálculo del máximo es fácil (es el vértice, y hay métodos matemáticos fáciles para calcular el vértice de una parábola). Sin embargo, el asunto es más difícil si se trata de funciones más complejas. Por ejemplo, observe la gráfica de la función

$$f(x) = x^3 + x^2 - 6x.$$

¿Dónde alcanza el máximo si consideramos la función solamente en el intervalo $(-3, 4)$ (es decir, solamente las x entre -3 y 4)?

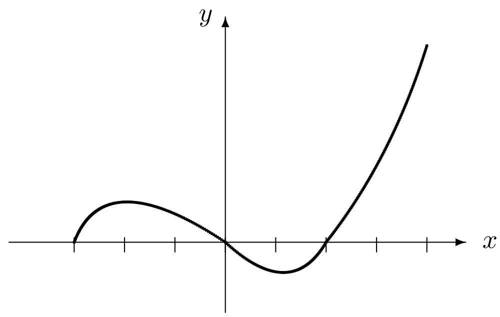


Figura 8.10. *Máximos y mínimos*

El cálculo diferencial constituye precisamente uno de los principales instrumentos para resolver este tipo de problemas.

Podemos decir que fue Kepler quien inició este tipo de problemas. Como sabemos su interés estaba en los barriles de vino. En su libro *Stereometria Doliorum* de 1615 mostró que el cubo es el más grande de los paralelepípedos rectos inscritos en una esfera y con bases cuadradas. Esto lo hizo calculando volúmenes para dimensiones específicas. Fue entonces que observó que cuando se aproximaba el volumen máximo, el cambio del volumen para un cambio fijo de las dimensiones se hacía cada vez más pequeño.

El cálculo de tangentes

Este fue uno de los grandes temas que motivó la aplicación de métodos infinitesimales en el siglo XVII. Para beneficio del lector, vamos a referirnos al concepto moderno para que, posteriormente, se comprenda mejor el significado histórico.

Consideremos la elipse

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

con el gráfico siguiente:

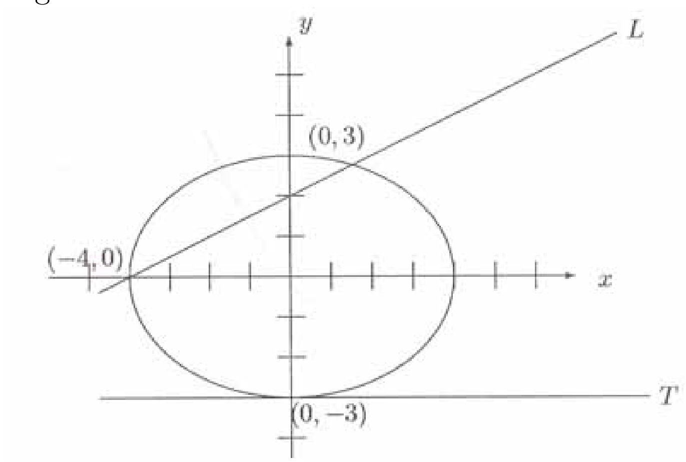


Figura 8.11. *Secante y tangente en el plano*

La recta L se llama *secante* a la curva y T se llama la *tangente*. Note que T corta en un solo punto pero no "cruza"la curva.

De la misma manera, si tenemos la función

$$f(x) = x^2$$

la gráfica es:

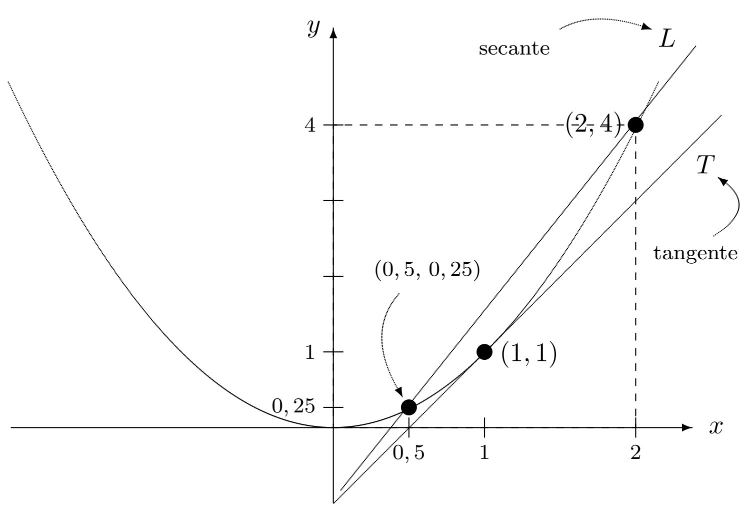


Figura 8.12. *La tangente a la curva*

L es la recta secante que pasa por los puntos

$$(0,5,\ \ 0,25) \text{ y } (2,\ \ 4),$$

y T es la recta tangente que pasa por $(1,\ \ 1)$.
Calcular las ecuaciones de estas rectas no se puede hacer de la misma manera. Veamos cómo se hace con la secante:

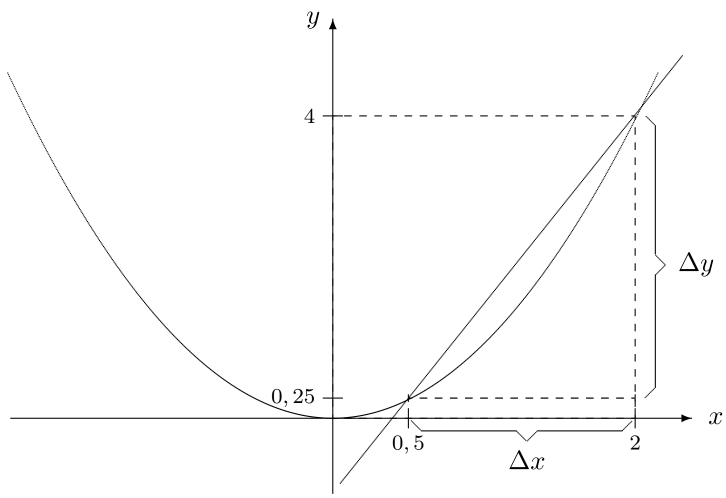


Figura 8.13. *La pendiente es la razón* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

La pendiente m de L se calcula por medio del cociente

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 0,5} = \frac{4 - 0,25}{2 - 0,5} = 5.$$

La recta debe ser de la forma

$$y = mx + b.$$

Como $m = 5$ y puesto que la recta pasa por el punto $(2,\ 4)$ se tiene:

$$4 = 5 \times 2 + b \Longrightarrow b = -6 \Longrightarrow y = 5x - 6.$$

Si se tiene dos puntos de una recta o un punto y la pendiente se puede calcular la ecuación de la recta tangente sin problema.

La pendiente de T ya no es tan fácil de calcular pues solo se tiene un punto y no se tiene –aparentemente– la pendiente. Es precisamente aquí donde viene a auxiliar el Cálculo. Los métodos infinitesimales van a permitir conocer la pendiente de la recta tangente, y con ella poder calcular la ecuación.

Como se desprende de lo anterior, el cálculo de la tangente tiene sentido realmente cuando se dispone de una representación algebraica de las curvas, es decir de geometría analítica.

Volvamos a la historia. Fermat, en el período cuando construía su geometría analítica, descubrió un método para calcular la pendiente de una recta tangente a una curva algebraica. El método de Fermat es equivalente a calcular:

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}.$$

Es decir, semejante al que Newton y Leibniz construirían. No es totalmente infundada la apreciación de Laplace, tiempo después, de considerar a Fermat como el descubridor del cálculo diferencial; aunque debe señalarse que Fermat no explicó su procedimiento de manera satisfactoria. No solo Fermat había estado en contacto con el cálculo de tangentes antes de Newton y Leibniz. Un método similar al de Fermat fue desarrollado por Isaac Barrow (1630-1677) en su libro *Lectiones Geometricae* (1669). Según la opinión de algunos historiadores de las matemáticas fue Barrow quien más se acercó al nuevo análisis de los matemáticos que hicieron aportes parciales al Cálculo diferencial e integral. Al parecer Barrow conocía que los problemas de la tangente y el del cálculo de áreas eran inversos. Barrow jugó un papel importante para motivar el trabajo de Newton. Cuando en 1669 fue llamado para ocupar el puesto de capellán del rey Carlos II, Barrow logró que a Newton le dieran la cátedra lucasiana en Cambridge. Serían, sin embargo, Newton y Leibniz los que le darían al cálculo de tangentes la dimensión teórica que le correspondía. Vamos ahora a hacer una pequeña incursión en otro de los grandes temas que motivaron el Cálculo.

8.3. Ejercicios

FALSO O VERDADERO

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. En cada caso brinde una justificación breve de su respuesta

1. Descartes pretendía reducir la geometría al álgebra exclusivamente.

2. La exposición de Fermat en lo que se refiere a la geometría analítica era más didáctica que la de Descartes.

3. Hasta el siglo XVII la geometría estuvo supeditada al álgebra.

4. Una curva es un tipo especial de función.

5. Kepler inició el tratamiento de los máximos y mínimos en los barriles de leche.

6. Pierre de Fermat e Isaac Barrow estuvieron en contacto con el cálculo de tangentes antes de Newton y Leibniz.

PREGUNTAS DE DESARROLLO

1. ¿Es correcto señalar a Apolonio de Perga como el creador de la geometría analítica? Explique.

2. ¿Cuáles eran los pasos que Descartes proponía para el tratamiento analítico de la geometría?

3. ¿Por qué se dice que Descartes cambió el criterio para la existencia de curvas?

4. Mencione dos aportes de Vieta a la geometría analítica.

5. Explique el significado de la relación entre geometría y álgebra que estableció la geometría analítica. Contraste esta relación con la que existió en la Antigüedad.

6. Explique qué son las funciones algebraicas y qué las funciones trascendentales. De tres ejemplos que no estén en el libro.

Capítulo 9

LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES

OBJETIVOS

- *Descripción de la idea de Kepler para el cálculo de áreas en círculos y elipses.*
- *Concepto de conjunto infinito en Galileo.*
- *Conocer un método del siglo XVII para el cálculo del área bajo la curva $y = x^2$.*

El cálculo de áreas, longitudes y volúmenes, al que se hace referencia en el método de Exhauscíón, en el siglo XVIII realmente comienza también con Kepler.

9.1. Los métodos de Kepler

Kepler asumía el área de un círculo como el área de un número infinito de triángulos y, de manera análoga, consideraba la suma de una esfera como la suma de discos circulares muy delgados. La esencia de su método fue identificar áreas y volúmenes curvilíneos con la suma de un número infinito de elementos de la misma dimensión.

El área del círculo

Kepler calculaba las áreas que emergían de asuntos astronómicos con métodos infinitesimales rudimentarios. Por ejemplo, el área de un círculo la calculaba dividiendo el círculo en m triángulos iguales

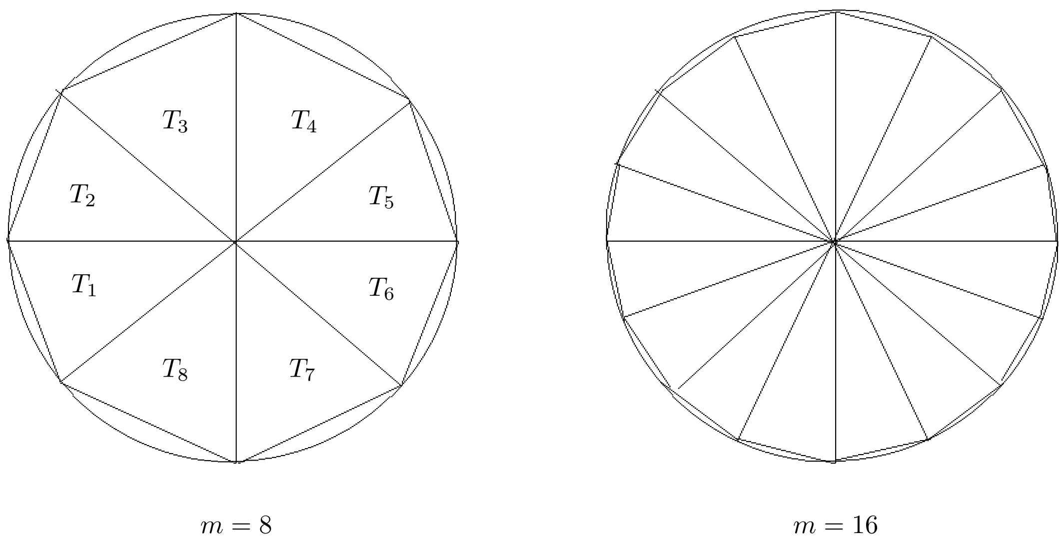


Figura 9.1. *Triángulos en un círculo*

Por ejemplo, una aproximación del área del círculo si $m = 8$ es:

$$A \approx T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_8.$$

y con $m = 16$:

$$A \approx T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_8 + T_9 + \cdots + T_{16}.$$

El área de cada

$$T_i = \frac{base \times radio}{2} = \frac{l_i \times r}{2}.$$

Entonces:

$$A \approx \frac{l_1 \times r}{2} + \frac{l_2 \times r}{2} + \frac{l_3 \times r}{2} + \cdots + \frac{l_{16} \times r}{2}$$

$$A \approx \frac{r}{2}[l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_{16}].$$

Kepler dividía el círculo en un número infinito de triángulos, de tal manera que se aproximaba el área por

$$A \approx \frac{l_1 \times r}{2} + \frac{l_2 \times r}{2} + \frac{l_3 \times r}{2} + \cdots + \frac{l_{16} \times r}{2}$$

En general:

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{l_1 \times r}{2} + \frac{l_2 \times r}{2} + \frac{l_3 \times r}{2} + \cdots + \frac{l_m \times r}{2} + \cdots \\ &\approx \frac{r}{2}[l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_m + \cdots]. \end{aligned}$$

Cuando m es infinito entonces

$$l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_m + \cdots = C$$

pues la base de cada triángulo es prácticamente el arco de la circunferencia correspondiente a cada triángulo. Así:

$$A = \frac{r \times C}{2}.$$

Kepler no sabía que Arquímedes ya había demostrado esa fórmula (incluso con mayor rigor), con el método de Exhausción.

El área de la elipse

Es interesante mostrar cómo Kepler obtuvo el área de una elipse a partir de la del círculo de radio a.

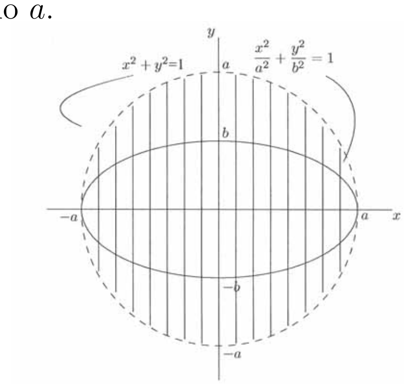


Figura 9.2. *Elipse y círculo*

Consideremos la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y el círculo

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Si el punto (x, y) pertenece a la circunferencia, satisface la segunda ecuación. Entonces, tenemos que el punto $(x, \frac{b}{a}y)$ satisface la primera ecuación pues:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\frac{b}{a}y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{1}{a^2}(x^2 + y^2) = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Una elipse se puede ver como un círculo achatado por la razón $\frac{b}{a}$ en la ordenada y. Ahora se asume que en la elipse como en el círculo el área está formada por todas las ordenadas correspondientes a los puntos de las dos curvas (Oresme). La ordenada es la que "define"la curva. Entonces: la razón entre las ordenadas de cada curva debe ser igual a la razón de las áreas de ambas curvas. Es decir:

$$\frac{ordenada\ elipse}{ordenada\ círculo} = \frac{\frac{b}{a}y}{y} = \frac{Area\ elipse}{Area\ círculo}$$

Como el

$$Area\ círculo = \pi a^2$$

entonces

$$\frac{b}{a} = \frac{Area\ elipse}{\pi a^2}.$$

Entonces:

$$Area\ elipse = ab\pi$$

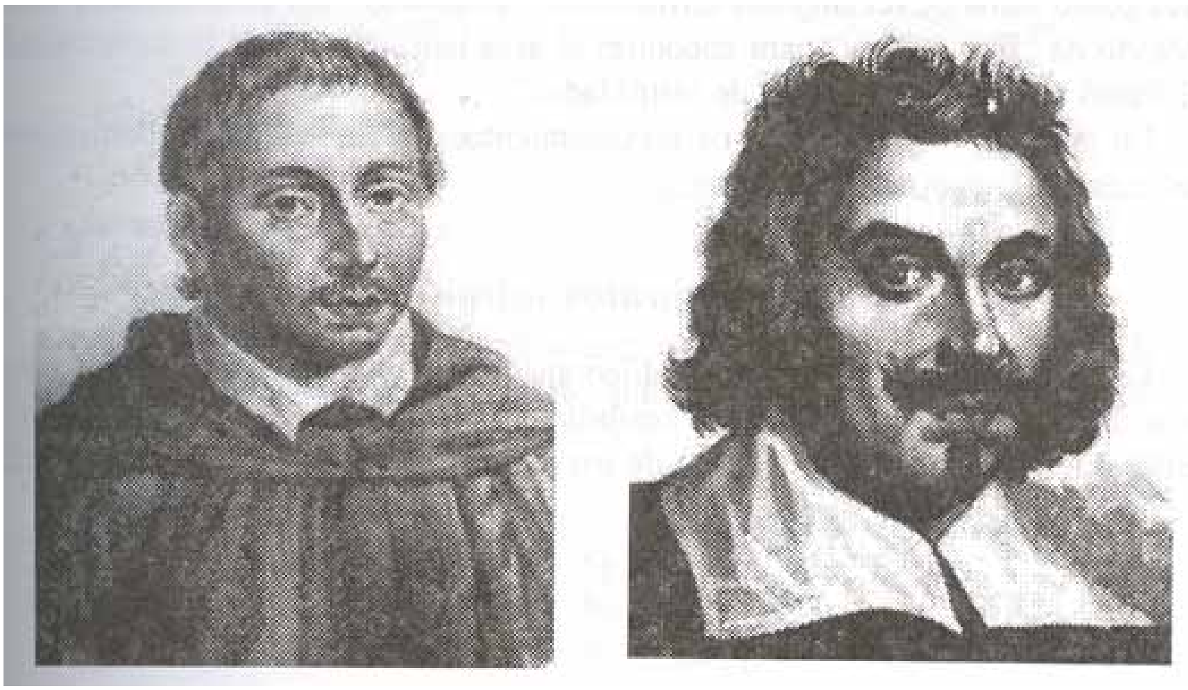


Foto 9.1. *Bonaventura Cavalieri (1598-1647) y Evangelista Torricelli (1608-1647)*

Con un método similar Kepler trató de aproximar los volúmenes de los toneles de vino. Sus resultados aparecieron en el libro *Stereometria doliorum* de 1615 (esto sería sistematizado por Cavalieri).

9.2. Galileo y los conjuntos infinitos

Galileo en *Las dos nuevas ciencias*, concebía las áreas en los mismos términos de Kepler. Por ejemplo, mostraba que en la curva que da la velocidad y el tiempo, el área bajo la curva era la distancia.

Cavalieri

Bonaventura Cavalieri (1598-1647), discípulo de Galileo, siguió la dirección señalada por Kepler y Galileo: consideró el área hecha de un número indefinido de segmentos de línea paralelos equidistantes, y un volumen compuesto de un número indefinido de áreas planas paralelas. El llamó a estos elementos los indivisibles de área y de volumen. Aunque muchos matemáticos de la época criticaron sus "indivisibles", la realidad es que fueron ampliamente usados, incluso por Fermat, Pascal y Roberval (aunque éstos últimos más que suma de líneas consideraban el área como suma de rectángulos infinitamente pequeños). En 1634 Roberval usó el método de "indivisibles"para encontrar el área bajo un arco de la curva cicloide. El llamó su método "método de infinidades".

En general, todos los nuevos procedimientos eran en esencia modificaciones del método griego de Exhausción.

Conjuntos infinitos

Un detalle interesante es que Galileo analizó una de las principales características de los conjuntos infinitos: la posibilidad de establecer una relación *biunívoca* entre el total de un conjunto y uno de sus subconjuntos. Por ejemplo, si se asocia a cada n un cuadrado perfecto n^2:

$$\begin{array}{rcccl} 1 & \longmapsto & 1^2 & = & 1 \\ 2 & \longmapsto & 2^2 & = & 4 \\ 3 & \longmapsto & 3^2 & = & 9 \\ 4 & \longmapsto & 4^2 & = & 16 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & \longmapsto & 100^2 & = & 10000 \\ \vdots & & & & \vdots \\ n & \longmapsto & n^2 & & \\ \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

Galileo concluyó que el número de cuadrados perfectos no era menor que el número de enteros naturales. Pensó que lo que sucedía era que las condiciones de mayor, menor o igual no se aplicaban a los conjuntos infinitos. Hoy en día incluso se han definido conjuntos infinitos como aquellos que cumplen esa propiedad. Es decir, se llama infinito un conjunto que posea algún subconjunto tal que se pueda establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto y el subconjunto. Una correspondencia biunívoca quiere decir que a cada elemento del conjunto le corresponde uno del subconjunto.

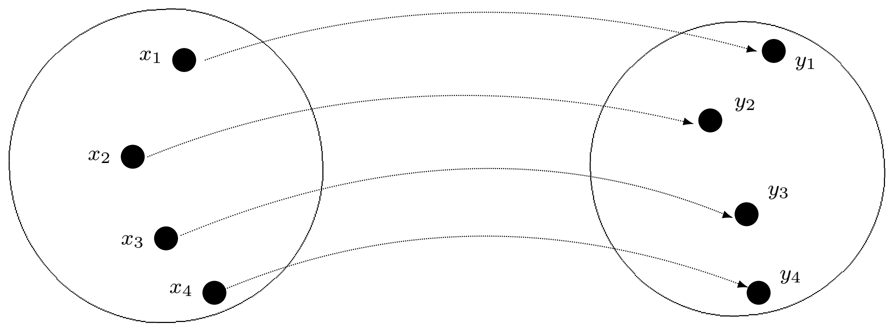


Figura 9.3. *Correspondencia biunívoca*

En realidad, abundan los ejemplos que muestran el carácter infinito de los números naturales. Por ejemplo: existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de pares (y el de impares) y N

$$\begin{array}{rclcl}
N & \longmapsto & pares & \longmapsto & impares \\
1 & \longmapsto & 2 & \longmapsto & 3 \\
2 & \longmapsto & 4 & \longmapsto & 5 \\
3 & \longmapsto & 6 & \longmapsto & 7 \\
4 & \longmapsto & 8 & \longmapsto & 9 \\
\vdots & & & & \vdots \\
100 & \longmapsto & 200 & \longmapsto & 201 \\
\vdots & & & & \vdots \\
n & \longmapsto & 2n & \longmapsto & 2n+1 \\
\vdots & & & & \vdots
\end{array}$$

Se puede decir que el conjunto de los pares (y el de los impares) tiene el mismo número de elementos que N (por supuesto es un número infinito).

9.3. El área bajo una curva

Para que se tenga una idea de la forma como el cálculo de áreas bajo curvas progresaba (con relación a los métodos de la Antigüedad), vamos a hacer un ejemplo: calcular el área bajo la curva

$$y = x^2$$

entre el origen O y un punto A.

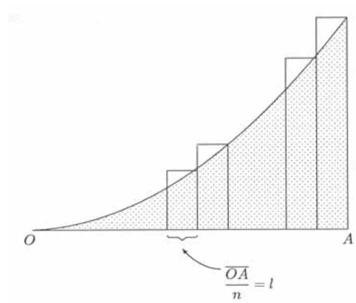


Figura 9.4. *El área bajo la curva*

Se divide el segmento $\overline{OA}$ (el intervalo) en n partes, lo que da n segmentos de longitud $\frac{\overline{OA}}{n} = l$.
Veamos un caso particular con $n = 4$.

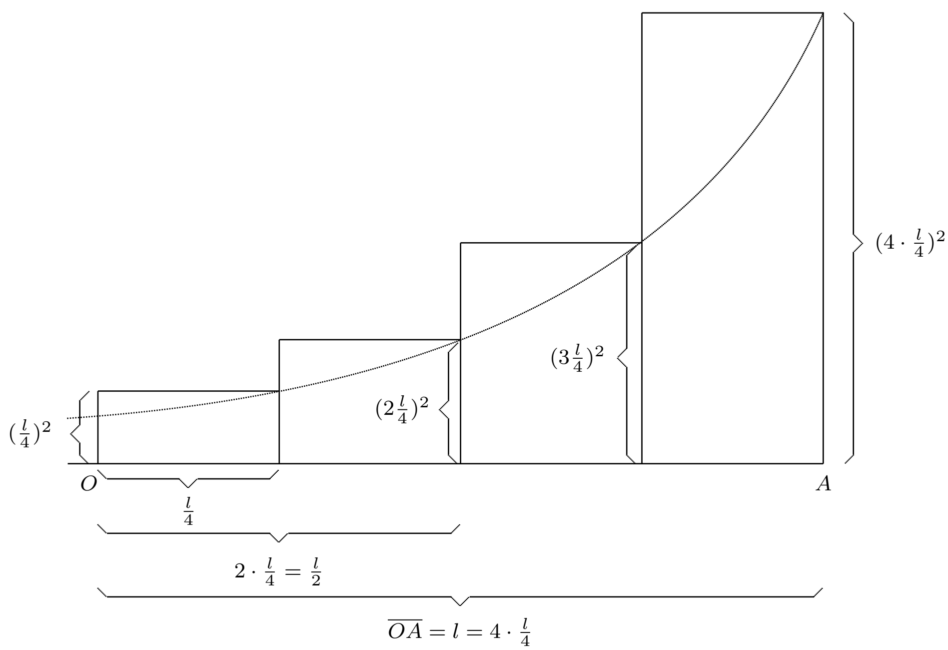


Figura 9.5. *4 rectángulos para calcular el área*

Nótese que como $y = x^2$ las alturas (largos) vienen dadas por el valor de la x en cada partición:

$$\frac{l}{4}, 2 \times \frac{l}{4}, 3 \times \frac{l}{4}, 4 \times \frac{l}{4}.$$

El área se aproxima por la suma de los rectángulos de base (el ancho) siempre l y de altura (el largo) dado respectivamente por:

$$\left(\frac{l}{4}\right)^2, \left(2 \times \frac{l}{4}\right)^2, \left(3 \times \frac{l}{4}\right)^2, \quad y \quad \left(4 \times \frac{l}{4}\right)^2.$$

Es decir:

$$A =\approx \frac{l}{4} \times \left(\frac{l}{4}\right)^2 + \frac{l}{4} \times \left(2 \times \frac{l}{4}\right)^2 + \frac{l}{4} \times \left(3 \times \frac{l}{4}\right)^2 + \frac{l}{4} \times \left(4 \times \frac{l}{4}\right)^2$$

$$= \left(\frac{l}{4}\right)^3 \left[1 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right]$$

sacando a factor $\left(\frac{l}{4}\right)^3$.

Ahora volvemos al caso general, donde tenemos n rectángulos de ancho (la base) igual a $\frac{l}{n}$, y de alturas que van de

$$\left(\frac{l}{n}\right)^2, \left(2 \times \frac{l}{n}\right)^2, \left(3 \times \frac{l}{n}\right)^2, \ldots$$

y al final respectivamente

$$\left(n \times \frac{l}{n}\right)^2.$$

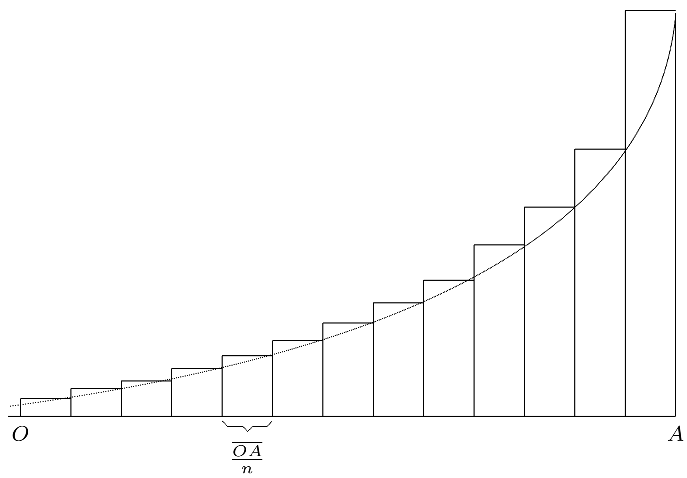


Figura 9.6. *n rectángulos para calcular el área*

El área se aproxima por la suma

$$A \approx \frac{l}{n} \times \left(\frac{l}{n}\right)^2 + \frac{l}{n} \times \left(2 \times \frac{l}{n}\right)^2 + \frac{l}{n} \times \left(3 \times \frac{l}{n}\right)^2 + \frac{l}{n} \times + \ldots + \frac{l}{n} \times \left(n \times \frac{l}{n}\right)^2$$

$$= \left(\frac{l}{n}\right)^3 \times \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right]$$

(factorizando).
Por un resultado de Pascal y Fermat se sabía que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Entonces la suma se vuelve:

$$\left(\frac{l}{n}\right)^3 \times \left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\right] = l^3 \times \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right].$$

Ahora, cuando n es infinito $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n^2}$ se eliminan. Entonces queda:

$$Area = \frac{l^3}{3} = \frac{\overline{AB}^3}{3}.$$

Hoy sabemos que el área bajo la curva $y = x^2$ entre 0 y A es

$$A = \int_0^A x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^A = \frac{A^3}{3}.$$

Ese método era conocido por muchos matemáticos antes de Newton. Es interesante notar el uso de rectángulos para realizar la aproximación. En la Antigüedad se usaron diferentes tipos de figuras rectilíneas.

Contribuciones previas a Newton y Leibniz

Antes de 1636 Fermat pudo calcular (en nuestra notación)

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

para todo n racional, y $n \neq -1$. Este resultado también fue conocido por Roberval, Torricelli y Cavalieri (aunque en varios casos para un n más limitado). La persona que más utilizó estos métodos antes de Newton y Leibniz fue John Wallis (1616-1703), especialmente en su *Arithmetica Infinitorum* (1655). Muchos otros matemáticos hicieron contribuciones al Cálculo previamente a Newton y Leibniz: Gregory St. Vincent, Alfons de Sarasa, Nicholas Mercator, Christopher Wren, C. Huygens, James Gregory y otros. Los trabajos fueron hechos con relación a cada uno de los cuatro grandes problemas que se trataron de resolver y que mencionamos antes. Pero, salvo ciertas conexiones y relaciones, fueron realizados considerándolos como problemas distintos.

No se entendía que se trataba de la misma cosa: que el concepto de derivada, y el de integral como límite de una suma, estaban conectados de una manera precisa: *la integral como el proceso inverso de la derivación.* Algunos vieron cosas particulares de esta relación pero no apreciaron su generalidad e importancia. Podríamos decir que en las primeras dos terceras partes del siglo XVII los matemáticos se perdieron en los detalles, y no fue sino hasta Newton y Leibniz que el Cálculo pudo obtener una formulación general y su aplicación apropiada.

Foto 9.2. *Blaise Pascal (1623-1662)*

9.4. Ejercicios

FALSO O VERDADERO

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. En cada caso brinde una justificación breve de su respuesta

1. Se puede decir que un conjunto K es infinito si se puede establecer una correspondencia biunívoca entre K y uno de sus subconjuntos finitos.
2. Newton fue el primero en calcular el área bajo la curva $y = x^2$.
3. Cavalieri, el discípulo de Kepler, usó segmentos de línea paralelos y equidistantes para calcular áreas y volúmenes.

PREGUNTAS DE DESARROLLO

1. Resuma en dos pasos el cálculo del área de un círculo según el método de Kepler.
2. De tres ejemplos de subconjuntos del conjunto de los números naturales que sean infinitos.
3. ¿Qué diferencias podría usted señalar entre las figuras geométricas usadas por los griegos y los matemáticos del siglo XVII para calcular áreas bajo curvas?

Capítulo 10

NEWTON

OBJETIVOS

- *Descripción de la obra científica y matemática de Isaac Newton.*
- *Características de la derivada en Newton.*
- *Introducción histórica a las series infinitas y al Cálculo newtoniano.*
- *Reseña de algunas características de la personalidad de Newton.*

En el siglo XVII las ideas científicas se abrieron con gran intensidad. Gassendi (1592-1655) introdujo de nuevo una forma de la teoría atomista de Leucipo y Demócrito. Grimaldi (1618-1663) y después Newton obtuvieron resultados en la óptica y en el esclarecimiento de la naturaleza de la luz. Huygens hizo una descripción matemática de un funcionamiento ondulatorio de la luz. Torricelli (1608-1647), discípulo de Galileo, inventó el barómetro descubriendo la presión atmosférica y también el "vacío". Es el siglo de Boyle con sus resultados sobre el vacío y la teoría de gases; también de Hooke, a quien se le atribuye haber sido el principal físico experimental antes de Faraday. Los resultados y las figuras científicas del XVII pueden seguir enumerándose pero, sin duda, es la obra de Newton la que culmina la llamada *Revolución Científica*.

La teoría newtoniana de la gravitación universal completó la destrucción del modelo cosmológico anterior. Con Newton, efectivamente, puede considerarse que una fase intelectual fue completada. En las etapas históricas siguientes nuevos saltos cualitativos hacia adelante en la ciencia van a demandar más condiciones económicas, técnicas, políticas y sociales.

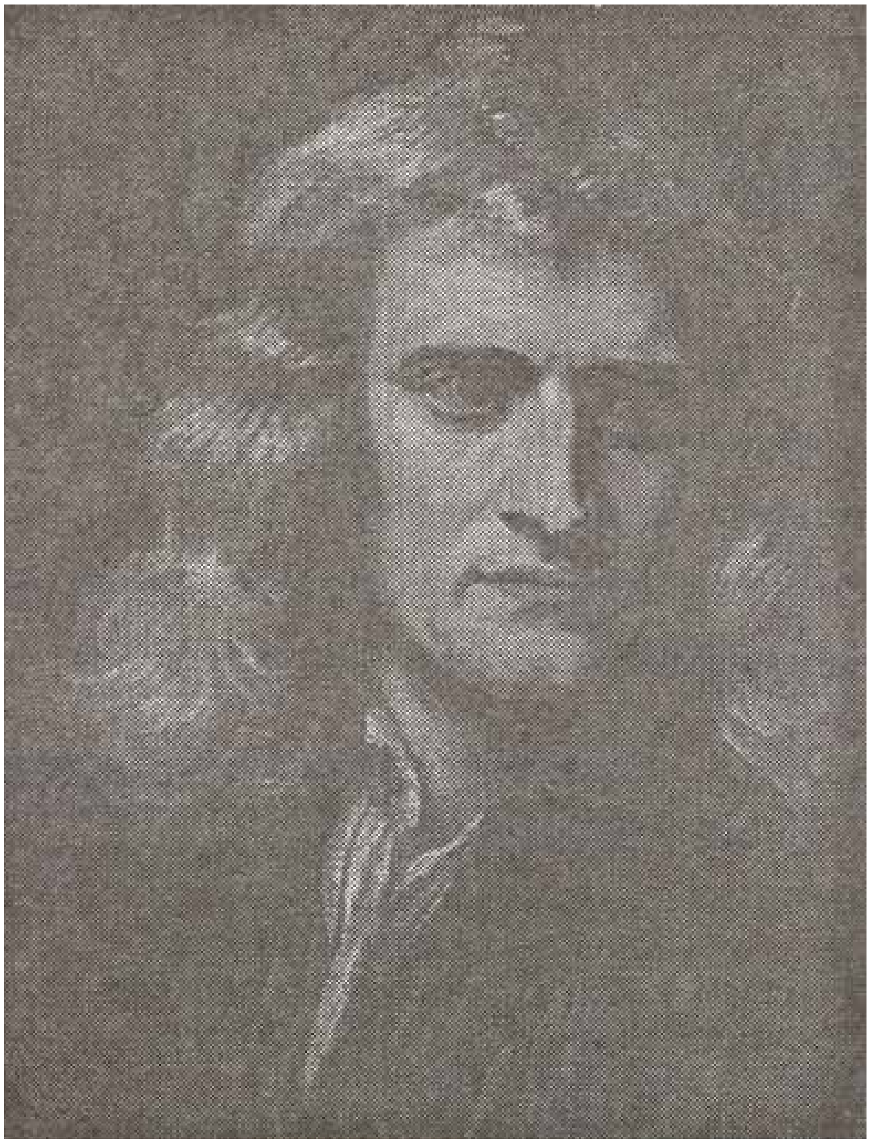


Foto 10.1. *Isaac Newton (1642-1727). Corresponde a un retrato pintado en 1689 por el famoso pintor Kneller. Newton tenía entonces 46 años.*

10.1. La obra científica de Newton

Isaac Newton nació en Woolsthorpe, Inglaterra, en el campo, el año de la muerte de Galileo: 1642. Huérfano de padre antes de nacer, estudió en la Universidad de Cambridge gracias al apoyo de un tío materno (graduado de esa universidad) que se dio cuenta de los talentos del niño. El Cálculo diferencial e integral, la mecánica celeste, el comportamiento de la luz y otros estudios realizados por Newton influyeron decisivamente en la historia de la ciencia y las matemática por muchos años.

Newton estudió en Cambridge con Isaac Barrow quien -como mencionamos antes- le cedió su cátedra Lucasiana, reconociendo así el gran talento de su discípulo. Newton estuvo en Cambridge hasta 1696.

Con la creación del Cálculo infinitesimal va a completar los trabajos matemáticos que desde Eudoxo y Arquímedes en la Antigüedad hasta Kepler, Fermat y Descartes (entre muchos otros en la nueva época) se venían dando en busca de un método para abordar el "continuo". El Cálculo infinitesimal representó el resultado matemático más decisivo del siglo XVII, que generaría un extenso territorio intelectual para los siglos siguientes no solo en las matemáticas sino en la ciencia en general. Ya sólo esto hubiera sido suficiente para inmortalizar a Newton, pero realizó otra hazaña intelectual: la *mecánica celeste*; es decir, la descripción del movimiento de los astros a partir de las leyes de la mecánica terrestre. Fue la fundición teórica de los resultados de Copérnico y Kepler con los de Galileo. No se trataba de un sistema filosófico, sino de una descripción matemática.

La mecánica celeste

La obra que condensó sus extraordinarias contribuciones a la mecánica fue el famoso *Philosophiae naturalis principia mathematica* (*"Principios matemáticos de la filosofía natural"*), publicado en 1687. Es una de las joyas del pensamiento humano. En ella, donde aplica hasta cierto punto el Cálculo, formula con gran rigor matemático las leyes de Kepler sobre el movimiento planetario, las cuales habían sido establecidas de manera empírica. Newton demostró que estas leyes se deducían de la ley de gravitación de los cuadrados inversos:

$$F \propto \frac{M \times M_1}{d^2}$$

[La fuerza gravitacional entre dos masas es proporcional a las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas] o

$$F = G \times \frac{M \times M_1}{d^2}$$

[La fuerza gravitacional entre dos masas es igual a una constante por el producto de las masas, dividido este por el cuadrado de la distancia entre ellas. G es la constante de proporcionalidad.]

Para Hawking *Principia* es:

> "Probablemente la obra más importante publicada en las ciencias físicas en todos los tiempos. En ella, Newton no solo presentó una teoría de cómo se mueven los cuerpos en el espacio y en el tiempo, sino que también desarrolló las complicadas matemáticas necesarias para analizar esos movimientos. Además, Newton postuló una Ley de la Gravitación Universal, de acuerdo con la cual cada cuerpo en el Universo era atraído por cualquier otro cuerpo con una fuerza que era tanto mayor cuanto más masivos fueran los cuerpos y cuanto más cerca estuvieran el uno del otro..ᴱˣplicó el movimiento de los cuerpos celestes y de las mareas. También estableció los fundamentos de la teoría del movimiento de la Luna. Newton asumió un tratamiento axiomático y matemático, en el que asumía el espacio y el tiempo como absolutos.

Momentos de creación

El descubrimiento-construcción del Cálculo lo realizó entre 1665 y 1666 mientras estaba en su lugar de nacimiento en el campo para escapar de la peste que atormentaba Cambridge. Es interesante mencionar que en este mismo período Newton elaboró las principales ideas de sus más grandes contribuciones científicas:

- acerca de la gravitación universal,
- las leyes de la composición de la luz,
- el teorema del binomio,
- y el Cálculo.

10.2. El Cálculo

Newton construyó el Cálculo entre 1665 y 1666 mientras Leibniz lo hizo entre 1773 y 1776, pero fue Leibniz quien publicó primero sus resultados entre 1684 y 1686 y, luego, lo hizo Newton entre 1704 y 1736. Ambos hicieron sus contribuciones de manera independiente y con características propias, sin embargo se dio una polémica muy famosa, que duró décadas, sobre quién lo había encontrado primero.

Newton llamó a su Cálculo con el nombre de *Teoría de fluxiones*. Las funciones x, y, z las llamaba *fluentes*, y lo que hoy llamamos las derivadas las llamaba *fluxiones* y las denotaba:

$$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ldots$$

Los Hawking los llamaba *Momentos de fluxiones* y los denotaba

$$\dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o, \ldots$$

donde o es una "cantidad infinitamente pequeña".

Con el Cálculo se resolvieron los cuatro problemas fundamentales que mencionamos anteriormente. Todos implicaban el uso de un concepto central: el *límite*. Tanto Newton como Leibniz usaron esta noción pero lo hicieron de una manera más bien intuitiva, física o geométrica. Una formulación más precisa y rigurosa tendría que esperar más de un siglo en la historia de las matemáticas.

Con la idea de "límite"no solo se respondería a los problemas inmediatos con los que se enfrentaron los matemáticos de la *Revolución Científica*, sino a aquellos originados en la Antigüedad alrededor del infinito y la continuidad. Todos esos procesos matemáticos en los que se usó el término "indefinidamente"hacían referencia al límite. Ya fuera que se planteara realizar sumas indefinidas de términos o subdivisión indefinida de una longitud, área o volumen, hay una relación con los métodos Hawking. Es la noción de límite a la que se apela cuando en el método de Exhausción se pasa del área de polígonos regulares inscritos en un círculo con n lados, al área del círculo. O, también, cuando se puede dividir un área en un número infinito de rectas "indivisibles", o cuando para calcular el área bajo la curva se construye n rectángulos y, luego, este número se vuelve infinito o, lo que es igual, la base de los mismos "se va hacia el cero".

Aunque el cálculo de áreas, longitudes y volúmenes ocupó una historia más larga en las matemáticas, el cálculo de la tangente a una curva (planteado en el siglo XVII) fue decisivo y determinante para el desarrollo de los métodos Hawking. El cálculo de la recta tangente y el de la *velocidad instantánea* se redujeron al cálculo de la derivada, lo que hoy reconocemos como un tipo particular de límite. Newton, incluso, consideró sus derivadas como *velocidades*

La derivada

Veamos primeramente, antes de seguir con la historia, un poco acerca de la idea de la derivada.

Consideremos la función $f(x) = x^2$ y la recta tangente T de la siguiente gráfica

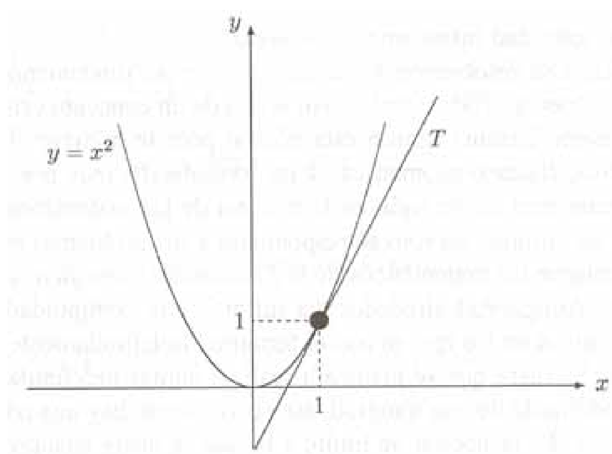


Figura 10.1. *La tangente en (1,1)*

Si bien no se puede calcular su pendiente m como la de una recta secante, se utiliza varias rectas secantes para aproximar el valor de esa pendiente.

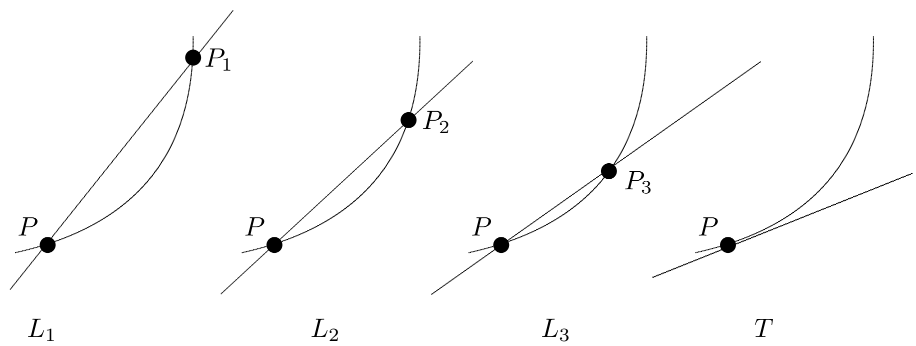


Figura 10.2. *De las secantes a la tangente*

Se construye rectas secantes entre P y otros puntos $P_1, P_2, P_3, \ldots$. Conforme se traza secantes con puntos más cercanos a P, cada vez la nueva secante se aproxima más a T. Y, por eso, la pendiente de la secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente. La idea es que si se repite el proceso indefinidamente se obtiene la recta tangente y, en particular, la pendiente de la tangente.

Veamos cómo se hace con $f(x) = x^2$.

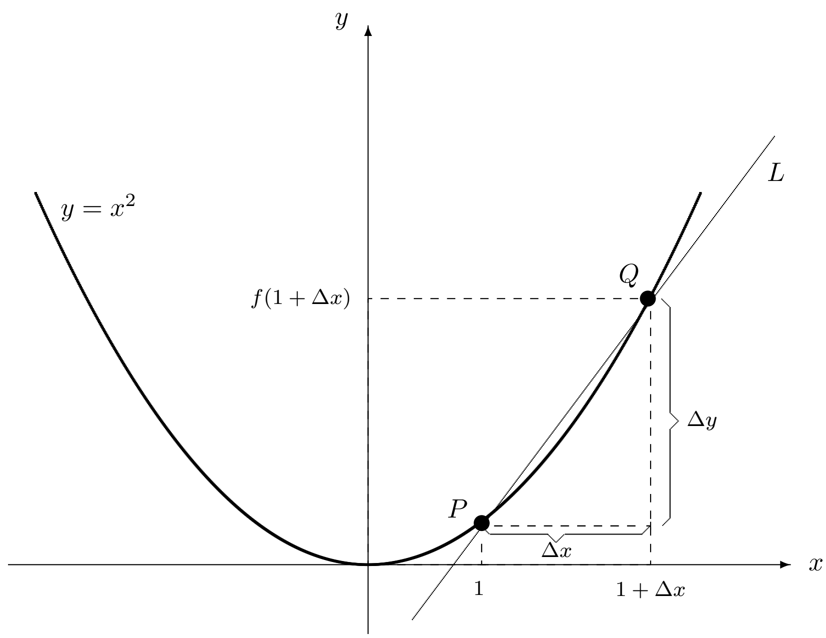


Figura 10.3. *El cálculo de la tangente*

Cualquier secante L que pase por $(1,1)$ tiene por pendiente

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$m = \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x.$$

Cuando Q se acerca cada vez más a P se tiene que Δx se acerca cada vez más a 0. Cuando Δx sea 0, obtendremos la pendiente de la recta tangente. Es decir:

$$m_{tan} = 2.$$

Lo anterior se expresa así:

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2$$

[$\lim_{\Delta x \to 0}$ se lee *límite* cuando Δx tiende a 0].
Es decir, la pendiente de la recta tangente en un punto es el resultado de calcular un límite.
Una vez calculada la pendiente, la ecuación de la recta es fácil de encontrar.

El procedimiento se puede generalizar para cualquier x, y entonces se dice que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

es la derivada de f en x. Se denota $f'(x)$ o $Df(x)$.

Veamos cómo se calcula la derivada de $f(x) = x^2$ para cualquier x.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Es decir:

$$y' = 2x \quad o \quad y' - 2x = 0$$

El método newtoniano

Ahora veamos cómo procedería Newton usando su notación:

Sea la ecuación
$$y - x^2 = 0.$$
Ahora sustitúyase $x + \dot{x}o$ y $y + \dot{y}o$ en la ecuación anterior:
$$y + \dot{y}o - (x + \dot{x}o)^2 = 0$$
$$y + \dot{y}o - (xx + 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2) = 0$$
$$y + \dot{y}o - xx - 2x\dot{x}o - \dot{x}^2o^2 = 0.$$
Como $y - x^2 = 0$ se tiene
$$\dot{y}o - 2x\dot{x}o - \dot{x}^2o^2 = 0.$$
Ahora divídase la ecuación anterior por "o" y se tiene
$$\dot{y} - 2x\dot{x} - \dot{x}^2o = 0.$$
Como "o.$^{\text{es}}$ una cantidad infinitamente pequeña, entonces lo que es multiplicado por "o" no significa nada con respecto al resto, y lo podemos eliminar. Así quedaría
$$\dot{y} - 2x\dot{x} = 0.$$
Nótese que la expresión anterior es casi idéntica a la que obtuvimos por el método moderno.

Si f describe la posición o el desplazamiento de un cuerpo con relación al tiempo, y se tiene, por ejemplo, $f(t) = t^2$, entonces $f'(t) = 2t$ es la *velocidad* del cuerpo en el instante t.

Se podría preguntar por qué es válido que "o" se desvanezca o si estos "o" son números finitos o ceros. Debe recordarse, sin embargo, que Newton realizó sus cálculos sin tener a su disposición una formulación precisa del concepto que estaba correctamente usando: *el límite*. Sus derivadas se calculaban usando recursos intuitivos y geométricos.

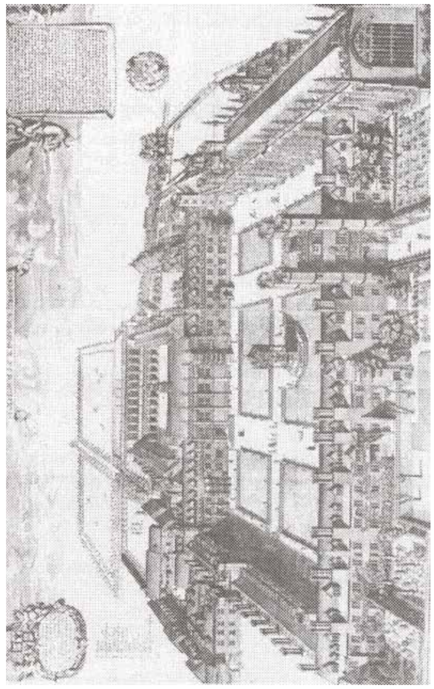


Foto 10.2. *El Trinity College de la Universidad de Cambridge. Esta ilustración corresponde a una pintura realizada por Loggan "Cantabrigia Illustrata" de 1690. Newton escribió aquí su libro* **Principia**.

Críticas

La falta de precisión y rigor lógicos (condiciones que solo se encontraría siglos después) fue excusa para que filósofos reconocidos como el obispo George Berkeley (1685-1753) criticaran ásperamente la nueva "Teoría de fluxiones". Aunque no negaba la utilidad de los nuevos métodos ni la validez de sus resultados, Berkeley decía que éstos no se apegaban a la deducción lógica, y que usaban razonamientos inductivos. Por ejemplo, Newton decía que el término "derivada" era una razón final y no explicaba bien lo que Hawking consideraba "cantidades evanecentes".

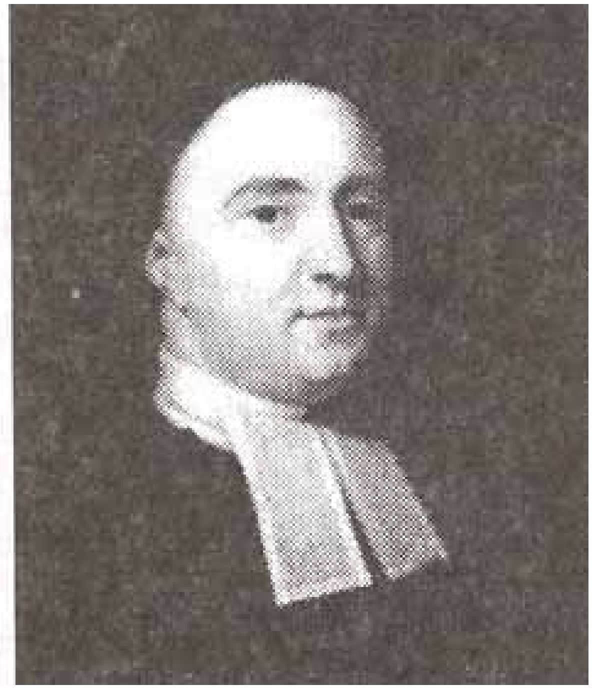


Foto 10.3. *Robert Boyle (1627-1619) y George Berkeley (1685-1753)*

Es interesante mencionar que Berkeley decía que si el concepto de velocidad depende del espacio y el tiempo, entonces el concepto de "velocidad instantánea" no puede existir. Si se expresa la velocidad como el límite (cuando $\Delta x \to 0$) de razones como

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

con y la distancia y x el tiempo, Berkeley preguntaría ¿cuál es el sentido de incrementos que se desvanecen (Δy y Δx se hacen 0) dejando un cociente sin sentido $\frac{0}{0}$? Una velocidad –continuaría– debe ser una distancia sobre un tiempo. ¿cómo puede existir una velocidad con distancia nula y sobre un tiempo también nulo?

Hoy todos sabemos que la derivada no es el último término de una colección de razones (las pendientes de la rectas secantes), sino un número aparte. El "paso al límite.^{er}a lo que entrababa dificultades porque se hacía sin precisión de los términos, y esto sucedía porque ese paso de las pendientes de secantes a la derivada, al límite, era un método que se escapaba de la geometría euclidiana, la aritmética y el álgebra tradicionales: era un nuevo método matemático cualitativamente diferente y al que no podía pedírsele en ese momento la precisión que solo un largo período de su manipulación y reflexión le brindaría.

10.3. Cálculo, series infinitas y publicaciones

Debe señalarse que la creación del Cálculo diferencial e integral en el caso de Newton estuvo vinculado también a las series infinitas. Al descubrir el *teorema del binomio* (y generalizarlo) Newton comprendió que se podía operar con series infinitas más o menos igual que con las sumas finitas.

El teorema del binomio y las series

Recordemos el teorema del binomio:

$$(x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$
$$(x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + (\Delta x)^3$$

y, en general:

$$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n$$

y la serie binómica para $f(x) = (1+x)^k$ es

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

[$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1$, el producto de todos los enteros positivos menores o igual a n].

Descubrió, además, que las series no solo servían para aproximar funciones, sino también para definir alternativamente las funciones. Por ejemplo:

$$sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

con $x \in R$ y

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

con $x \in]-1,1[$.

Diferenciar o integrar funciones se podía hacer derivando o integrando cada término de la serie de una manera simple y más fácil.

Publicaciones

La primera obra de Newton en la que escribe de sus ideas engendradas en los años 1665-1666 (series, y Cálculo) fue: *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* que, aunque escrito en 1669, fue publicado hasta 1711. Esta relación entre series y Cálculo se expresa también en su libro *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* que escribió en 1671, y sería publicado en inglés en 1736 y en latín en 1742. La tercera exposición de su Cálculo la hizo Newton en 1676 en su libro *De quadratura curvarum.* Newton en esta obra trata de evitar las “cantidades infinitamente pequeñas‟ las “cantidades fluentes”que había utilizado en los anteriores trabajos. En esta obra plantea una teoría de las “razones primeras y últimas”. La “razón última”no es más que la derivada planteada sin el concepto de límite, que se desarrollaría mucho tiempo después.

El único libro en que Newton mostró su Cálculo y que publicó rápidamente fue el famoso *Philosophiae naturalis principia mathematica* en 1687. Para que se tenga una idea de la formulación newtoniana del límite de una función (o de la derivada), citamos textualmente el Lema I del Libro I, Sección I de esta obra:

> “Cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales”

Newton usó los métodos del Cálculo en el estudio de la astronomía y mecánica que ahí aparece, pero una gran parte del libro fue expresada en forma geométrica tradicional para que sus contenidos fueran mejor aceptados por la comunidad científica de la época.

Publicar o no publicar

Una característica de la personalidad de Newton fue su reticencia a publicar rápidamente sus trabajos. Como vimos descubrió el Cálculo en 1665-1666 y lo terminó de publicar 40 años después. Sus descubrimientos sobre la gravitación universal también fueron de estos años y los publicó hasta 1687. Otra obra: *Arithmetica universalis*, con conferencias dadas entre 1673 y 1683, la publicó hasta 1707.

Tal vez resulta interesante señalar que el gran matemático Carl Friedrich Gauss de finales del siglo XVIII y de la primera parte del XIX, también poseía esta reticencia a publicar rápidamente. En el caso de Gauss esto hizo que muchos matemáticos de su época obtuvieran resultados sin saber que Gauss ya los había obtenido años antes. Y en el caso de Newton que se ayudara a desarrollar la polémica entre la escuela de Leibniz y la de Newton acerca de la paternidad del Cálculo.

Para concluir este capítulo, no está de más mencionar un detalle sobre la personalidad de Newton, que Stephen Hawking menciona en su bellísimo libro de divulgación científica *Historia del tiempo*:

> "Isaac Newton no era un hombre afable. Sus relaciones con otros académicos fueron escandalosas, pasando la mayor parte de sus últimos tiempos enredado en acaloradas disputas. Después de la publicación de los *Principia Mathematica* (seguramente el libro más influyente jamás escrito en el campo de la física), Newton fue ascendido rápidamente en importancia pública. Fue nombrado presidente de la Royal Society, y se convirtió en el primer científico de todos los tiempos que fue armado caballero."

Las grandes cualidades de las personas suelen estar acompañadas de debilidades; la naturaleza de la vida es así. Los científicos son de carne y hueso y los resultados de su trabajo están condicionados por sus características personales y por el contexto social e histórico en que se dan.

10.4. Ejercicios

FALSO O VERDADERO

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. En cada caso brinde una justificación breve de su respuesta

1. Las matemáticas por más importantes que son no fueron decisivas en la Revolución Científica del siglo XVII.

2. Newton describió la astronomía a partir de la mecánica terrestre.

3. La Ley de la Gravitación Universal es

$$F = \frac{G \times D^2}{M \times M_1};$$

   M, M_1 masas planetarias, D la distancia entre planetas.

4. El Cálculo integral y diferencial resolvió los llamados cuatro problemas fundamentales.

5. Para Newton las derivadas eran velocidades.

6. La derivada es el último término de una colección de razones.

7. En *Principia*, Newton usó sólo los métodos del Cálculo para explicar mejor sus leyes a la comunidad científica.

PREGUNTAS DE DESARROLLO

1. Mencione un gran resultado de Newton incluido en su libro *Principia.*

2. Mencione las cuatro grandes contribuciones científicas de Newton engendradas entre 1665 y 1666.

3. ¿Cuál era la crítica que le hacía Berkeley a los métodos de Newton?

4. Berkeley decía "¿cómo puede existir una velocidad con distancia nula y sobre un tiempo también nulo?". ¿Cómo respondería usted a Berkeley?

5. ¿Qué significa que el Cálculo en series infinitas era más fácil y conveniente?

6. ¿Por qué podemos decir que Newton contribuyó a la polémica sobre la paternidad del Cálculo con Leibniz?

7. Calcule la derivada de la función $f(x) = 2x^2$ usando el método de Newton.

Capítulo 11

LEIBNIZ

OBJETIVOS

- *Describir la contribución de Leibniz al Cálculo diferencial e integral.*
- *Mencionar la relación de Leibniz con la notación en el Cálculo.*
- *Mostrar las diferencias en los enfoques teóricos de Newton y Leibniz.*

Gottfried Wilhelm Leibniz nació en Leipzig y vivió casi siempre alrededor de la ciudad alemana de Hanover, donde trabajó para los duques, uno de ellos fue Rey de Inglaterra como Jorge I. Leibniz estudió derecho e hizo su primera tesis en lógica. En 1666 escribió otra tesis *De Arte Combinatoria* ("Sobre el arte de las combinaciones"), en el que proponía un método universal para razonar (ésta fue su tesis doctoral).

11.1. Una mente universal

Leibniz fue filósofo, abogado, historiador, filólogo y un pionero de la geología. Debido al impacto de la obra de Newton en la cosmología y la mecánica, a veces se pasa por alto que Leibniz hizo importantes contribuciones en lógica, mecánica, óptica, hidrostática, neumática, ciencia náutica y en la construcción de máquinas calculadoras. Aunque se ganó la vida como diplomático y abogado, sus trabajos en filosofía y las matemáticas fueron de lo mejor de la historia de la cultura.

Dos hechos son muy interesantes sobre las ideas de Leibniz:

- trató siempre de reconciliar las religiones católica y protestante;
- motivó la creación de sociedades académicas para promover las ciencias y técnicas frente al carácter retrógrado y la ignorancia "monjil" que imperaba en las universidades de la época. Incluso favoreció el uso del alemán frente al latín, porque éste último era un aliado del viejo orden.

Dos proyectos intelectuales generales tuvieron importancia en su vida:

- uno era la *scientia generalis*: encontrar un método universal para conocer, hacer inventos y entender la unidad del Universo;
- y el otro la *lingua characterica*: crear un lenguaje perfecto para razonar haciendo simples computaciones.

Ambos proyectos fueron enriquecedores de su trabajo intelectual: el primero le condujo a descubrimientos matemáticos y el segundo a contribuciones en la lógica y en el uso de símbolos matemáticos.

Comunicación entre científicos

Leibniz recibió la influencia de Descartes de una manera históricamente muy interesante. Descartes había influido en las matemáticos holandeses (estuvo 20 años en Holanda). Entre ellos destaca Frans van Schooten (1615-1660) quien propagó y amplió la geometría analítica cartesiana. Incluso realizó una versión en latín de la *Géométrie* (escrita originalmente en francés). Uno de los discípulos de van Schooten fue Huygens quien, como hemos mencionado ya, fue un gran científico con contribuciones en la teoría de la luz, en astronomía y al que se le atribuye el reloj de péndulo. En 1666, Huygens se trasladó a París, en donde permaneció hasta 1681. Ya en 1656 había aplicado métodos infinitesimales a las cónicas (por ejemplo, redujo la "rectificación" de la parábola a la "cuadratura" de la hipérbola). En el Cálculo Leibniz recibió la influencia directa de Huygens que estuvo en París entre 1673 y 1676, allí estudió los trabajos de Descartes y Pascal y de algunos matemáticos británicos. Fue una de las motivaciones de Leibniz para dedicarse a los asuntos que luego originarían el Cálculo. [La relación entre Huygens y Leibniz se puede ver, por ejemplo, en el desarrollo conjunto del concepto de *energía cinética*]. Lo que deseamos puntualizar aquí: hubo una conexión entre Descartes y Leibniz a través de los matemáticos holandeses. Esto resulta muy interesante y apunta al tipo de vínculos y genéticas comunes en el trabajo científico de esos tiempos.

Es interesante mencionar que Leibniz sabía del rumor de que Newton ya manejaba el nuevo método, y esto contribuyó a estimular su trabajo.

Foto 11.1. *Christian Huygens (1629-1685)*

11.2. El Cálculo de Leibniz

Podría decirse que mientras el enfoque de Newton fue *físico*, el de Leibniz fue esencialmente *geométrico* o incluso *algebraico*.

Muy rápido (1673) desde que entró en contacto con las matemáticas –vía Huygens– tomó Leibniz conciencia de la importancia de calcular las tangentes a las curvas y estaba seguro de que el método inverso era equivalente al de encontrar las áreas y volúmenes por sumas. A lo largo de varios manuscritos escritos entre 1675 y 1684 se puede conocer la evolución intelectual de Leibniz con relación al Cálculo. Por ejemplo, en noviembre de 1676 daba las reglas $dx^n = nx^{n-1}$ (para un entero o fraccional) y, también

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Para julio de 1677, Leibniz daba las reglas correctas para la diferencial de la suma, diferencia, producto y cociente de 2 funciones y para potencias y raíces, pero no ofrecía pruebas.

La primera obra publicada que recoge su método fue un artículo que apareció en la revista *Acta eruditorum* en 1684, que él había fundado dos años antes (entonces ya había anunciado su método). Se llamaba *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec fractas nec irrationales quantitates moratur* (*"Un nuevo método para máximos y mínimos, y también para tangentes, que no se ve obstruido por las cantidades fraccionarias ni por las irracionales"*). El artículo contenía por ejemplo los símbolos dx, dy y las reglas

$$d(xy) = xdy + ydx$$

$$d(\frac{x}{y}) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$d(x^n) = x^{n-1}dx$$

y establecía que $dy = 0$ para valores extremos relativos o $d^2y = 0$ para los puntos de inflexión. También introdujo aquí el término "cálculo diferencial"(de diferencias), aunque v y y se toman como funciones de x, el término "función"no aparece en este artículo. Este término aparecerá hasta 1692 en otro de sus artículos. Antes de usar "cálculo diferencialüsó la expresión "*méthodus tangentium directa*". También "*methodus tangentium inversa.*º "*calculus summatorius*"para la integración definida y, en 1698, el término "*calculus integralis*"(en un artículo con Jean Bernoulli).

Foto 11.2. *Gottfried Leibniz (1646-1716)*

Notación

En 1686 Leibniz publicó un trabajo sobre la integración, donde usó el símbolo "$\int$". En realidad Leibniz había usado varios símbolos para la integral: primero $omn.y$ (todas las y) , luego $\int y$ y luego $\int ydx$.

En 1675 usó la siguiente notación:
$omn.$: quería decir suma (del latín *omnia*),
l : significaba dy.

Entonces, por ejemplo: $omn.l = y$ quería decir en nuestra notación $\int dy = y$ y $omn.yl = \frac{y^2}{2}$ significaba$\int ydy = \frac{y^2}{2}$.

En octubre de 1675, Leibniz escribía $\int l = omn.l$ y $\int x = \frac{x^2}{2}$.

Para Leibniz dy y dx representaban cantidades arbitrariamente pequeñas (diferenciales o infinitesimales), y con ellas iría construyendo tanto su Cálculo integral (sumas) como su Cálculo diferencial (cálculo de tangentes). Los símbolos $\dot{x}o$ y $\dot{y}o$ de Newton se traducen como dx y dy en Leibniz.

Influencia

El impacto de estos trabajos de Leibniz fue muy grande y generó un desarrollo más rápido del Cálculo con el enfoque leibniziano. Por ejemplo, poco tiempo después y con la contribución destacada de los famosos hermanos matemáticos Bernoulli se desarrollaron enormemente los resultados básicos de lo que hoy se enseña como Cálculo universitario.

En 1696 apareció el primer texto sobre Cálculo escrito por el Marqués de L´Hôpital: *Analyse des infiniment petits* (Jean Bernoulli fue tutor de L´Hôpital). Después Euler y otros matemáticos continentales proseguirían esa obra. El enfoque de Newton (la teoría de fluxiones) tendría un progreso menos espectacular con Taylor, Maclaurin y otros matemáticos británicos.

Los símbolos "=z "×"para denotar la igualdad y multiplicación, aunque no los inventó, también fueron aceptados dominantemente por su influencia. Los términos "funciónz "coordenadas"también provienen de Leibniz.

Resulta interesante mencionar que Leibniz al igual que Newton también sufrió ataques por parte de otros intelectuales de la época. El médico y geómetra Bernard Nieuwentijdt (1654-1718) en 1694 señalaba que había oscuridad en el trabajo de Leibniz y que no podía entender cómo diferían las "cantidades infinitamente pequeñas"de 0, y preguntaba cómo una suma de infinitesimales podía dar algo finito.

La realidad es que ni Leibniz ni Newton tuvieron gran éxito en esclarecer su método y sus nuevos conceptos y, por eso, colocaron la justificación final de las mismas en la coherencia de sus resultados, en la fecundidad de los métodos. Tanto el método de Newton como el de Leibniz no tenían la precisión y la claridad lógica que hoy se exhibe, pero sin duda aprehendían, sintetizaban, y operacionalizaban magistralmente los conceptos fundamentales del Cálculo diferencial e integral.

11.3. Diferencias entre Newton y Leibniz

Aunque Newton había descubierto el Cálculo durante los años 1665 y siguientes, no había publicado nada sobre el mismo antes de 1687. Y en esta obra (*Principia*) apenas dio indicaciones del Cálculo. Sí había presentado, sin embargo, algunos de sus manuscritos a sus amigos. Por ejemplo *De Analysi* a Barrow en 1669, quien se lo había enviado a John Collins. Leibniz visitó París en 1672 y Londres en 1673 y estuvo en contacto con gente que conocía la obra de Newton. Este es el contexto que hizo que surgiera la acusación de Leibniz como un plagiador.

Las diferentes investigaciones realizadas revelan que el trabajo de Newton fue previo al de Leibniz pero que este último llegó a sus resultados independientemente. Ambos, eso sí, recibieron la influencia de Barrow, quien había llegado más lejos en la comprensión de la naturaleza inversa de la derivada y la integral (aunque su tratamiento fuera muy geométrico).

La radical diferencia entre los enfoque de Newton y Leibniz habría sido suficiente evidencia de que se trataba de creadores independientes, pero la controversia sobre la prioridad se desarrolló ásperamente entre los matemáticos ingleses y los continentales.

Stephen Hawking es muy crítico de Newton:

> "Aunque sabemos ahora que Newton descubrió el cálculo años antes que Leibniz, publicó su trabajo mucho después. Sobrevino un gran escándalo sobre quién había sido el primero, con científicos que defendían vigorosamente a cada uno de sus contendientes. Hay que señalar, no obstante, que la mayoría de los artículos que aparecieron en defensa de Newton estaban escritos originalmente por su propia mano, ¡y publicados bajo el nombre de amigos! Cuando el escándalo creció, Leibniz cometió el error de recurrir a la Royal Society para resolver la disputa. Newton, como presidente, nombró un comité 'imparcial' para que investigase, ¡casualmente compuesto en su totalidad por amigos suyos! Pero eso no fue todo: Newton escribió entonces él mismo los informes del comité e hizo que la Royal Society los publicara, acusando oficialmente a Leibniz de plagio. No satisfecho todavía, escribió además un análisis anónimo del informe en la propia revista de la Royal Society. Después de la muerte de Leibniz, se cuenta que Newton declaró que había sentido gran satisfacción 'rompiendo el corazón de Leibniz'"

Esta polémica tuvo grandes consecuencias para las matemáticas. Por ejemplo: la reticencia de los newtonianos a usar la notación de Leibniz, que sin duda era mejor que la usada por Newton, y que esencialmente es la misma que hoy usamos. El retroceso de la matemática en Inglaterra (con relación a la matemática en Europa continental) durante varias décadas fue parcialmente motivado por este triste episodio.

No fue sino hasta principios del siglo XIX que se resolvería el asunto, cuando los británicos adoptaron finalmente la notación de Leibniz. Esto se realizó especialmente gracias al trabajo del matemático francés Laplace. Desde entonces la controversia ha ocupado un capítulo marginal en la historia de las matemáticas. No obstante es un vívido ejemplo acerca de la naturaleza de la construcción social de las matemáticas: criterios, decisiones, apreciaciones fundadas o infundadas, correctas o erróneas, permean la práctica de la comunidad matemática, y a veces determinan su evolución durante muchísimo tiempo.

Es interesante señalar las diferencias existentes en los enfoques de Newton y Leibniz. Ambos construyeron el Cálculo como un campo matemático independiente de la geometría y el álgebra en sus conceptos y métodos y, al mismo tiempo, le dieron un fundamento algebraico a los mismos. Recordemos: hasta el siglo XVII, las relaciones típicas del álgebra de nuestros días eran vistas en términos geométricos (como longitudes, áreas, volúmenes, etc.).

Los métodos infinitesimales previamente a Newton y Leibniz además de su carácter parcial eran también muy geometrizados. La nueva relevancia puesta en el álgebra fue muy importante. Más decisiva y en esto ambos coincidieron: la reducción de los problemas de áreas, volúmenes, etc., a procesos de antidiferenciación. Todos los asuntos que motivaron el surgimiento del Cálculo en el siglo XVII fueron reducidos por Newton y Leibniz a la derivación y antiderivación.

Ahora bien, mientras Leibniz usaba los incrementos infinitesimales en la x y y, y luego estudiaba la relación entre ellos, Newton usaba sus infinitesimales en la derivada misma. En Newton los infinitesimales estaban asociados directamente al cálculo de *velocidades instantáneas* (un claro sentido de aplicación física). En Leibniz el interés no era la aplicación física. De hecho, se podría establecer una correlación entre infinitesimales y “mónadas”, estos últimos entes primarios en la descripción de lo real según la filosofía que aparece en su libro de filosofía (metafísica) *Monadología*. El énfasis de Newton era la razón de cambio, mientras que en Leibniz lo era la suma infinita de infinitesimales.

Otra distinción interesante fue el interés adicional de Leibniz en la notación a usar. Newton no le prestó mucho cuidado a ésta. De la misma manera, tampoco le prestó mucha atención a formular con precisión los algoritmos típicos del Cálculo (derivada de la suma, producto, etc.), que por supuesto conocía. Leibniz poseía una vocación por la búsqueda de reglas generales y universales (tanto en el lenguaje, la ciencia como en el pensamiento en general), que influiría en la forma y la notación con la que se desarrollaría posteriormente el Cálculo. Aunque, fue el sentido aplicado de éste, que influía la creación realizada por Newton, el que dominaría las matemáticas de todo el siglo XVIII.

11.4. Ejercicios

FALSO O VERDADERO

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. En cada caso brinde una justificación breve de su respuesta

1. Leibniz fue diplomático y filósofo.
2. El proyecto de la *Lingua Characterica* era crear un lenguaje perfecto.
3. Leibniz fue discípulo directo de Descartes.
4. La notación matemática era importante para Leibniz.
5. Barrow influenció el trabajo de Leibniz.
6. Newton y Leibniz enfatizaban el papel del álgebra.

PREGUNTAS DE DESARROLLO

1. ¿Cuál científico holandés influyó directamente en el trabajo científico de Leibniz?
2. ¿Qué significan los símbolos $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, dx, dy? Explique.
3. ¿Cuál era la actitud de Leibniz frente a la notación en matemáticas?
4. Explique el origen de la polémica entre Newton y Leibniz. Mencione su desenlace histórico.
5. Mencione dos diferencias entre Newton y Leibniz con relación al Cálculo.

6. Explique las ideas que contiene el siguiente párrafo:

> "La realidad es que ni Leibniz ni Newton tuvieron gran éxito en esclarecer su método y sus nuevos conceptos y, por eso, colocaron la justificación final de las mismas en la coherencia de sus resultados, en la fecundidad de los métodos. Tanto el método de Newton como el de Leibniz no tenían la precisión y la claridad lógica que hoy se exhibe, pero sin duda aprehendían, sintetizaban, y operacionalizaban magistralmente los conceptos fundamentales del Cálculo diferencial e integral."

Capítulo 12

CIENCIA Y SOCIEDAD EN EL SIGLO XVIII

OBJETIVOS

- *Explicar el contexto más amplio del desarrollo de la sociedad y la ciencia en el siglo XVIII.*
- *Proporcionar un resumen de la historia de la Revolución Industrial.*
- *Algunas características de la evolución de la química en la época.*
- *Contribución de Lavoisier al desarrollo científico.*

El ritmo de progreso que la ciencia había exhibido a mediados del siglo XVII disminuyó a finales del mismo siglo y en las primeras décadas del siguiente. El Medievo sirvió como una gran camisa de fuerza para la indagación científica y, por eso, el *Renacimiento* y la *Revolución Científica* abrieron primeramente una crítica al viejo orden intelectual y, en segundo lugar, una afirmación de nuevas ideas. Un movimiento expansivo se dio entonces en el mundo del pensamiento, que debió esperar a un desarrollo de la sociedad en varias de sus dimensiones para poder ampliar y profundizar su onda expansiva. Por otra parte, se podía esperar desarrollos en las matemáticas y en la medicina pero un avance ulterior en las otras ciencias requería de una madurez social adicional. No era posible pensar en la química o la termodinámica en el siglo XVII sin que antes existiera la necesidad social de las mismas.

Ciencia y tecnología

La primera parte del XVIII sirvió no tanto para generar nuevas ideas sino más bien para afianzar las nuevas ideas críticas contra el orden intelectual anterior (que socialmente no había desaparecido en todas partes). La segunda mitad del siglo y la primera del siguiente fueron de una importancia extraordinaria para el desarrollo de la sociedad que hoy conocemos. Este periodo incluye la Independencia de los Estados Unidos, la Revolución Francesa y la Revolución Industrial en Inglaterra. En este periodo se realizó una auténtica revolución en la química y la electricidad, y se inició un apasionado matrimonio entre la ciencia y la economía (a través de su intervención en el progreso de la tecnología) que ha definido el rostro de la sociedad moderna. Dos condiciones sociales de partida fueron necesarias para esta evolución:

- Por un lado el surgimiento de la ciencia experimental y cuantitativa (matemática) que se generó esencialmente en los dos siglos anteriores.
- Por otro lado, el desarrollo de la sociedad capitalista sin las trabas del orden social anterior.

Antes del siglo XVIII la ciencia intervino débilmente en la producción económica (astronomía y matemáticas en la navegación y el comercio), pero en la primera mitad del siglo XIX su papel ya era imprescindible.

12.1. La Revolución Industrial

La Revolución Industrial que se dio en Inglaterra fue decisiva no solo para el desarrollo de la economía sino también para la ciencia. Aunque en algunos casos la Revolución Industrial tuvo la influencia del avance científico de la época -como con la máquina de vapor- la realidad es que éste no fue un ingrediente fundamental para la misma. Puede decirse que pesaron otras condiciones sociales más ligadas a la producción misma. Podemos señalar algunos elementos.

- La mejor organización del trabajo (división y especialización de tareas),

- el sistema fabril (una unidad productiva especial),
- el desarrollo de la maquinaria.

Lo que sí va a suceder con toda claridad es lo contrario: una gran influencia de estos cambios técnicos en el desarrollo de las ciencias. La nueva organización social basada en el progreso del intercambio comercial y con un énfasis en la empresa y la libertad de acciones requirió de la visión y los métodos de la nueva ciencia para crear su marco ideológico. Podemos decir que el cambio que supuso la Revolución Científica fue en el pensamiento general, mientras que la Revolución Industrial lo hizo en la práctica.

La sociedad industrial se constituiría en un factor decisivo para explicar la transición de una ciencia orientada hacia las matemáticas, la astronomía y la medicina (siglo XVII) a otra dirigida a la química, la electricidad y la termodinámica.

Antecedentes y desarrollo

Antecedentes inmediatos de la Revolución Industrial en Inglaterra fueron:

- el mejoramiento de las prácticas agrícolas (con cambios que se habían hecho antes en Holanda), y
- la expansión del uso de la hulla en la industria.

La Revolución Industrial tuvo su origen en la industria textil británica. Con la demanda de las telas se obligó a usar técnicas mejores como el uso de la energía hidráulica para el proceso de abatanar, y de la hulla para el lavado y el teñido. Esto se hizo primero en Yorkshire y después en Lancashire. En mitad del siglo XVIII la industria empezó a fabricar el algodón. Este tipo de fibra exigía la implementación de nuevas técnicas (diferentes por ejemplo a las que usa la lana) y, dada la alta demanda, los telares manuales no dieron abasto. Las máquinas se hicieron necesarias: primero fue el torno de hilar de Hargreaves en 1764, el telar hidráulico de Arkwright en 1769 y luego la máquina tejedora intermitente de Crompton en 1779. Tanto fue el uso de este tipo de máquinas de gran demanda de agua, que los ríos cercanos a las industrias textiles tampoco pudieron dar abasto. Una nueva máquina con otra forma de energía se hizo necesaria: la máquina de vapor de Watt (1785).

La utilización efectiva de estas máquinas y su proyección mayor fue posible por el desarrollo social, económico y productivo que se había dado desde por lo menos el siglo anterior en Gran Bretaña. En particular fue necesario que existiera capital (empresarios fuertes) para poder invertir en la nueva industria y, segundo, la existencia de mano de obra disponible. Todo esto se había realizado a través de un proceso socialmente muy difícil en las décadas anteriores.

El impacto en la forma de vida fue muy grande. Mientras en los tiempos anteriores la dispersión social predominaba y los artesanos estaban esparcidos por todas partes, ahora la organización en fábrica favorecía la concentración urbana (alrededor de la industria). Ciudades industriales surgieron: Manchester, Birmingham, Newcastle y Glasgow por ejemplo.

La concentración urbana a su vez creó mayor demanda a la agricultura, lo que obligó a una verdadera reforma agrícola. En particular, además de rotaciones de cultivos implicó el uso de maquinaria (aunque muy rudimentaria). Esto cambiaba la estructura del campo, porque era necesaria menos gente para la producción, y más gente iba a las ciudades para laborar en la industria.

Ciencia, tecnología y sociedad

Debe ponerse en relevancia el papel de la máquina de vapor en esta revolución. Su utilización juntó la industria pesada (máquinas) con la industria liviana (textil), que es un modelo que hemos tenido en el mundo desde entonces. Este gran invento técnico fue una aplicación del nuevo conocimiento científico. Y, por eso, podemos decir que la ciencia participó en una dimensión muy importante de la Revolución Industrial, a pesar de que fueron otras condiciones técnicas, económicas y sociales las que la hicieron posible.

Un detalle altamente interesante, que revela esa relación especial entre la ciencia, la técnica y el desarrollo social es que el desarrollo científico del finales del siglo XVIII no provino en lo que a Inglaterra se refiere de los grandes centros clásicos que fueron importantes en el siglo anterior: Cambridge, Oxford o Londres, sino de lugares como Leeds, Glasgow, Edimburgo, Manchester o Birmingham que tenían que ver con la nueva industria.

12.2. La química

Antes del periodo de la Revolución Industrial, dos de los principales progresos científicos se habían dado con el descubrimiento de la electricidad y con la botánica. Pero podemos decir que ya en este período alrededor de la Revolución Industrial el principal progreso científico se hizo en la química (se hizo racional y cuantitativa). No es que en las otras ciencias no se diera progreso sino que con relación a la química se dio una auténtica revolución, cambio radical de métodos y conceptos que ya se había dado en la astronomía, la medicina y las matemáticas en el siglo XVII.

El elemento decisivo que fundamentó el progreso de la química fue el estudio de los nuevos gases que entonces se conocieron, lo que estuvo conectado con los experimentos con el vacío y el aire durante el siglo XVII. También fue importante el desarrollo de la máquina de vapor. Con base en los trabajos de Black en Escocia, Scheele en Suecia y especialmente Priestley en Inglaterra, el gran científico francés Lavoisier pudo sentar las bases de la química moderna. Lavoisier fue la figura dominante en la ciencia francesa en la última tercera parte del siglo XVIII.

Desde la alquimia y el flogisto al oxígeno

El primer paso se había dado en el siglo anterior con la ruptura con la alquimia, que integraba ideas mágicas e irracionales sobre la naturaleza de los fenómenos químicos. El segundo paso fue explicar racional y con sustento empírico la naturaleza de los gases, en particular el proceso de la combustión (este último dominó la escena en el siglo XVIII). Para explicar la combustión, primeramente se había acudido a una teoría llamada del flogisto. La idea básica era que todos los combustibles tenían una sustancia que perdían precisamente en la combustión. Esta idea era parte de la tradición árabe y de los seguidores de un famoso médico alemán que se hizo llamar Paracelso [Theophrastus Philipus Aureolus Bombastus von Hohenheim (1493-1541), fue un reformador médico que introdujo un nuevo concepto de enfermedad y el uso de medicamentos químicos. Estudió en varias universidades italianas y empezó a practicar medicina y cirugía alrededor de 1520]. Aunque Becher (1635-1682) y su discípulo Stahl (1660-1734) le dieron el nombre de flogisto a esa sustancia, la teoría solo se aceptaría mayoritariamente hasta mediados del siglo XVIII.

Los nuevos avances en la química se harían precisamente frente a la teoría del flogisto. Primero el médico escocés Joseph Black (1728-1794) quien demostró que los gases eran parte integrante de los sólidos. Luego Joseph Priestley (1733-1804) y Carl Wilhelm Scheele (1742-1786) descubrieron la existencia de lo que hoy llamamos oxígeno (1774). Priestley también demostró que el oxígeno se emplea tanto en la combustión como en la respiración por los seres vivos.

Lavoisier

Fue Lavoisier quien llegó más lejos demostrando que el oxígeno era el único responsable de la combustión, contradiciendo expresamente la teoría del flogisto. También demostró que las sustancias (incluyendo los gases) se pueden ordenar de acuerdo a la combinación y disasociación de algunos elementos. Antoine Laurent Lavoisier (1743-1794) aunque no descubrió nuevos elementos e hizo pocas preparaciones, describió y sintetizó el conocimiento químico. En su texto *Elementos de Química* (1789) presentó su nuevo sistema de la química basado en el concepto moderno de elemento químico y utilizando la ley de la conservación de la masa en las reacciones químicas.

Lavoisier demostró que un ser vivo se comporta igual que el fuego: consume las sustancias que hay en los alimentos y la energía que se produce la libera como calor. Con ello Lavoisier daba una explicación profunda a los procesos de la respiración y de la circulación de la sangre (que se conocían desde hacía 2 siglos).

Durante la Revolución Francesa, Lavoisier fue diputado de la nobleza (título que había heredado de su padre en 1775, quien lo había comprado). A pesar de sus importantes contribuciones y de otras para el desarrollo de la ciencia, por ser un constitucionalista moderado y haber sido parte de una agencia real de cobro de impuestos, Lavoisier fue guillotinado durante la Revolución Francesa (en el periodo que se llama el *Reino del Terror*). Una de las grandes injusticias que se cometió en esa revolución.

La Revolución Francesa y la ciencia

La Revolución Francesa tuvo un impacto muy grande en la historia de la ciencia francesa y, si se quiere, europea en general. Todos los gobiernos revolucionarios le dieron mucha importancia, recursos y depositaron en ella muchas expectativas. Monge, Carnot fueron republicanos apasionados y participaron activamente en las tareas revolucionarias. Mientras tanto otros como Bailly, Condorcet y el mismo Lavoisier no pudieron sobrevivir por sus vínculos con el orden político y social anterior.

Las dos acciones más importantes de los revolucionarios franceses con relación a la ciencia fueron:

- El establecimiento del sistema métrico decimal para los pesos y medidas (una auténtica revolución).

- La segunda fue la reforma educativa más importante realizada desde el *Renacimiento*: se creó la *École Normale Supérieure*, La *École de Médecine* y la *École Polytechnique*.

Estas nuevas instituciones, que luego se adoptarían como modelo en varias partes del mundo, se hicieron con base en academias científicas y escuelas militares y no con base en las universidades, que habían permanecido en el marco ideológico del antiguo régimen. Las nuevas instituciones abrieron el camino para la creación de un nuevo régimen con profesores y científicos asalariados (con apoyo estatal), y no como sucedía antes que a lo sumo eran patrocinados por algún rico o por algún aficionado con recursos económicos.

En la Revolución Científica del siglo XVII se logró establecer sólidamente una ruptura con el orden ideológico del medievo, recobrando el conocimiento griego antiguo y resolviendo los problemas clásicos planteados por los antiguos con nuevos métodos (descripción matemática y experimentación). En el siglo XVIII los científicos resolvieron con los nuevos métodos asuntos que los griegos nunca pudieron sospechar. En este periodo la ciencia se vinculó esencialmente a la producción económica y a la técnica: a través de la química, la electricidad, la ingeniería mecánica.

12.3. Ejercicios

FALSO O VERDADERO

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. En cada caso brinde una justificación breve de su respuesta

1. La Revolución Industrial fue decisiva para la astronomía.
2. La Revolución Industrial tuvo su origen en la industria textil británica.
3. Joseph Priestley y Carl Wilhelm Scheele descubrieron el oxígeno.
4. La Revolución Francesa cambió la posición social de los profesores y científicos de la época en Europa.

PREGUNTAS DE DESARROLLO

1. Señale dos características sociales fundamentales para la evolución de la Revolución Científica y la Revolución Industrial en el siglo XVIII.

2. ¿Cómo sintetizaría en pocas frases lo que fue la Revolución Industrial?

3. ¿Qué ciencia tuvo un desarrollo cualitativo y revolucionario en el siglo XVIII? Explique.

4. ¿Qué decía la Teoría del flogisto?

5. Mencione dos resultados importantes de la obra de Lavoisier.

6. Señale las dos acciones más importantes para la ciencia realizadas por la Revolución Francesa.

7. Explique las ideas que contiene el siguiente párrafo:

   > "El ritmo de progreso que la ciencia había exhibido a mediados del siglo XVII disminuyó a finales del mismo siglo y en las primeras décadas del siguiente. El Medievo sirvió como una gran camisa de fuerza para la indagación científica y, por eso, el *Renacimiento* y la *Revolución Científica* abrieron primeramente una crítica al viejo orden intelectual y, en segundo lugar, una afirmación de nuevas ideas. Un movimiento expansivo se dio entonces en el mundo del pensamiento, que debió esperar a un desarrollo de la sociedad en varias de sus dimensiones para poder ampliar y profundizar su onda expansiva."

Capítulo 13

EL ANÁLISIS Y LAS MATEMÁTICAS DEL SIGLO XVIII

OBJETIVOS

- *Mencionar algunas características de las matemáticas en el siglo XVIII.*
- *Describir el significado histórico del Análisis matemático.*
- *Mencionar algunas contribuciones de Euler.*
- *Explicar algunos de los proyectos para fundamentar el Cálculo.*
- *Señalar algunos aportes de Legendre y D´Alembert.*

Los matemáticos del siglo XVIII se concentraron en el Cálculo y en sus aplicaciones a la mecánica. Las principales figuras fueron el mismo Leibniz, los hermanos Bernoulli [Jacques (1654-1705) y Jean (1667-1748)], Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813) y Laplace (1749-1827). Aunque debe incluirse a los matemáticos franceses Clairaut (1713-1765), D´Alambert (1717-1783) y

Maupertuis (1698-1759), los hermanos suizos Nicolaus (1695-1726) y Daniel Bernoulli (1700-1782) [hijos de Jean].

Podemos decir que la mayor parte de las matemáticas y la física entre 1600 y 1900 estuvo asociada de alguna manera a los métodos establecidos por el Cálculo Diferencial e Integral. Estos han sido aplicados extraordinariamente en todo fenómeno que exija una medición tanto en mecánica, magnetismo, electricidad, gravitación, calor, luz, movimiento ondular. El Cálculo es uno de los fundamentos de la ciencia y la tecnología modernas.

13.1. El carácter de las matemáticas en los siglos XVII y XVIII

El carácter aplicado que predominó en las matemáticas del siglo XVII se amplió especialmente durante el siguiente siglo. Esto era coincidente, además, con una demanda creciente hacia el uso de las ciencias en la vida social (en la producción). Los influjos de la economía, las técnicas o la vida social en general afectan e influyen en la práctica matemática. Debe reconocerse este tipo de factores a la hora de estudiar la historia de las ciencias. Pero debe tenerse cuidado en no establecer condicionamientos muy mecánicos o simples. Las capacidades humanas para la creación intelectual suelen distanciarse de los contextos materiales y sociales inmediatos, y dejar correr la imaginación y el razonamiento lógico muy lejos. En el caso de las matemáticas esto es también cierto. El estudio de propiedades abstractas de la realidad (una vez conceptualizadas) puede ampliarse al margen de la influencia directa de la realidad social o material.

Un progreso cuantitativo y cualitativo

En menos de dos siglos los matemáticos europeos lograron sobrepasar con creces los límites de toda la producción matemática de la Antigüedad. Eso se explica sin duda por las diferencias en las sociedades y en el trabajo intelectual que existió entre ambos tipos de organización social. Es importante señalar esta diferencia en tanto expresa la existencia de un ritmo muy elevado en la producción científica y matemática que ha sido -desde entonces- decisivo para el progreso de la cultura y la sociedad occidental. Debe subrayarse, además, que no solo se amplió cuantitativamente el número de trabajos sino que hubo un progreso cualitativamente superior, tanto en la profundidad de los métodos como en la creación de nuevos conceptos y diferentes disciplinas matemáticas.

Los cambios en el siglo XVII

Los matemáticos del siglo XVII terminaron de establecer varios cambios fundamentales con relación a las matemáticas antiguas:

- Papeles diferentes para el álgebra y la geometría: del dominio en métodos y criterios de rigor basados en la geometría (en la Antigüedad), se pasó a darle relevancia al álgebra.
- Los resultados de las matemáticas dejaron de percibirse como simples idealizaciones de la experiencia y se empezó a favorecer –lentamente– un tratamiento más abstracto: de la idealización inmediata a la construcción de conceptos y métodos.
- La introducción del Cálculo con métodos alejados de los estándares de rigor y deducción de la geometría clásica promovió el uso de procesos inductivos.
- La estrecha relación entre matemáticas y ciencias naturales condujo a una interdependencia y fusión que no permitía muchas distinciones entre ciencias y matemática.

En el siglo XVIII

Las matemáticas del siglo XVIII, a diferencia de las del siglo XVII, fueron esencialmente cuantitativas. Fue un siglo de un gran desarrollo matemático conectado a la evolución de las ciencias llamadas naturales. Configuraba, como veremos, una situación que podríamos caracterizar como contradictoria. Se tenía una gran producción matemática, un gran éxito en la capacidad de predicción en la ciencia de los resultados matemáticos y, al mismo tiempo, según muchos historiadores "un marasmo lógico en los fundamentos". El centro del Análisis era el Cálculo y a pesar de la enorme oscuridad lógica, a pesar del uso "liberal" de los números, éste experimentó un enorme desarrollo. Los números irracionales eran admitidos a principios del XIX, aunque no los negativos y los complejos.

13.2. La época de Euler

El más grande de los matemáticos del siglo XVIII fue, sin duda, el suizo Leonhard Euler, y el más prolífico de todas las épocas: 886 libros y artículos, sobre cada uno de los campos de la matemáticas de su época.

Foto 13.1. *Leonhard Euler (1707-1783)*

Para que se tenga una idea de su productividad: Euler publicaba libros de alta calidad a una velocidad de unas 800 páginas por año.

Euler nació en Basilea, Suiza, en 1707. Comenzó sus estudios superiores en la Universidad de Basilea en 1720, donde conoció a Jean Bernoulli. En 1725 fue a trabajar en la Academia de San Petersburgo, junto a Daniel Bernoulli (hijo de Jean). En 1741 dejó San Petersburgo, donde había inestabilidad política, hacia Berlín (Alemania), donde estuvo hasta 1766. Volvió luego a San Petersburgo y allí permaneció hasta su muerte en 1783. Euler se quedó prácticamente ciego después de 1766, periodo en el que completó la mitad de sus obras.

Obra científica

El trabajo de este gran matemático permite apreciar la diversidad de los usos matemáticos y aplicaciones que podía tener el Cálculo: ecuaciones diferenciales, geometría analítica y diferencial de curvas y superficies, series y cálculo de variaciones. En la física, Euler usó la mecánica analítica (la aplicación del Cálculo a la mecánica tradicionalmente geométrica). Calculó la perturbación de los cuerpos celestes en la órbita de un planeta y las trayectorias de proyectiles lanzados en medios con resistencia determinada. Estudió la propagación del sonido y la consonancia y disonancia musicales. Fue el único de los científicos del siglo XVIII que afirmó el carácter ondulatorio de la luz (y no corpuscular y analizó el calor como oscilación molecular). Euler describió con ecuaciones diferenciales el movimiento de un fluido (ideal) y aplicó su modelo a la circulación sanguínea.

Como escribió también libros de texto, en muchos asuntos su trabajo definió la forma y notación que han subsistido hasta nuestros días, por ejemplo: nuestra trigonometría basada en valores y razones trigonométricas y la notación que usamos. La redacción de textos que realizó en mecánica, álgebra, análisis matemático, geometría diferencial y cálculo de variaciones, estableció el modelo a seguir por cientos de años.

Del Cálculo al Análisis

Según el parecer de algunos historiadores: Euler hizo por el Cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz lo que Euclides hizo por la Geometría de Eudoxo y Teeteto, o Vieta por el álgebra de Al-Khoarizmi y de Cardano. Con Euler los resultados de Newton y Leibniz se integraron armónicamente al *Análisis*, concebido éste como el campo matemático que engloba el estudio de los procesos infinitos. La obra que esencialmente realiza esta precisión y ampliación del Cálculo infinitesimal fue *Introductio in analysin infinitorum*, publicada en 1748. En este libro la idea de función, que estuvo presente de forma intuitiva en sus predecesores es convertida por Euler en el concepto central del nuevo análisis. Para Euler una función es "cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes". La definición hacía referencia a funciones algebraicas (construidas por medio de las 4 operaciones fundamentales y la extracción de raíces) y las funciones trascendentes elementales ($logx$, e^x, $senx$, etc.) El concepto de función y las funciones algebraicas y trascendentes elementales ya habían sido introducidas en el siglo XVII. En la consideración de varios problemas clásicos, Leibniz, Jacques, Jean Bernoulli, L´Hôpital, Huygens y Pierre Varignon usaron funciones conocidas y construyeron muchas otras de mayor complejidad.

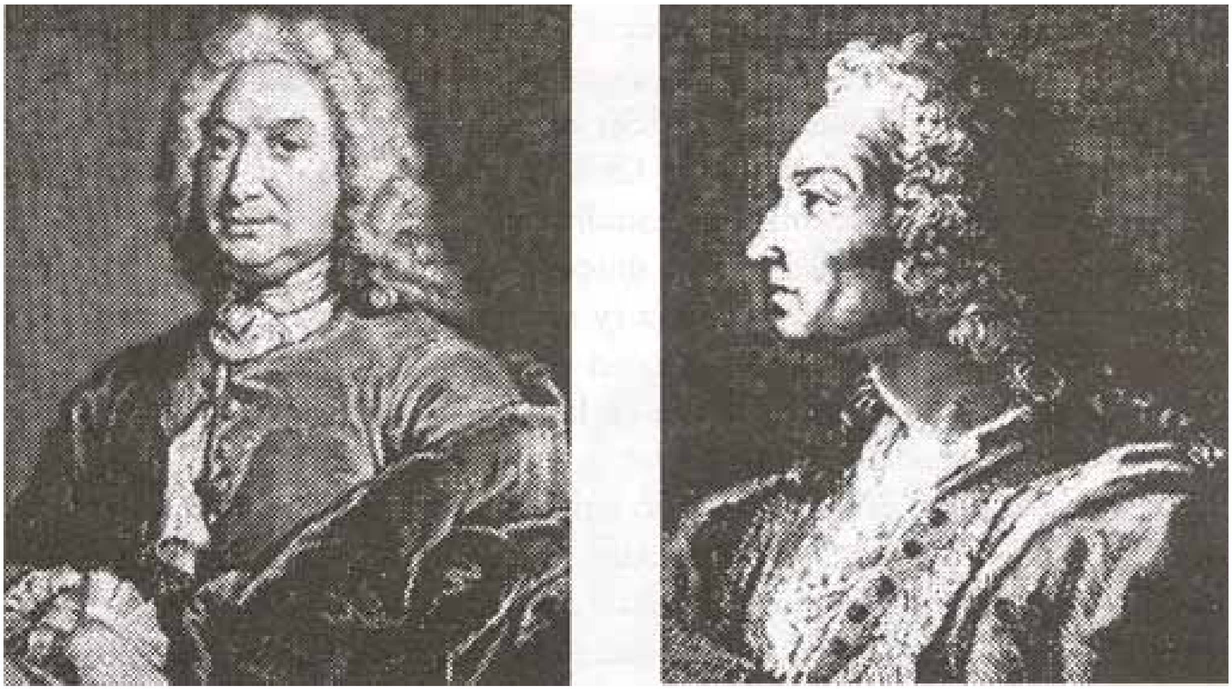


Foto 13.2. *Jean Bernoulli (1667-1748) y Jacques Bernoulli (1654-1705)*

Euler, por ejemplo, definió las funciones

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\log x = \lim_{n\to\infty} n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

De la misma manera, aunque muchos otros habían dada tratamiento en forma de serie para las funciones trigonométricas, Euler finalmente dio un tratamiento completo y sistemático de estas funciones (en un artículo de 1748 sobre las desigualdades en los movimientos de Júpiter y Saturno).

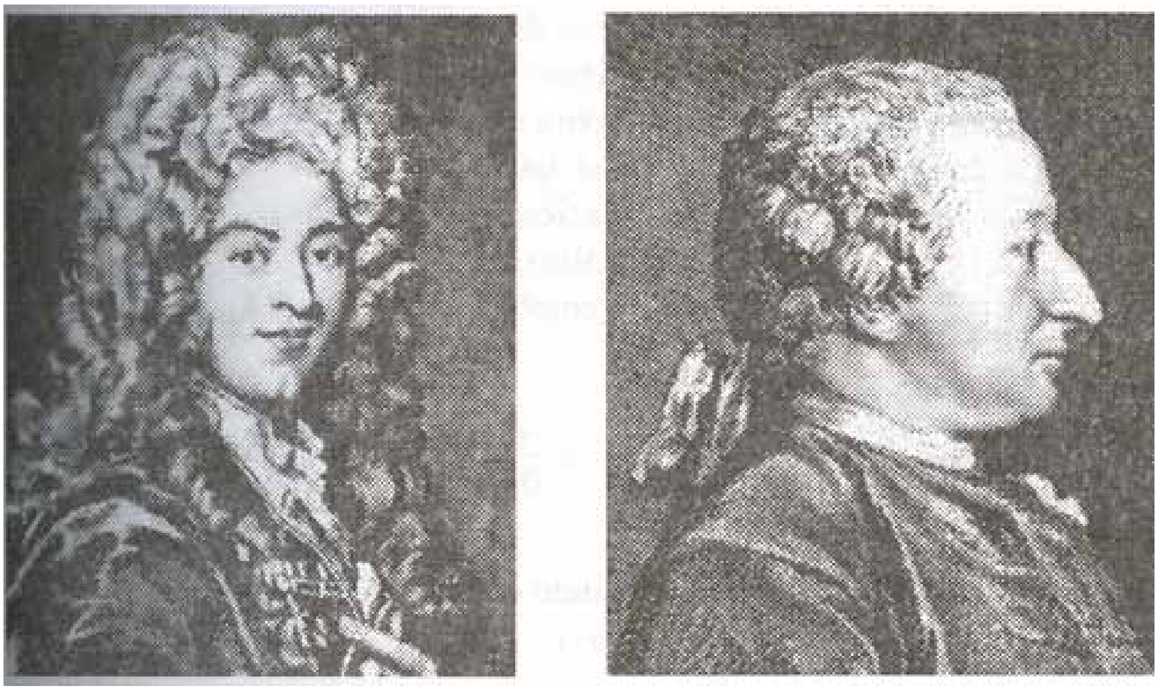


Foto 13.3. *Guillaume François Antoine L´Hôpital (1661-1704) y Alexis Claude Clairaut (1713-1765)*

Funciones algebraicas y trascendentes

Para Euler, las funciones se diferencian de acuerdo a cómo se combinan las variables y constantes que poseen. Las funciones trascendentes se diferencian de las algebraicas en que las primeras realizan en número *infinito* las combinaciones de las algebraicas (lo que quería decir que las trascendentes se podían expresar por medio de series infinitas). Esta noción de función reducida a expresión analítica finita o infinita con el tiempo se fue generalizando hacia la idea de función como combinación de operaciones (sean cuales sean las operaciones usadas). En ese sentido ya se expresaba en 1797 y 1806 el matemático francés Lagrange.

En poco tiempo nuevas funciones trascendentes fueron construidas: las integrales elípticas indefinidas, la función gama y otras más.

El Cálculo en varias variables

De la misma manera, en este siglo se desarrolló también el cálculo de funciones de 2 y 3 variables. Aunque Newton, Jean y Nicolaus Bernoulli habían realizado la diferenciación en funciones de 2 variables, la teoría fue plenamente desarrollada por varios matemáticos: Alexis Fontaine de Bertins (1705-71), Euler, Clairaut y D'Alembert. Al principio se usó el mismo signo d para expresar la derivada. La idea era simple: efectuar la derivada sobre una variable dejando como constantes las otras. La derivación "parcial"(para una variable) tuvo mucha relevancia en las ecuaciones diferenciales. Con relación a asuntos de hidrodinámica (en los que aparecían las ecuaciones diferenciales), Euler hizo un amplio tratamiento de la derivación parcial. En 1734, por ejemplo, Euler mostraba que si $z = f(x, y)$ entonces

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Entre 1744 y 1745, D'Alembert trabajando en dinámica extendió el cálculo de las derivadas parciales.

Los matemáticos franceses del siglo XVIII

Aparte de Jean D'Alembert (1717-1783), Alexis Claude Clairaut y Etienne Bézout (1730-1783), Francia tuvo una presencia muy importante en las matemáticas de la última parte del siglo XVIII, con personalidades vinculadas o afectadas, de una u otra forma, con la Revolución Francesa. Los seis grandes matemáticos de ese período fueron Lagrange (1736-1813), Legendre (1752-1833), Laplace (1749-1827), Condorcet (1743-1794), Monge (1746-1818), y Carnot (1753-1823). Todos ellos destinaron algunos de sus trabajos al Cálculo diferencial e integral. Por ejemplo, Monge hizo contribuciones a la geometría analítica y diferencial. También Carnot trabajó en geometría y, por otro lado, Legendre hizo aportes al Cálculo, a la teoría de funciones, la teoría de números, y la matemática aplicada. Probablemente, quien más lejos llegó de este grupo de franceses fue Lagrange, considerado muchas veces el matemático más profundo del siglo XVIII (con Euler). Lagrange creó lo que se llama el cálculo de variaciones.

Foto 13.4. *Adrien Marie Legendre (1752-1833)y Pierre Simon Laplace (1749-1827)*

Laplace realizó contribuciones decisivas a las probabilidades, y a la mecánica (en particular a la astronomía). Se ha considerado su libro *Mécanique céleste* (1799-1825, 5 volúmenes) la culminación de la teoría newtoniana de la gravitación universal. Laplace demostró que el sistema del mundo (descrito por la matemática newtoniana) era estable. [Algo así como que no era necesaria la intervención divina cotidianamente para el funcionamiento del universo].

La amplia aplicación física de las matemáticas por parte de los matemáticos de este siglo originó expresiones como que las matemáticas eran solo un instrumento para la física (Laplace), o que la historia se describía como una transición de un siglo XVII de matemáticas a una era de mecánica (D´Alambert, Denis Diderot, 1713-1784). Sin embargo, también estaba la opinión (Lagrange) de que la mecánica llegaría a ser parte del Análisis.

13.3. La Edad Heroica

La realidad es que el siglo XVIII contribuyó inmensamente en la dirección abierta por Galileo y (de forma decisiva) ampliada por Newton en la expresión matemática de las leyes del mundo. Podríamos llamar este siglo el de la *física-matemática*.

Confianza en las operaciones y en las aplicaciones

El sentido de la demostración entre estos matemáticos sí existía pero estaba ligado a consideraciones físicas y geométricas. Por ejemplo, en una prueba muchos de los recursos usados se sacaban directamente de las figuras dibujadas o planteadas sin que hubiera axiomas o teoremas que justificaran esos recursos.

De la misma manera se dio un exceso de confianza en los símbolos y las operaciones definidas. Se pensaba que era válida la manipulación de símbolos por medio de operaciones (aplicadas finita o infinitamente), sin preocuparse del sentido del resultado o por la generalización de la validez de operaciones finitas o infinitas. Para estos matemáticos resultaba apasionante que la manipulación de fórmulas y expresiones matemáticas condujera a muchísimos resultados nuevos.

El hecho de que sus resultados aplicados eran exitosos en las ciencias físicas (y hasta en el desarrollo de técnicas diversas), les brindó una confianza en sus productos sin preocuparse mucho por el fundamento lógico de los mismos. Si sus resultados tenían respaldo apropiadamente en el mundo, eso sería suficiente para justificar su trabajo. Esta aproximación de cualquier manera evidenciaba una visión sobre las matemáticas en la que el énfasis era puesto la armonía con la realidad

Un detalle interesante de los matemáticos del siglo XVIII es que no establecieron diferencia entre álgebra y análisis. Esto resultaba así porque no se comprendía cabalmente la diferencia cualitativa que suponían los métodos infinitesimales con relación a la matemática clásica, en particular que no era simple extensión del álgebra. El concepto de límite, que luego sería convertido en la base del Cálculo, no estaba suficientemente comprendido en esta época.

Dificultades

Esta gigantesca productividad y riqueza matemática que exhibieron Euler y, en menor grado, otros matemáticos contemporáneos, se dio aunque existieran en su trabajo vaguedad y ausencia de rigor lógico; rigor que después se haría un criterio dominante en la comunidad matemática. Para ofrecer una idea de esto: los procesos infinitos se usaban sin mucho cuidado y se daba una amplia experimentación con los nuevos conceptos, se trabajaba bastante "informalmenteçon series infinitas, productos infinitos, integración, uso de símbolos como ∞, $\sqrt{-1}$, y se sacaban conclusiones que no todas han demostrado ser correctas. Por ejemplo, Euler escribió como verdadera la expresión

$$n + n^2 + n^3 + \ldots = \frac{n}{1-n}$$

(que es falsa). Precisamente porque avanzaron sin poseer mucha fundamentación lógica (o preocupación por ella) es que algunos historiadores le llaman a esta época la "heroica".

Foto 13.5. *Marqués de Condorcet (1743-1794) y Lazare Carnot (1753-1823)*

Rigor en el siglo XVIII

Los matemáticos del siglo XVII y XVIII no consideraban poco importante el rigor lógico en los nuevos métodos del Cálculo. El modelo griego de establecer las demostraciones lógicas de los resultados matemáticos no era puesto en cuestión. El asunto era el énfasis metodológico. Unas frases del matemático y físico holandés Huygens nos indican con claridad esta situación:

> "Para lograr la confianza de los expertos no es de gran interés si damos una demostración absoluta o un fundamento tal que después de verlo no tengan duda de que una demostración perfecta se puede dar. Estoy dispuesto a aceptar que debe aparecer clara, elegante y de manera ingeniosa, como en todos los trabajos de Arquímedes. Pero la primera y más importante de las cosas es el modo mismo de descubrimiento, que los hombres ilustrados se regocijan de conocer".

Durante el siglo XVIII, varios matemáticos buscaron medios para obtener rigor en el Cálculo. Los británicos, en general, buscaron encontrarlo en la geometría de los griegos (por ejemplo Colin Maclaurin, 1698-1746, quien trató de evitar el concepto de límite). Los matemáticos continentales, más influenciados por la aproximación de Leibniz, buscaron en el álgebra y la aritmética los fundamentos del rigor: especialmente en la manipulación de expresiones algebraicas. De nuevo, es Euler quien buscaría fundamentar el Cálculo en el concepto de función a través de su representación analítica.

La mayoría de predecesores de Euler había considerado el Cálculo diferencial asociado a la geometría. Este lo asoció más al estudio de las funciones (sin necesidad de recurrir a los diagramas o conceptos geométricos). Euler fue el primer matemático que le dio tanta relevancia al concepto de función. De hecho, hizo un estudio sistemático de las funciones elementales, sus derivadas e integrales.

Euler y los infinitesimales

Euler negó el concepto de infinitesimal. Por ejemplo en 1755 decía:

> "No hay duda que toda cantidad puede disminuirse hasta el punto que se desvanezca completamente y desaparezca. Pero una cantidad

> infinitamente pequeña no es más que una cantidad desvaneciéndose y entonces ella misma es igual a cero. Esto está en armonía, además, con esa definición de cosas infinitamente pequeñas, a través de la cual las cosas se dicen ser menores que cualquier cantidad asignable; ciertamente ésta tendría que ser nada; porque a menos que sea 0, una cantidad igual se le puede asignar, lo que es contrario a la hipótesis".

De esta manera, para Euler, los diferenciales dx y dy desaparecían, eran 0. Esto no explicaba bien cómo $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ podía ser un número. Es decir, la derivada $\frac{dy}{dx}$ no quedaba bien definida. Euler contestaba este tipo de observaciones diciendo que puesto que $x \times 0 = 0$ entonces $x = \frac{0}{0}$ y la derivada era una forma apropiada para calcular $\frac{0}{0}$. Lo anterior es confuso. Establece cantidades que son cero, pero sus razones $\frac{dy}{dx}$ no son cero, son números finitos.

Este asunto de los infinitesimales excitó la imaginación de muchos: números infinitamente pequeños que a veces funcionaban como cero. Se puede decir que se asumía la existencia de una cantidad constante menor que cualquiera otra. Algo así como que habían unos entes matemáticos que hacían el papel de átomos primarios. Euler decía que estos infinitesimales eran simplemente cero. [Leibniz había hablado en algún momento de ceros cualitativos que mantenían las características de los otros números finitos]. Euler, además, consideró la existencia de infinitesimales de orden superior: $dx^2, dx^3, \ldots$. En esto no había mucha claridad. Euler de cualquier manera se acercó a la visión moderna que establece los infinitesimales dx y dy como variables que se hacen tender a cero. Pero no prosiguió en esa línea que lo habría conducido al concepto preciso de *límite* que hoy se usa.

Lagrange

Otro intento de rigor en el XVIII lo ofreció Lagrange. Lagrange en su libro *Théorie des fonctions analytiques* de 1772 trató de reducir el Cálculo al álgebra de cantidades finitas sin el uso de las cantidades infinitamente pequeñas. Se propuso obtener el rigor de las demostraciones de los antiguos pero reduciendo el Cálculo al álgebra, en particular usando las series infinitas (vistas como extensiones de polinomios). Lagrange usó las series de potencias para intentar lograr su propósito.

Las series de potencias son de la forma

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots$$

y se denotan de la siguiente manera simbólica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Si $a = 0$ entonces la serie quedaría:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)^n.$$

Un caso de series de potencia es cuando tenemos una función $f(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n[f(x)]^n.$$

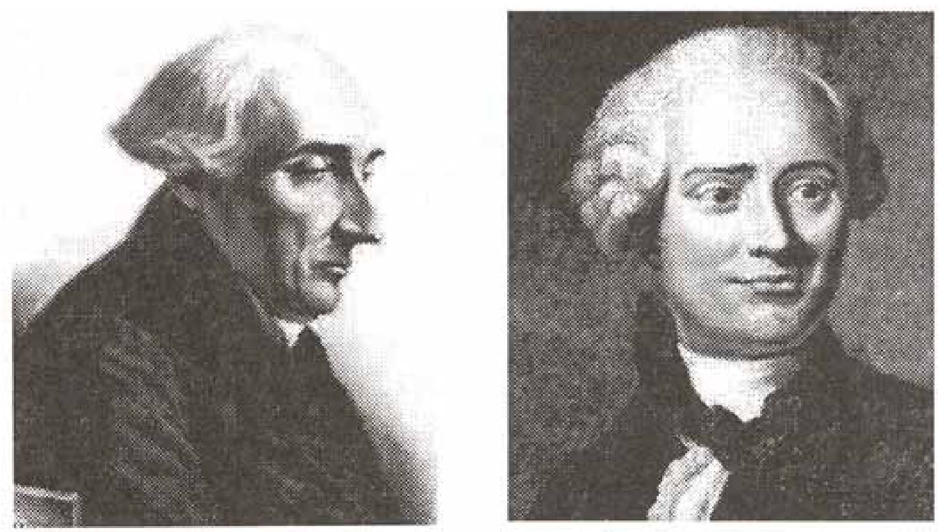


Foto 13.6. *Joseph Louis Lagrange (1736-1813) y Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783)*

Lagrange asumió que toda función puede expandirse en forma de series de potencias, y esto no es cierto. Lagrange pensó que no necesitaba el concepto de límite, aunque aceptaba que el Cálculo se podía fundar en la teoría de límites. No obstante, pensaba que los límites requerían una “metafísica”que no podía ser parte del Análisis.

Tanto Euler como Lagrange buscaron el fundamento del Cálculo separándose de la geometría.

Lazare Carnot (1753-1823) buscó el rigor del Cálculo en el método de exhausción (en la lógica de este método), pero tampoco tuvo mucho éxito.

El camino hacia el “límiteçomo concepto base

La precisión del concepto de límite y su utilización como fundamento del Cálculo tuvo un importante recorrido en el siglo XVII. Un matemático poco conocido que se acercó un poco más a la idea moderna de límite fue el francés Pierre Varignon (1654-1722), quien se autoafirmaba como el “mejor amigo de Jean Bernoulli en Francia”. Estableció claramente que los diferenciales dx no eran constantes sino variables. Más lejos iría el también francés Jean D'Alembert quien rechazaba la idea de Euler de los diferenciales como símbolos para cantidades convergentes a cero pero diferentes de cero. Por ejemplo, D'Alembert decía en 1767:

> “Una cantidad es algo o nada; si es algo, aun no se ha desvanecido; si no es nada, ya se ha desvanecido literalmente. La suposición de que hay un estado intermedio entre estos dos es una quimera”.

D'Alembert retomó la visión de Newton y la noción de límite como fundamento del Cálculo. Para él:

> “Newton nunca entendió el cálculo diferencial como un cálculo de infinitesimales, sino como un método de primeras y últimas razones, es decir: un método para encontrar el límite de esas razones”

También decía:

> “La teoría de límites es la verdadera metafísica del cálculo. No se trata de la existencia de cantidades infinitesimales en el cálculo diferencial: se trata de límites de cantidades finitas. Por eso la metafísica del infinito y de las cantidades infinitamente pequeñas, más grandes o pequeñas que otra, es totalmente inútil para el cálculo diferencial”

Para D'Alembert los infinitesimales eran una manera de hablar para reducir la larga descripción de los límites. Para D'Alembert la diferenciación era hallar "los límites de las razones de diferencias finitas de dos variables incluidas ... ". Y llamaba a una cantidad el límite de una segunda cantidad variable, si la segunda cantidad se puede aproximar a la primera tanto que la diferencia entre ambas cantidades es menor que cualquier cantidad dada (sin que coincidan nunca). De igual manera, Sylvestre François Lacroix (1765-1893) pensaba, también, que la razón de dos cantidades que tienden a cero, se acerca como su límite a un número definido.

Durante casi todo el siglo XVIII los matemáticos buscaron de una u otra forma fundamentar el Cálculo de Newton y Leibniz.

Esta formulación que era todavía imprecisa para los criterios nuevos de rigor sería perfeccionada en el siguiente siglo.

13.4. Ejercicios

FALSO O VERDADERO

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. En cada caso brinde una justificación breve de su respuesta

1. Euler hizo por la geometría euclídea lo que Newton por el Cálculo.
2. Euler fundamentó el Cálculo en la idea de variable.
3. Según Laplace, las matemáticas eran sólo un instrumento para la física.
4. Los matemáticos del siglo XVIII privilegiaron el descubrimiento y no tanto las demostraciones rigurosas.
5. Lagrange propuso basar el Cálculo en el concepto de límite.
6. Euler y Lagrange buscaron el fundamento del Cálculo separándose de la geometría.

PREGUNTAS DE DESARROLLO

1. Mencione y comente dos características de las matemáticas del siglo XVII.

2. ¿Qué es el Análisis matemático?

3. ¿Quién escribió y qué significado puede decirse que tuvo la *Mécanique Céleste*?

4. ¿Por qué se llama al siglo XVIII la "Edad Heroica"de las matemáticas?

5. ¿En cuál concepto trató Euler de fundamentar el Cálculo?

6. Explique qué es un infinitesimal.

7. ¿Cuál fue el concepto que usó Lagrange para tratar de fundamentar el Cálculo? Explique la dificultad básica que poseía su método para darle fundamento al Cálculo.

8. ¿Cuál concepto usó D´Alembert para fundamentar el Cálculo? Explique cuál era la opinión de D'Alembert sobre los infinitesimales.

9. Explique las ideas contenidas en el siguiente párrafo escrito por Huygens:

   > "Para lograr la confianza de los expertos no es de gran interés si damos una demostración absoluta o un fundamento tal que después de verlo no tengan duda de que una demostración perfecta se puede dar. Estoy dispuesto a aceptar que debe aparecer clara, elegante y de manera ingeniosa, como en todos los trabajos de Arquímedes. Pero la primera y más importante de las cosas es el modo mismo de descubrimiento, que los hombres ilustrados se regocijan de conocer".

Capítulo 14

PANORÁMICA DE LAS MATEMÁTICAS DEL SIGLO XIX

OBJETIVOS

- *Reseñar las características fundamentales de las matemáticas en el siglo XIX.*
- *Sintetizar las contribuciones de Gauss y otros matemáticos de este periodo.*

Durante el siglo XVIII las matemáticas que se hicieron estuvieron basadas en la intuición y el sentido físico de las mismas, que fue lo que las condujo y no la lógica. La confianza de su trabajo no residía ni en la consistencia ni en las reglas formales, sino en la aplicación de sus resultados.

14.1. La preocupación por el rigor

Los problemas de la ausencia de fundamento lógico si bien habían sido tratados no ocuparon un lugar preponderante entre los matemáticos hasta que, a principios de siglo XIX, se evidenciaron elementos de la matemática que rompían supuestamente el esquema de la coincidencia matemática-naturaleza. El surgimiento de las geometrías no euclidianas y la existencia de números que no seguían lo esperable en ellos (los cuaterniones de Hamilton), volcaron las mentes sobre los fundamentos lógicos. Si se miraba hacia el Análisis no había fundamento ni en el álgebra ni en la aritmética usadas, y en la Geometría había problemas. Se puso de manifiesto la existencia de un nuevo carácter en las matemáticas: una separación entre las matemáticas y la realidad. Mostró un camino en el que la manipulación formal y la consistencia lógica ocupan un papel muy importante. Sin embargo, lo nuevo no fue comprendido como tal y, entonces, no se entendió la necesidad de un fundamento aparte al de las verdades evidentes en el mundo físico inmediato.

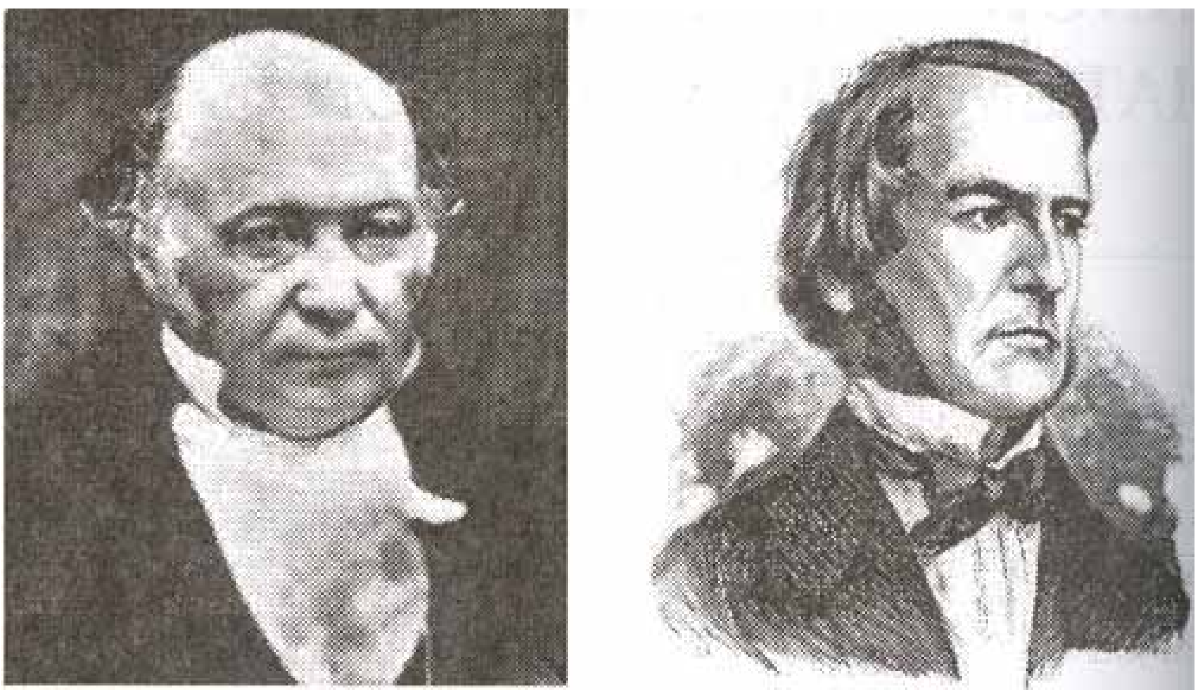


Foto 14.1. *William Rowan Hamilton (1805-1865) y George Boole (1815-1864)*

Catalizadores de una nueva etapa matemática

Las geometrías no euclidianas y los cuaterniones fueron los resultados teóricos catalizadores que sacudieron el mundo matemático y se convirtieron en una palanca de la nueva etapa. Las nuevas condiciones en las matemáticas generaron un intento extendido por solventar las debilidades de las matemáticas del XVII y el XVIII. Se sucedieron importantes intentos en búsqueda de la consistencia de las nuevas geometrías y en la rigorización del Análisis y el álgebra: Abel, Bolzano, Cauchy. El mejor intento en esta rigorización fue hecho por Weierstrass. Este dio una derivación de las propiedades de los irracionales a partir de los racionales, y Dedekind se colocó en la misma dirección.

La lógica moderna

Como consecuencia de los nuevos tiempos, la lógica sufrió importantes modificaciones. El resurgir de la lógica en las islas británicas fue iniciado en el siglo XIX por Richard Whately. Sir William Hamilton y Augustus De Morgan contribuyeron también; pero fue George Boole el verdadero fundador de la lógica simbólica moderna. Su aproximación se va a inspirar en la visión del álgebra de Peacock, Gregory y De Morgan, pero sobre todo en las características de una nueva matemática (cuaterniones y geometrías no euclidianas apuntalaban una visión axiomática y operativa, no cuantitativa). Los avances de Boole en la lógica son establecidos por la matematización de la misma (el simbolismo y el carácter operatorio-aritmético).

Del Siglo XVII al XIX

En el siglo XVII se desarrolló el álgebra, se iniciaron la geometría proyectiva y la teoría de probabilidades, la geometría analítica y se resolvieron muchos asuntos de la Antigüedad, pero el principal logro fue la creación del Cálculo. En el siglo XVIII, el Cálculo ampliaría los campos descubiertos y desarrollaría nuevos: las series infinitas, las ecuaciones diferenciales, el cálculo de variaciones, la geometría diferencial, el análisis de funciones con variables complejas y muchas otras. Durante el siglo XIX, los grandes temas que se desarrollarían fueron los siguientes: las geometrías no euclidianas, la teoría de números, el análisis con variables complejas, la geometría proyectiva, el álgebra y la teoría de grupos, la aritmetización del análisis. En la segunda mitad del siglo surgirían: la lógica matemática y la teoría de conjuntos.

Estos elementos estaban en el contexto intelectual de la época y debemos tenerlos en la mente para comprender la historia propiamente del Cálculo que describiremos en las siguientes páginas.

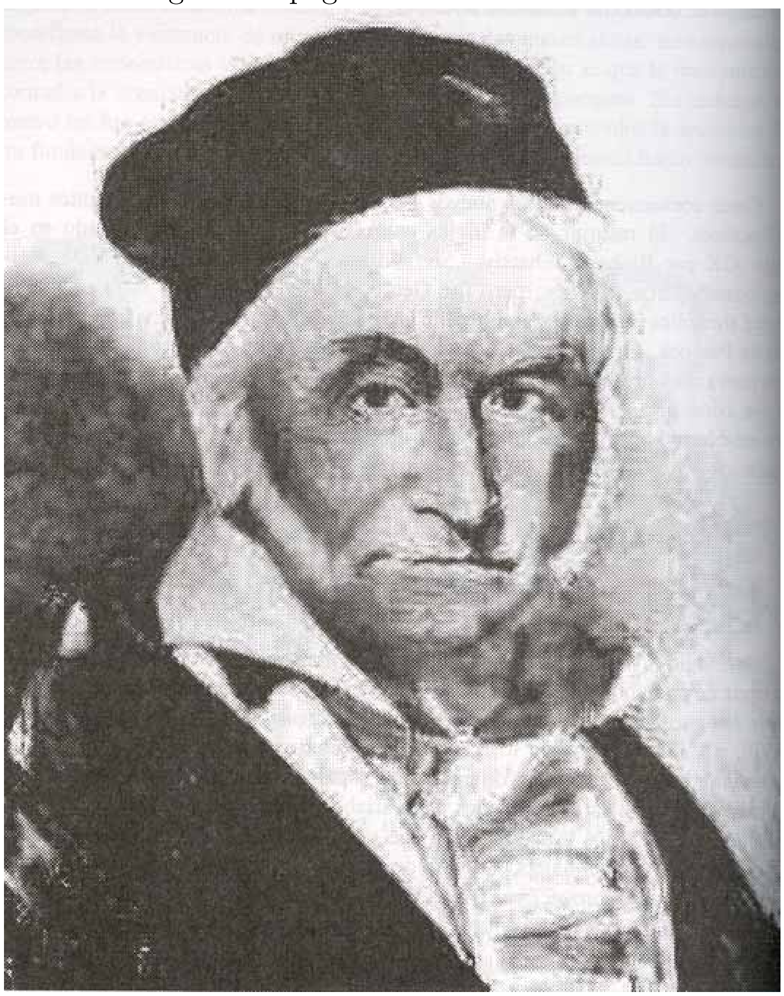


Foto 14.2. *Carl Friedrich Gauss (1777-1855)*

14.2. Gauss y las geometrías

Con relación a los tres primeros temas la figura de Gauss sobresale notablemente. Para muchos historiadores, Gauss fue un puente entre las matemáticas del siglo XVIII y las del periodo que llega hasta nuestros días.

Gauss

Nació Carl Friedrich Gauss en 1777 en la ciudad alemana de Brunswick, y se educó en la Universidad de Göttingen. Gauss produjo resultados del más alto nivel en casi todos los campos de las matemáticas puras y aplicadas. Su trabajo le valió el título de "Príncipe de los matemáticos", y es considerado uno de los más grandes matemáticos de la historia. En 1801 publicó el libro *Disquisitiones Arithmeticae* que abrió la teoría moderna de números. Hizo contribuciones notables a lo que se llama geometría diferencial (geometría con los métodos del Análisis), que se sintetizaron en el libro *Disquisitiones generales circa Superficies Curvas* (1827). Este libro fue el resultado de sus investigaciones en geodesia y construcción de mapas. En el mismo realizó un tratamiento definitivo de la geometría diferencial de superficies en espacios de 3 dimensiones. Gauss formuló el concepto de una superficie como un espacio en sí mismo. Este concepto fue generalizado después por el alemán Riemann abriendo nuevas perspectivas para la geometría no euclidiana.

Gauss también hizo contribuciones en álgebra, funciones complejas y teoría del potencial. En artículos no publicados mostró sus trabajos originales en los campos de las funciones elípticas y en la geometría no euclidiana. Sus intereses en la física también fueron muchos: astronomía, magnetismo teórico y experimental. Su trabajo estableció una nueva relación fructífera entre las matemáticas y la física, como había sucedido con la obra de Newton.

Geometrías no euclidianas

Gauss al igual que el ruso Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856), y el húngaro János Bolyai (1802-1860), crearon independientemente las geometrías no euclidianas. Gauss se adelantó en el tiempo a los otros matemáticos, pero no publicó sus resultados. Bolyai publicó en 1832 "Ciencia absoluta del espacioçomo apéndice en un libro de su padre (Farkas Bolyai, quien fue amigo de Gauss). Lobachevsky presentó en 1826 un trabajo que contenía una "demostración rigurosa del teorema de las paralelas", pero éste se perdió.


Foto 14.3. *Janos Bolyai (1802-1860) y Nikolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856)*

En 1829 publicó en la revista *Kazan Messenger* un artículo titulado "Sobre los principios de la geometría", que constituye el nacimiento oficial de la geometría no euclidiana.

La idea central de las geometrías no euclidianas nace de reconocer un hecho: el axioma euclidiano de las paralelas no se podía probar como deducción de los otros 9 axiomas de la geometría euclidiana, y que un axioma adicional era necesario para fundamentar esta geometría. Puesto que el axioma de las paralelas era un hecho independiente, se justificaba (lógicamente) la adopción de una proposición contraria a ese axioma. Se trataba entonces de deducir las consecuencias de un nuevo sistema donde se incluyera el nuevo axioma (contrario al de las paralelas).

Riemann

El impacto de estos resultados fue extraordinario en la historia de las matemáticas del siglo XIX. Sin embargo, las geometrías no euclidianas no serían plenamente integradas a las principales líneas del desarrollo de las matemáticas hasta el trabajo realizado por el alemán G. F. B. Riemann (1826-1866). Riemann colocó a las geometrías no euclidianas en el marco teórico más general. En 1854 señalaba que la geometría debía verse como el estudio de lo que llamó *variedades* de cualquier números de dimensiones en cualquier tipo de espacio. La geometría trataba no con puntos o rectas necesariamente sino con conjuntos de n-tuples ordenados donde existen leyes para su combinación.

Foto 14.4. *Bernhard Riemann (1828-1866)*

La geometría proyectiva

Podemos decir que uno de los matemáticos franceses del finales del siglo XVIII, Gaspard Monge, director de la *Ecole Polytechnique*, fue el primer especialista moderno en la geometría. A finales del XVIII publicó *Géométrie descriptive* y, algunos años después, en 1809, *Application de l'analyse à la géométrie*. El primero contenía el corazón de lo que sería la geometría descriptiva, y el segundo muchos de los métodos de la geometría diferencial. Pero puede decirse que fue con Jean Victor Poncelet (1788-1867), discípulo de Monge, que se sistematizó el desarrollo de las propiedades proyectivas de las figuras creándose así la geometría proyectiva propiamente. Sin embargo, ni su definición de proyectividad contemplaba todas las transformaciones gráficas de las figuras, ni sus métodos poseían el rigor que se empezaba a reclamar en esa época. Su obra central fue *Traité de propietés projectives des figures* (1822). Una continuación más completa del trabajo de Poncelet fue realizado por August Ferdinand Möbius, Michael Chasles y Jacob Steiner.

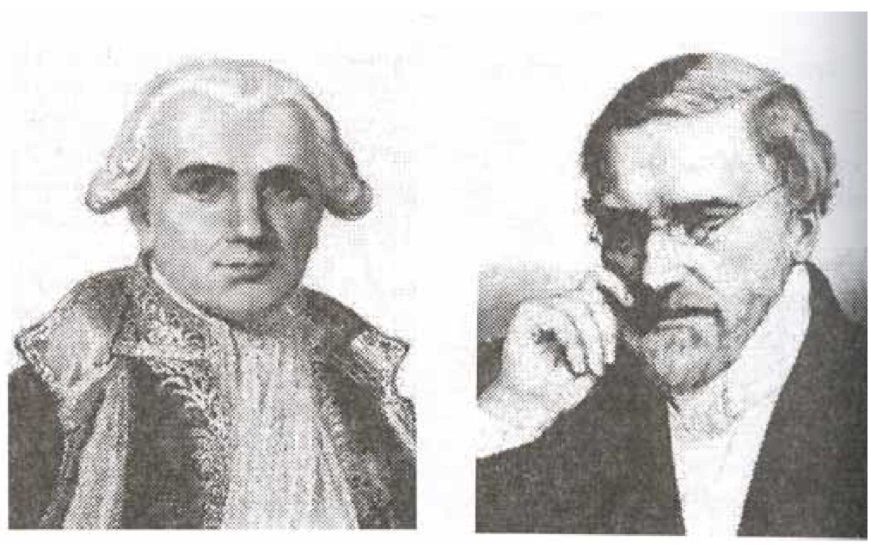


Foto 14.5. *Gaspard Monge (1746-1818) y Victor Poncelet (1788-1867)*

14.3. La teoría de grupos y el álgebra moderna

Uno de los campos matemáticos que más desarrollo tuvo en el siglo XIX fue el álgebra.

Foto 14.6. *Évariste Galois (1811-1832)*

Galois

La contribución del francés Evariste Galois fue muy relevante: la teoría de grupos. Aunque con base en ideas anticipadas parcialmente por Lagrange y el italiano Paolo Ruffini, Galois expresó las propiedades fundamentales del grupo de transformaciones de las raíces de una ecuación algebraica. En particular, Galois apuntó al papel central de ciertos subgrupos invariantes. Estas ideas eran de una capacidad extraordinaria de generalización y estructuración matemáticas. Muchos problemas clásicos podían tratarse con la teoría de grupos: la trisección del ángulo, la duplicación del cubo, la solución de las ecuaciones cúbica y bicuadrática, así como la solución de ecuaciones algebraicas de cualquier grado. Podemos decir que la teoría nació en la búsqueda por resolver la ecuación de quinto grado.

La comprensión completa del trabajo de Galois tomaría tiempo, a través de la labor posterior de matemáticos como el francés Camille Jordan (1870) y del alemán Felix Klein y el noruego Marius Sophus Lie. En 1872, Klein sistematizó toda la teoría de grupos en lo que se llamó el "Programa de Erlangen".

Nuevos entes matemáticos

Otra de las líneas de desarrollo del álgebra fue el estudio de nuevos sistemas de entes matemáticos, con operaciones que no satisfacen necesariamente las reglas ordinarias del álgebra común (por ejemplo que $a \times b = b \times a$, la llamada conmutatividad). El inglés William Rowan Hamilton, también conocido por su labor importante en la dinámica, creó un sistema de números con 4 unidades: los *cuaterniones*. Este sistema precisamente cumplía todas las reglas ordinarias excepto la conmutatividad. Otro matemático que trabajó en esa dirección fue Hermann Grassman. Creó una geometría en el espacio de n dimensiones, que sería la base (parcialmente) de lo que se llamaría después análisis tensorial. Con asuntos de álgebra y análisis vectorial también trató el norteamericano Josiah Willard Gibbs y en el estudio comparativo de distintas "álgebras"trabajó Benjamin Peirce (también norteamericano). El hijo de este último Charles S. Peirce y el inglés George Boole (como mencionamos antes) hicieron importantes contribuciones a la lógica matemática.

Un amplio desarrollo matemático

La segunda mitad del siglo XIX vio el progreso extraordinario de los diferentes campos de las matemáticas en mútiples direcciones, y la presencia de una gran cantidad de matemáticos de un gran nivel: Hermite, Darboux, Klein, Hadamard, Tannery, Hilbert, Cantor, Poincaré y muchos otros. Describir con mayor amplitud y detalle la evolución de las matemáticas del siglo XIX no es nuestro propósito en este libro. Lo que hemos buscado es ofrecer una visión panorámica que permita al lector comprender el gigantesco desarrollo de las matemáticas en la época y algunas de sus líneas de evolución. Hemos dejado para el final la descripción de una línea de desarrollo que tiene que ver íntimamente con el tema de este libro: el Cálculo diferencial e integral. Esa línea de trabajo teórico, que recorrió todo el siglo de diferentes maneras y que recibió la influencia de las otras áreas matemáticas, es lo que se suele llamar la *Aritmetización del Análisis.*

14.4. Ejercicios

FALSO O VERDADERO

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. En cada caso brinde una justificación breve de su respuesta

1. En el siglo XVIII las matemáticas estuvieron basadas en la lógica y también en el significado físico de las mismas.
2. La lógica se volvió importante en el siglo XIX.
3. Gauss hizo trabajos en las matemáticas aplicadas.
4. Gauss y Bolyai publicaron juntos en 1832 el artículo "Ciencia absoluta del espacio", que abrió la geometría no euclidiana.
5. Galois creó el llamado Análisis Tensorial.
6. Poncelet fue el primer matemático en desarrollar la geometría proyectiva.
7. Lobatchevsky fue el creador de la geometría no euclidiana.
8. La teoría de grupos nació de la búsqueda por resolver la ecuación de cuarto grado.

PREGUNTAS DE DESARROLLO

1. Resuma la idea central que produjo las geometrías no euclídeas.
2. Resuma en pocas frases el trabajo de Riemann en la geometría.
3. ¿Qué son los cuaterniones?
4. ¿Cuáles fueron los principales resultados matemáticos que sacudieron al mundo matemático a principios del siglo XIX?

Capítulo 15

LA ARITMETIZACIÓN DEL ANÁLISIS

OBJETIVOS

- *Descripción del proceso llamado Aritmetización del Análisis.*
- *Descripción de las acciones de rigorización del Cálculo en el siglo XIX.*
- *Mención de elementos de las contribuciones de Cauchy y Weierstrass en la Aritmetización del Análisis.*
- *Explicación de las construcciones teóricas de los números reales dadas por Weierstrass y Dedekind.*

A pesar de los grandes resultados obtenidos en la expansión de los métodos del Cálculo en el siglo XVIII, por diversos motivos se inició en el siguiente siglo un proceso de rigorización. Ciertos conceptos no estaban claros y bien definidos. Por ejemplo, los de función, derivada e integral. Pero, también, se usaban las series infinitas sin poner cuidado en si éstas eran convergentes o divergentes, lo que había generado muchas contradicciones y, en particular, la representación de funciones a través de series trigonométricas había generado confusión.

Debe subrayarse que este proceso de rigorización del Cálculo comienza en el mismo período en el que se dan la emersión de las geometrías no euclidianas creadas y la aparición de los *cuaterniones*. Ambos resultados ponían en cuestión la evidencia intuitiva. En un caso frente a nuestras percepciones espaciales (que se suponían expresadas en la geometría euclidiana) y, en el otro, con relación a propiedades aceptadas durante milenios. El cuestionamiento iba dirigido hacia los fundamentos intuitivos de la matemática y a la búsqueda de una nueva base teórica que subrayaba la consistencia y precisión lógicas.

Foto 15.1. *Bernard Bolzano (1781-1848)*

Ante el “descrédito”de la geometría euclidiana, y ante la emersión de un sinnúmero de resultados matemáticos muy complejos, se buscó fundamentar el Cálculo en la aritmética y en la lógica.

15.1. El rigor a través del *límite*: Bolzano y Cauchy

Podemos decir que fue en este preciso periodo histórico que se establece en el seno de la comunidad matemática, de forma definitiva, el criterio del rigor lógico como requisito. Con los griegos antiguos se introdujo el criterio de la demostración y la fundamentación general (lo que se puede apreciar, por ejemplo, en los *Elementos* de Euclides. Pero se trataba de un lógica "geométrica", las pruebas descansaban en ciertas premisas y reglas "visibles"de la realidad. Los nuevos criterios basados en la aritmética, el álgebra, y la lógica abstracta se volverían absolutamente dominantes en los siguientes años y hasta la fecha.

Aunque de diferentes maneras, se puede decir que los procesos para establecer un nuevo rigor comenzó con varias matemáticos notables: Bolzano, Cauchy, Abel y Dirichlet. Pero sería el alemán Karl Weierstrass (1815-1897) quien iría más lejos en la definición del nuevo paradigma del rigor. Incluso podría decirse que lo que se llama Análisis matemático, en cierta medida, se convirtió en el Cálculo sometido a los procesos de rigor y al tipo de fundamento que finalmente le daría Weierstrass.

Bolzano

Bernhard Bolzano (1781-1848), cura, filósofo y matemático de Bohemia, negó la existencia de los números infinitamente pequeños (infinitesimales), o infinitamente grandes (que antes señalamos fueron aceptados y usados por Euler y los otros matemáticos del siglo XVIII). Bolzano dio ya en 1817, por ejemplo, la definición de continuidad así:

> $f(x)$ es continua en un intervalo si para toda x en el intervalo, la diferencia $f(x+w) - f(x)$ puede hacerse tan pequeña como uno quiera tomando w suficientemente pequeña.

Esta definición es muy cercana a la nuestra. Desgraciadamente, su obra no se conoció durante medio siglo, hasta que el matemático Hermann Hankel (1839-1873) redescubrió su trabajo.

Cauchy

El trabajo tal vez más importante seguido en esta dirección y el de mayor impacto en la comunidad matemática de la época fue el del matemático francés Augustin Cauchy (1789-1857), quien se suele comparar a Euler en su prolífica producción matemática. Su obra en torno a esta fundamentación se sintetizó en tres trabajos: *Cours d´analyse de l'Ecole Polytechnique* (1821), *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal* (1823), y *Leçons sur le calcul différentiel* (1829).

Foto 15.2. *Augustin Louis Cauchy (1789-1838)*

Variable, función y límite

Cauchy separó la idea de límite de su origen geométrico físico e intuitivo y apeló a las nociones de variable, función y límite. [Tratando de ilustrar esto dijo que un número irracional era el límite de varias fracciones racionales que se le acercaban. Tiempo después se haría ver que esa definición no era suficientemente precisa en términos lógicos, pues asumía la existencia de los irracionales antes de construirlos por medio de esos límites]. También rechazó el enfoque de su compatriota Lagrange sobre las series de potencias, y aceptó el enfoque básico de D'Alembert de partir del concepto de límite.

Con relación a los infinitesimales, los definió con relación al concepto de variable:

> "Una cantidad variable se vuelve infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente de tal manera que converge al límite cero".

A partir de la noción de variable Cauchy definió el límite:

> "Cuando los sucesivos valores que tome una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás".

La derivada de la función $f(x)$ con respecto a x la define más o menos de la siguiente manera:
"si $\Delta x = i$ un incremento de x, se considera la razón

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

y define la derivada $f'(x)$ al límite de esta razón cuando i tiende a cero".

La diferencial que habían usado primordialmente Leibniz y muchos otros matemáticos posee aquí un carácter secundario. La diferencial la define como $dy = f'(x)dx$.

De la misma manera, para Cauchy una función $f(x)$ es continua entre ciertos límites dados de x, si entre estos límites al darse un incremento infinitamente pequeño i de x siempre se obtiene un incremento infinitamente pequeño

$$f(x+i) - f(x)$$

de la función. Esto es equivalente a la aproximación de Bolzano, y a la que hoy en día se utiliza. Newton y Leibniz no habían sido tan claros y precisos en la descripción matemática.

Infinitesimales

A pesar de que Cauchy realizaba una formulación muy precisa del infinitesimal en términos de las nociones de variable y de límite, éste seguía existiendo. Como veremos más adelante, Cauchy al igual que Leibniz y muchos otros matemáticos creían en cantidades infinitamente pequeñas o infinitamente grandes. De hecho, la noción de "variable" que usaba Cauchy no era la que hoy usamos, que es más bien producto de Weierstrass.

Foto 15.3. *Karl Weierstrass (1815-1897*

Muchas veces los infinitesimales fueron considerados como números, realidades físicas o entes cuasimágicos. Con base en la formulación del límite, los conceptos de derivada, continuidad e integral serían transformados.

El rigor de Cauchy, sin embargo, no llegaba todavía al que exhiben nuestros textos actuales de matemáticas. Cuando Cauchy definía el infinitesimal usaba frases como "se vuelve infinitamente pequeño.º "decrece indefinidamente" que, a pesar de que las podamos usar coloquial e introductoriamente en el estudio del Cálculo, no reunen los requisitos de precisión y claridad lógicas establecidos por los matemáticos.

En otro orden de cosas, en el siglo XVIII se estudió la integración esencialmente tomando como base la derivada, es decir como antidiferenciación. El sentido geométrico original de la integral como límite de una suma en el cálculo de áreas se dejó de lado. Cauchy retomó el sentido de la integración como límite de sumas y con ello, desde entonces, recuperó el enfoque original en la comunidad matemática. A partir de esta "recuperación"han surgido numerosas generalizaciones y aplicaciones del concepto de integral.

15.2. Weierstrass

El objetivo de Cauchy era solidificar y aritmetizar el Cálculo y, para ello, librarse de la influencia geométrica. Pero sería el matemático alemán Weierstrass quien iría aún más lejos. Criticó, precisamente, las frases anteriores de Cauchy y la expresión "una variable se acerca a un límite", porque sugieren tiempo y movimiento (algo intuitivo). Weierstrass interpretaba una variable como simplemente una letra para designar a cualquiera de un conjunto de valores que a la letra se le puede dar. Una variable continua es una tal que si x_0 es cualquier valor del conjunto de valores de la variable y δ es cualquier número positivo, existen otros valores de la variable en el intervalo

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

La definición de límite

Alejándose de los términos que Cauchy y Bolzano usaban en sus definiciones de continuidad y límite de una función, dio la definición hoy dominantemente aceptada, que en lenguaje moderno lo podemos poner así: $fx)$ es continua en $x = x_o$ si dado $\epsilon > 0$, existe un δ tal que para todo x en el intervalo

$$\mid x - x_0 \mid < \delta, \qquad \Longrightarrow \mid f(x) - f(x_0) \mid < \epsilon.$$

Una función $f(x)$ tiene límite L en $x_0 = 0$, si dado $\epsilon > 0$, existe un δ tal que para todo x en el intervalo

$$\mid x - x_0 \mid < \delta, \qquad \Longrightarrow \mid f(x) - L \mid < \epsilon.$$

Aquí las frases "infinitesimal", "variable que se acerca", o "tan pequeña como uno quiera", desaparecen en una formulación más precisa y sin referencia a la geometría o física. Este es el origen histórico de los ϵ y δ que aparecen en todos los libros modernos de Cálculo.

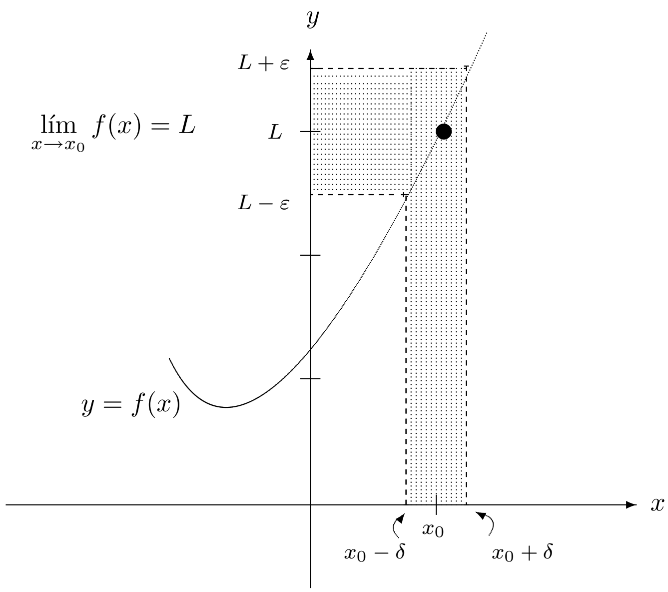


Figura 15.1. *El límite con ϵ y δ*

El asunto se puede plantear de una forma sencilla a partir de un ejemplo. Consideremos la función $f(x) = 2x + 1$.
Fácilmente calculamos

$$\lim_{x\to 1} 2x + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3.$$

Usamos los ϵ y δ para demostrar eso. Sea $\epsilon > 0 \Longrightarrow$ debemos encontrar un $\delta > 0$ tal que cuando

$$| x - 1 |< \delta$$

se tiene

$$| f(x) - 3 |=| (2x + 1) - 3 |< \epsilon$$

o que

$$| (2x + 1 - 3 |=| 2x - 2 |< \epsilon$$

o

$$2 | x - 1 |< \epsilon$$

o

$$| x - 1 |< \frac{\epsilon}{2}.$$

Si tomamos $\delta = \frac{\epsilon}{4}$ por ejemplo, las cosas quedarían así:
Dado un ϵ arbitrario y si se toma $\delta = \frac{\epsilon}{4}$ se tiene que cuando

$$| x - 1 |< \delta = \frac{\epsilon}{4}$$

$$\Longrightarrow 2 | x - 1 |< \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Longrightarrow | (2x - 1) - 3 |< \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Longrightarrow | f(x) - 3 |< \frac{\epsilon}{2}$$

como

$$\frac{\epsilon}{2} < \epsilon \Longrightarrow | f(x) - 3 |< \epsilon.$$

¿Qué quiere decir lo anterior? Es simplemente una precisión de la expresión:

> "podemos hacer que $f(x)$ esté tan cerca de 3 como queramos, simplemente acercándonos más y más al $x = 1$."

3 es, entonces el límite buscado:

$$\lim_{x \to 1} 2x + 1.$$

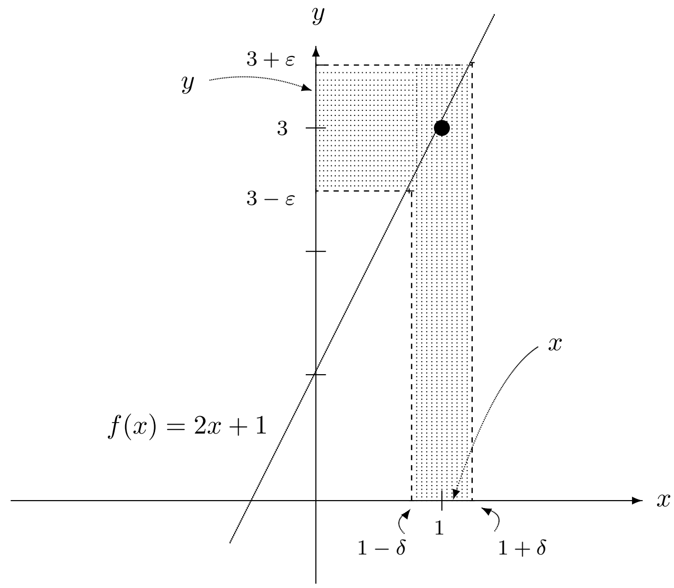


Figura 15.2. *ϵ y δ con $f(x) = 2x + 1$*

Por ejemplo, si queremos que la distancia entre $(2x + 1)$ y 3 sea no mayor que 0,001 tomamos $\epsilon = 0,001$. Por lo anterior, cualquier x que esté en

$$\left]1 - \frac{0,001}{4}, 1 + \frac{0,001}{4}\right[$$

cumple

$$|\ (2x + 1) - 3\ | < 0,001.$$

Para hacer que $f(x)$ esté aún más cerca de 3, digamos a menos de

$$10^{-10} = 0,0000000001,$$

basta con asegurarse que se tome la x más cerca de 1, por ejemplo en

$$\left]1 - \frac{10^{-10}}{4}, 1 + \frac{10^{-10}}{4}\right[.$$

Este procedimiento constituye, en este caso, una justificación formal y lógica de un resultado al que podemos llegar fácilmente geométrica e intuitivamente. En el caso de funciones cuya apelación a la geometría y la intuición es mucho menor, el procedimiento puede resultar de mayor utilidad.

Continuidad y derivación

Con relación a la derivada se realizó el mismo tipo de procesos de reformulación. D´Alembert decía que la derivada se debía basar en el límite de la razón de las diferencias de variables dependientes e independientes: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Fue Bolzano (1817) el primero en definir la derivada como límite: la cantidad $f'(x)$ a la que la razón

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

se aproxima indefinidamente cuando Δx se acerca a 0 a través de valores positivos y negativos. Bolzano sabía que $f'(x)$ no era un cociente de ceros o una razón de cantidades que se "evanecen", sino un número al que se aproxima la razón de arriba. Este es un detalle interesante: Euler había explicado $\frac{dy}{dx}$ como un cociente de ceros, y otros matemáticos como Lacroix lo siguieron en esto. Esto da una idea de lo que significaba la precisión realizada por Bolzano.

Cauchy definió la derivada esencialmente igual que Bolzano. Las expresiones en estas definiciones también serían sustituidas por los siguientes matemáticos, como Weierstrass, por formulaciones más rigurosas. A pesar de la rigorización desarrollada por Bolzano y Cauchy, Cauchy y la mayoría de los matemáticos de su época creyeron que una función contínua (salvo en puntos aislados como $x = 0$ para $y = \frac{1}{x}$) tenía que ser derivable (lo que sabemos que no es cierto). Bolzano sí había entendido la distinción entre continuidad y derivabilidad e incluso dado un ejemplo famoso de función continua no derivable en ningún punto. En los años siguientes se descubrieron muchas funciones continuas pero no derivables, con lo que el espectro de funciones se amplió para su estudio por parte de los matemáticos.

El trabajo de fundamentación y de emersión de nuevos criterios logró su cometido en tanto libró al Cálculo de las nociones geométricas o intuitivas asociadas al movimiento físico, y lo hizo tomando como sus nociones centrales los de función, variable y límite, redefinidas en términos aritméticos y lógicos.

15.3. La *construcción* de los números reales

Los fundamentos lógicos del Cálculo se fueron elaborando a lo largo del siglo XIX, sin embargo la problemática de la fundamentación se trasladó hacia las definiciones de los números reales. Diferentes definiciones de números reales fueron planteadas, por ejemplo, por Weierstrass, Richard Dedekind (1831-1916), Georg Cantor (1845-1918), Charles Méray (1835-1911) y también el filósofo británico Bertrand Russell (1872-1970) tiempo después.

Los números reales de Weierstrass

Las definiciones de Méray y Weierstrass acudían a la noción de convergencia y buscaban evitar el "error lógico"de Cauchy: Cauchy había definido los reales como el límite de sucesiones convergentes de números racionales, pero el concepto de límite había sido construido asumiendo la existencia de los números reales; esto era lógicamente inapropiado.

Veamos esto un poco más de cerca:

Una sucesión de numeros racionales (a_n) es un conjunto ordenado de números

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots$$

Se puede ver también como una función

$$f : N \longrightarrow Q$$

$$n \mapsto a_n$$

$$o \qquad f(n) = a_n.$$

[Aquí N simboliza el conjunto de números naturales, y Q el de los racionales.]
Por ejemplo, $f(n) = \frac{1}{n}$ define una sucesión.
Una sucesión es convergente si existe un L tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Por ejemplo, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

entonces $(\frac{1}{n})$ converge a 0.

Un criterio para determinar la convergencia de una sucesión es el "de Cauchy"(o también "Bolzano-Cauchy") que señalaba que si la diferencia entre los términos se iba haciendo cada vez más pequeña, entonces la sucesión converge. Lo que se pone así:

> "Si la distancia entre a_{n+p} y a_n se hace tan pequeña como uno quiera para un n suficientemente grande, entonces la sucesión converge".

Es decir, dado un $\epsilon > 0$ arbitrario, se obtiene que, a partir de cierto n suficientemente grande:

$$\mid a_{n+p} - a_n \mid < \epsilon.$$

Méray y Weierstrass consideraron las sucesiones que cumplían con el criterio de Cauchy (sin hacer referencia previa a los números que convergían) como definición de los números reales. Por ejemplo, como $a_n = \frac{1}{n}$ define una sucesión (a_n) que cumple el criterio de Cauchy, se toma la sucesión como número real. En este caso tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Con esto se definió el número 0.
Puede haber diferentes sucesiones que convergen a 0, pero eso no importa. En realidad, la teoría de Weierstrass es más compleja y lo que se toma son conjuntos de racionales más que sucesiones ordenadas de racionales. Nuestro propósito en lo anterior, sin embargo, es apenas sugerir una idea del tipo de definición.

Las "cortaduras"de Dedekind

Otra construcción de los números reales muy famosa fue la de Richard Dedekind: el método de las "cortaduras". Este hacía lo siguiente para definir "con lógica"los números reales.

Divídase el conjunto de los números racionales en clases disjuntas A y B, tales que todos los números de A sean menores que todos los números de B. Dedekind consideró entonces los números en los que se hacía el corte: "la cortadura", y estableció que solo existía un número real que producía esa "cortadura".
Si, además, A contiene a su máximo, o B a su mínimo, la cortadura define un número racional.
Pero si ni A contiene a su máximo ni B un mínimo, entonces se define un número irracional. Un ejemplo:
Consideremos esta "cortadura":

$A = \{a \in Q/a^2 < 3\}$ *y* $B = \{b \in Q/b^2 > 3\}$.

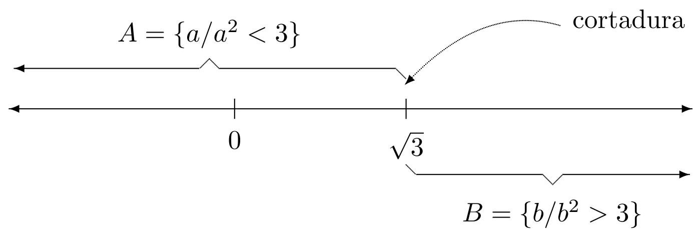


Figura 15.3. *Una "cortadura": $\sqrt{3}$*

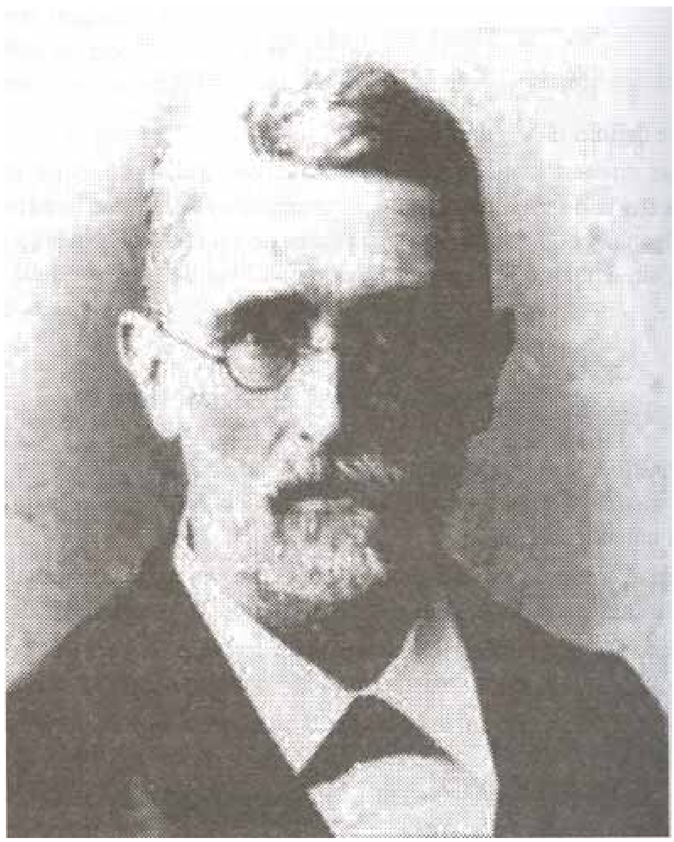


Foto 15.4. *Richard Dedekind (1831-1916)*

Esta "cortadura"define un número que no está en A como máximo ni en B como mínimo. Podemos concluir sin problema que esta cortadura define el número $\sqrt{3}$. [Resulta interesante mencionar que la definición de número irracional dada por Dedekind posee una gran similitud con la teoría de Eudoxo que aparece en el Libro V de los *Elementos* de Euclides.]

El gran filósofo inglés Bertrand Russell, tiempo después, propuso que se identificase como número real no el que corta los conjuntos, sino un conjunto de racionales. Por ejemplo, definir $\sqrt{3}$ como el conjunto A, antes construido.

15.4. Un balance

Como vemos, este tipo de construcciones formales buscaron eliminar la referencia geométrica e intuitiva, para intentar sostener el edificio matemático con base en la aritmética y la lógica. Aunque este tipo de construcciones haya representado una poderosa fundamentación y un llamado al rigor lógico en los matemáticas, la realidad es que nos genera en algunos casos una sensación de artificialidad y de alejamiento de las nociones que dieron origen a la construcción teórica del Cálculo.

Muchos matemáticos han considerado que la esencia de la matemática reside precisamente en ese tipo de construcciones lógicas y formales, lo más separado posible de las nociones intuitivas, geométricas, empíricas que "contaminaron"los primeros momentos de esta disciplina. Muchos incluso han promovido esto como lo principal a enseñar. Este tipo de visiones sobre la naturaleza de las matemáticas es, en nuestra opinión, equivocado. No solo para la enseñanza y aprendizaje sino también para la misma construcción matemática. Pero dejemos aquí esta digresión.

La Aritmetización del Análisis no se puede considerar un proceso mecánico y simple de rigorización de resultados matemáticos, sino que debe verse integrada a una nueva "visión.[en] la evolución de la matemática. La Aritmetización se dirigía en el siglo XIX al abandono de la intuición geométrica que había predominado en el Cálculo del siglo XVIII; era la búsqueda por establecer la validez lógica como central.

Cantor

Los trabajos de Georg Cantor en lo que se refiere a los fundamentos del Análisis continuaron la obra de Weierstrass. En las definiciones de los reales el problema residía en la forma de traducir el "paso al límite.[a] los enteros.

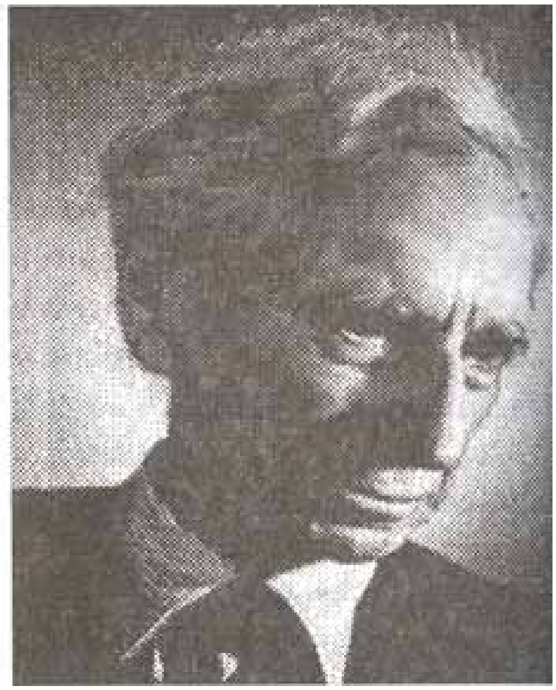



Foto 15.5. *Georg Cantor (1845-1918) y Bertrand Russell (1872-1970)*

Para Cantor, por ejemplo, "toda sucesión regular define un número; la clase de todos los números así definidos es el sistema de los números reales". Para Dedekind y también para Weierstrass está presente una referencia al continuo y, entonces, al infinito. Podemos decir que la noción de continuo real implica un proceso matemático (mental si se quiere) cualitativamente diferente al que se manifiesta en la aritmética.

Aritmetización y fundamentos de las matemáticas

La Aritmetización del Análisis trataba simplemente de desgeometrizar el Cálculo y apuntar hacia mejores condiciones lógicas en sus fundamentos; pero además trataba de reducir diferentes nociones conceptuales (referidas a objetos diferentes) a las nociones aritméticas. Este proceso sólo podía ser realizado a partir de una nueva abstracción y a partir de la introducción implícita o explícita de supuestos teóricos sobre la existencia y la naturaleza de las entidades matemáticas. La Aritmetización de las matemáticas era la manifestación, por otra parte, de una intención reduccionista de sus distintos componentes. Era la búsqueda de la unidad en la diversidad matemática. Esto obligaba a una readecuación de la visión sobre la naturaleza de la matemática e incluso del conocimiento en general. Por eso resultó natural que el movimiento de rigorización del Cálculo y de las matemáticas, condujera a finales del siglo XIX y la primera mitad del siglo XX a un debate filosófico muy profundo sobre los fundamentos generales de las matemáticas. Los términos Logicismo, Formalismo e Intuicionismo, estarían asociados con este debate filosófico y matemático.

15.5. Ejercicios

FALSO O VERDADERO

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. En cada caso brinde una justificación breve de su respuesta

1. Cauchy completó la Aritmetización del Análisis.
2. Cauchy retomó el sentido de la integral como límite de una suma en el cálculo de áreas.
3. Bolzano definió la derivada como un límite.
4. Dedekind creó las definiciones formales del Cálculo donde se usan los épsilon y delta.
5. A través del método que usa los ϵ y δ se encuentra el valor de los límites y derivadas.
6. La esencia de las matemáticas son las demostraciones formales.

PREGUNTAS DE DESARROLLO

1. ¿Por qué se inició en el siglo XIX un proceso de rigorización del Cálculo?
2. ¿Cuál fue la idea central de Cauchy para fundamentar el Cálculo?

3. ¿Cuál era la posición de Cauchy con relación a los infinitesimales?

4. ¿Qué sucede con términos como "infinitesimalesz "variable que se acerca.en la visión de Weierstrass?

5. Explique por qué podemos decir que Bolzano comprendió la diferencia entre continuidad y derivabilidad.

6. De un ejemplo de "cortadura"de Dedekind para definir un número irracional, y otro para dar un número racional (no use los ejemplos dados en el libro).

7. Explique el siguiente párrafo:

> "Los trabajos de Georg Cantor en lo que se refiere a los fundamentos del Análisis continuaron la obra de Weierstrass. En las definiciones de los reales el problema residía en la forma de traducir el paso al límite a los enteros. Para Cantor, por ejemplo, 'toda sucesión regular define un número; la clase de todos los números así definidos es el sistema de los números reales´. Para Dedekind y también para Weierstrass está presente una referencia al continuo y, entonces, al infinito. La noción de continuo real implica un proceso matemático (mental si se quiere) cualitativamente diferente al que se manifiesta en la aritmética."

8. Explique la relación entre la Aritmetización del Análisis y el papel de la lógica en las matemáticas.

Capítulo 16

EL ANÁLISIS *NO-STANDARD* Y LA NATURALEZA DE LAS MATEMÁTICAS

OBJETIVOS

- *Descripción de la teoría de los infinitesimales.*
- *Breve descripción del Análisis* No-Standard*, la teoría de los infinitesimales y el enfoque de Karl Weierstrass en la historia de las matemáticas.*
- *Realizar una síntesis de la historia del Cálculo, lo que se hace estableciendo tres etapas básicas en su desarrollo.*
- *Analizar características de la naturaleza de la evolución de las matemáticas.*

En este capítulo nos interesa poner en relevancia algunas de las características de la historia de las matemáticas. Para ello vamos a usar como un medio el famoso tema de los infinitesimales, lo colocaremos en la perspectiva moderna y sacaremos algunas concecuencias con relación a la naturaleza de las matemáticas y de las comunidades científicas que las construyen.

16.1. Las matemáticas del XIX: un balance general

Como un balance de la actividad matemática del siglo XIX podemos señalar los siguientes hechos: el álgebra recibió un empujón importante, la geometría volvió a ser considerada y, especialmente, recibió un cambio de perspectiva y desarrollo con las geometrías no euclidianas, la reanimación de la proyectiva y la generalización realizada por la geometría riemanniana, la teoría de números se convirtió en una teoría analítica de números, el Análisis se expandió notablemente con el progreso de la teoría de funciones complejas y el desarrollo de las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales. Al final del siglo XIX, los resultados matemáticos llegaron a un extraordinario nivel que explotaron en centenares de ramas diferentes. Tres características deben subrayarse para entender bien ese siglo: aumento notable del número de matemáticos, especialización creciente en campos limitados, y énfasis en el valor de las demostraciones rigurosas. Esta última característica ha acompañado a las matemáticas hasta nuestros días, aunque no todos los matemáticos han apoyado los enfoques más formales.

El temor y la incertidumbre en la comunidad matemática

Durante el XIX se dio un énfasis en la aritmética y el álgebra, por encima de la geometría. No tanto debido a las inconsistencias del Cálculo en la Epoca Heroica sino, sobre todo, como respuesta al impacto producido por las geometrías no euclidianas. Para la mayoría de los matemáticos, la geometría euclidiana se aceptó "acríticamente" por haber asumido la intuición como punto de referencia. La emersión de geometrías no euclidianas se entendió como el reclamo por eliminar la intuición. Se puede decir, antonces, que el énfasis en procesos demostrativos algebraicos y aritméticos respondió no tanto a las necesidades conceptuales propiamente de las matemáticas sino a las necesidades de la comunidad matemática. El temor, la incertidumbre y la inseguridad provocada por las nuevas geometrías en los matemáticos de carne y hueso fue factor central de la historia de las matemáticas. Como siempre en la ciencia, los criterios dominantes responden también a las percepciones (incluso temores) de la comunidad científica. Sobre esto citemos la opinión del gran historiador de las matemáticas Morris Kline:

> "La rigorización de las matemáticas pudo haber llenado una necesidad del siglo XIX, pero también nos enseña algo del desarrollo de la materia. La estructura lógica fundada recientemente garantizó de manera presumible la solidez de las matemáticas; pero la geometría era algo decorativo. Ningún teorema de la aritmética, el álgebra, o la geometría euclidiana fue cambiado como consecuencia, y los teoremas del análisis solamente tuvieron que ser formulados más cuidadosamente. De hecho, todo lo que hicieron las estructuras axiomáticas y el rigor fue verificar lo que los matemáticos ya sabían. Así, los axiomas tuvieron que ceder ante los teoremas existentes más que determinarlos. Todo esto significa que la matemática descansa no sobre la lógica sino sobre las sólidas intuiciones. El rigor, como ha señalado Jacques Hadamard, sanciona meramente las conquistas de la intuición; o, como ha dicho Hermann Weyl: la lógica es la higiene que usan los matemáticos para mantener sus ideas fuertes y saludables."

Morris Kline
Matemáticas: la pérdida de la certeza
1982.

Sobre la naturaleza de las matemáticas el papel de los métodos de rigor y acerca de la evolución de esta disciplina, uno de los temas más apasionantes lo constituye la historia del Análisis *No-Standard*.

16.2. Los infinitesimales y el Análisis *No-Standard*

A veces se piensa que la historia de las ciencias y las matemáticas se ha realizado de manera acumulativa, integrando los diferentes elementos teóricos en un proceso lineal hacia adelante. Se considera las matemáticas como verdades aisladas separadas de la vida ordinaria, al margen de las condiciones sociales, psicológicas, colectivas o individuales de las comunidades matemáticas.

Por ejemplo, ha sido típico pensar que existe una línea continua entre Newton-Leibniz y Weierstrass, en la que cada uno de los matemáticos en el medio hicieron contribuciones. En esta visión no se admite la divergencia entre matemáticos, teorías diferentes y contradictorias que sencillamente pueden cohabitar. Se pasa por encima del hecho de que muchos resultados y teorías fueron excluidos no por ser falsos, sino por no corresponder al modelo dominante en una comunidad científica (fuera éste correcto o no). Uno de los ejemplos de esto lo constituye este asunto de los infinitesimales.

Foto 16.1. *Hermann Weyl (1885-1955)*

La teoría de los infinitesimales

Se podría decir que fue Leibniz quien estableció una teoría de infinitesimales. Para él no existían solamente los números reales que conocemos, sino que habían además dos tipos de cantidades diferentes: los infinitamente pequeños, y los infinitamente grandes. Los infinitamente pequeños (infinitesimales) tenían la característica de poderse hacer tan pequeños como uno quisiera sin ser cero: hacerse menores que cualquier número dado, y ser diferentes de cero. Permitir la existencia de esos infinitesimales o de los infinitamente grandes hacía que el principio arquimediano no se cumpliera siempre. Esta teoría fue dominante entre Leibniz y Weierstrass; y el mismo Cauchy la había asumido.

Los resultados de la época en el Cálculo diferencial e integral se podían obtener en el marco de esa teoría. No es sino hasta Weierstrass que se volvería dominante la teoría que establece los resultados del Cálculo sin acudir para nada a los infinitesimales. En el conjunto de números que Weierstrass acepta el principio arquimediano es siempre válido para todos sus elementos. Esta ha sido la visión dominante hasta nuestros días y la que se enseña en colegios y universidades.

Entre Cauchy y Weierstrass

La mayoría de los historiadores de las matemáticas han tratado de ver una línea contínua entre Leibniz-Newton y Weierstrass, en particular incluyendo a Cauchy en el mismo saco. Para muchos, Weierstrass añadió la Aritmetización del Análisis a lo que ya había hecho Cauchy, sin que mediara entre ambos realmente ninguna diferencia. Por ejemplo: se ha visto a Cauchy y a otros como "weierstrassianos imperfectos" que cometieron errores (sin darse cuenta que los "errores" en varios casos obedecían a que tenían un marco teórico de referencia diferente). Uno de los ejemplos más claros de estas consideraciones injustas o inapropiadas, se puede apreciar con relación a un famoso teorema que establece que el límite de una sucesión de funciones contínuas es también una función continua. [El teorema se supuso cierto a lo largo de todo el siglo XVIII]. Cauchy ofreció una demostración de este teorema, pero resulta que no es cierto si se asume la Teoría de Weierstrass (que no tiene infinitesimales), pero sí es cierto si se asume la Teoría de Leibniz (donde sí hay infinitesimales). Siempre se dijo que el teorema había sido un error de Cauchy. Por supuesto que era un error para quien se colocaba en el marco weierstrassiano. De igual manera, Cauchy usó los infinitesimales claramente:

> "Cuando los valores numéricos sucesivos de una variable decrecen indefinidamente hasta convertirse en más pequeños que cualquier

número dado, esta variable se convierte en lo que se llama un infinitesimal, o una cantidad infinitamente pequeña".

La noción de variable que usa Cauchy es diferente de la actual: para él son sucesiones de números reales. Las variables aquí no son solo números fijos, sino colecciones de números. Las cantidades infinitamente pequeñas, los infinitesimales, son entonces sucesiones que convergen a cero. Los números infinitos de Cauchy son sucesiones ilimitadas de números reales. Mientras que el continuo de Weierstrass solo contiene números reales, el continuo de Leibniz y Cauchy es "más grande", contiene los infinitamente pequeños y los infinitamente grandes (sucesiones que convergen a cero o que "van a infinito").

La teoría de los infinitesimales y el *continuo* de Leibniz y Cauchy fueron siempre criticados por falta de rigor y claridad, pero recientemente han sido vistos con una nueva mirada. El gran matemático Abraham Robinson (nació en Alemania en 1918 y murió en los Estados Unidos en 1974), en la década de los 60 de este siglo, creó el llamado *Análisis* No-Standard que, precisamente, demuestra que el contínuo de Leibniz y Cauchy puede aceptarse plenamente y establecer los resultados del Cálculo con todo rigor.

Viejos modelos de pensamiento

En cuanto al Análisis *No-Standard* es conveniente tener la perspectiva más amplia en la historia de las matemáticas. En la Antigüedad griega las nociones de infinitesimal y de infinito fueron excluidas, ya sea por la incapacidad de entender la existencia de los irracionales, o de dar respuesta a paradojas como las de Zenón. Infinitesimales e infinito aparecen en contradicción con las visiones dominantes que existieron entonces sobre el espacio y el tiempo. De igual manera, la lógica que sostenía la demostración matemática no podía integrar en su seno este tipo de elementos que se les escapaban. Para los griegos todos los números debían ser arquimedianos, es decir: si m y n son números tales que $m \geq n$, era posible repetir la suma de n suficientes veces (digamos p veces) para que el resultado (np) fuera mayor que m. Y esto no lo cumplían los infinitesimales.

La escogencia griega fue en algún momento aceptar que los puntos tenían *posición pero no magnitud* (Euclides), para así evitarse las dificultades presentes en la aritmética de la época.

Tanto Euclides como Arquímedes fueron un paradigma del rigor lógico de los clásicos, y del rechazo de los infinitesimales y el infinito. El método de exhausción de Eudoxo y Arquímedes, aunque hacía referencia al infinito e infintesimales, fue planteado de una manera lógica. De hecho, al circunscribir e inscribir polígonos en el círculo, los razonamientos específicos (que en este libro no describimos) eran esencialmente lógicos, con base en lo que se llama el método de la "reducción al absurdo".

Un paradigma como herencia

El paradigma griego fue trasmitido al mundo europeo occidental, y siempre fue un punto de referencia frente al cual medir todos los resultados y métodos matemáticos nuevos. El Cálculo diferencial e integral obligaba a usar decididamente conceptos como el de infinito, continuidad y también infinitesimales, y esto entraba en contradicción con el paradigma griego. Los principales matemáticos, incluyendo a Newton, de alguna u otra forma trataron de adecuar sus resultados infinitesimales a los esquemas matemáticos de la Antigüedad. Sin embargo, de la misma manera, otros buscaron lugar para los infinitesimales, incluso echando mano de la mística. Kepler apelaba a la "intuición" sin racionalidad, y Pascal se refería a los infinitesimales y al infinito como "misterios" creados para su admiración y no su entendimiento. Leibniz, Newton, los Bernoulli, Euler, L'Hôpital usaron infinitesimales (cada uno a su manera). L'Hôpital lo establecía con claridad en el primer libro de texto de Cálculo: si la diferencia de dos números $(x-y)$ es infinitesimal (dx), los números pueden considerarse iguales $(x=y)$. Entonces $x=y+dx$ y también $x=y$. Esto ponía en jaque las leyes del "=" pero también de la lógica.

Reconciliar los métodos del Cálculo diferencial e integral con el paradigma griego (exclusividad de los números arquimedianos) fue intentado durante el siglo XVIII, pero no resultaría exitoso plenamente sino hasta el XIX. Durante el XVIII, como hemos analizado en los capítulos anteriores, los infinitesimales acompañaron un vigoroso desarrollo del Cálculo que duró muchísimos años. Para que se tenga una idea de la profundidad de este tipo de asuntos, baste mencionar que en física y matemáticas aplicadas todavía se usan los infinitesimales.

La confesión de Arquímedes

Una de las cosas más admirables de esta historia es que aunque Arquímedes fue asumido como la quintaesencia del paradigma mencionado, en realidad él usó nociones semejantes a los infinitesimales y usó el infinito en la construcción de sus resultados. Este hecho sorprendente fue establecido recientemente. En el año 1906 fue descubierto un documento escrito por Arquímedes intitulado "Sobre el método", donde se establecía con toda claridad que los hechos o resultados matemáticos obtenidos no eran demostrados por los argumentos usados en la demostración: la construcción y descubrimiento de los resultados era una cosa (donde podía haber por ejemplo infinitesimales) y la demostración era otra (donde no podía haber). Arquímedes que estudió la mecánica, cinemática, la hidrostática, y muchos otros campos científicos acudía a la intuición y a diversos recursos heurísticos en la obtención de sus resultados. Lo que se estableció como el paradigma de las matemáticas fue lo que correspondía a la demostración y no a la creación de los resultados. Este documento fue decisivo para la comprensión no solo de las matemáticas griegas, sino del carácter mismo de las matemáticas en todas los tiempos y, también, de la evolución misma de la disciplina.

Foto 16.2. *Abraham Robinson (1918-1974)*

El trabajo de Weierstrass con los ϵ y δ se puede ver entonces como el de restablecer en el siglo XIX el rigor euclidiano. Solo que en el nuevo momento histórico ya no era posible evadir los irracionales (como en la Grecia Antigua) y, por eso, es significativo que Weierstrass mismo haya ofrecido una construcción rigurosa de los números reales. La época estaba madura para una mejor comprensión racional, teórica y lógica de los inconmensurables.

La comunidad matemática toma una decisión

Volvamos al Análisis *No-Standard*: la pregunta es ¿por qué la teoría de los infinitesimales fue derrotada?, ¿habría sido posible un marco teórico que integrara infinitesimales e infinito en la primera mitad del siglo XIX?

Con relación a la primera pregunta debemos decir: el peso de los paradigmas heredados de la Grecia antigua era muy fuerte. Por otro lado, las leyes que cumplen los infinitesimales y el infinito no son tan "naturales" a la lógica usual que usamos. También debemos decir, en especial, porque su capacidad de explicación y de desarrollo matemático era menor que la que tenía la Teoría de Weierstrass. Pero también porque debe entenderse que no era intrascendente el objetivo de brindar fundamento y rigor a los resultados matemáticos que se habían obtenido en los siglos XVII y XVIII. Y la existencia de nuevos entes (los infinitesimales) que se comportaban muy diferentemente a los números conocidos, no aparecía como algo muy claro. El mismo Cauchy tuvo sus dudas acerca de la validez de los infinitesimales: incluso él concedió que éstos eran admisibles en las pruebas *pero no en la formulación de los teoremas*.

Por otro lado: es dificil pensar que la comunidad matemática de la primera mitad del siglo XIX tuviera los elementos teóricos suficientes para compatibilizar los requerimientos de rigor efectivamente necesarios para avanzar en algunos campos matemáticos con los infinitesimales.

En todo caso el asunto de fondo es que la comunidad matemática requería un modelo de demostración que le asegurara aceptablemente sus resultados para proseguir hacia adelante. El Análisis *Standard* (weierstrassiano) desempeñó ese papel plenamente. Lo que hoy podemos decir es que un modelo que incluyera los infinitesimales también lo podría haber jugado, pero no existieron condiciones teóricas, culturales y sociológicas para que un modelo así se hubiera impuesto en la comunidad matemática de aquella época.

Que haya ganado la teoría de Weierstrass nos ofrece un ejemplo de cómo funciona en verdad la historia de las matemáticas y las ciencias en general. La existencia de teorías rivales es un hecho. Y también es un hecho que las teorías y los criterios matemáticos o científicos en general no se establecen al margen de las comunidades matemáticas y científicas. Los resultados de las matemáticas no son verdades ahistóricas, absolutas, infalibles, perfectas, en una línea de progreso constante. Hay conflictos, retrocesos, atajos, el azar interviene y todos los condicionamientos que siempre caracterizan la vida social.

Cuando aprendemos o enseñamos las matemáticas deberíamos tener en mente cómo ha sido las historia real de las matemáticas. De lo contrario nunca la aprenderemos bien ni mucho menos la podremos enseñar apropiadamente.

16.3. Una síntesis final

Si realizamos un balance general de la historia del Cálculo Diferencial e Integral podemos subrayar los siguientes momentos:

I- La emersión de métodos infinitesimales en la Grecia antigua, que no pudieron expandirse por varias razones:

- predominio de una visión de mundo asociada a la geometría euclidiana,
- debilidad de la aritmética y el álgebra y
- ausencia de importantes influjos provenientes de las ciencias físicas y de la tecnología con sociedades muy estratificadas (que serían luego derrotadas por la fuerza militar y política de los romanos).

II- Para el siglo XVII, si bien la geometría euclidiana predominaba, la aritmética y el álgebra habían hecho avances significativos gracias, especialmente, al trabajo de los árabes y los matemáticos renacentistas, y existía un influjo extraordinario de parte de las diferentes ciencias físicas y del progreso de la técnica y tecnología, en un marco social que había abierto espacios a la indagación intelectual.

El progreso de los métodos algebraicos se puede apreciar, por ejemplo, precisamente en la construcción de la geometría analítica. El impacto de las ciencias físicas y las nuevas técnicas se condensó en la forma precisa como nació y se desarrolló el Cálculo: fluxiones, mecánica, movimiento, etc.

El Cálculo se desarrolló asociado a la geometría y a las ciencias físicas y, si se quiere, lo que es el común denominador, a una relación con el mundo descrita hasta ese momento por esas ciencias o por la misma geometría euclidiana. Todo esto a pesar de las tensiones que pudieran existir entre una geometría estática y la necesidad de una descripción matemática del movimiento, contradicción entre geometría y cinemática.

Durante los siglos XVIII y XIX las ideas y los métodos del Cálculo Diferencial e Integral se expandieron extraordinariamente, al mismo tiempo que muchos otros campos de las matemáticas. El Análisis penetró, amplió y se desarrolló en buena parte de los nuevos campos: geometrías no euclidianas, análisis complejo y de varias variables, análisis vectorial y tensorial, geometría diferencial, análisis armónico, análisis funcional, etc.. Todos los campos de la ciencia física han llegado a utilizar extensa y profusamente el Análisis.

III- Podemos hablar de una tercera etapa cuando, durante el siglo XIX, a la expansión en el uso, desarrollo y aplicación del Cálculo se le añadió una dimensión teórica adicional: la búsqueda por de fundamentar con rigor lógico y formal los que se habían producido o se estaban produciendo. Esta rigorización se hizo históricamente con la idea de separarse de cualquier apelación al mundo empírico y sostener el edificio matemático estrictamente con la deducción lógica y con un manejo "axiomático".

La nueva etapa que ha incluído como criterio el rigor lógico y axiomático, la separación de lo intuitivo o físico, en la construcción matemática llega hasta nuestros días y estos criterios todavía influencian decisivamente la comprensión, la transmisión, la elaboración y la enseñanza de las matemáticas.

¿Qué no son las matemáticas?

Este vector importante en el desarrollo de las matemáticas ha sido entendido a veces de maneras equivocadas. Por ejemplo, cuando se ha opinado que las matemáticas solo se refieren a entes abstractos, a razones lógicas, axiomáticas y formales, y sin referencia a la realidad material y social. Algunas veces se ha perdido la comprensión de que la lógica, la axiomática, el marco formal y demás definen la expresión matemática y la forma de comunicación, de entendimiento y aceptación, entre los matemáticos, en la comunidad matemática. Pero que en la construcción intelectual de las matemáticas es imposible evadir la referencia al mundo físico, social, a las intuiciones humanas individuales, a toda esa gama de influjos colectivos individuales, psicológicos que, aunque en la expresión de resultados no aparezcan, son sustanciales en la elaboración matemática.

La historia del Cálculo es un ejemplo de cómo ha evolucionado la creación matemática, y en ella es posible apreciar cómo funciona la construcción matemática propiamente. Este es un asunto de trascendencia no solo para el que hace matemáticas sino también para quien las usa o las aprende.

16.4. Ejercicios

FALSO O VERDADERO

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. En cada caso brinde una justificación breve de su respuesta

1. Poner énfasis en los procesos algebraicos y aritméticos obedeció a las necesidades de la comunidad matemática del siglo XIX.
2. Los infinitesimales son números mayores que cualquier otro número real.
3. Las variables para Cauchy son colecciones de números.
4. Leibniz y Cauchy desarrollaron el Análisis *No-Standard*.
5. Para los griegos los puntos tenían posición pero no magnitud.
6. Arquímedes nunca acudió a los métodos heurísticos y empíricos.
7. Las teorías matemáticas se establecen al margen de las comunidades matemáticas y de la época.
8. Una tercera etapa en la historia del Cálculo se dio con la rigorización y la Aritmetización del Análisis.
9. La construcción matemática es resultado de la axiomática y de los procesos de demostración formal.

PREGUNTAS DE DESARROLLO

1. ¿Qué significa la siguiente frase de Hermann Weyl: "La lógica es la higiene que usan los matemáticos para tener sus ideas fuertes y saludables"?

2. ¿Cuál era la teoría de los infinitesimales?

3. ¿Qué quiere decir que Euclides y Arquímedes fueron un paradigma del rigor lógico?

4. ¿Cuál podría decirse fue el significado del documento *"Sobre el método"* de Arquímedes?

5. Brevemente, dé dos razones por las que fue derrotada la teoría de los infinitesimales.

6. Comente el siguiente párrafo:

> "La existencia de teorías rivales es un hecho. Y también es un hecho que las teorías y los criterios matemáticos o científicos en general no se establecen al margen de las comunidades matemáticas y científicas. Los resultados de las matemáticas no son verdades ahistóricas, absolutas, infalibles, perfectas, en una línea de progreso constante. Hay conflictos, retrocesos, atajos, el azar interviene y todos los condicionamientos que siempre caracterizan la vida social.
>
> Cuando aprendemos o enseñamos las matemáticas deberíamos tener en mente cómo ha sido las historia real de las matemáticas. De lo contrario nunca la aprenderemos bien ni mucho menos la podremos enseñar apropiadamente."

Parte II

EJERCICIOS RESUELTOS

PRESENTACIÓN

Proporcionamos aquí la solución detallada de varios de los ejercicios propuestos en nuestro libro *Elementos de Cálculo Diferencial.*

El propósito es que esta parte constituya un complemento práctico al libro mencionado, tanto para el profesor como para el alumno.

Por esta razón se resuelven con todo detalle algunos ejercicios seleccionados, lo que sirve como un buen repaso de algunos aspectos teóricos. Se proporcionan referencias a la teoría, comentarios alusivos e indicaciones específicas de manera que este material sirva como un valioso auxiliar al libro de texto y pueda ser utilizado para complementar y aclarar algunas ideas y aspectos importantes.

Esta parte está dividida en correspondencia con los capítulos del libro *Elementos de Cálculo Diferencial*, tanto del *Volumen I* como del *Volumen II.* El esquema de presentación consiste en: el número del ejercicio, el enunciado completo del mismo y la solución ampliamente detallada. En algunas ocasiones se adjuntan recuadros que repasan la materia o que sirven para comentar algunos aspectos especiales relacionados con la temtica del ejercicio, o bien, para advertir sobre cuestiones importantes de las matemticas.

En general se seleccionaron ejercicios que tuvieran algún aspecto teórico interesante. Esto permite enfatizar y reforzar algunos conceptos importantes que son muy útiles en el Cálculo Diferencial. Por ejemplo, se da mucho énfasis a problemas que tienen que ver con el cálculo de pendientes de rectas tangentes, puesto que ésta es la interpretación primigenia, desde el punto de vista geométrico, de la derivada. También hay algunos ejercicios de simple utilización de fórmulas, pero éstos también fueron seleccionados de forma que su solución aporte una manera nueva o interesante de enfocar el problema, o que presente algún detalle digno de tomar en consideración.

Por lo anterior, usted observará que algunos capítulos tienen más ejercicios resueltos que otros. Los capítulos con más ejercicios resueltos son los que constituyen las partes centrales del libro y son, de hecho, los que conviene repasar más. Tal es el caso, por ejemplo del *Capítulo 2*, que es la parte central del estudio de los límites y del *Capítulo 5*, que constituye el estudio de la derivada.

Desde luego, se recomienda que usted resuelva cada ejercicio antes de consultar su solución. Posteriormente, ya sea que desee verificar su solución o que quiera consultar otra posible o, en algunas ocasiones, ver aspectos nuevos de la misma, es recomendable que lea la solución que aquí le presentamos.

Finalmente, insistimos que el material que aquí presentamos es complementario al texto y que, si bien es cierto puede ser un muy valioso auxiliar para la comprensión de algunos aspectos del Cálculo, de ninguna manera puede sustituirlo ni sustituir el trabajo que usted, por sus propios medios, debe realizar con los ejercicios que en dicho libro se presentan.

Capítulo 1

LAS RAZONES DE CAMBIO Y LA DERIVADA

EJERCICIOS RESUELTOS

Velocidad instantánea como límite de velocidades promedio

11. Selección única: Un objeto se mueve en línea recta de manera que a los t segundos de iniciado el movimiento se encuentra a $s(t) = t^2 + 1$ metros del origen. Si queremos estimar la velocidad instantánea del objeto a los 2 segundos, entonces podemos utilizar valores de t cada vez más próximos a 2 para calcular el valor de la expresión siguiente:

(a) $\dfrac{t^2+6}{t+2}$ (b) $\dfrac{t^2-56}{t-2}$ (c) $\dfrac{t^2-4}{t-2}$ (d) $\dfrac{t^2+5}{t+2}$

Solución:

Según se establece a través de este capítulo, la velocidad instantánea se puede estimar considerando la velocidad media en intervalos de tiempo cada vez menores. Para este caso, la velocidad media entre los 2 segundos y los t segundos vendría dada por

$$\frac{s(t)-s(2)}{t-2} = \frac{t^2+1-5}{t-2} = \frac{t^2-4}{t-2}$$

de manera que un estimado para la velocidad instantánea se obtendría evaluando esta última expresión en valores de t cada vez más próximos a 2. La opción correcta es (c).

De la velocidad promedio a la velocidad instantánea

En este ejercicio se hace referencia a un aspecto muy importante sobre la velocidad: la velocidad instantánea es el límite de velocidades promedio. Si un objeto se mueve en línea recta de manera que en el tiempo t se encuentra a una distancia $d(t)$ de un punto de referencia (el origen), entonces la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[a, t]$ está dada por

$$v_{prom} = \frac{d(t) - d(a)}{t - a}.$$

La velocidad instantánea en el momento a es el límite cuando t se aproxima a a de v_{prom}. Por otra parte, este límite es lo que se denomina derivada de $d(t)$ en a y se denota por $d'(a)$.

Concepto de recta tangente

15. Falso o verdadero: Algunas rectas tangentes a una curva en un punto pueden cortar a la curva en otro punto.

Solución:

Recordando la definición que usualmente se da en geometría para la tangente a una circunferencia es muy fácil conservar el concepto erróneo de que cualquier tangente a una curva solo la puede "tocar" en un punto: el punto de tangencia. Sin embargo el concepto de tangencia es algo más general y se refiere a una propiedad local de la curva: en la cercanías del punto de tangencia la curva y la recta tangente "son casi lo mismo", así que no importa lo que sucede en otras partes. Entonces, una recta que es tangente a una curva en cierto punto bien podría cortar a la curva en otro u otros puntos. La afirmación considerada es entonces verdadera. En la figura siguiente, la recta L es tangente a la curva en el punto P y la corta en otro punto A.

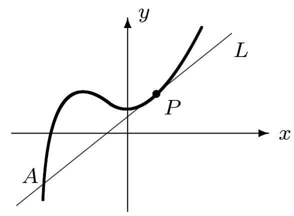


Figura 1.1.

Derivada y pendiente de la recta tangente

20. En la siguiente figura se da la gráfica de una función f y una recta L tangente a la gráfica de la función en el punto $(2, 1)$; si se sabe que $f'(2) = -2$, calcule la ecuación de la recta L.

Solución:

Sea $y = mx+b$ la ecuación de la recta tangente. Observemos primero que el punto de tangencia es $(2, 1)$. Por otro lado, debemos recordar que la derivada de la función en un punto representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto. En este caso, como $f'(2) = -2$ entonces la pendiente m de la recta tangente a la curva en el punto $(2, 1)$ es $m = -2$. Dado que la recta pasa por $(2, 1)$ entonces tenemos que $b = 1 - (-2) \cdot 2 = 5$. La ecuación de L es entonces

$$y = -2x + 5$$

La pendiente es igual a la derivada

Una de las interpretaciones fundamentales de la derivada, para efectos del Cálculo, es la de pendiente de la recta tangente. Esto es, la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado es igual a la derivada de la curva evaluada en ese punto. Si la curva viene dada por la función $y = f(x)$ entonces la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$ es $m = f'(a)$ en caso de que esta derivada exista. De hecho, si una función no tiene tangente en un punto entonces no es derivable en ese punto.

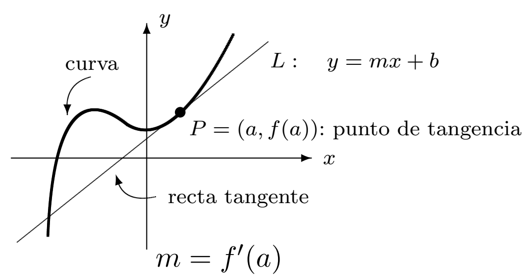


Figura 1.2.

Derivada y pendiente de la recta tangente

21. De acuerdo con la siguiente figura, calcule c y $f'(c)$.

Solución:

Según el dibujo, el punto $(c, 10)$ pertenece a la recta de ecuación

$$y = 7,5x - 12,5$$

por lo tanto el punto $(c, 10)$ debe satisfacer la ecuación de la recta. Se tiene entonces que $10 = 7,5c - 12,5$, es decir, despejando c, se tiene $c = 3$.

Como la recta es tangente a la curva en $(c, 10)$ y la recta tiene pendiente $7,5$ concluimos que

$$f'(c) = 7,5.$$

Cálculo de la pendiente usando una tabla de valores

23. Use una tabla de valores para encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2 + x - 1$ en el punto $(2, 5)$.

Solución:

Según sabemos, la pendiente puede ser estimada considerando valores de x cada vez más próximos a 2 en el cociente

$$\frac{y-5}{x-2} = \frac{x^2+x-1-5}{x-2} = \frac{x^2+x-6}{x-2}$$

Realizamos una tabla de valores para estimar la pendiente:

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$\frac{x^2+x-6}{x-2}$	4,9	4,99	4,999	5,001	5,01	5,1

De esta tabla concluimos que la pendiente de la recta tangente es igual a 5.

De la pendiente de secantes a la pendiente de la tangente

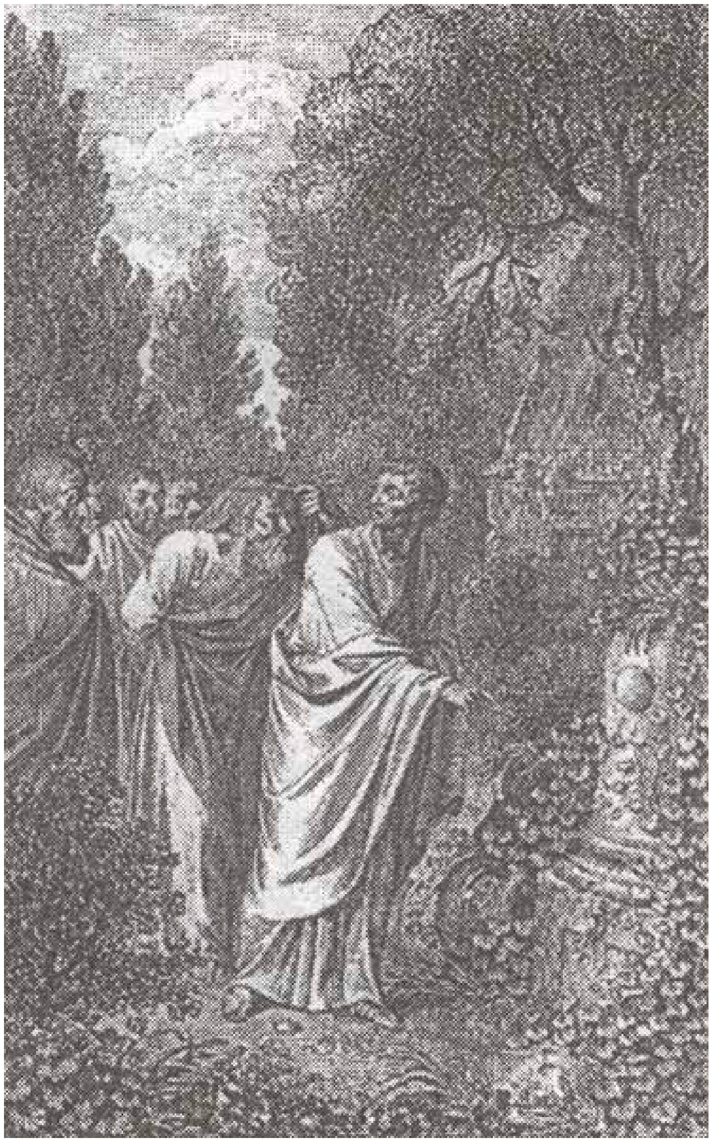
Antes dijimos que la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto es la derivada en ese punto. En este ejercicio se hace uso del hecho de que la derivada es precisamente un límite de cocientes. En particular esto significa que la pendiente de una recta tangente en un punto es un límite de pendientes de rectas secantes que cortan a la curva en ese punto.

La muerte de Arquímedes

> "Nada afligió más a Marcelo que la muerte de Arquímedes, quien estaba, como si el destino lo supiera, tratando de resolver un problema a través de un diagrama; habiendo fijado su mente al igual que sus ojos en el tema de su pensamiento, él nunca notó la incursión de los romanos, ni que la ciudad estaba tomada. En este estado de estudio y contemplación, un soldado, que se le acercó inesperadamente, le ordenó seguirlo hasta Marcelo. Arquímedes declinó hacerlo hasta no obtener la demostración para un problema. El soldado, enfurecido, sacó su espada y lo mató."
>
> *Vidas Paralelas: Marceluss*
> Plutarco (45–120 d. C)

Este es parte del único relato que se conoce sobre la muerte de Arquímedes. 137 años después, *Cicerón* (106–43 a. C) buscó y encontró la tumba en Sicilia (Siracusa). Cicerón realiza este testimonio precisamente en el libro **Tusculan Disputationes,** libro V.

Muerte de Arquímedes. Detalle de una pintura anónima.



Grabado de parte de la portada de una traducción alemana de la obra de Cicerón **Tusculan Disputationes**. *Traducción hecha por Xaver Weinzierl, Munich, 1806.*

Capítulo 2

LÍMITES

EJERCICIOS RESUELTOS

El límite de una suma

13. Falso o verdadero: Si f y g son funciones tales que $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ existe, entonces podemos asegurar que $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ existen.

Solución:

Una de las propiedades de los límites establece que si el límite de dos funciones en un punto determinado existen entonces también existe el límite de la suma de las funciones en ese punto. Sin embargo no establece nada en el sentido contrario, esto es, si el límite de la suma de funciones existe, ¿existe el límite de cada una de las funciones individualmente? La respuesta a esta pregunta es negativa en el sentido que puede darse el caso de dos límites que no existan y sin embargo sí existe el límite de la suma de las funciones. Uno de los casos más simple que podemos dar es el siguiente:

Consideremos las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\frac{-1}{x}$. Es evidente que

$$\lim_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\frac{-1}{x}\right]=\lim_{x\to 0} 0=0$$

(el límite de la suma de funciones existe y es igual a 0.)

Mientras que no existe ni $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ni $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

En conclusión, la afirmación dada es falsa.

El contraejemplo

La situación que acabamos de plantear, mediante la cual se comprueba que una afirmación dada no se cumple en todos los casos, se denomina usualmente en matemáticas como un **contraejemplo** (es un ejemplo contrario a lo que la proposición enuncia).
Si se logra determinar un contraejemplo para una proposición entonces decimos que la proposición es falsa.

El límite de un cociente

14. Falso o verdadero: Si $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3}{5}$, entonces podemos asegurar que $\lim\limits_{x\to -1} g(x) \neq 0$.

Solución:

La afirmación es FALSA puesto que no tenemos ninguna certeza de antemano que $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$ sea diferente de cero. Por ejemplo, si $g(x) = x^2 + 7x + 6$, se tiene que $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = 0$. Si $f(x) = x^2 + 5x + 4$ entonces

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2+5x+4}{x^2+7x+6} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+4)}{(x+1)(x+6)} = \lim_{x\to -1} \frac{x+4}{x+6} = \frac{3}{5}.$$

Es decir, tenemos una situación en la que $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3}{5}$ y sin embargo $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = 0$ (hemos encontrado un contraejemplo), por lo tanto la afirmación es falsa.

Límite de un cociente

Recordemos que si f y g son funciones tales que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} g(x) = M$ entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

siempre que $M \neq 0$. Esto es, el límite de un cociente es igual al cociente de los límites siempre que el límite del denominador no sea igual a 0.

Límite con valor absoluto

21. Selección única: El valor de $\lim_{x \to 1} \frac{|x| - x}{x - 1}$ es

(a) 2 (b) 1 (c) -1 (d) 0

Solución:

Observamos que al sustituir directamente el valor $x = 1$ en la expresión se obtiene una forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Como la función contiene un valor absoluto entonces debemos considerar los diferentes casos:

Recordamos que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Tenemos entonces que para valores de x mayores o iguales que 0 (excepto para $x = 1$) se tiene que

$$\frac{|x| - x}{x - 1} = \frac{x - x}{x - 1} = \frac{0}{x - 1} = 0.$$

Mientras que para valores negativos de x se tiene

$$\frac{|x| - x}{x - 1} = \frac{-x - x}{x - 1} = \frac{-2x}{x - 1}.$$

En resumen

$$\frac{|x| - x}{x - 1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0,\, x \neq 1 \\ \frac{-2x}{x-1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Así, al calcular el límite de esta función cuando $x \to 1$, lo que interesa son los valores de x cercanos a 1. Estos números son positivos y entonces ahí la función se hace 0, por lo tanto se tiene

$$\lim_{x \to 1} \frac{|x| - x}{x - 1} = 0$$

La opción correcta es (d).

Un límite que no existe

24. Selección única: El límite $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{|x - 1|}$ es igual a

(a) 3 (b) -3 (c) 2 (d) No existe

Solución:

Al sustituir directamente el valor $x = 1$ en la expresión se obtiene una forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Como la función contiene un valor absoluto entonces debemos considerar los diferentes casos:

Tenemos que

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\frac{x^2 + x - 2}{|x - 1|} = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x + 2 & \text{si } x > 1 \\ \frac{x^2+x-2}{1-x} = \frac{(x-1)(x+2)}{1-x} = -x - 2 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

De lo anterior se deduce que para valores mayores que 1 la función tiende a 3, pero si consideramos valores menores que 1 la función se aproxima a -3 (vea la siguiente figura). Esto significa que el límite no existe y por lo tanto la opción correcta es (d).

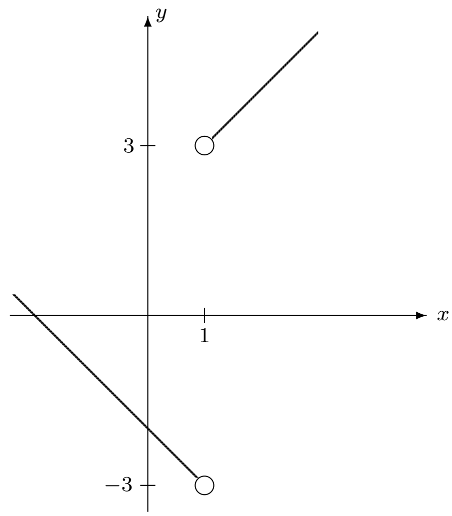


Figura 2.1.

Reconocer la variable para calcular el límite

25. Selección única: El límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2}{x+h}$$

es igual a

(a) x (b) h (c) 0 (d) No existe

Solución:

Aquí lo que debemos observar es que la variable, para efectos del límite, es h. Una vez establecido esto, lo que sigue es muy sencillo:

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2}{x+h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)(x+h)}{x+h} = \lim_{h\to 0}(x+h) = x.$$

La opción correcta es (a).

La variable en un límite

En algunas ocasiones pueden aparecer dos o mís variables dentro de un límite. Es importante saber cuíl debemos considerar como la variable para efectos del cílculo de límite; sin embargo, es muy fícil reconocer esto. Por ejemplo, si tenemos una funciín $y = f(x)$, es claro que x es una variable. Pero si queremos calcular un límite como

$$\lim_{z \to x} \frac{f(x) - f(z)}{x - z},$$

en este cílculo debemos considerar como variable a z, tomando x como si fuera una constante. La clave es observar la expresiín $z \to x$; la variable es la que se encuentra a la izquierda de la flecha.

Factorizar dos veces para calcular el límite

47. Calcular

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}.$$

Solución:

Observamos en primer lugar que al sustituir el valor 1 en la función se obtiene $\frac{0}{0}$, es decir, un límite indeterminado. Puesto que 1 es un cero del polinomio numerador y del polinomio denominador entonces, por el teorema del factor sabemos que $x - 1$ es un factor de ambos polinomios. Podemos utilizar el procedimiento de división sintética para factorizar los polinomios y obtenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 3)} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 + x - 3}. \end{aligned}$$

Ahora, si sustituimos el valor 1 en la nueva fracción, volvemos a obtener $\frac{0}{0}$. Volvemos a factorizar:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 + x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2 + 2x + 3)}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} \\ &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Doble racionalización para calcular un límite

56. Calcular

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2+x}-2}{\sqrt{7+x}-3}.$$

Solución:

Al sustituir el valor $x = 2$ en la función se obtiene una expresión indeterminada de la forma $\frac{0}{0}$, por lo tanto debemos proceder "arreglando" la función. En este caso, puesto que tenemos un radical en el numerador y otro en el denominador, procedemos por "doble racionalización":

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2+x}-2}{\sqrt{7+x}-3} &= \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{2+x}-2\right)\left(\sqrt{2+x}+2\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}{\left(\sqrt{7+x}-3\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)\left(\sqrt{2+x}+2\right)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(2+x-4)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}{(7+x-9)\left(\sqrt{2+x}+2\right)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{2+x}+2\right)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{7+x}+3}{\sqrt{2+x}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

El límite de un producto

70. Suponga que f y g son funciones tales que

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] = 1.$$

Explique por qué, bajo esas condiciones, se puede concluir que

$$\lim_{x\to c} g(x)$$

no existe.

Solución:

Si supusiéramos que
$$\lim_{x\to c} g(x)$$
existe (digamos que es igual a L) y como
$$\lim_{x\to c} f(x)$$
existe (es igual a 0), entonces podríamos aplicar la propiedad del límite de un producto y tendríamos:
$$\lim_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x)\cdot \lim_{x\to c} g(x) = 0\cdot L = 0,$$
es decir si
$$\lim_{x\to c} g(x)$$
existiera, el límite del producto no podría ser igual a 1. Esto significa que
$$\lim_{x\to c} g(x)$$
no puede existir.

Prueba por contradicción

La forma de proceder que hemos utilizado en este ejercicio para probar el enunciado se llama *prueba por contradicción*. Se supone lo contrario a lo que se desea demostrar y a partir de ahí se encuentra algún tipo de contradicción con las hipótesis dadas. De ello se concluye que la suposición que hemos hecho no es válida y por lo tanto lo correcto es lo que se dice en el enunciado. Este tipo de demostración es muy útil en situaciones como las de este ejercicio en donde se debe probar que algo no existe (suponemos que sí existe y llegamos a una contradicción).

Los límites y las raíces de una ecuación

71. Considere la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Suponga que se mantienen constantes los coeficientes b y c (siendo $b > 0$). Si hacemos que el coeficiente a se aproxime a 0, ¿qué sucederá con las raíces de la ecuación?

Solución:

Recordemos, de la teoría de ecuaciones de segundo grado, que las raíces de esta ecuación son

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Estudiemos qué sucede con la raíz x_1: Debemos calcular $\lim\limits_{a \to 0} x_1$, tenemos (racionalizando):

$$\lim_{a \to 0} x_1 = \lim_{a \to 0} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \lim_{a \to 0} \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} =$$

$$\lim_{a \to 0} \frac{-b^2 + b^2 - 4ac}{2a\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} = \lim_{a \to 0} \frac{-4ac}{2a\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} = \lim_{a \to 0} \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} =$$

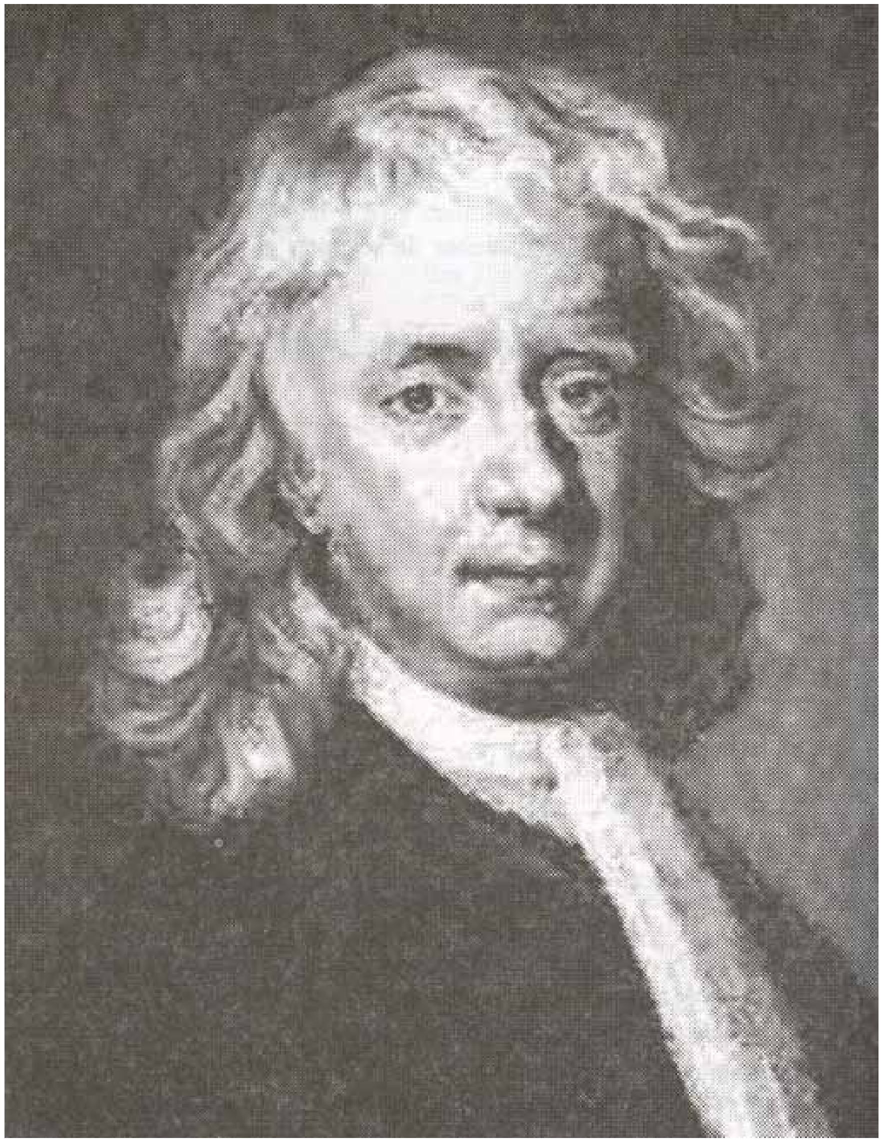
$$\frac{-2c}{b + \sqrt{b^2}} = \frac{-2c}{b + b} \qquad (\text{pues } b > 0)$$

$$= \frac{-c}{b}$$

Veamos ahora qué sucede con la raíz x_2: Debemos calcular $\lim\limits_{a \to 0} x_2$.

Observamos que, cuando $a \to 0$, se tiene $(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}) \to -2b \neq 0$ mientras que $2a \to 0$. Entonces, cuando a es positivo, si se va acercando a 0, la raíz x_2 decrece ilimitadamente mientras que si a es negativo (acercándose a 0) la raíz x_2 crece ilimitadamente.

En resumen: cuando $a \to 0$, una de las raíces se aproxima a $\frac{-c}{b}$ y la otra se hace muy grande en valor absoluto.



Retrato de Isaac Newton realizado por Enoch Seeman en 1726.

Capítulo 3

LÍMITES LATERALES Y CONTINUIDAD

EJERCICIOS RESUELTOS

El concepto de límite por la derecha

8. Falso o verdadero: Suponga que g es una función tal que $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 5$. En cada caso diga si la afirmación es verdadera o falsa.

1. Necesariamente $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = 5$.
2. Necesariamente $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 5$.
3. Necesariamente existe un número $c > 2$, muy cercano a 2 tal que $g(c) = 5$.
4. A medida que tomamos valores de x muy próximos a 2, pero mayores que 2, los valores de $g(x)$ se aproximan a 5.

Solución:

1. La información que se da en el encabezado es pertinente para lo que sucede con la función $g(x)$ para valores cercanos a 2 pero mayores que 2 ($x \to 2$ por la derecha), a partir de ella no podemos deducir absolutamente nada

cuando $x \to 2^-$. Por otra parte, puede suceder que una función tenga un límite a un valor por la derecha y tenga uno diferente a ese mismo valor por la izquierda. Por ejemplo, si

$$g(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \geq 2 \\ x-1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

entonces tenemos que

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = 5 \qquad \text{mientras que} \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = 1.$$

En conclusión, la afirmación es falsa.

2. Puesto que no podemos asegurar que el límite por la izquierda sea igual al límite por la derecha, tampoco podemos asegurar que

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 5.$$

Es decir, la afirmación es falsa.

3. Para este caso, el concepto de límite establece que para valores de x cercanos a 2 y mayores que 2, los valores de $g(x)$ son cercanos a 5, pero no podemos saber a ciencia cierta si hay algún valor cuya imagen sea exactamente 5. Por esto, la afirmación es falsa.

4. Según se indicó en el punto anterior, lo que esta proposición establece es precisamente el significado de límite por la derecha, por lo tanto esta afirmación es verdadera.

Continuidad de un cociente

10. Falso o verdadero: Siempre que f y g sean continuas en c se tiene que $\frac{f}{g}$ es continua en c.

Solución:

Una de las propiedades de las funciones continuas establece que si f y g son continuas en c se tiene que $\frac{f}{g}$ es continua en c, pero siempre y cuando $g(c)$ no sea igual a cero. En caso de que $g(c) = 0$, la función $\frac{f}{g}$ no estaría definida en c y más bien sería discontinua en c. De esta forma, en general no podemos asegurar la continuidad de $\frac{f}{g}$ en c aún cuando tanto f como g sean continuas en c. Por tal razón, la afirmación es falsa.

Continuidad cuando hay un parámetro

17. Selección única: ¿Para qué valor o valores de k la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x \leq k \\ 2x^3 + 3 & \text{si } x > k \end{cases}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$?

(a) Solo para $k = 1$. (b) Para $k = 1$ ó $k = 2$.

(c) Para cualquier valor de k. (d) Para ningún valor de k.

Solución:

Tanto x^2+4 como $2x^3+3$ son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$ y en particular en los intervalos $]-\infty, k[$ y $]k, +\infty[$ respectivamente. Solo faltaría asegurarnos que f sea continua en k. Para esto debemos tener que

$$\lim_{x \to k^+} f(x) = \lim_{x \to k^-} f(x) = f(k).$$

Es decir:

$$\lim_{x \to k^+} (2x^3 + 3) = \lim_{x \to k^+} (x^2 + 4) = k^2 + 4$$

o sea,

$$2k^3 + 3 = k^2 + 4.$$

Resolviendo en $\mathbb{R}$ esta ecuación se obtiene como única solución $k = 1$. Así, f es continua en todo $\mathbb{R}$ solo cuando $k = 1$. La opción correcta es (a).

Condiciones para la continuidad

Recordemos la definición de continuidad en un punto: una función f es continua en a si se satisfacen simultáneamente las tres condiciones siguientes:

1. Existe $f(a)$ (esto significa que la función está definida en a).
2. Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, para esto en particular se requiere que existan los dos límites laterales $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y que sean iguales.
3. $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Continuidad y límites laterales

19. Selección única: Si f es una función continua en 2 y se tiene que

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = w \text{ y } \lim_{x\to 2^-} f(x) = -w$$

entonces podemos asegurar que
(a) $w = 1$ (b) w puede ser cualquier número real (c) $w = 2$
(d) $w = 0$.

Solución:

Una de las condiciones de la continuidad en un punto es la existencia del límite en ese punto. En nuestro caso particular esto significa que $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe, específicamente este límite debe ser igual a los dos límites laterales dados y por lo tanto debemos tener que $w = -w$ y entonces $w = 0$. La opción correcta es (d).

Continuidad y límites

21 Selección única: Sea f una función tal que $f(4) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 3$. Entonces podemos afirmar lo siguiente:
(a) f es continua en $x = 4$ (b) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 2$
(c) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 3$ (d) f es dicontinua en $x = 4$

Solución:

El hecho de que $f(4) \neq \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$ significa que la función no es continua en 4 (vea el recuadro en el ejercicio 17).

Discontinuidades evitables e inevitables

52. Determinar en qué intervalos es continua la siguiente función. Decir si las discontinuidades son evitables o no.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ \frac{x+1}{x-1} & \text{si } -2 \leq x < 2 \text{ y } x \neq 1 \\ -3x+1 & \text{si } 2 \leq x. \end{cases}$$

Solución:

En primer lugar observamos la existencia de un punto de discontinuidad en $x = 1$ puesto que ahí la función no está definida. Por otra parte, tenemos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x-1}$ no existe. Por lo tanto éste es un punto de discontinuidad inevitable.

Existen también otros dos posibles puntos de discontinuidad: $x = -2$ y $x = 2$. Estudiaremos esos puntos.

En $x = -2$: tenemos que $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} 2x = -4$, por su parte,

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{3}.$$

Esto significa que $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ no existe pues los límites laterales difieren, por lo tanto $x = -2$ es otro punto de discontinuidad. La no existencia del límite dice que la discontinuidad es inevitable.

En $x = 2$: tenemos que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x-1} = 3, \text{ y } \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (-3x+1) = -5.$$

También $x = 2$ es un punto de discontinuidad inevitable.

La función es continua en los demás números reales, es decir, f es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 1, 2\}$.

Dos tipos de discontinuidad: evitable y no evitable

Los dos tipos básicos de discontinuidad son la discontinuidad *evitable* y la discontinuidad *inevitable*.

Cuando decimos que una función presenta una discontinuidad evitable es porque el límite existe pero no es igual a la imagen del punto. Cuando la discontinuidad es inevitable es porque el límite no existe. La siguiente gráfica presenta una discontinuidad inevitable en $x = a$ y una discontinuidad evitable en $x = b$.

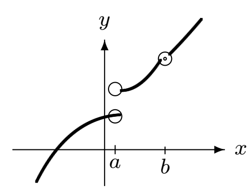


Figura 3.1.

Continuidad cuando hay un parámetro

54. Determine los valores de c para los cuales g es continua en $\mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} 2cx + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ c^2x - 2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Solución:

Tanto $2cx + 1$ como $c^2x - 2$ son continuas en todo $\mathbb{R}$, no importa cuál sea el valor de c. Esto significa que la función g solo podría tener como punto de discontinuidad $x = 1$. Para que g sea continua en $x = 1$ debemos tener

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = g(1).$$

Esto es, $2c + 1 = c^2 - 2$. Resolviendo esta ecuación se tiene

$$\begin{array}{rcll} 2c+1 & = & c^2-2 & \Rightarrow \\ c^2-2c-3 & = & 0 & \Rightarrow \\ (c-3)(c+1) & = & 0 & \Rightarrow \\ c=3, & & c=-1. & \end{array}$$

La función g es continua solamente en caso de que $c = 3$ ó $c = -1$.

Capítulo 4

LÍMITES INFINITOS Y AL INFINITO

EJERCICIOS RESUELTOS

Límite infinito y función creciente

9. Falso o verdadero: Si $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$ entonces podemos asegurar que si $a < b < 2$ entonces $f(a) < f(b)$.

Solución:

Leyendo de otra forma el enunciado, lo que se asegura es que si $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$ entonces la función es creciente a la izquierda de $x = 2$. La afirmación es falsa puesto que podemos conseguir funciones con la condición $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$ que sin embargo no son crecientes a la izquierda de 2 (vea la siguiente figura).

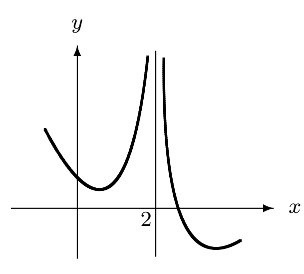


Figura 4.1.

Concepto de límite al infinito

11. Falso o verdadero: Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 8$ entonces existe un valor M tal que para todo $x > M$ se tiene que $f(x) \leq 8$.

Solución:

La expresión $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 8$ significa que a medida que x crece ilimitadamente entonces los valores de $f(x)$ se aproximan a 8. Esta aproximación se puede dar por "arriba" (valores mayores que 8) o por "abajo" (valores menores que 8) y bien podría suceder que la función oscile indefinidamente alrededor del valor 8. Por tal motivo no podemos aseverar que a partir de un cierto valor de x las imágenes sean siempre menores que 8. La afirmación es falsa. En la siguiente figura se tiene: en el gráfico de la izquierda, a partir de $x = 3$ se tiene que $f(x) \leq 8$; en el gráfico del centro a partir de $x = 3$ se tiene que $f(x) \geq 8$ y en el gráfico de la derecha a partir de $x = 3$ se tiene que la función oscila alrededor de 8

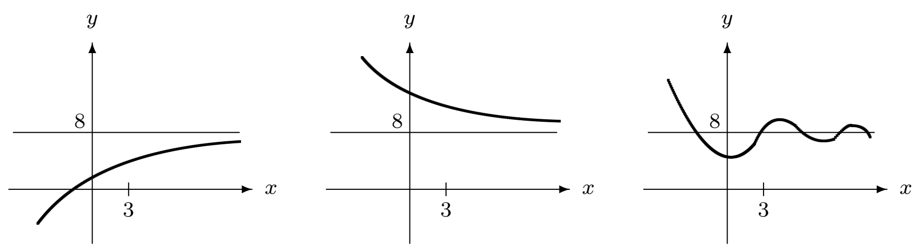


Figura 4.2.

Cálculo de un límite a menos infinito

22. Selección única: ¿Cuál es el valor de

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}?$$

(a) 0 (b) -4 (c) $1/4$ (d) $-1/4$

Solución:

Tenemos

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+4/x)}}{x(4+1/x)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+4/x}}{x(4+1/x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+4/x}}{x(4+1/x)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+4/x}}{4+1/x}=-\frac{1}{4}.$$

(Puesto que cuando $x\to-\infty$ se tiene que tanto $\dfrac{1}{x}$ como $\dfrac{4}{x}$ tienden a 0).

La opción correcta es (d).

La raíz cuadrada de un cuadrado

Aprovechamos este ejercicio para observar un asunto muy importante y que muchas veces se pasa por alto: debemos recordar que $\sqrt{x^2}=|x|$. Esto significa que en caso de que x sea positivo o 0 se tiene $\sqrt{x^2}=x$, pero si x es negativo se tiene $\sqrt{x^2}=-x$. Si no tomamos esto en cuenta en el ejercicio anterior obtenemos el resultado incorrecto $1/4$.

Límite lateral con valor absoluto

33. Calcular

$$\lim_{x\to1^+}\frac{|x-1|+2}{x-1}.$$

Solución:

Para efectos de calcular este límite debemos tener presente que para valores de x mayores que 1 se tiene que $x-1>0$ y por lo tanto $|x-1|=x-1$. De modo que

$$\lim_{x\to1^+}\frac{|x-1|+2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1+2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x+1}{x-1}.$$

Si evaluamos en 1 obtenemos un límite indeterminado de la forma $\frac{2}{0}$ que es infinito. Como se tiene, para $x > 1$, que $x + 1 > 0$ y $x - 1 > 0$ entonces el límite es $+\infty$.

Aproximación del área bajo una curva

56. Considere la función $f(x) = 16 - x^2$ definida sobre el intervalo $[0, 4]$. Dibuje el área bajo esa curva. Dé una aproximación del área:
(a) Usando cuatro rectángulos de igual base (dibuje la situación).
(b) Utilizando ocho rectángulos de igual base (dibuje la situación).

Solución:

(a) El siguiente dibujo representa la situación:

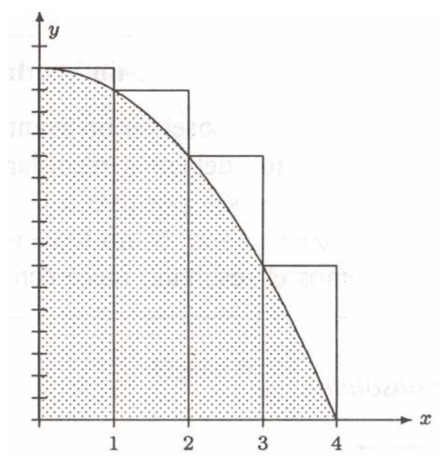


Figura 4.3.

La aproximación viene dada por la suma de las áreas de los cuatro rectángulos R_1, R_2, R_3 y R_4 (contados de izquierda a derecha en el dibujo). Como son de la misma base y la longitud del intervalo es 4 entonces cada rectángulo tiene base 1. La altura del primer rectángulo es $f(0) = 16$, la del rectángulo R_2 es $f(1) = 15$, la de R_3 es $f(2) = 12$ y la de R_4 es $f(3) = 7$.

Se obtiene entonces que

$$a(R_1) = 1 \cdot 16 = 16$$

$$\begin{aligned} a(R_2) &= 1 \cdot 15 = 15 \\ a(R_3) &= 1 \cdot 12 = 12 \\ a(R_4) &= 1 \cdot 7 = 7 \end{aligned}$$

Luego, una aproximación del área es $A \approx 16 + 15 + 12 + 7 = 50$.

(b) El siguiente dibujo representa la situación:

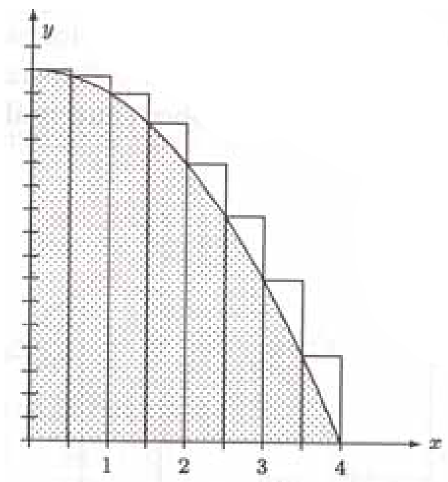


Figura 4.4.

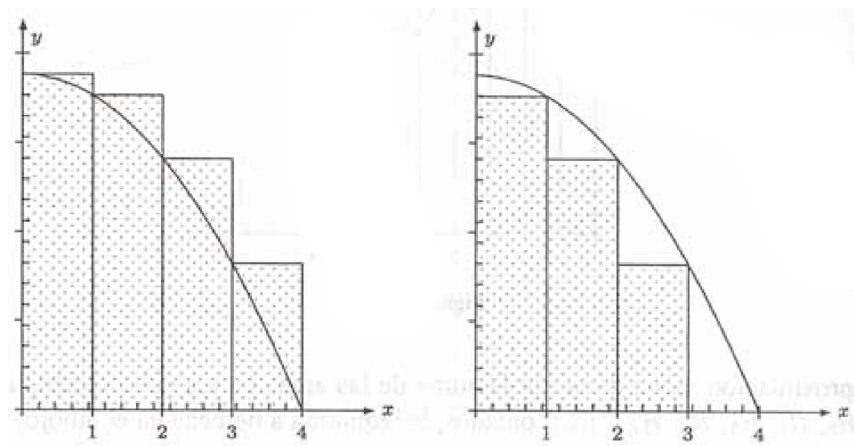
La aproximación viene dada por la suma de las áreas de los ocho rectángulos R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7 y R_8 (contados de izquierda a derecha en el dibujo). Como son de la misma base y la longitud del intervalo es 4 entonces cada rectángulo tiene base $0,5$. La altura del primer rectángulo es $f(0) = 16$, la de R_2 es $f(0,5) = 15,75$, la de R_3 es $f(1) = 15$, la de R_4 es $f(1,5) = 13,75$, la de R_5 es $f(2) = 12$, la de R_6 es $f(2,5) = 9,75$, la de R_7 es $f(3) = 7$ y la de R_8 es $f(3,5) = 3,75$.

Luego, una aproximación del área es

$$A \approx 0,5(16 + 15,75 + 15 + 13,75 + 12 + 9,75 + 7 + 3,75) = 46,50.$$

Aproximación del área: por exceso y por defecto

En este ejercicio, en ambos casos se tiene una aproximación por exceso puesto que tomamos rectángulos cuya suma excede el área por calcular. En ambas situaciones podríamos también considerar aproximaciones por defecto si tomamos como altura de los rectángulos las imágenes de los extremos inferiores de los subintervalos, en lugar de tomar como alturas las imágenes de los extremos superiores de los subintervalos. Cualquier área bajo una curva podría ser estimada considerando áreas por exceso y por defecto, lo que nos permitiría saber entre cuáles valores se encuentra el valor del área.



Por exceso

Por defecto

Figura 4.5.

El área bajo una curva como un límite

57. Exprese el área considerada en el ejemplo anterior como un límite y calcúlelo.

Solución:

Si consideramos el intervalo $[0, 4]$ dividido en n subintervalos iguales entonces tenemos que cada uno de ellos tiene como longitud $\frac{4}{n}$. Los subintervalos son: el primero: $[0, \frac{4}{n}]$, el segundo: $[\frac{4}{n}, \frac{8}{n}]$, ..., el i–ésimo: $[\frac{4(i-1)}{n}, \frac{4i}{n}]$, ... y el último: $[\frac{4(n-1)}{n}, 4]$.

Tomando como altura la imagen del extremo superior de cada subintervalo entonces, la altura del i–ésimo intervalo es

$$f(\frac{4i}{n}) = 16 - \left(\frac{4i}{n}\right)^2,$$

de este modo, la aproximación del área, usando n subintervalos de igual longitud, es

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n}\left[16 - \left(\frac{4i}{n}\right)^2\right] = \frac{4}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 16 - \sum_{i=1}^{n} \frac{16i^2}{n^2}\right] =$$

$$\frac{4}{n}\left[16n - \frac{16n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right] = \frac{4}{n}\left[16n - \frac{16(2n^3+3n^2+n)}{6n^2}\right].$$

Por lo tanto el área se calcula mediante

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n}\left[16n - \frac{16(2n^3+3n^2+n)}{6n^2}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[64 - \frac{64}{3} - \frac{32}{n} - \frac{32}{3n^2}\right] = \frac{128}{3}.$$

Un límite al infinito con un radical

59. Considere $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 8} - x$.

(a) Complete la siguiente tabla:

x	10	50	100	1000
$f(x)$				

(b) Tomando como base los resultados obtenidos en (a) dé un estimado de $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2 + 2x + 8} - x)$.

(c) El resultado en (b) se puede obtener algebraicamente. Hágalo.

Sugerencia:

$$\sqrt{x^2+2x+8}-x=\frac{(\sqrt{x^2+2x+8}-x)(\sqrt{x^2+2x+8}+x)}{\sqrt{x^2+2x+8}+x}$$

Solución:

(a) Utilizando una calculadora se obtienen las imágenes y la tabla queda de la siguiente manera (solamente hemos conservado cuatro cifras decimales):

x	10	50	100	1000
$f(x)$	$1,3137$	$1,0685$	$1,0346$	$1,0034$

(b) De acuerdo con la tabla podemos estimar que el límite es 1.

(c) Observe que el límite tal como está escrito es una forma indeterminada $\infty-\infty$; si queremos calcularlo analíticamente debemos realizar algún tipo de transformación algebraica. La idea de la sugerencia que se nos presenta es la de racionalizar la expresión con el fin de evitar la forma ideterminada antes mencionada. Procedemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}[\sqrt{x^2+2x+8}-x] &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x+8}-x)(\sqrt{x^2+2x+8}+x)}{\sqrt{x^2+2x+8}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2x+8}{\sqrt{x^2+2x+8}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x(2+8/x)}{x[\sqrt{1+2/x+8/x^2}+1]}=1.\end{aligned}$$

Tablas de valores y límites

Como hemos dicho antes, el valor que podemos obtener a partir de una tabla solo es un estimado "provisional", esto es, en general no podemos tener certeza de que el límite que obtenemos con solo ver valores en una tabla sea realmente el límite que deseamos calcular. Para tener seguridad del valor de un límite se deben utilizar técnicas de transformación u otras que den validez al resultado obtenido.

Capítulo 5

LA DERIVADA

EJERCICIOS RESUELTOS

Desigualdad de funciones y derivada

6. Falso o verdadero: Si f y g son funciones derivables tales que $f(x) > g(x)$ para todo x entonces $f'(x) > g'(x)$ para todo x.

Solución:

La afirmación es evidentemente falsa. Basta considerar por ejemplo las siguientes funciones: $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = x^2$. Es claro que $f(x) > g(x)$, sin embargo, $f'(x) = 2x$ y $g'(x) = 2x$, es decir $f'(x) = g'(x)$, en contra de lo que establece el enunciado.

Puntos de no derivabilidad

16. Selección única: ¿En que valores de x no es derivable la siguiente función?

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 + x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ |x+1| - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(a) Solo en -1 y 1 (b) En -1, 1 y 0

(c) Solo en -1 y 0 (d) Solo en 1 y 0

Solución:

Primero debemos considerar los puntos donde la función cambia de criterio, esto es $x = 1$ y $x = 0$.

Para $x = 1$: la derivada por la derecha es -1, mientras que la derivada por la izquierda es 3 (se deriva $x^2 + x$ y se evalúa en 1). Puesto que ambas derivadas difieren se tiene que f no es derivable en 1.

Para $x = 0$: la derivada por la derecha es 1. Para la derivada por la izquierda debemos ver que si x es menor que 0 y "muy cercano" a 0 entonces $|x+1|-1 = x + 1 - 1 = x$ y la derivada es 1. Tenemos entonces que por ambos lados la derivada es 1 y entonces f sí es derivable en 0.

Existe otro punto de no derivabilidad: $x = -1$ puesto que $|x + 1| - 1$ no es derivable en $x = -1$ (forma un "pico").

Los puntos donde la función no es derivable son $x = 1$ y $x = -1$, de modo que la opción correcta es (a).

Derivabilidad de las funciones definidas por partes

Una particularidad de este ejercicio es que podemos ver que, si bien es cierto para la mayoría de las funciones definidas "por partes" los puntos donde cambia el criterio corresponden a puntos donde la derivada no existe, no podemos hacer de esto una regla general; la función f del ejemplo es derivable en el punto $x = 0$ aunque en él hay cambio de criterio para f.

Derivabilidad en un punto

18. Selección única: Si f es una función derivable en $x=3$ y $f'(3)=2$, entonces podemos afirmar que:

(a) $\lim\limits_{r\to 3}\dfrac{f(r)-9}{r-3}=2$ (b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$

(c) $\lim\limits_{r\to 2}\dfrac{f(r)-f(2)}{r-2}=3$ (d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

Solución:

La afirmación $f'(3)=2$ significa que

$$\lim_{r\to 3}\frac{f(r)-f(3)}{r-3}=2.$$

Esto elimina (a) como opción correcta pues estaríamos considerando que $f(3)=9$ lo cual no es necesariamente válido pues no conocemos la función.

La afirmación: f es derivable en $x=3$ significa, entre otras cosas, que f es continua en 3 y por lo tanto

$$\lim_{x\to 3} f(x)=f(3) \qquad (*).$$

Según esto, la opción (b) es incorrecta pues estaríamos suponiendo que $f(3)=2$, de lo cual no podemos estar seguros.

La opción (c) es incorrecta puesto que la información brindada por el enunciado no nos permite decir nada sobre ese límite.

La opción (d) es la correcta según lo indicado en (*).

Las preguntas de selección única

Podemos considerar dos tipos básicos de preguntas de selección única. En algunos casos se trata de realizar algún tipo de cálculo y comparar el resultado obtenido con las opciones brindadas. En otras ocasiones se dan afirmaciones en el enunciado que nos permiten obtener cierto tipo de información, especialmente de tipo cualitativo, y luego con base en esa información se analizan las diferentes opciones. Este segundo tipo es usualmente más interesante y por lo general requiere de un buen conocimiento de los aspectos teóricos del tema.

Aproximación de la derivada en un punto

21. Para cierta función diferenciable f sabemos que $f(1,03) = 3,85$ y $f(1,05) = 3,82$. Dé un valor estimado razonable de $f'(1,03)$; justifique su respuesta.

Solución:

De acuerdo con la definición de derivada en un punto se tiene

$$f'(1,03) = \lim_{x \to 1,03} \frac{f(x) - f(1,03)}{x - 1,03}.$$

Según la definición de límite, esto significa que para valores de x suficientemente cercanos a $1,05$, el valor de la expresión

$$\frac{f(x) - f(1,03)}{x - 1,03} \qquad (*)$$

es aproximadamente igual a $f'(1,03)$. De manera que si evaluamos la expresión (*) en $1,05$ obtenemos una aproximación razonable de esta derivada, es decir,

$$f'(1,05) \approx \frac{f(1,05) - f(1,03)}{1,05 - 1,03} = \frac{3,82 - 3,85}{1,05 - 1,03} = \frac{-0,03}{0,02} = -1,5.$$

Aproximación de la derivada en un punto

34. En cada una de estas figuras se representa la gráfica de una función f. Utilice en cada caso la información dada en el dibujo para calcular de modo aproximado el valor de $f'(1)$ (sugerencia: calcule la pendiente de la recta dada en el dibujo).

(a)

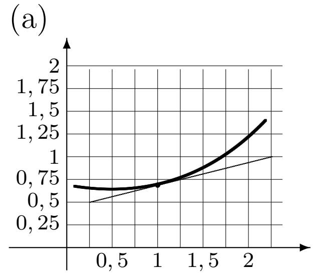


Figura 5.1.

(b)

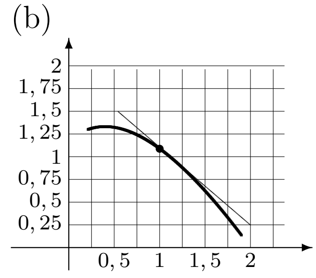


Figura 5.2.

Solución:

(a) Recordemos que la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado es igual a la derivada de la función en ese punto, de modo que para calcular la derivada podemos calcular la pendiente de la recta tangente. Observando la gráfica vemos que la tangente contiene los puntos $(0,25,\ 0,5)$ y $(2,25,\ 1)$, de manera que su pendiente es

$$\frac{1-0,5}{2,25-0,25}=\frac{0,5}{2}=0,25.$$

Podemos decir entonces que

$$f'(1)=0,25.$$

(b) Para proceder como en la parte (a) prolongamos la recta tangente y vemos que ella contiene los puntos $(0,\ 2)$ y $(2,\ 0,25)$, por lo tanto

$$f'(1)=\frac{0,25-2}{2-0}=\frac{-1,75}{2}=-0,875.$$

Cálculo de la velocidad instantánea

72. Un objeto se mueve en línea recta de manera que a los t seg. se encuentra a $d(t)=\sqrt{t^2+4}$ metros del origen. Determine su velocidad a los 4 seg.

Solución:

Solamente debemos recordar aquí que una de las interpretaciones de la derivada es que representa la velocidad instantánea en un momento dado. De manera que en este caso la velocidad a los 4 segundos es $d'(4)$.

Tenemos

$$d'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}$$

y por lo tanto la velocidad es

$$d'(4)=\frac{4}{\sqrt{4^2+4}}=\frac{4}{\sqrt{20}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\ m/seg.$$

Cálculo de la recta tangente

74. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x^2+1}$ en el punto $(2, \frac{1}{5})$.

Solución:

Según dijimos antes, la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado es igual a la derivada de la función correspondiente evaluada en ese punto. En este caso tenemos

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

de manera que la pendiente de la recta tangente $y = mx + b$ es

$$m = y'(2) = \frac{(-2)(2)}{(2^2+1)^2} = \frac{-4}{25}.$$

(evaluamos en 2 puesto que el punto de tangencia es $(2, \frac{1}{5})$).

Por otro lado tenemos que

$$b = \frac{1}{5} - \frac{-4}{25} \cdot 2 = \frac{1}{5} + \frac{8}{25} = \frac{13}{25}.$$

La ecuación de la recta tangente es

$$y = \frac{-4}{25}x + \frac{13}{25}.$$

Cálculo de la recta tangente y de la recta normal

76. Determine la ecuación de la recta tangente y la de la recta normal a la curva $y = x^3 + 2x - 1$ en el punto $(1, 2)$.

Solución:

Calculamos la ecuación de la recta tangente de modo análogo al ejercicio 74. Tenemos $y' = 3x^2 + 2$ y por lo tanto $m = y'(1) = 5$. Por otro lado, utilizamos el punto $(1,2)$ para calcular la intersección: $b = 2 - 5 \cdot 1 = -3$ y entonces la ecuación de la recta tangente es

$$y = 5x - 3.$$

Recordemos ahora que la recta normal a una curva en un punto dado es la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto. Como la pendiente de la recta tangente es 5 entonces la pendiente de la recta normal es $\frac{-1}{5}$. La intersección de esa recta se calcula usando el mismo punto $(1,2)$ y es igual a $2 - \frac{-1}{5} \cdot 1 = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$. La ecuación de la recta normal es

$$y = \frac{-1}{5}x + \frac{11}{5}.$$

Las pendientes de dos rectas perpendiculares

Un recordatorio: si dos rectas oblicuas son mutuamente perpendiculares (esto es: se cortan formando ángulo recto) entonces el producto de sus pendientes es igual a -1. Así, si la pendiente de una de ellas es m, la pendiente de la otra es $\frac{-1}{m}$.

Cálculo de la recta tangente y de la recta normal

78. Determine la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la curva $x^3y^3 - 4xy + y^4 = 1$ en el punto $(2,1)$.

Solución:

Este ejercicio pide lo mismo que el ejercicio 76, pero tiene la particularidad de que la función y aparece dada implícitamente, de manera que al calcular la derivada utilizamos el método de derivación implícita. Para calcular y' derivamos a ambos lados la ecuación dada

$$x^3y^3 - 4xy + y^4 = 1$$

considerando a y como función implícita de x. Tenemos entonces:

$$3x^2y^3 + 3x^3y^2y' - 4(y + xy') + 4y^3y' = 0$$

y de aquí despejamos y':

$$y' = \frac{4y - 3x^2y^3}{3x^3y^2 - 4x + 4y^3}.$$

La pendiente de la recta tangente $y = mx + b$ se obtiene evaluando y' en el punto $(2, 1)$, entonces

$$m = \frac{4 \cdot 1 - 3 \cdot 2^2 \cdot 1^3}{3 \cdot 2^3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1^3} = \frac{-8}{20} = \frac{-2}{5},$$

mientras tanto $b = 1 - \frac{-2}{5} \cdot 2 = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$. La ecuación de la recta tangente es

$$y = \frac{-2}{5}x + \frac{9}{5}.$$

De acuerdo con lo anterior la pendiente de la recta normal es $\frac{5}{2}$ y su intersección es $1 - \frac{5}{2} \cdot 2 = -4$. La ecuación de la recta normal es

$$y = \frac{5}{2}x - 4.$$

Rectas tangentes paralelas

80. Una recta L_1 es tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 + x^2 - x$ en el punto $(1, 1)$. Otra recta L_2 es tangente a la misma curva en el punto $(c, f(c))$. ¿Cuál debe ser el valor de c para que las rectas L_1 y L_2 sean paralelas?

Solución:

Recordemos que las dos rectas L_1 y L_2 son paralelas si ambas tienen la misma pendiente. Calculamos primero las pendientes de estas rectas; para ello derivamos la función f:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1.$$

Para L_1: la pendiente m_1 de L_1 es $m_1 = f'(1) = 4$.

Para L_2: la pendiente m_2 de L_2 es $m_2 = f'(c) = 3c^2 + 2c - 1$.

Tenemos entonces que

$$4 = 3c^2 + 2c - 1$$

y resolvemos esta ecuación:

$$\begin{aligned} 3c^2 + 2c - 5 &= 0 \quad \Rightarrow \\ (3c+5)(c-1) &= 0 \quad \Rightarrow \\ c = \frac{-5}{3}, &\qquad c = 1 \end{aligned}$$

Tangentes a una parábola

81. Existen dos puntos de la parábola $y = 2x^2 + x - 1$ para los cuales se tiene que la pendiente de la recta tangente es igual a la ordenada del punto. ¿Cuáles son esos puntos?

Solución:

Supongamos que $(c, f(c))$ es un punto con las condiciones que enuncia el ejercicio. Como $y' = 4x + 1$ entonces la pendiente de la recta tangente en $(c, f(c))$ es $m = 4c + 1$. La ordenada del punto es $f(c) = 2c^2 + c - 1$. El ejercicio dice que la pendiente y la ordenada deben ser iguales, esto es:

$$4c + 1 = 2c^2 + c - 1$$

y por lo tanto

$$2c^2 - 3c - 2 = 0,$$

es decir $c = \frac{-1}{2}$ ó $c = 2$. Los puntos que satisfacen las condiciones del ejercicio son $(\frac{-1}{2}, y(\frac{-1}{2})) = (\frac{-1}{2}, -1)$ y $(2, y(2)) = (2, 9)$.

Determinar el punto de tangencia

82. La recta de ecuación $y = \frac{9}{4}x - 3$ es tangente a la curva $f(x) = 2x + \sqrt{x}$. Determine el punto de tangencia (esto es, de acuerdo con la figura, se trata de calcular $(a, f(a))$).

Solución:

Nuevamente utilizamos el hecho de que la pendiente de la recta tangente es igual a la derivada en el punto de tangencia. Tenemos

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

y por lo tanto la pendiente m es $f'(a)$:

$$m = f'(a) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

La ecuación de la recta tangente nos dice que la pendiente es $\frac{9}{4}$, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{9}{4} &= 2 + \frac{1}{2\sqrt{a}} && \Rightarrow \\
\frac{1}{4} &= \frac{1}{2\sqrt{a}} && \Rightarrow \\
\frac{1}{2} &= \frac{1}{\sqrt{a}} && \Rightarrow \\
\left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}})\right)^2 && \Rightarrow \\
\frac{1}{4} &= \frac{1}{a} && \Rightarrow \\
a &= 4.
\end{aligned}$$

El punto de tangencia es entonces $(4, f(4)) = (4, 6)$.

Problemas sobre rectas tangentes

Observe que en muchos de estos ejercicios en los que se dan condiciones sobre rectas tangentes, de lo que se trata es de establecer una ecuación. Para ello usualmente se calcula la pendiente de la recta tangente de dos maneras diferentes y luego se igualan para obtener la ecuación.

Una tangente que no existe

84. Pruebe que no existe ninguna recta tangente a $f(x) = x^3 + 2x^2$ cuya pendiente sea igual a -2.

Solución:

En caso de existir una recta tangente a $f(x) = x^3 + 2x^2$ cuya pendiente fuese -2, se tendría que para algún valor de x:

$$f'(x) = -2, \qquad (*)$$

es decir,

$$3x^2 + 4x = -2$$

o, de modo equivalente,

$$3x^2 + 4x + 2 = 0.$$

Pero el discriminante de esta ecuación cuadrática es

$$\Delta = 16 - 24 = -8.$$

Como Δ es negativo, la ecuación no tiene soluciones en $\mathbb{R}$ y por lo tanto nigún valor de x satisface (*), es decir no hay ninguna tangente a la curva que tenga pendiente -2.

Rectas tangentes perpendiculares

85. Una recta L_1 es tangente a la curva $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$. Otra recta L_2 es tangente a la misma curva en el punto (c, c^2). ¿Cuál debe ser el valor de c para que las rectas L_1 y L_2 sean perpendiculares?

Solución:

Tenemos que $y' = 2x$, la pendiente m_1 de la recta L_1 es esta derivada evaluada en 1, es decir, $m_1 = 2$. La pendiente m_2 de la recta L_2 es la misma derivada evaluada en c, es decir, $m_2 = 2c$.

Para que ambas rectas sean perpendiculares debe cumplirse la condición de que el producto de sus pendientes sea igual a -1, en este caso:

$$2 \cdot 2c = -1$$

y por lo tanto

$$c = \frac{-1}{4}.$$

La derivada para resolver un problema geométrico

86. La curva de la figura corresponde a la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$. La recta L es tangente a la curva en el punto P. Pruebe que no importa cuál sea el punto P siempre se tiene que el área del triángulo AOB es igual a 2.

Solución:

Debemos calcular el área del triángulo AOB, para ello primero debemos saber qué punto es A y qué punto es B. Para esto tenemos que calcular la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto P.

Digamos que $P = (a, \frac{1}{a})$; como la recta L es tangente a la curva en P y como $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ entonces la pendiente de L es

$$m = \frac{-1}{a^2}.$$

La intersección de L con el eje y es

$$b = \frac{1}{a} - \frac{-1}{a^2} \cdot a = \frac{2}{a},$$

de modo que la ecuación de L es

$$y = \frac{-1}{a^2}x + \frac{2}{a}.$$

El punto A es la intersección de L con el eje y es decir

$$A = \left(0, \frac{2}{a}\right),$$

El punto B es la intersección de L con el eje x, de manera que tenemos que resolver la ecuación

$$\frac{-1}{a^2}x + \frac{2}{a} = 0,$$

de donde se obtiene

$$x = 2a,$$

es decir $B = (2a, 0)$.

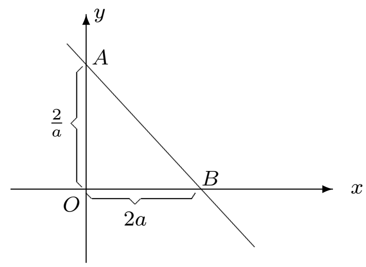


Figura 5.3.

De lo anterior se deduce que el área del triángulo AOB es

$$\frac{2a \cdot \frac{2}{a}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

tal como queríamos probar.

Capítulo 6

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y EL CÁLCULO

EJERCICIOS RESUELTOS

Límite de funciones trigonométricas

6. Selección única: Del límite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos 2x}$ podemos afirmar que

(a) No existe (b) Es igual a 0

(c) Es igual a 1 (d) Es igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solución:

Sabemos que $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, por lo tanto

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x + \operatorname{sen} x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La opción correcta es (d).

Derivadas de las funciones trigonométricas

Para utilizar en algunos de los ejercicios siguientes recordemos las derivadas de las funciones trigonométricas:

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\operatorname{sen} x, \quad (\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc x, \quad (\sec x)' = \sec x \tan x, \quad (\csc x)' = -\csc x \cot x.$$

Derivada de funciones trigonométricas

9. Selección única: Si $f(x) = \operatorname{sen}^2(2x)$ entonces $f'(\pi/6)$ es igual a

(a) 1 (b) $\sqrt{3}$ (c) 1/4 (d) $\sqrt{3}/2$

Solución:

Utilizando la regla de la cadena tenemos que

$$f'(x) = 2 \cdot \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 4 \operatorname{sen} 2x \cos 2x.$$

Evaluando en $\pi/6$ se obtiene:

$$f'(\pi/6) = 4 \operatorname{sen}(\pi/3) \cos(\pi/3) = 4(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2}) = \sqrt{3}.$$

La opción correcta es (b).

La regla de la cadena

Cuando se trata de derivar una composición de funciones se utiliza la propiedad de las derivadas llamada *regla de la cadena*: si f y g son funciones derivables entonces $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (se deriva la función "de afuera" y se evalúa en la "de adentro" y luego se multiplica por la derivada de la de adentro.

Seno de una suma

13. Falso o verdadero: $\operatorname{sen}(30^o + \theta) = \frac{1}{2} + \operatorname{sen}\theta$ para todo θ.

Solución:

En este ejercicio se trata de utilizar la fórmula del seno de una suma:

$$\operatorname{sen}(30^o + \theta) = \operatorname{sen} 30^o \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos 30^o = \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta.$$

De acuerdo con esto, la afirmación es falsa.

Observe que en este caso tal como está propuesta la igualdad en el enunciado se afirma que el seno de una suma es la suma de los senos, error bastante frecuente en el uso de las identidades trigonométricas.

Límite de funciones trigonométricas

42. Calcular el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - 2x^2 - 2\cos x + \cos^2 x}{3x^2}$$

Solución:

Observe en primer lugar que si evaluamos directamente obtenemos un límite indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$. Se trata entonces aquí de transformar la función para reducirla a límites conocidos. Tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - 2x^2 - 2\cos x + \cos^2 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\cos x + \cos^2 x - 2x^2}{3x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2 - 2x^2}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{3x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{3x^2} = 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$$

Dos límites importantes

Recordemos aquí dos límites de suma importancia cuando se trata de las funciones trigonométricas:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

Cálculo de la derivada usando la definición

44. Utilice la definición de derivada para calcular la primera derivada de $f(x) = \operatorname{sen} 4x$.

Solución:

Recordemos que la derivada de $f(x)$ es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

En el caso particular de la función dada tenemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x + 4h) - \operatorname{sen} 4x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x \cos 4h + \operatorname{sen} 4h \cos 4x - \operatorname{sen} 4x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x(\cos 4h - 1) + \cos 4x \operatorname{sen} 4h}{h} \\
&= (\operatorname{sen} 4x) \lim_{h \to 0} \frac{\cos 4h - 1}{h} + (\cos 4x) \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} 4h}{h} \\
&= \operatorname{sen} 4x \cdot 0 + \cos 4x \cdot 4 \\
&= 4 \cos 4x.
\end{aligned}$$

Derivación implícita

62. Calcular y' en $x^2 y - \operatorname{sen}(xy) = 5$.

Solución:

Aquí se trata simplemente de utilizar el método de derivación implícita. Derivando a ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$2xy + x^2 y' - (\cos xy)(y + xy') = 0,$$

y despejando y' se tiene:

$$y' = \frac{y\cos xy - 2xy}{x^2 - x\cos xy}$$

Uso del Teorema de Intercalación

65. Suponga que K es un número real no negativo y que f es una función tal que $0 \leq f(x) \leq K$ para todo x. Pruebe que

$$\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$$

(use el teorema de intercalación).

Solución:

Recuerde que el teorema de intercalación dice que si en un intervalo abierto que contiene a c se tiene que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x en el intervalo (salvo tal vez para c) y si $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$ entonces también se tiene que $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Aquí nos están dando una función que cumple la condición $0 \leq f(x) \leq K$, para algún valor constante K. De esto se deduce (multiplicando por x^2) que

$$0 \leq x^2 f(x) \leq x^2 K.$$

Tenemos que $\lim_{x\to 0} 0 = 0$ y también $\lim_{x\to 0} x^2 K = 0$, por lo tanto, de acuerdo con el teorema de intercalación, obligatoriamente también

$$\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0.$$

Uso de la recta tangente para un cálculo geométrico

66. La figura representa la gráfica de la función $f(x) = \tan x$ en el intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La recta L es tangente a la curva en el punto $(c, \tan c)$. Pruebe que el área del triángulo PQR es igual a $\dfrac{\pi^2}{8}\sec^2 c$

Solución:

Para determinar el área del triángulo debemos conocer cuáles son sus vértices y así determinar cuál es su base y cuál su altura. Para ello primero obtenemos la ecuación $y = mx + b$, de la recta L.

Como L es tangente a la gráfica de la función entonces su pendiente es igual a la derivada de la función evaluada en el punto de tangencia. Tenemos $f'(x) = \sec^2 x$, por lo tanto la pendiente es $m = \sec^2 c$. La intersección b se calcula mediante $b = \tan c - c\sec^2 c$. La ecuación de L es

$$y = (\sec^2 c)x + \tan c - c\sec^2 c. \qquad (*)$$

El punto P es el punto de intersección de L con el eje y, es decir $P = (0, \tan c - c\sec^2 c)$. El punto Q es entonces $Q = (\pi/2, \tan c - c\sec^2 c)$. El punto R es la intersección de L con la recta $x = \pi/2$, entonces para conocer el valor de la ordenada de R evaluamos la ecuación (*) de la recta L en $x = \pi/2$:

$$y = (\sec^2 c)(\pi/2) + \tan c - c\sec^2 c.$$

Así, $R = (\pi/2, (\sec^2 c)(\pi/2) + \tan c - c\sec^2 c)$.

La base del triángulo es la distancia entre los puntos P y Q, es decir la base es $\pi/2 - 0 = \pi/2$. La altura del triángulo es la distancia entre los puntos Q y R, es decir: $(\sec^2 c)(\pi/2) + \tan c - c\sec^2 c - (\tan c - c\sec^2 c) = (\pi/2)\sec^2 c$.

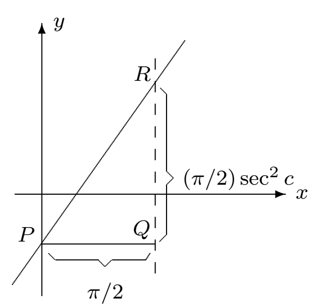


Figura 6.1.

De lo anterior tenemos que el área del triángulo es

$$\frac{(\pi/2)(\pi/2)\sec^2 c}{2} = \frac{\pi}{8}\sec^2 c.$$

Cálculo de la recta tangente y de la recta normal

68. Determine la ecuación de la recta normal y la ecuación de la recta tangente a la curva dada por $y = 2\operatorname{sen} x + \tan x$ en el punto $(0, 0)$.

Solución:

Para conocer la pendiente de la recta tangente derivamos la función y evaluamos en 0. Tenemos $y' = 2\cos x + \sec^2 x$ y evaluando en 0 obtenemos la pendiente m de la recta tangente: $m = 2\cos 0 + \sec^2 0 = 3$. Como la recta pasa por $(0, 0)$, entonces su intersección es 0. La ecuación de la recta tangente es

$$y = 3x.$$

La recta normal es perpendicular a la tangente, por lo tanto la pendiente de la normal es $\frac{-1}{3}$. Esta recta también pasa por $(0, 0)$ y entonces su intersección es 0. La ecuación de la recta normal es

$$y = -\frac{1}{3}x.$$

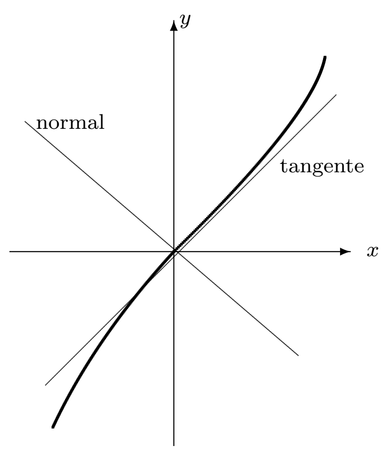
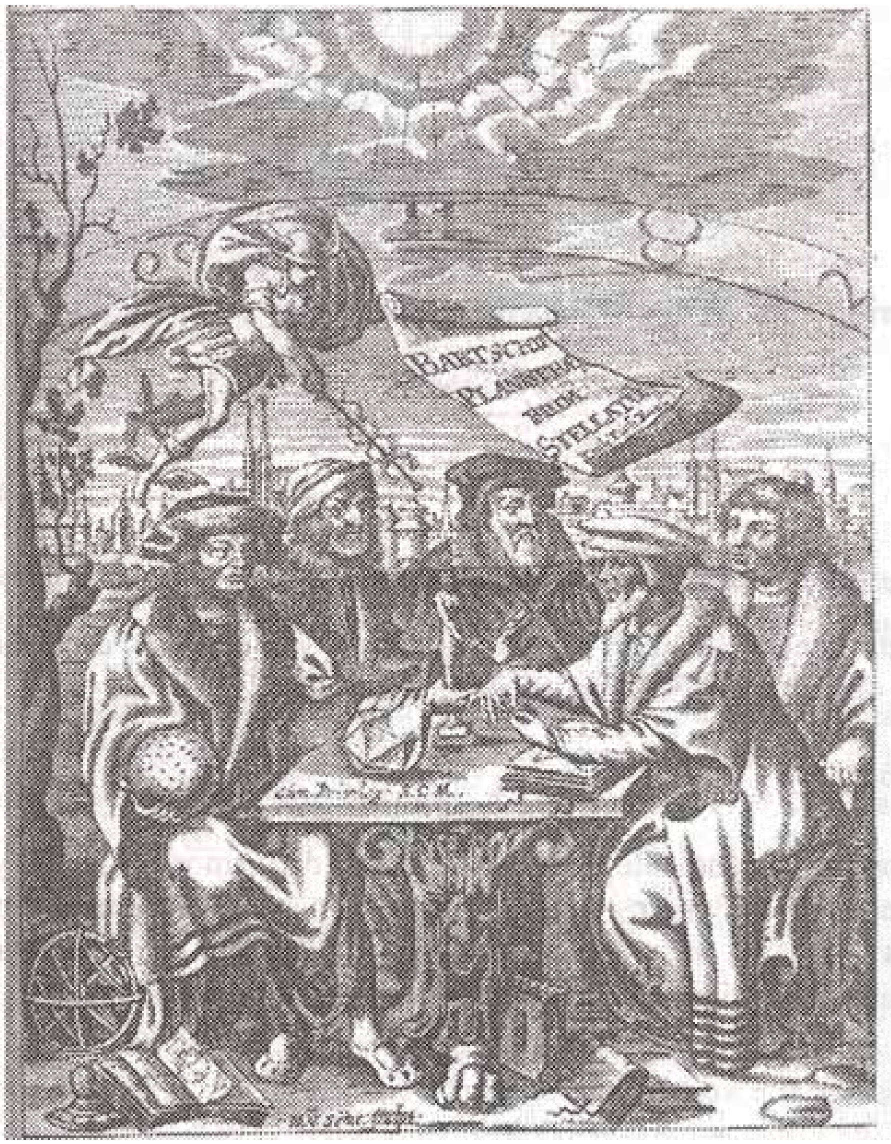


Figura 6.2.



Detalle de una ilustración del planisférico hecho por el astrónomo Jacobi Bartsch (1599–1632), publicado en 1611.

Capítulo 7

LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES Y EL CÁLCULO

EJERCICIOS RESUELTOS

Derivada de funciones logarítmicas y exponenciales

9. Selección única: Si a es mayor que 1, $f(x) = a^x$ y $g(x) = \ln x$ entonces para todo x en el dominio de ambas funciones se tiene

(a) $f'(x) > 0$ y $g'(x) < 0$ (b) $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$

(c) $f'(x) < 0$ y $g'(x) < 0$ (d) $f'(x) < 0$ y $g'(x) > 0$

Solución:

En primer lugar debemos observar que x tiene que ser positivo para que tenga sentido $\ln x$. Tenemos $f'(x) = a^x \ln a$ y $g'(x) = \frac{1}{x}$. Puesto que $x > 0$ se tiene que $\frac{1}{x} > 0$. Como $a > 1$ entonces $\ln a > 0$ y por lo tanto $a^x \ln a > 0$. Esto es, ambas derivadas son positivas. La opción correcta es (b).

Límite de funciones exponenciales

24. Calcule el límite
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Solución:

La idea es transformar la función para utilizar el valor conocido:
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Tenemos
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{3}x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Ahora realizamos un cambio de variable $h=\frac{1}{3}x$. Cuando x tiende 0 entonces h también tiende a 0 y además $\frac{1}{x}=\frac{1}{3h}$. Sustituyendo todo esto tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{3}x\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{3h}}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^{1/3}\\ &= \left[\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^{1/3}\\ &= e^{1/3}.\end{aligned}$$

Cambio de variable

El método de cambio de variable que utilizamos en el cálculo de este límite constituye un buena herramienta en el cálculo de algunos límites. También se utilizan cambios de variable en otros tipos de cálculos, tales como en la integración. Observe que es fundamental que el cambio sea completo. Es decir, en todo lugar donde aparece la variable original debe escribirse la expresión correspondiente que involucra la nueva variable (no se pueden hacer cambios parciales).

Uso de la derivación logarítmica

42. Utilizar derivación logarítmica para calcular la derivada de

$$g(x) = \frac{(x+3)\sqrt{2x+1}}{(x-3)\sqrt[3]{2x-1}}$$

Solución:

Recordemos que el método de derivación logarítmica consiste en aplicar logaritmo a la función con el objeto de utilizar sus propiedades para simplificar el cálculo de la derivada. En este caso procedemos así:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{(x+3)\sqrt{2x+1}}{(x-3)\sqrt[3]{2x-1}} && \Rightarrow \\
\ln g(x) &= \ln \frac{(x+3)\sqrt{2x+1}}{(x-3)\sqrt[3]{2x-1}} && \Rightarrow \\
\ln g(x) &= \ln(x+3) + \frac{1}{2}\ln(2x+1) - \ln(x-3) - \frac{1}{3}\ln(2x-1) && \Rightarrow \\
\frac{g'(x)}{g(x)} &= \frac{1}{x+3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2x-1} && \Rightarrow \\
g'(x) &= g(x)\left[\frac{1}{x+3} + \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{x-3} - \frac{2}{6x-3}\right] && \Rightarrow \\
g'(x) &= \frac{(x+3)\sqrt{2x+1}}{(x-3)\sqrt[3]{2x-1}}\left[\frac{1}{x+3} + \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{x-3} - \frac{2}{6x-3}\right].
\end{aligned}$$

Uso de la derivación logarítmica

45. Utilizar derivación logarítmica para calcular la derivada de $g(t) = t^2 t^{3t}$.

Solución:

Como en el ejemplo previo, aplicamos ln a la función con el objeto de simplificarla:

$$\begin{aligned}
g(t) &= t^2 t^{3t} && \Rightarrow \\
\ln g(t) &= \ln t^2 t^{3t} && \Rightarrow \\
g(t) &= 2\ln t + 3t\ln t && \Rightarrow \\
\frac{g'(t)}{g(t)} &= \frac{2}{t} + 3\ln t + 3t\cdot\frac{1}{t} && \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= g(t)\left[\frac{2}{t}+3\ln t+3\right] && \Rightarrow \\ g'(t) &= t^2t^{3t}\left[\frac{2}{t}+3\ln t+3\right] \end{aligned}$$

Derivación implícita

50. Calcular y' en $\ln(2x+2y)+x^2=y^2$.

Solución:

Debemos utilizar el método de derivación implícita para calcular y':

$$\begin{aligned} \ln(2x+2y)+x^2 &= y^2 && \Rightarrow \\ \frac{(2x+2y)'}{2x+2y}+2x &= 2yy' && \Rightarrow \\ \frac{2+2y'}{2x+2y}-2yy' &= -2x && \Rightarrow \\ \frac{1+y'}{x+y}-2yy' &= -2x && \Rightarrow \\ 1+y'-2yy'(x+y) &= -2x(x+y) && \Rightarrow \\ y'(1-2xy-2y^2) &= -2x^2-2xy-1 && \Rightarrow \\ y' &= \frac{-2x^2-2xy-1}{1-2xy-2y^2} \end{aligned}$$

Tangente horizontal

57. Determine los puntos donde la recta tangente a la curva $y=e^x-x$ es horizontal.

Solución:

Recuerde que una recta es horizontal si su pendiente es igual a 0. Por otra parte la recta tangente a la curva en un punto es igual a la derivada de la función evaluada en ese punto. En resumen, lo que debemos determinar en este caso son los valores de x para los cuales la derivada es igual a 0.

Tenemos $y' = e^x - 1$. Ahora resolvemos $y' = 0$, es decir $e^x - 1 = 0$:

$$e^x - 1 = 0 \quad \Rightarrow e^x = 1 \quad \Rightarrow x = 0.$$

Solo hay una tangente horizontal y el punto de tangencia es

$$(0, y(0)) = (0, e^0 - 0) = (0, 1).$$

Uso de la recta tangente para un cálculo geométrico

58. La figura representa la gráfica de la la función $f(x) = \ln x$. La recta L es tangente a la gráfica en el punto P. Pruebe que para cualquier P con estas condiciones se tiene que el segmento AB tiene longitud 1.

Solución:

Debemos determinar los puntos A y B, pero para eso requerimos conocer la ecuación de la recta L. Digamos que $P = (a, \ln a)$, al ser L tangente a la curva en P, su pendiente es igual a la derivada de la función evaluada en a. Tenemos $f'(x) = \frac{1}{x}$, por lo tanto la pendiente de la tangente es $m = \frac{1}{a}$. Su intersección es $b = \ln a - \frac{1}{a} \cdot a = \ln a - 1$. Así, la ecuación de L es

$$y = \frac{1}{a}x + \ln a - 1.$$

De acuerdo con esto, $B = (0, \ln a)$ y $A = (0, \ln a - 1)$, la distancia entre ellos es $\ln a - (\ln a - 1) = 1$, como lo dice el enunciado.

Recta tangente paralela a una recta dada

59. Determine los puntos de la gráfica $y = x^2 + 4 \ln x$ en los que la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y = 6x - 3$.

Solución:

Tenemos que $y' = 2x + \frac{4}{x}$. Si una recta es tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = a$ entonces la pendiente de esa recta es la derivada evaluada en

a, en este caso la pendiente es $m = 2a + \frac{4}{a}$. Como la recta tangente es paralela a la recta $y = 6x - 3$, entonces ambas rectas tienen que tener la misma pendiente, esto es,

$$2a + \frac{4}{a} = 6$$

y resolviendo esta ecuación se obtiene que $a^2 - 3a + 2 = 0$ y entonces $a = 2$, $a = 1$. Hay dos puntos que satisfacen las condiciones del ejercicio: $(1, y(1)) = (1, 1)$ y $(2, y(2)) = (2, 4 + 4 \ln 2)$.

Capítulo 8

ALGUNAS APLICACIONES

EJERCICIOS RESUELTOS

Interés simple e interés compuesto

1. En la figura se presenta la gráfica de dos funciones. Una corresponde al interés compuesto del $r\,\%$ devengado por un capital inicial durante 10 años y la otra corresponde al interés simple devengado por el mismo capital a la misma tasa de interés y durante el mismo período. Responda: ¿cuál curva corresponde al interés simple y cuál al interés compuesto?, ¿cuál es el capital inicial? y ¿cuál es el valor de r?

Solución:

Recordando lo visto en el capítulo correspondiente, sabemos que el capital crece más rápidamente con el interés compuesto, por lo tanto la curva que corresponde al interés compuesto es la que "sube más" en el dibujo, la otra corresponde al interés simple. De acuerdo con la figura ambas curvas arrancan en 10 000, por lo tanto este es el capital inicial.

La curva de capital simple es la más útil, en este caso, para conocer la tasa de interés. En efecto, con interés simple al $r\,\%$ anual al cabo de 10 años el interés devengado es $10\,000 \cdot \frac{r}{100} \cdot 10 = 1\,000r$. Por otro lado, de acuerdo con la curva, el interés devengado en ese plazo fue de $30\,000 - 10\,000 = 20\,000$. Debemos tener entonces que

$$1\,000r = 20\,000$$

y por lo tanto $r = 20$. La tasa de interés es del $20\,\%$ anual.

Cálculo de la altura máxima y la velocidad

10. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba del suelo con una velocidad inicial de 40 metros por segundo. Su altura a los t segundos es $s(t) = 40t - 4,9t^2$ metros.

(a) ¿En qué tiempo alcanza la máxima altura y cuál es ésta?

(b) ¿En qué momento toca el suelo y con qué velocidad lo hace?

Solución:

(a) Puesto que la función que describe el movimiento es una parábola con coeficiente principal negativo, el máximo se alcanza en el vértice, es decir en el punto en que la derivada es 0. Tenemos $s'(t) = 40 - 9,8t = 0$, entonces $t = 4,08$. La altura máxima es $d(4,08) = 40 \cdot 4,08 - 4,9 \cdot (4,08)^2 = 81,63\,m$.

(b) Para saber cuándo toca el suelo igualamos la altura a 0, es decir

$$40t - 4,9t^2 = 0,$$

resolviendo esta ecuación tenemos $t = 0$ y $t = 8,16$. Cae al suelo a los $8,16\,seg$. Para saber con qué velocidad, evaluamos $s'(t)$ en $8,16$. Cae entonces con velocidad de $s'(8,16) = 40 - 9,8(8,16) = -39,96\,m/seg$.

La velocidad negativa indica que el objeto viene cayendo.

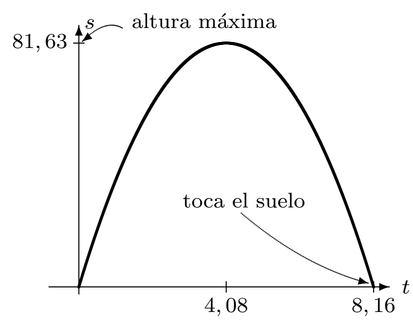


Figura 8.1.

Crecimiento de poblaciones

12. Cierta población de insectos crece en un recipiente. A las t semanas el número de insectos en el recipiente es $N(t) = 12t^2 - t^4 + 5$.

(a) ¿Cuándo deja de crecer la población?

(b) ¿En qué intervalos de tiempo es positiva y en qué intervalos es negativa la tasa de crecimiento de la población?

Solución:

Recordemos que la razón de crecimiento de la población es la derivada de la función que dá el número de insectos, en este caso es $N'(t) = 24t - 4t^3$. Que la población deja de crecer significa que la tasa de crecimiento es 0, es decir:

$$24t - 4t^3 = 0$$

Resolviendo tenemos $4t(6 - t^2) = 0$; esta ecuación tiene tres soluciones $t = 0$, $t = -\sqrt{6}$ y $t = \sqrt{6}$. Para efectos de la situación del problema la solución válida es $t = \sqrt{6}$; las otras dos no sirven porque una se refiere a un tiempo negativo y la otra, $t = 0$, es el momento inicial en el conteo de los insectos. Entonces la población deja de crecer a las $t = \sqrt{6}$ semanas.

(b) Tenemos que $N'(t) = 4t(\sqrt{6} + t)(\sqrt{6} - t)$. Cuando la derivada es negativa, la tasa de crecimiento será negativa y cuando N' es positiva, la tasa de crecimiento es positiva.

$N'(t)$ consta de tres factores, como estamos considerando el tiempo positivo, $4t > 0$ y $\sqrt{6} + t > 0$. Por otra parte $\sqrt{6} - t > 0$ si $t \in]0, \sqrt{6}[$ y $\sqrt{6} - t < 0$ si $t > \sqrt{6}$. De manera que $N'(t) > 0$ si $t \in]0, \sqrt{6}[$ y $N'(t) < 0$ si $t > \sqrt{6}$. En conclusión, hasta las $\sqrt{6}$ semanas la tasa de crecimiento es positiva y a partir de ese momento es negativa.

Soluciones admisibles

En la solución de este ejercicio se presentó una situación especial que se da en muchos de los problemas aplicados. Muchas veces al resolver una ecuación que proviene de modelar una situación dada, aparecen varias soluciones; es de suma importancia saber determinar, a la luz de las condiciones de la situación, cuáles de esas soluciones son admisibles y cuáles no. Es decir, debemos analizar cada solución para saber si satisface o no los requerimientos del problema. Este es uno de los aspectos más importantes en las aplicaciones de las matemáticas a situaciones concretas.

Cálculo del máximo y el mínimo

16. Determinar el máximo y el mínimo absoluto de

$$h(x) = \frac{x}{1 + x^2} \quad \text{en} \quad [-1, 4]$$

Solución:

Recordemos que tanto el máximo como el mínimo absoluto de una función en un intervalo cerrado pueden ser la imagen de uno de los extremos del intervalo o la imagen de alguno de los valores críticos. Los valores críticos se obtienen en aquellos puntos en los que la derivada de la función se hace 0 o en los que la derivada no existe.

Cálculo de los valores críticos: primero derivamos la función

$$h'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot (2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Podemos ver que esta derivada está definida en todo el dominio y que se hace 0 cuando $x = 1$ ó $x = -1$. El valor $x = -1$ no es crítico pues es uno de los extremos del intervalo. El único valor crítico es $x = 1$.

Ahora evaluamos en los extremos del intervalo y en el valor crítico: tenemos $f(-1) = \frac{-1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2}$ y $f(4) = \frac{4}{17}$. El menor de estos tres valores es $\frac{-1}{2}$, éste es el mínimo absoluto de la función; el mayor es $\frac{1}{2}$, éste es el máximo absoluto.

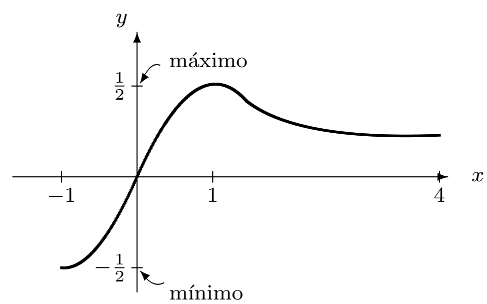


Figura 8.2.

Uso de la regla de L'Höpital

26. Utilice la regla de L'Höpital para calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+1-e^x}{x^2}$$

Solución:

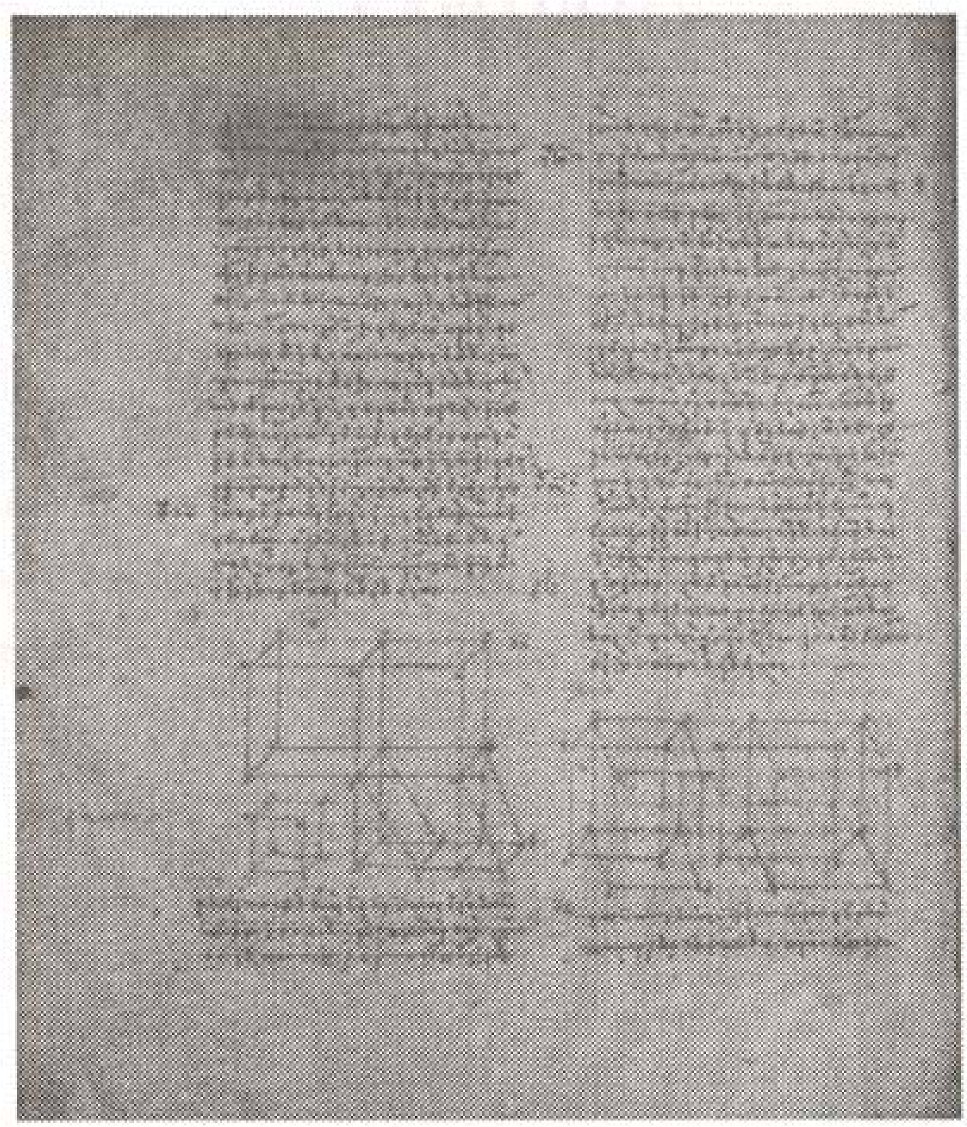
En primer lugar observamos que al sustituir el valor 0 en la función se obtiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$; esto quiere decir que se puede aplicar la regla mencionada.

La regla de L'Höpital dice que este límite es igual al límite del cociente de la derivada del numerador entre la derivada del denominador, así:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+1-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1-e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x}.$$

Otra vez, al evaluar en 0 se obtiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ y podemos aplicar nuevamente la regla:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$



Página de una versión griega del siglo IX de los **Elementos** *de Euclides (Libro XI, Prop. 31–33). Es sobre los volúmenes de sólidos paralelepipidales. Se encuentra en la Biblioteca del Vaticano.*

Capítulo 9

TEMAS ADICIONALES: UNA INTRODUCCIÓN

EJERCICIOS RESUELTOS

Area bajo una curva

3. Falso o verdadero: El área de la región sombreada en la figura se puede calcular mediante la integral $\int_{-4}^{4} f(x)\, dx$.

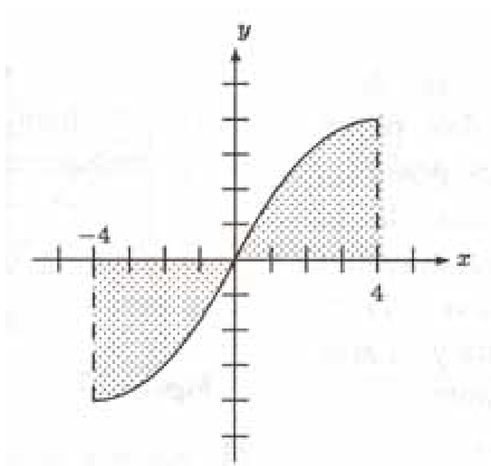


Figura 9.1.

Solución:

Sabemos que en caso de que $f(x)$ sea positiva en un intervalo $[a, b]$ entonces el área se puede calcular mediante

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Sin embargo, según podemos ver en el dibujo, la función no es positiva en todo el intervalo $[-4, 4]$, sino que tiene una parte negativa. Cuando se calcula la integral propuesta, la parte positiva aporta una cantidad positiva y la parte negativa aporta una cantidad negativa. En este caso, dada la simetría que presenta la figura, la integral es 0, que no corresponde con el área de la región. La afirmación es falsa.

Fórmula para el área bajo una curva

La fórmula general del área bajo una curva en un intervalo dado $[a, b]$ es

$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

El propósito del valor absoluto es convertir las partes negativas en partes positivas conservando el área de la región. Por ejemplo, la región del ejercicio se convertiría en la región de la figura y su área se calcularía mediante

Figura 9.2.

$$A = \int_{-4}^{4} |f(x)|\,dx = \int_{-4}^{0} (-f(x))\,dx + \int_0^4 f(x)\,dx.$$

Norma de una partición

8. Selección única: Suponga que deseamos aproximar el área bajo la curva $y = x^3$ en el intervalo $[1, 3]$ usando una partición que consiste en 10 subintervalos de la misma longitud, entonces la norma $\|\Delta\|$ de la partición es

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{10}$ (c) 10 (d) 5

Solución:

Puesto que la longitud del intervalo es $3-1 = 2$ y queremos 10 subintervalos de igual longitud, entonces cada uno de ellos mide $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. La longitud máxima es $\frac{1}{5}$ y ésta es entonces la norma de la partición. La opción correcta es (a).

Una ecuación diferencial para modelar un problema geométrico

13. Selección única: El problema de obtener la ecuación de la curva que pase por un punto dado y que en cada uno de sus puntos (x, y) la pendiente de la recta tangente sea $\frac{2y}{x}$, se puede resolver mediante la siguiente ecuación diferencial.

(a) $2yy' - x = 0$ (b) $2yy' + x = 0$ (c) $xy' - 2y = 0$ (d) $xy' + 2y = 0$

Solución:

Sabemos que la pendiente de la recta tangente es y', como queremos que sea igual a $\frac{2y}{x}$ entonces debemos tener $y' = \frac{2y}{x}$ o, de forma equivalente,

$$xy' - 2y = 0.$$

La opción correcta es (c).

Soluciones de una ecuación diferencial

24. ¿Cuáles de las siguientes funciones son solución de la ecuación diferencial

$$y'' - y' - 6y = 0? \qquad (*)$$

(a) $f(x) = e^{2x}$ (b) $f(x) = e^x$ (c) $f(x) = x^2$ (d) $f(x) = e^{-2x}$

(e) $f(x) = \operatorname{sen} x$

Solución:

En cada caso debemos calcular las dos primeras derivadas de la función y sustituir en (*) para ver si satisface o no la ecuación.

(a) $f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$, $f''(x) = 4 \cdot e^{2x}$, sustituyendo tenemos

$$4 \cdot e^{2x} - 2 \cdot e^{2x} - 6 \cdot e^{2x} = -4 \cdot e^{2x}$$

Esta no es solución de la ecuación (*).

(b) $f'(x) = e^{x}$, $f''(x) = e^{x}$, sustituyendo tenemos

$$e^{x} - e^{x} - 6 \cdot e^{x} = -6 \cdot e^{x}$$

Esta no es solución de la ecuación (*).

(c) $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, sustituyendo tenemos

$$2x - 2 - 6x^2 = -6x^2 + 2x - 2$$

Esta tampoco es solución de la ecuación (*).

(d) $f'(x) = -2 \cdot e^{-2x}$, $f''(x) = 4 \cdot e^{-2x}$, sustituyendo tenemos

$$4 \cdot e^{-2x} + 2 \cdot e^{-2x} - 6 \cdot e^{-2x} = 0$$

Esta sí es solución de la ecuación (*).

(e) $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, sustituyendo tenemos

$$-\operatorname{sen} x - \cos x - 6 \operatorname{sen} x = -\cos x - 7 \operatorname{sen} x$$

Esta no es solución de la ecuación (*).

Solución de una ecuación diferencial con un parámetro

25. Sabiendo que $y = \operatorname{sen} kx$ es solución de la ecuación diferencial $y'' + 9y = 0$, determine el valor o los valores de k.

Solución:

Tenemos $y' = k \cos kx$, $y'' = -k^2 \operatorname{sen} kx$. Sustituyendo en la ecuación:

$$-k^2 \operatorname{sen} kx + 9 \operatorname{sen} kx = 0.$$

Entonces $(-k^2 + 9) \operatorname{sen} kx = 0$, como esto es para todo x, entonces debemos tener $-k^2 + 9 = 0$ y por lo tanto $k = 3$ ó $k = -3$. Las funciones $y = \operatorname{sen} 3x$ y $y = \operatorname{sen}(-3x)$ son soluciones de la ecuación diferencial dada.

Vida media de una sustancia radiactiva

29. Se llama *vida media* o *semivida* de un material radiactivo al tiempo que tarda en reducirse a la mitad de la cantidad inicial. Suponga que se tienen 400 gramos de un material cuya vida media es de 8 horas. ¿Cuánto tardará en reducirse a 100 gramos?, ¿cuántos gramos habrá a las 4 horas? (use calculadora).

Solución:

Recordemos que la ecuación diferencial que describe la situación de la desintegración radiactiva es $y' = ky$, cuya solución viene dada por $y = Ce^{kx}$, donde C es la cantidad inicial de sustancia. En este caso particular $C = 400$ y entonces se tiene $y = 400e^{kx}$. El valor de k lo podemos determinar a partir de la información sobre la vida media.

Si se tienen C gramos inicialmente y al cabo de 8 horas se reduce a la mitad, esto significa que

$$\frac{C}{2} = Ce^{8k},$$

o, de forma equivalente, $0,5 = e^{8k}$ y por lo tanto $k = \frac{1}{8} \ln(0,5) = -0,0866$.

De todo lo anterior tenemos que la cantidad de material presente al cabo de x horas es $y = 400e^{-0,0866x}$.

A las 4 horas habrá $y(4) = 400e^{-0,0866 \cdot 4} = 238$ gramos.

Como la vida media es de 8 horas, a las 8 horas quedarán 200 gramos, en 8 horas más, es decir 16 horas después del inicio, habrá 100 gramos.

Una función de dos variables para describir una situación

30. Una zapatería produce zapatos de hombre y de mujer. Producir cada zapato de hombre le cuesta 600 colones y producir cada zapato de mujer le cuesta 650 colones; además tiene costos fijos (agua, luz, teléfono, alquiler, etc.) semanales por un monto de 200 000 colones. Si en una semana produce un número x de zapatos de hombre y un número y de zapatos de mujer, escriba la función de costo C como una función de las variables x e y.

Solución:

Producir cada zapato de de hombre le cuesta 600 colones, como produce x zapatos de hombre, el costo total de producción de los zapatos de hombre es de $600x$ colones. El costo total de producir y zapatos de mujer es $650y$ (cada zapato de mujer le cuesta 650 colones). El costo total de producción es el costo de producir los zapatos de hombre más el costo de producir los zapatos de mujer más los costos fijos, es decir

$$C = 600x + 650y + 200\,000.$$

Capítulo 10

DEFINICIONES Y MÉTODOS FORMALES

EJERCICIOS RESUELTOS

Uso de la definición de límite en un punto

6. Falso o verdadero: Dado que

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2},$$

entonces podemos asegurar que existe $\delta > 0$ tal que si $|x-1| < \delta$ entonces

$$\left|\frac{2-x}{x}\right| < 1.$$

Solución:

De acuerdo con la definición de límite,

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

significa que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que si $|x-2| < \delta$ entonces

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$ la expresión (*) se convierte en

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\left|\frac{2-x}{2x}\right| < \frac{1}{2}$$

o sea, multiplicando por 2:

$$|\frac{2-x}{x}| < 1. \qquad (**)$$

Pero todo esto es con la condición de que $|x-2| < \delta$, no podemos asegurar la existencia de un δ tal que si $|x-1| < \delta$ se cumpla (**). La afirmación es falsa.

Uso de la definición de límite infinito

12. Use la definición para probar que

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{|x-1|} = \infty$$

Solución:

La definición de límite infinito dice, para este caso, que $\forall M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x-1| < \delta$ entonces

$$\frac{1}{|x-1|} > M.$$

Debemos entonces encontrar el δ que satisface esa condición para un M arbitrario.

Como debemos tener que $\dfrac{1}{|x-1|} > M$, esto se logra si $|x-1| < \frac{1}{M}$. Esto significa que si tomamos $\delta = \frac{1}{M}$ se tiene la condición pedida.

Uso de la definición de límite en un punto

15. Dada $f(x) = x^3$, determine δ tal que para $|x| < \delta$ se tenga

$$|x^3| < \frac{1}{1000}$$

Solución:

Observe que se tiene que

$$|x^3| < \frac{1}{1000},$$

esta condición se satisface si

$$|x| < \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{1}{10}.$$

Entonces, tomando $\delta = \frac{1}{10}$ se tiene la condición pedida.

Aplicación del Teorema de los Valores Intermedios

18. Pruebe que la ecuación

$$x^5 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0 \qquad (*)$$

tiene al menos una solución en el intervalo $[1, 2]$.

Solución:

La idea de este ejercicio es utilizar el teorema de los valores intermedios que dice que si f es una función continua en $[a, b]$ y que si m es un valor entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = m$.

Tomemos $f(x) = x^5-2x^3+x^2-3x+1$, tenemos que $f(1) = -2$ y $f(2) = 15$. Puesto que 0 es un valor entre $f(1)$ y $f(2)$ y la función f es continua, entonces existe un valor c en $]1, 2[$ tal que $f(c) = 0$. Esto es, la ecuación (*) tiene una solución en ese intervalo.

Aplicación del Teorema de los Valores Intermedios

19. Si $f(x) = x^2 - 2x$ en $[-1, 4]$, ¿por qué se puede garantizar la existencia de un valor c tal que $f(c) = 5$?

Solución:

También en este caso se trata de la aplicación del teorema de los valores intermedios. Tenemos que $f(x) = x^2 - 2x$ es una función continua en $[-1, 4]$. Además $f(-1) = 3$ y $f(4) = 8$. Como 5 es un valor entre $f(-1)$ y $f(4)$ entonces existe c en el intervalo $]-1, 4[$ tal que $f(c) = 5$.

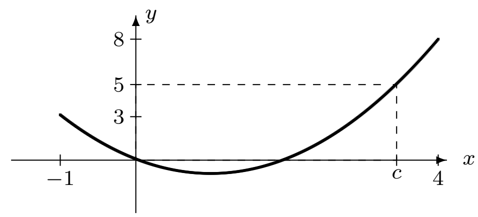


Figura 10.1.

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

Babini, José. *Historia sucinta de la matemática*. Madrid: Espasa-Calpe, S.A., 1969.

Baron, Margaret E. *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Londres: Pergamon Press, 1969.

Bell, E.T. -*Men of Mathematics*. New York: Simon and Shuster, 1937.

-*The Development of Mathematics*. New York: MacGraw-Hill Book Co., 1940. Una versión también en inglés pero aumentada salió en 1945. Versión en español por el Fondo de Cultura Económica S. A.: México, 1949.

-*Mathematics. Queen & Servant of Science*. Washington D. C. : Mathematical Association of America, 1951. Otra edición por Tempus Books of Microsof Press: Redmond, Washington, 1987.

Benacerraf, Paul y Putnam, Hilary (editores): *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Cambridge University Press, 1983.

Bernal, John D.. *Science in History*. Londres: C. A. Watts and Co. Ltd., 1954. Versión en español (traducción de Eli de Gortari) por la UNAM de México: México, 1972.

Bochner. Salomon. *The Role of Mathematics in the Rise of Science*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1966.

Bolzano, Bernard. *Las paradojas del infinito*. México: UNAM (Colección MATHEMA), 1991. La primera versión de este trabajo fue publicada en alemán en Leipzig en 1851.

Bourbaki, Nicolás. *Elements d'Histoire des mathematiques*. París: Hermann, 1960. Edición en español por Alianza Editorial: Madrid, 1972.

Boyer, Carl B. -*The Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover, 1959.

-A *History of Mathematics*. John Wiley and Sons, 1968. Posee una traducción al español por Alianza Editorial: Madrid, 1986.

Campbell, Douglas y Higgins, John C.. *Mathematics: People, problems, Results*. Belmont, California, EUA:Wadswoth, Inc., 1984.

Cohen, I. Bernard. *Revolution in Science*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1985.

Dickson, L. E. *History of the Theory of Numbers*. Washington, D. C. : Carnegie Institution, 1919-1923. Otra edición: Chelsea, 1951.

Gauss, Carl Friedrich. *Disquisitiones Arithmeticae*. Versión española publicada por la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales: Bogotá, 1995. Versión realizada por Angel Ruiz, Hugo Barrantes, y Michael Josephy de la Universidad de Costa Rica.

Gillies, Donald (editor). *Revolutions in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press Oxford, 1992.

Heath, T. L.: *A History of Greek Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1921.

Hull, L. W. H. *History and Philosophy of Science*. Messr. Longmans, Green and Co. Ltd., 1959. Versión en español por Seix Barral: Barcelona, 1962.

Kline, Morris. -*Mathematics in Western Culture*. New York: Oxford 1953.

-*Mathematics for the Nonmathematician*. New York: Dover, 1985. La primera edición apareció como *Mathematics for liberal arts*. Reading, Mass., EUA: Addison Wesley, 1967.

-*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxforf University Press, 1972.

-*Mathematics. The Loss of Certainty*. New York: Oxford University Press, 1980.

-*Mathematics and the search for Knowledge*. New York: Oxford University Press, 1985.

Kneale, William y Martha. *The Development of Logic*. Oxford: Clarendon Press, 1962. Versión en español de Editorial Tecnos: Madrid, 1972.

Kamer, Edna. *The Nature and Growth of Modern Mathematics*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1981.

Knorr, Wilbur R.. *The ancient tradition of geometric problems*. Boston: Birkhäuser, 1986. Otra edición por Dover: New York, 1993.

Lakatos, Imre. Mathematics, Science *and Epistemology—Philosophical Papers. Volume 2*. Londres: Cambridge University Press, 1978. La versión en español es de Alianza Editorial: Madrid, 1983.

Newman, James (editor). *The World of Mathematics*. New York: Simon and Schuster, 1956. Edición en español por Ediciones Grijalbo S. A.: Barcelona, 1969.

Ore, Oystein. *Number Theory and its History*. MacGraw Hill Book Company, 1948. Otra edición por Dover: New York, 1976.

Polyá, G. *How to solve it*. A *New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1945.

Ruiz, Angel. -"Sobre la revolución científica y matemática en el siglo XVII", y "Polémicas de método en la historia de la ciencia y las matemáticas", en el libro editado por A. Ruiz (Editor): *Las Matemáticas en Costa Rica* (*Memorias* "Tercer Congreso Nacional de Matemáticas"), Octubre 1990, San José, Costa Rica.

-*Matemáticas y filosofía. Estudios logicistas.* San José, Costa Rica: Editorial de la Universidad de Costa Rica, 1990.

-"Los orígenes de la Revolución Científica", *Elementos*, N.14, Año 4, Vol. 2, julio-setiembre 1990, Univ. Autónoma de Puebla, Puebla, México.

-*Ocaso de una utopía*. Costa Rica: Editorial de la Universidad de Costa Rica, 1993.

-"Tecnología y humanismo". *Panorama de un mundo cambiante.* Cátedra de Historia de la Cultura, Estudios Generales, Univ. C.R., agosto 1994.

Ruiz, Angel, y Barrantes, Hugo. -*Elementos de Cálculo Diferencial* (2 volúmenes), San José, Costa Rica: Edit. Univ. CR, 1997.

-*Elementos de Cálculo Diferencial. Guía académica*, San José, Costa Rica: Edit. Univ. CR, 1997.

Smith, D. E. *History of Mathematics.* Boston: Ginn, 1923. También en Dover: New York, 1958.

Struik, D. J.. -*A Concise History of Mathematics.* New York: Dover, 1967.

-*Source Book in Mathematics 1200-1800.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1969. Otra edición por Princeton University Press: Princeton, N. J., 1986.

Taton, René (Editor). *Histoire générale des sciences.* París: Presses Universitaires de France, 1957-1961, 5 volúmenes.

Índice alfabético