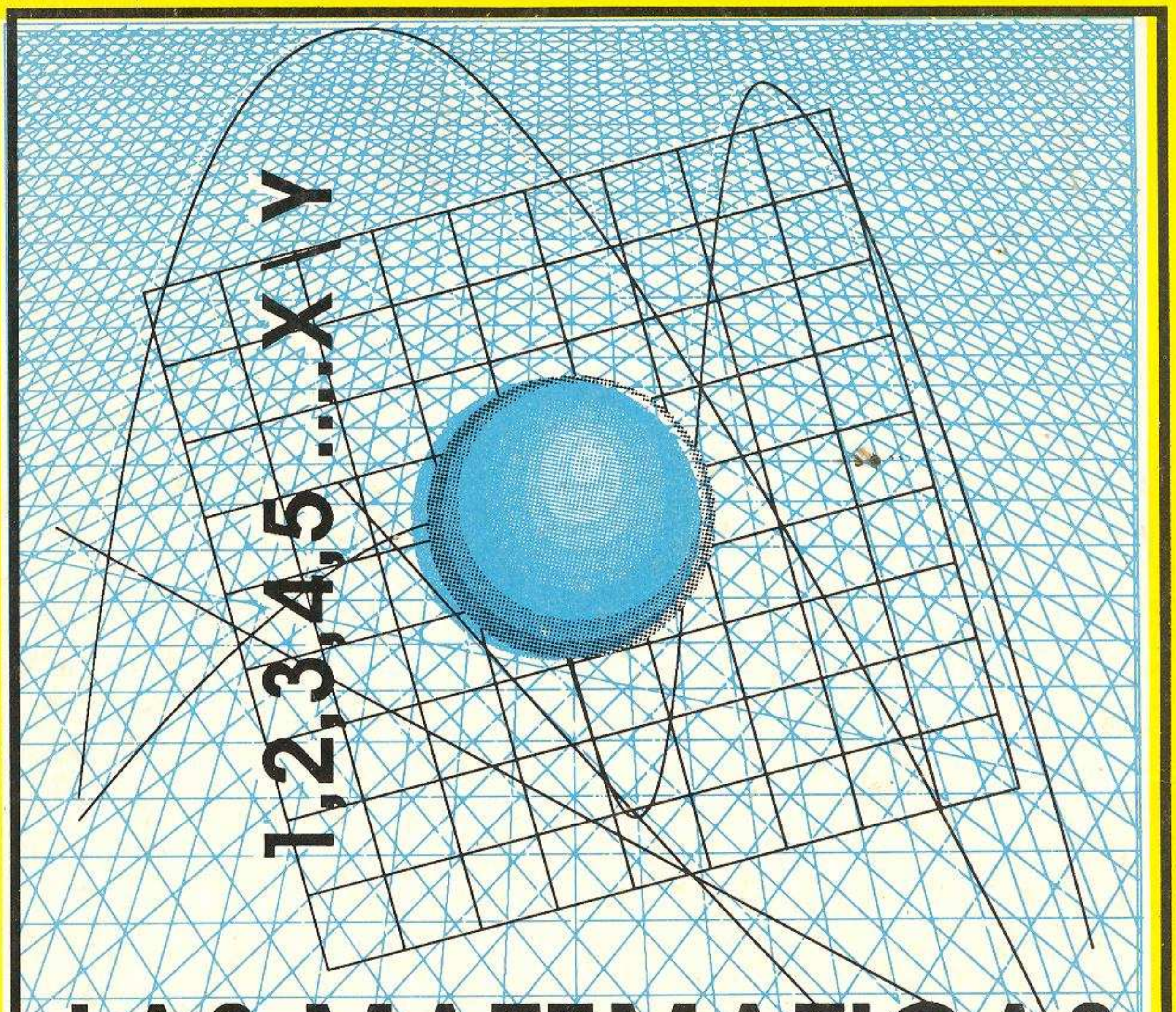
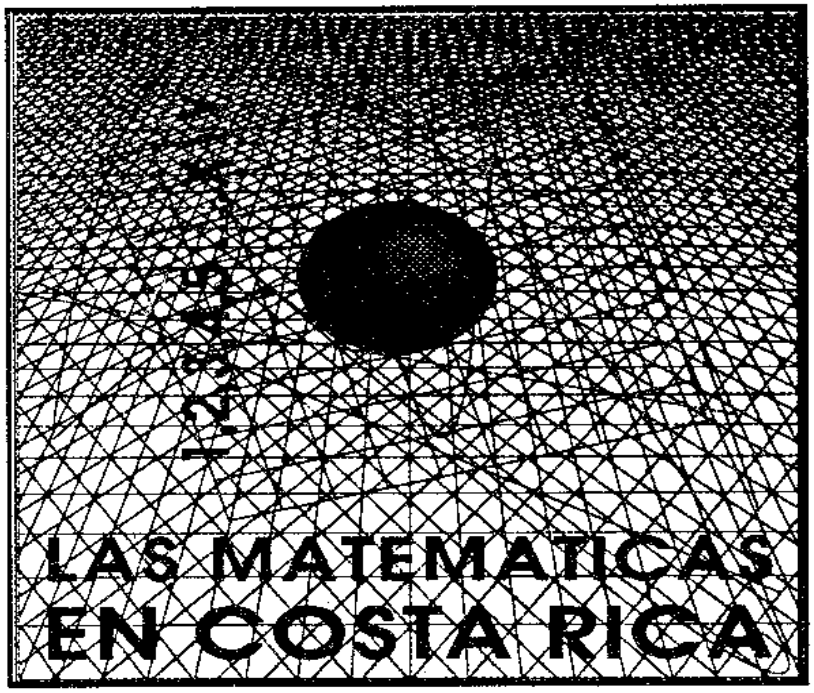


LAS MATEMATICAS EN COSTA RICA

Angel Ruiz Zuñiga
(EDITOR)

Octubre de 1990
San José, Costa Rica
MEMORIAS TERCER CONGRESO NACIONAL DE MATEMATICAS



Angel Ruiz Zuñiga
(EDITOR)

Octubre de 1990
San José, Costa Rica
MEMORIAS TERCER CONGRESO NACIONAL DE MATEMATICAS

MEMORIAS
Tercer Congreso Nacional de Matemáticas

Contenido

AGRADECIMIENTO

Quisiera dejar constancia en esta ocasión de mi agradecimiento a las siguientes instituciones y personas por su apoyo a la edición de este libro.

Instituciones:

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Universidad Nacional
Universidad Estatal a Distancia
Universidad de Costa Rica

Colegio de Licenciados y Profesores, Ministerio de Educación Pública, Ministerio de Ciencia y Tecnología, CONICIT, Asociación Costarricense de Matemáticas, Asociación Costarricense de Historia y Filosofía de la Ciencia.

Personas

El Comité Organizador del Tercer Congreso Nacional de Matemáticas:

Norma Adolio
Hugo Barrantes
Carmen González
Michael Josephy
William Lambert
Jenny Oviedo
Pedro Rodríguez
Rosalinda Sanabria
Lorena Mora

Asistentes:

Daisy Mora
Regina Valerio

Atentamente,

Angel Ruiz Zúñiga
Editor

PRESENTACION

Este libro es el producto de varios trabajos presentados al Tercer Congreso Nacional de Matemáticas, que se celebra del 15 al 19 de octubre de 1990, en la Ciudad Universitaria Rodrigo Facio de la Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.

La realización de este congreso es un hecho muy significativo para la vida de la comunidad matemática del país.

Primero, porque se continúa una tradición que iniciamos en 1983, pero que se había detenido en 1985, gracias a las dificultades y presiones administrativas a los que nos vimos expuestos los organizadores de aquel segundo congreso. Este congreso, entonces, representa la recuperación de una tradición académica, que resulta en nuestra opinión esencial para el decurso de esta disciplina en nuestro ámbito. Los congresos académicos son oportunidades preciosas para el intercambio de ideas, para la socialización de los problemas, para hacer balances y para trazar perspectivas. Es el lugar óptimo para establecer puentes a la comunicación intelectual y para cristalizar proyectos y orientaciones de acción.

En segundo lugar, porque este congreso ha recibido un sólido aporte de la mayoría de la población de matemáticos y de educadores de matemáticas del país. Se desarrollan más de 130 exposiciones en este congreso, agrupadas en ponencias, conferencias, mesas redondas, talleres, cursos cortos, etc. El número impresionante de actividades nos revela la necesidad imperiosa que existía de esta reunión, y al mismo tiempo de que a pesar de las muchas dificultades se ha venido desarrollando una importante producción intelectual en matemáticas y sobre las matemáticas.

En esta ocasión, hemos considerado conveniente publicar las memorias del congreso para entregarlas en el mismo evento, y no dejar las cosas al correr del tiempo y al azar. En las dos oportunidades anteriores publicamos varios de los trabajos presentados en revistas especializadas, con la dificultad de que, primero, eran de circulación restringida y, segundo, en realidad se trataba de un número pequeño de trabajos. En el segundo congreso publicamos los resúmenes. De esa manera se disminuía mucho la proyección y la utilidad del evento. Por eso la importancia de que se publique la mayoría de los trabajos presentados. Y, además, para ser usados en el mismo congreso. Esto es sumamente importante, por cuanto los participantes podrían llegar a las sesiones con pleno conocimiento de los contenidos de las ponencias: con ello se enriquece extraordinariamente el intercambio académico.

Quiero resaltar que este libro, LAS MATEMATICAS EN COSTA RICA, revela, al mismo tiempo, una mayor elaboración que la que vimos en las dos ocasiones anteriores, lograndose obtener 55 trabajos in extenso dos meses antes del congreso. También es evidente la voluntad colectiva de elaborar y escribir dentro de los plazos fijados. No es inusual que los individuos en nuestras latitudes dejen las cosas para el final, seguros de que por más tarde que sea siempre encontrarán sus cosas publicadas. En esto hemos sido muy firmes: los plazos se deben cumplir, y quien no los cumple queda fuera. Es necesario que tengamos un nivel de eficiencia en esto, para poder contribuir al éxito de las actividades. Uno de los grandes vicios del subdesarrollo es esa mentalidad que favorece la apatía, que estimula dejar las cosas para el final, que hasta valoriza la impuntualidad y la mediocridad hasta en lo más mínimo. Es necesario combatir estos vicios con gran energía si queremos construir algún día una sólida base científica, tecnológica y cultural capaz de fecundar el progreso de nuestra nación.

Este libro está dividido en 9 secciones temáticas. Algunos artículos tocan asuntos que a veces pertenecen a más de una sección, pero había que incluirlos en una sola. Están ordenados en cada sección alfabéticamente por el apellido de sus autores (el primer autor cuando hay varios).

El libro no contiene todas las ponencias presentadas en el congreso, ya sea porque no fueron presentados los trabajos a tiempo, o porque estos fueron rechazados por el comité editorial y el editor.

Las artes finales han sido confeccionadas por los mismos autores. En muchas ocasiones las primeras versiones fueron rechazadas por razones de forma o de contenido. Hubo una edición de los trabajos en coordinación con los autores, pero la forma definitiva es responsabilidad de los autores.

Es interesante señalar que, en correspondencia con nuestra visión de la naturaleza de las matemáticas, hemos querido propiciar la participación no solo de matemáticos sino de todos aquellos profesionales e intelectuales que de alguna manera se relacionan con las matemáticas. En mi opinión, las matemáticas, por su más profunda naturaleza, entran en contacto con muchas áreas del conocimiento. Sin embargo, ha sido típico que los matemáticos se hayan aislado tremendamente de las otras áreas cognitivas y de los otros profesionales y científicos. Ha sido típica una actitud prepotente de los matemáticos que desprecian al resto de profesionales y ha sido dominante un chauvinismo profesional que no encuentra valor en ninguna otra actividad académica científica, profesional o intelectual. Esa actitud ha estado asociada a un "purismo" y a un "formalismo" extremos en la consideración de las matemáticas, que le ha cortado puentes y vínculos con la realidad y el mundo. Ambas actitudes han sido nefastas para el desarrollo de las matemáticas y su enseñanza.

Afortunadamente los tiempos cambian y nuevas actitudes e ideas se han empezado a abrir paso. En este congreso hemos querido enérgicamente abrir sus puertas a toda la comunidad intelectual y científica, romper las barreras, absurdamente construidas, del pasado, y buscar la colaboración multidisciplinaria que tanto se requiere en esta etapa de la historia del conocimiento y del progreso nacional. Abrimos el congreso a economistas, ingenieros, filósofos, estadísticos, historiadores, educadores, etc. Y la respuesta ha sido positiva. Todavía se requiere de más tiempo y de más iniciativas para avanzar aún más, pero el camino está abierto.

Quiero, especialmente, mencionar la contribución de la Asociación Costarricense de Historia y Filosofía de la Ciencia, ACOHIFICI, que desde 1983 viene realizando una seria labor en el fortalecimiento de estas disciplinas en Costa Rica. Veintiseis (26) de los trabajos recogidos aquí, casi el cincuenta por ciento del libro, están dedicados a los temas que precisamente ACOHIFICI promueve.

Quiero mencionar, también, la creación, en la escuela de Matemáticas de la Universidad de Costa Rica, de un PROGRAMA DE INVESTIGACIONES META-MATEMATICAS, ESTUDIOS MULTIDISCIPLINARIOS SOBRE LAS MATEMATICAS, que juega un papel importante en el estudio de la realidad matemática y en la generación de importantes ideas para la acción práctica en nuestra disciplina.

Por último, quiero aprovechar la ocasión para saludar a la Asociación Costarricense de Matemáticas, que se ha fundado recientemente para poder apuntalar los trabajos académicos en la comunidad matemáticas del país.

Este libro es el resultado del trabajo de muchas personas con el apoyo de muchas instituciones. Quisiera agradecer su colaboración a los miembros del Comité Editorial, formado por el mismo Comité Organizador del congreso, por su esfuerzo para buscar fondos, para obtener y editar los artículos, etc. Quisiera agradecer a todas las instituciones que patrocinaron el congreso y especialmente la edición de este libro, nuestro reconocimiento específico está manifestado en diferentes partes de este libro. Y un agradecimiento muy especial a los autores que han tenido que escribir y trabajar bajo nuestra presión y que han sabido cumplir con nuestros plazos de tiempo.

Angel Ruiz Zúñiga
Editor
Presidente

TERCER CONGRESO NACIONAL DE MATEMATICAS

SECCION MATEMATICAS PURAS

LA FINITUD COMO IDEA BASICA EN EL CONCEPTO DE NUMERO

Winston Alarcón Athens
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

Resumen. El origen y la función central del conjunto de los números naturales es servir de instrumento para la contabilización de conjuntos finitos. Presentamos una sistematización matemática de este punto de vista, proponiendo previamente una definición no aritmética de finitud conjuntista.

Introducción.

Los números naturales son un producto cultural humano de naturaleza social: son el instrumento fundamental que hace posible la evaluación de la información (comparación y elaboración analógica). Ese es su aspecto necesario. Su posibilidad radica en la característica de los seres humanos de poseer conciencia de sí mismos como seres con autoidentidad y con memoria de su propia historia. Esta característica es –junto con nuestras posibilidades y limitaciones sensoriales y racionales–, la base de nuestra capacidad para ***proporcionar identidad*** a las diversas y multifacéticas manifestaciones del mundo sobre nuestra conciencia. El proceso de conteo de cualquier colección depende esencialmente de la capacidad humana de proporcionar identidad.

El instrumento de conteo que llamamos "conjunto de los números naturales" es la prueba de nuestra capacidad individual para proporcionar identidad en forma socialmente coherente. Esto permite interpretar la Aritmética como un modelo formal de nuestra conceptualización del mundo como universo de objetos con identidad aparentemente propia, natural, exacta y permanente, pero que, en realidad es una identidad humanamente proporcionada, convencional, inherentemente imprecisa y transitoria. Tal interpretación puede ser útil para un reexamen del problema de la Aritmética.

La sistematización matemática de la noción de *instrumento de conteo* ([1]), requiere naturalmente de una clarificación previa de la noción de ***finitud conjuntista*** ([2]), ya que lo que se cuenta con los números naturales son conjuntos, y no de cualquier tipo, sino que finitos. La manera habitual de examinar el atributo de finitud en un conjunto dado E es el método aritmético, según el cual E es finito si es posible *contar* los elementos de E, esto es, si es posible establecer una correspondencia biunívoca entre E y algún segmento inicial del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Como esto presupone los números naturales, no nos sirve como definición de finitud conjuntista que sirva de plataforma a la noción de instrumento de conteo.

El marco teórico de la presente ponencia es la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel restringuida a los siguientes axiomas:

i) Axioma de extensionalidad;
ii) Axioma del conjunto vacío;
iii) Axioma de los pares desordenados;
iv) Axioma de la unión;
v) Axioma de los subconjuntos,
vi) Axioma de las potencias.

1. La noción de conjunto finito.

Desde mediados del siglo pasado diversos autores han propuesto alternativas de definición no aritmética de finitud conjuntista. Una manera de lograrlo es partir con la consideración de que la finitud de un conjunto E es la propiedad de tener E *fin o término en tanto conjunto*, esto es, *terminar de tener elementos*. Interpretando esto como la propiedad del conjunto E de quedar necesariamente vacío por extracción de sus elementos de uno en uno, comencemos por precisar esta última idea.

Definición A. Sea E un conjunto y C una colección de subconjuntos de E. Diremos que C *se obtiene por extracción de los elementos de E de uno en uno*, si $E \in C$ y para cada conjunto no vacío A perteneciente a C, existe $a \in A$ tal que $A \setminus \{a\} \in C$.

La siguiente definición expresa directamente la noción de finitud conjuntista en tanto propiedad de terminar de tener elementos:

Definición B. Diremos que un conjunto E es *finito* si toda colección $\mathcal{C}$ obtenida por extracción de los elementos de E de uno en uno, contiene como elemento al conjunto vacío.

Conforme a esta definición, el conjunto vacío $\emptyset$ resulta trivialmente finito.

Teorema 1.1. *La unión de cualquier conjunto finito con cualquier conjunto unitario es un conjunto finito.*

PRUEBA. Sea C un conjunto finito y sea $\{a\}$ un conjunto unitario. Podemos suponer que $a \notin C$. Sea $\mathcal{E}$ cualquier colección obtenida por extracción de los elementos de $C \cup \{a\}$ de uno en uno. Definamos:

$$\mathcal{F} = \{ X \setminus \{a\} \mid X \in \mathcal{E} \}$$

Probaremos que $\mathcal{F}$ se obtiene por extracción de los elementos de C de uno en uno. Por definición de $\mathcal{F}$, ésta es una colección de subconjuntos de C y como $C \cup \{a\} \in \mathcal{E}$, entonces $\big(C \cup \{a\}\big) \setminus \{a\} = C \in \mathcal{F}$. Sea $X \setminus \{a\} \in \mathcal{F}$ con $X \in \mathcal{E}$. Si $\emptyset \neq X \setminus \{a\} \in \mathcal{E}$, como $\mathcal{E}$ se obtiene por extracción de los elementos de $C \cup \{a\}$ de uno en uno, existe $b \in X \setminus \{a\}$ tal que $(X \setminus \{a\}) \setminus \{b\} \in \mathcal{E}$; como $(X \setminus \{a\}) \setminus \{b\} = ((X \setminus \{a\}) \setminus \{b\}) \setminus \{a\}$, tenemos que $(X \setminus \{a\}) \setminus \{b\} \in \mathcal{F}$. Por otra parte, si $X \setminus \{a\} \notin \mathcal{E}$ entonces existe $c \in (X \setminus \{a\})$ tal que $X \setminus \{c\} \in \mathcal{E}$, con lo cual $(X \setminus \{a\}) \setminus \{c\} = (X \setminus \{c\}) \setminus \{a\} \in \mathcal{F}$. Así, hemos probado que $\mathcal{F}$ se obtiene por extracción de los elementos de C de uno en uno. Como C es finito, $\emptyset \in \mathcal{F}$, lo cual implica que $\emptyset \in \mathcal{E}$ o $\{a\} \in \mathcal{E}$. En este último caso también obtenemos $\emptyset \in \mathcal{E}$ por la propiedad de la colección $\mathcal{E}$. Este resultado prueba que $C \cup \{a\}$ es finito.

Corolario. *Los conjuntos unitarios son finitos.*

La siguiente definición, dual de la definición A, la emplearemos para obtener otra útil caracterización de finitud conjuntista:

Definición C. Sea E un conjunto y sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de E. Diremos que $\mathcal{C}$ *se obtiene por agregación de los elementos de E de uno en uno*, si $\emptyset \in \mathcal{C}$ y si para cada $A \in \mathcal{C}$ que verifique $A \neq E$, existe $a \in E \setminus A$ tal que $A \cup \{a\} \in \mathcal{C}$.

Es claro que una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de E se obtiene por agregación de los elementos de E de uno en uno si y sólo si la colección $\mathcal{C}'$ formada por los complementos con respecto a E de los elementos de la colección $\mathcal{C}$ se obtiene por extracción de los elementos de E de uno en uno. Así tenemos de inmediato la siguiente caracterización de finitud conjuntista:

Teorema 1.2. *E es finito si y sólo si toda colección obtenida por agregación de los elementos de E de uno en uno, contiene a E como elemento.*

Teorema 1.3. *(Principio de Buen Orden finito) Todo conjunto finito puede ser bien ordenado.*

PRUEBA. Sea E un conjunto finito. Definamos:

$$\mathcal{E} = \{ X \subseteq E \mid X \text{ puede ser bien ordenado} \}$$

Es claro que $\mathcal{E}$ se obtiene por agregación de los elementos de E de uno en uno. Por teorema 1.2 y finitud de E se obtiene $E \in \mathcal{E}$, es decir, E puede ser bien ordenado.

Teorema 1.4. *Sea E un conjunto finito. Entonces la relación inversa de todo buen orden en E es un buen orden en E.*

PRUEBA. Supongamos que $\leq$ es un buen orden en E. Sea $\geq$ la relación inversa de $\leq$, la cual es un orden total en E. Consideremos la colección:

$$\mathcal{E} = \{ X \subseteq E \mid \text{ la restricción de } \geq \text{ a } X \text{ es un buen orden en } X \}$$

Se demuestra sin dificultad que $\mathcal{E}$ se obtiene por agregación de los elementos de E de uno en uno. Como E es finito, $E \in \mathcal{E}$. Esto prueba que la relación inversa del buen orden $\leq$ es un buen orden en E.

En lo que sigue, diremos que un conjunto E *es inyectable en* un conjunto F si existe una función inyectiva de E en F. En tal caso escribiremos: $E \preceq F$.

Teorema 1.5. Si E, F son conjuntos tales que E es inyectable en F y F es finito, entonces E es finito.

PRUEBA. Sea $\mathcal{E}$ cualquier colección que se obtiene por extracción de los elementos de E de uno en uno. Sea φ una aplicación inyectiva de E en F. Definamos:

$$\mathcal{F} = \{ \varphi(X) \mid X \in \mathcal{E} \}$$

Se prueba sin dificultad que $\mathcal{F}$ se obtiene por extracción de los elementos de F de uno en uno. Luego, por finitud de F se tiene $\emptyset \in \mathcal{F}$; esto implica $\emptyset \in \mathcal{E}$, con lo cual se obtiene la finitud de E

En lo que sigue $E \sim F$ indica que E es inyectable *sobre* F.

Corolario. *Sean E, F conjuntos, con F finito. Entonces:*

i) $E \sim F \Longrightarrow E$ *finito.* *iii)* $F \setminus E$ *es finito.*

ii) $E \subseteq F \Longrightarrow E$ *finito.* *iv)* $F \cap E$ *es finito.*

Teorema 1.6. *Toda función inyectiva de un conjunto finito en si mismo es una biyección.*

PRUEBA. Supongamos, por contradicción, que existe cierto conjunto finito E y cierta función inyectiva f de E en sí mismo, que no es sobreyectiva. Definamos la colección:

$$\mathcal{E} = \{ X \subseteq E \mid \text{existe } \varphi : X \longrightarrow X,\ \varphi \text{ inyectiva y no sobreyectiva} \}$$

Probaremos que $\mathcal{E}$ se obtiene por extracción de los elementos de E de uno en uno. Estamos suponiendo que $E \in \mathcal{E}$. Sea $X \in \mathcal{E}$. Por definición de $\mathcal{E}$, existe $\varphi : X \longrightarrow X$, tal que φ es inyectiva y no sobreyectiva. Luego $X \neq \emptyset$. Sea $a \in X$.
- Si $a \notin \varphi(X)$, la restricción de φ a $X \setminus \{a\}$ es una aplicación inyectiva y no sobreyectiva de $X \setminus \{a\}$ en si mismo, por lo que $X \setminus \{a\} \in \mathcal{E}$.
- Si $a \in \varphi(X)$, sea $b \in X \setminus Fi(X)$; como φ es inyectiva, existe un único $c \in X$ tal que $\varphi(c) = a$. Para cada $x \in X$ definamos:

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \neq c \\ b & \text{si } x = c \end{cases}$$

Tenemos que ψ es una aplicación inyectiva y no sobreyectiva de X en si mismo y que $a \notin \psi(X)$, por lo que caemos en el caso anterior, concluyendo nuevamente que $X \setminus \{a\} \in \mathcal{E}$.
En consecuencia, $\mathcal{E}$ se obtiene por extracción de los elementos de E de uno en uno y la finitud de E implica que $\emptyset \in \mathcal{E}$, es decir, existe una aplicación inyectiva y no sobreyectiva de $\emptyset$ en si mismo. Esta contradicción termina la prueba.

Teorema 1.7. *Un conjunto finito no puede ponerse en correspondencia biunívoca con ninguno de sus subconjuntos propios.*

PRUEBA. Sea E un conjunto finito y sea $X \subseteq E$, con $X \sim E$. Entonces existe $\varphi : E \longrightarrow X$ tal que φ es biyectiva. Sea $i : X \longrightarrow E$ la inyección canónica. Se tiene: $i \circ \varphi : E \longrightarrow E$ es inyectiva y, por teorema 1.6, $i \circ \varphi$ es sobreyectiva. Esto implica que i es sobreyectiva y por lo tanto, $X = E$.

NOTA: Los teoremas 1.6 y 1.7 tienen recíprocos válidos, pero no conozco una prueba de esos recíprocos que no haga uso de alguna forma del Axioma de Selección. El teorema 1.7 y su recíproco –al entenderse con referencia a la definición aritmética de finitud conjuntista– constituyen la caracterización obtenida por Dedekind en 1888 ([4]).

Teorema 1.8. *Dados dos conjuntos, al menos uno de ellos finito, entonces al menos uno es inyectable en el otro.*

PRUEBA. Sean A, B conjuntos al menos uno de ellos finito y supongamos que A no es inyectable en B. Probaremos que entonces B es inyectable en A.

a) Si A es finito, definamos:

$$\mathcal{E} = \{ X \subseteq A \mid X \text{ es inyectable en } B \}$$

Probaremos que $\mathcal{E}$ se obtiene por agregación de los elementos de A de uno en uno.

Como $\emptyset$ es inyectable en B, tenemos que $\emptyset \in \mathcal{E}$. Sea $X \in \mathcal{E}$ y sea $f : X \longrightarrow B$ inyectiva. f no puede ser sobreyectiva, ya que en tal caso existiría la función inversa $f^{-1} : B \longrightarrow X \subseteq A$, lo cual no es posible ya que estamos suponiendo que B no es inyectable en A. Por ser f no sobreyectiva, existe $b \in B \setminus f(X)$. Entonces, si $a \in A \setminus X$ definimos $g : X \cup \{a\} \longrightarrow B$ como la extensión de f tal que $g(a) = b$. Resulta que g es inyectiva, por lo que $X \cup \{a\} \in \mathcal{E}$. Tenemos entonces que $\mathcal{E}$ se obtiene por agregación de los elementos de A de uno en uno. Usando el teorema 1.2 y la finitud de A, concluímos que $A \in \mathcal{E}$ y así obtenemos que A es inyectable en B.

b) Si B es finito, definamos:

$$\mathcal{F} = \{ Y \subseteq B \mid Y \preceq A \}$$

Tenemos que $\emptyset \in \mathcal{F}$ y como $B \notin \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ no puede obtenerse por agregación de los elementos de B de uno en uno. Esto quiere decir que existe $C \in \mathcal{F}$ tal que para todo $y \in B \setminus C$, $C \cup \{y\} \notin \mathcal{F}$. Sea $\varphi : C \longrightarrow A$ una inyección. Por la propiedad de C, φ forzosamente debe ser sobreyectiva. Pero esto implica que A es inyectable en el conjunto finito B, y por corolario del teorema 1.5, A es finito. Por el caso a), volvemos a obtener que A es inyectable en B.

NOTA: La hipótesis de finitud en el teorema 1.8 puede ser reemplazada por la hipótesis de que A y B sean conjuntos bien ordenados ([3]). Como el Axioma de Selección es equivalente al aserto que afirma que todo conjunto puede ser bien ordenado, la hipótesis de finitud en el teorema 1.8 puede ser omitida si está disponible el Axioma de Selección.

En lo que sigue, $A \prec B$ indica que A es inyectable en B pero no sobre B.

Teorema 1.9. *Si A y B son conjuntos y al menos uno de ellos es finito, entonces se verifica una y sólo una de las siguientes proposiciones:*

$$A \prec B, \qquad A \sim B, \qquad B \prec A.$$

PRUEBA. Por definición de $\prec$, tenemos que:

$$A \prec B \iff A \preceq B \wedge A \not\sim B.$$

Es decir: $A \sim B \vee A \prec B \iff A \preceq B$.
Suponiendo ahora que alguno de los conjuntos A, B sea finito, lo anterior y el teorema 1.5 permiten escribir:

$$A \not\sim B \wedge A \not\prec B \iff A \not\preceq B \implies B \preceq A \implies B \prec A.$$

Tenemos entonces que se verifica al menos una de las tres proposiciones del enunciado. Para probar que se verifica solamente una de las tres proposiciones, notemos que por definición de $\prec$, la proposición $A \sim B$ es incompatible con cada una de las otras dos proposiciones del enunciado. Por otra parte, si $A \prec B$ y $B \prec A$, entonces existen aplicaciones inyectivas y no sobreyectivas de A en B y de B en A, lo cual implica la existencia de aplicaciones inyectivas y no sobreyectivas de A en sí mismo y de B en sí mismo, en contradicción con el teorema 1.6, ya que es finito al menos uno de los conjuntos A, B.

NOTA: De acuerdo con el teorema de Cantor–Schröder–Bernstein, el que pueda verificarse a lo sumo una de las tres proposiciones en el enunciado del teorema 1.9, no depende de la hipótesis de finitud ni del Axioma de Selección; por otra parte, cuando se dispone del Axioma de Selección, puede demostrarse en general –sin la hipótesis de finitud– que al menos una de las tres proposiciones debe verificarse.

Definición D. Un conjunto E es *infinito* si y sólo si E no es finito.

El siguiente teorema muestra la asimetría fundamental de la dicotomía finitud–infinitud.

Teorema 1.10. Si E es infinito y F es finito, entonces F es inyectable en E pero E no es inyectable en F.

PRUEBA. Supondremos $F \neq \emptyset$, para no caer en el caso trivial.
Sea

$$\mathcal{F} = \{ X \subseteq F \mid X \text{ es inyectable en } E \}$$

Probaremos que $\mathcal{F}$ se obtiene por agregación de los elementos de F.
Como $\emptyset$ es inyectable en E, entonces $\emptyset \in \mathcal{F}$. Sea $X \in \mathcal{F}$ y supongamos $x \in F \setminus X$. Sea φ una aplicación inyectiva de X en E. Entonces $\varphi(X) \sim X \subseteq F$ implica (por corolario del teorema 1.5 y por finitud de F) que $\varphi(X)$ es finito. Entonces, como E es infinito, $\varphi(X)$ es un subconjunto propio de E. Esto implica que existe $y \in E \setminus \varphi(X)$. Sea ψ la extensión de φ al conjunto $X \cup \{x\}$, tal que $\psi(x) = y$. Entonces ψ es una inyección de $X \cup \{x\}$ en E y, por lo tanto, $X \cup \{x\} \in \mathcal{F}$, lo que muestra que $\mathcal{F}$ se obtiene por agregación de los elementos de F. Como F es finito, por teorema 1.2 $F \in \mathcal{F}$, es decir, F es inyectable en E. El corolario del teorema 1.5 muestra que por su parte, E no es inyectable en F.

2. La noción de instrumento de conteo finito.

Discutiremos aquí la noción de instrumento de conteo finito (definición E), mostrare-mos su esencial unicidad (teorema 2.5) y estableceremos su identificación con la noción de conjunto de los números naturales (teorema 2.13), tal como fue descrita axiomáticamente por Peano en 1889.

Si $(N, <)$ es un conjunto estrictamente ordenado y si $n \in N$, denotaremos $S(n)$ al segmento inicial de n, esto es:

$$S(n) = \{ x \in N \mid x < n \}.$$

El siguiente lema nos será útil. Su importancia radica en poner de manifiesto la capacidad de los conjuntos estrictamente ordenados con segmentos iniciales finitos, como *estructura analógica* para las comparaciones conjuntistas.

Lema 2.1. Si $(N, <)$ es un conjunto estrictamente ordenado y si $m, n \in N$, entonces:

i) $(m \leq n) \iff (S(m) \subseteq S(n)) \implies (S(m) \preceq S(n))$.

ii) $(m = n) \iff (S(m) = S(n)) \implies (S(m) \sim S(n))$.

iii) $(S(m) \prec S(n)) \implies (S(m) \subset S(n)) \iff (m < n)$.

Además si $S(n)$ es finito, entonces los símbolos de implicación $\implies$ en i), ii) y iii) pueden sustituírse por $\iff$.

PRUEBA.
i) $m \leq n \implies \forall x\,(x \in S(m) \implies x < n \implies x \in S(n)) \implies S(m) \subseteq S(n) \implies S(m) \preceq S(n)$. Además, si $S(m) \subseteq S(n)$ y se supone (por contradicción) $m \not\leq n$ entonces $n < m$, con lo cual $n \in S(m)$ y luego $n \in S(n)$, lo que nos dá la conclusión absurda $n < n$. Esto prueba la parte i).
ii) Empleando i) tenemos:

$$\begin{aligned} m = n &\iff (m \leq n \wedge n \leq m) \\ &\iff (S(m) \subseteq S(n) \wedge S(n) \subseteq S(m)) \\ &\iff S(m) = S(n) \implies S(m) \sim S(n)\,, \end{aligned}$$

lo cual prueba la parte ii).
iii) $m < n \implies S(m) \subseteq S(n) \wedge m \in S(n)$. Como $m \notin S(m)$, obtenemos: $S(m) \subset S(n)$. Recíprocamente: $S(m) \subset S(n) \implies (m \leq n \wedge \exists x\,(m \leq x < n)) \implies m < n$.
Para terminar la prueba, supondremos que $S(n)$ es finito.
Si $S(m) \sim S(n)$ entonces –por corolario del teorema 1.5– $S(m)$ es finito; supongamos (por contradicción) que $m \neq n$.. Entonces $m < n \vee n < m$ y por iii) se obtiene:

$$S(m) \subset S(n) \vee S(n) \subset S(m)\,,$$

en contradicción con el teorema 1.7. Luego

$$(m = n) \iff (S(m) = S(n)) \iff (S(m) \sim S(n)).$$

Por otra parte, se tiene:

$$S(m) \preceq S(n) \implies S(m) \prec S(n) \vee S(m) \sim S(n).$$

Usando ahora ii), iii) y lo probado en el párrafo anterior, tenemos:

$$S(m) \subset S(n) \vee S(m) = S(n),$$

es decir: $S(m) \subseteq S(n)$. En consecuencia:

$$(m \leq n) \iff (S(m) \subseteq S(n)) \iff (S(m) \preceq S(n)).$$

Finalmente, por aplicación de el teorema 1.7 tenemos:

$$S(m) \subset S(n) \implies S(m) \prec S(n),$$

con lo cual: $(S(m) \prec S(n)) \iff (S(m) \subset S(n)) \iff (m < n)$.

Hemos probado que un conjunto estrictamente ordenado $(N, <)$ en el cual todos los segmentos iniciales sean finitos es isomorfo al conjunto de todos los segmentos iniciales de los elementos de N provisto de la relación $\prec$, relación utilizable en un ámbito mucho más amplio que la relación $<$, a saber, en todo el ámbito de los conjuntos finitos. Esto hace ver la conveniencia de la siguiente definición, la cual adelanta un aspecto del instrumento de conteo finito:

Definición D. Diremos que un conjunto estrictamente ordenado $(N, <)$ es *s-finito* si todos sus segmentos iniciales son finitos.

El siguiente teorema de unicidad completará los preparativos de la definición central de este trabajo:

Teoprema 2.2. *Si $(N, <)$ es un conjunto estrictamente ordenado y E es un conjunto finito, existe a lo sumo un $n \in N$ tal que $E \sim S(n)$.*

PRUEBA. Sea E finito y supongamos que $m, n \in N$ son tales que $E \sim S(m)$ y $E \sim S(n)$. Entonces por corolario del teorema 1.5, $S(n)$ es finito y $S(m) \sim S(n)$. Usando el lema 2.1 se obtiene $m = n$.

Hemos reunido todo el material que da significado y relevancia a la noción de instrumento de conteo finito, que pasamos de inmediato a definir:

Definición E. Un *instrumento de conteo finito* es un conjunto estrictamente ordenado s–finito $(N, <)$ tal que para cada conjunto finito E existe $n \in N$ tal que $E \sim S(n)$.

El caracter instrumental del objeto matemático que acabamos de definir es claro, atendiendo a su capacidad total como estructura analógica para comparar conjuntos finitos arbitrarios a través del proceso de conteo. Como consecuencia inmediata del teorema 2.2 y de la definición E, tenemos el siguiente teorema de existencia y unicidad que permite, dado un instrumento de conteo finito N, asignar a cada conjunto finito E un parámetro con capacidad de representar eficazmente a E en la estructura ordenada de N, estructura con capacidad analógica para las comparaciones de E con cualquier otro conjunto finito.

Teorema 2.3 *Si $(N, <)$ es un instrumento de conteo finito, entonces para cada conjunto finito E existe un único $n \in N$ tal que $E \sim S(n)$.*

En todo lo que sigue, $(N, <)$ denota un instrumento de conteo finito. Si E es un conjunto finito, el único $n \in N$ tal que $E \sim S(n)$ lo denotaremos $|E|$. En esta notación deberíamos indicar la dependencia de $|E|$ respecto del instrumento de conteo finito N que estemos usando; sin embargo, el teorema 2.5 mostrará que tal dependencia es irrelevante. Nuestro próximo lema prepára el camino para obtener la unicidad esencial del instrumento de conteo finito. En el instrumento de conteo finito $(N', <')$ del que se habla en (2.4) y (2.5) usamos $S'(n')$ para el segmento inicial de $n' \in N'$ y $|E|'$ para aquel elemento de N' tal que $E \sim S'(|E|')$.

Lema 2.4 *Si $(N,<)$ y $(N',<')$ son instrumentos de conteo finito y $\varphi : N \longrightarrow N'$ es una biyección que preserva orden, entonces para cada $n \in N$ se verifica:*

$$\varphi(S(n)) = S'(\varphi(n))$$

PRUEBA.

$$\begin{aligned} m' \in \varphi(S(n)) &\iff \varphi^{-1}(m') \in S(n) \\ &\iff \varphi^{-1}(m') < n \\ &\iff m' < \varphi(n) \qquad (\text{pues } \varphi^{-1} \text{ también preserva orden}) \\ &\iff m' \in S(\varphi(n)). \end{aligned}$$

A continuación probaremos que el instrumento de conteo finito es esencialmente único, existiendo un único isomorfismo entre dos instrumentos de conteo finito.

Teorema 2.5 *Si $(N,<)$ y $(N',<')$ son instrumentos de conteo finito, existe una única biyección $\varphi : N \longrightarrow N'$ que preserva orden.*

PRUEBA.
UNICIDAD: Si $\varphi : N \longrightarrow N'$ y $\theta : N \longrightarrow N'$ son biyecciones que preservan orden, por lema 2.4, para cada $n \in N$ se tiene:

$$\begin{aligned} S'(\varphi(n)) &= \varphi(S(n)) \sim S(n) \\ \text{y} \quad S'(\theta(n)) &= \theta(S(n)) \sim S(n) \end{aligned}$$

Luego: $S'(\varphi(n)) \sim S'(\theta(n))$. Usando el lema 2.1 se concluye que $\varphi(n) = \theta(n)$, quedando probada la unicidad.
EXISTENCIA: Para cada $n \in N$ y cada $n' \in N'$ definimos:

$$\varphi(n) = |S(n)|' \quad \text{y} \quad \varphi'(n') = |S'(n')|.$$

Se tiene, por definición de $|\cdot|$, $|\cdot|'$, φ y φ':

$$S(n) \sim S'(\varphi(n)) \sim S(\varphi'(\varphi(n))).$$

Luego, aplicando el lema 2.1 se obtiene: $n = (\varphi' \circ \varphi)(n)$, es decir: $\varphi' \circ \varphi = id_N$. Por simetría, también se tiene: $\varphi \circ \varphi' = id_{N'}$. Esto prueba que φ es biyectiva.
Además, por lema 2.1, se tiene:

$$n_1 < n_2 \implies S(n_1) \prec S(n_2),$$

y como $S(n) \sim S'(\varphi(n))$ para todo n, entonces:

$$S'(\varphi(n_1)) \prec S'(\varphi(n_2)).$$

Usando nuevamente el lema 2.1 obtenemos: $\varphi(n_1) < \varphi(n_2)$. Esto prueba que φ preserva orden.

Dado un conjunto finito E, el elemento $|E|$ que le corresponde a E (tal que $E \sim S(|E|)$) es –debido al isomorfismo natural indicado en el teorema 2.5–, esencialmente independiente del instrumento de conteo finito E que estemos usando. Se justifica entonces la notación que hemos empleado y la siguiente definición:

Definición F. Si E es un conjunto finito, definimos el ***número de elementos de E*** como $|E|$, donde se subentiende el uso del correspondiente isomorfismo natural φ para la transformación de $|E|$ de un instrumento de conteo finito a otro.

El resto de esta sección está dedicada a mostrar (teorema 2.13) que el instrumento de conteo finito es un modelo de la clase de los números naturales descrita por los Axiomas de Peano. Una manera de expresar los Axiomas de Peano es la siguiente:

Existe un conjunto $\mathbb{N}$ y una "función sucesor" $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, tal que:

i) σ es inyectiva pero no sobreyectiva.

ii) (Principio de inducción matemática) Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es tal que $\Big(\mathbb{N} \setminus \sigma(\mathbb{N})\Big) \cap A \neq \emptyset$ y si además $n \in A \implies \sigma(n) \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $A = \mathbb{N}$.

Una consecuencia inmediata de i) y ii) es que $\mathbb{N} \setminus \sigma(\mathbb{N})$ posee un solo elemento. (Para ver esto, basta tomar un $e \in \mathbb{N} \setminus \sigma(\mathbb{N})$ y considerar el conjunto $A = \{e\} \cup \mathbb{N}$. Por ii) se prueba que $A = \mathbb{N}$ y esto prueba que $\mathbb{N} \setminus \sigma(\mathbb{N}) = \{e\}$.) En la axiomática original de Peano, e es la unidad. Para nosotros e resultará ser el número de elementos del conjunto vacío, es decir 0. Demos oficialmente su definición:

Definición G. 0 es el número de elementos del conjunto vacío.

Los siguientes lemas y definiciones allanarán el camino hacia el teorema 2.13.

Lema 2.6. 0 *es el primer elemento de* N.

PRUEBA. Por el lema 2.1, se tiene:

$$\begin{aligned} n \neq 0 &\implies S(n) \neq S(0) \sim \emptyset \\ &\implies S(0) = \emptyset \ \wedge \ S(n) \neq \emptyset \\ &\implies S(0) \prec S(n) \\ &\implies 0 < n\,. \end{aligned}$$

La siguiente definición descansa en los teoremas 1.1 y 2.3:

Definición H. Para cada $n \in N$ definimos el *sucesor de* n como aquel (único) $n^+ \in N$ tal que $S(n) \cup \{n\} \sim S(n^+)$.

Lema 2.7. $n < n^+$ *para todo* $n \in N$.

PRUEBA. $S(n) \subset S(n) \cup \{n\} \implies S(n) \prec S(n^+) \implies n < n^+$.

En la próxima definición usamos implícitamente (1.5), (2.3) y (2.6):

Definición I. I Para cada $n \in N \setminus \{0\}$ definimos el antecesor de n como aquel (único) $n^- \in N$ tal que $S(n) \setminus \{0\} \sim S(n^-)$.

Lema 2.8. $n^- < n$ *para todo* $n \in N \setminus \{0\}$.

PRUEBA.

$$\begin{aligned} n \in N \setminus \{0\} &\implies 0 < n \\ &\implies 0 \in S(n) \\ &\implies S(n) \setminus \{0\} \subset S(n) \\ &\implies S(n^-) \subset S(n) \\ &\implies n^- < n\,. \end{aligned}$$

Lema 2.9. *Si* $n \in N \setminus \{0\}$, *entonces* $(n^-)^+ = n$.

PRUEBA. Por definición, siempre se verifica que $n \notin S(n)$ y además, por lema 2.6, para $n \in N \setminus \{0\}$ se tiene: $0 \in S(n)$. En consecuencia, haciendo uso del lema 2.1 y de las definiciones F e I se tiene:

$$\begin{aligned} S(n) \setminus \{0\} \sim S(n^-) &\implies S(n) \sim S(n^-) \cup \{n^-\} \\ &\implies S(n) \sim S((n^-)^+) \\ &\implies n = (n^-)^+\,. \end{aligned}$$

El próximo teorema muestra que, tomando como función sucesor a la aplicación $n \mapsto n^+$, en el instrumento de conteo finito N, se verifica el axioma i) de Peano.

Teorema 2.10. *$n \mapsto n^+$ define una función σ de N en N que es inyectiva y no sobreyectiva. Además:* $\mathbb{N} \setminus \sigma(\mathbb{N}) = \{0\}$.

PRUEBA. Recordando que $x \notin S(x)$, empleando el lema 2.1 se tiene:

$$\begin{aligned} m^+ = n^+ &\implies S(m) \cup \{m\} \sim S(n) \cup \{n\} \\ &\implies S(m) \sim S(n) \\ &\implies m = n\,, \end{aligned}$$

lo que muestra que $n \mapsto n^+$ de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ es inyectiva. Veamos la no sobreyectividad:

$$S(x^+) \sim S(x) \cup \{x\} \neq \emptyset = S(0) \implies x^+ \neq 0 \quad \forall x \in N.$$

Para completar la prueba, notemos que ya tenemos $0 \in \mathbb{N} \setminus \sigma(\mathbb{N})$. Si $x \neq 0$, por lema 2.9 tenemos $(x^-)^+ = x$, lo que muestra que $x \in \sigma(\mathbb{N})$. Con esto se concluye que $\mathbb{N} \setminus \sigma(\mathbb{N}) = \{0\}$.

Para obtener el principio de inducción matemática, probaremos primero que el orden del instrumento de conteo finito es un buen orden:

Teorema 2.11.it Si $(N, <)$ es un instrumento de conteo finito, entonces $(N, \leq)$ es un buen orden.

PRUEBA. Sea A un subconjunto no vacío de N. Definamos:

$$B = \bigcap_{x \in A} S(x).$$

Como existe $a \in A$, entonces $B \subseteq S(a)$. Luego (por corolario del teorema 1.5) B es finito. Sea $b = |B|$. Como $B \subseteq S(x)$, para todo $x \in A$, entonces $S(b) \preceq S(x)$ para todo $x \in A$. Por lema 2.1 tenemos: $b \leq x$ para todo $x \in A$. Con esto, basta probar que $b \in A$. Supongamos (por contradicción) que $b \notin A$. Aplicando el lema 2.1, se tiene:

$$\begin{aligned} b \notin A &\implies b < x \quad \forall x \in A \\ &\implies S(b) \prec S(x) \quad \forall x \in A \\ &\implies S(b) \cup \{b\} \preceq S(x) \quad \forall x \in A \\ &\implies S(b^+) \preceq S(x) \quad \forall x \in A \\ &\implies S(b^+) \subseteq S(x) \quad \forall x \in A \\ &\implies S(b^+) \subseteq B \sim S(b) \\ &\implies S(b^+) \preceq S(b) \subset S(b^+)\,, \end{aligned}$$

lo cual implica la existencia de una inyección no sobreyectiva de $S(b^+)$ en sí mismo; por teorema 1.6 esto no es posible ya que $S(b^+)$ es finito.

La prueba del principio de inducción matemática a partir del buen orden del instrumento de conteo finito $(<, N)$ es standard. Veámosla en el contexto de nuestro enfoque:

Teorema 2.12. *Si $(N, <)$ es un instrumento de conteo finito, y si $A \subseteq N$ es tal que $0 \in A$ y $\forall n (n \in A \implies n^+ \in A)$, entonces $A = N$.*

PRUEBA. Sea A un subconjunto de N que satisface las hipótesis. Supongamos (por contradicción) que $A \neq N$. Entonces $N \setminus A \neq \emptyset$ y por teorema 2.11, $N \setminus A$ posee primer elemento, digamos b. Como $0 \in A$, tenemos que $b \neq 0$ y luego existe el antecesor $b^- \in N$. Como $b^- < b$, entonces $b^- \notin N \setminus A$, por lo cual $b^- \in A$. Entonces por lema 2.9, $(b^-)^+ = b \in A$, lo cual es imposible. Esto prueba que $A = N$.

Reuniendo los teoremas 2.10 y 2.12, obtenemos por fin la identificación del instrumento de conteo finito con el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales de Peano:

Teorema 2.13. *Si $(N, <)$ es un instrumento de conteo finito, entonces N con la función $n \mapsto n^+$ satisface los axiomas de Peano para la Aritmética.*

3. Existencia del instrumento de conteo.

Probaremos que la existencia de un conjunto infinito es condición necesaria y suficiente para la existencia del instrumento de conteo finito. Para esto, si $\mathcal{I}$ es un conjunto infinito, denotaremos $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ a la colección de todos los subconjuntos finitos de $\mathcal{I}$ y en $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ consideraremos la relación de equivalencia conjuntista $\sim$. $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}$ denotará la correspon-diente colección de las clases de equivalencia. Dotaremos a $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}$ con un orden estricto $<$ y probaremos que $(\mathcal{N}_{\mathcal{I}}, <)$ es un instrumento de conteo finito.

Lema 3.1. *Sean A, B conjuntos tales que $A \preceq B$ y B es finito. Si $\leq$ es un buen orden en B, entonces existe $a \in B$ tal que $A \sim S(a)$, donde $S(a) = \{ x \in B \mid x < a \}$.*

PRUEBA. Sea n_o el primer elemento de $(B, \leq)$. Como B es finito, entonces (por teorema 1.4) el orden inverso de $\leq$ también es un buen orden en B y por esto $(B, \leq)$ posee último elemento, digamos ω. Si $A \preceq B$ entonces el conjunto

$$C = \{ t \in B \mid A \preceq S(t) \}$$

es no vacío ya que $\omega \in C$. Sea b_o el primer elemento de C. Tenemos: $A \preceq S(b_o)$. Basta probar que $A \not\prec S(b_o)$. Supongamos (por contradicción) que $A \prec S(b_o)$. Entonces $S(b_o) \neq \emptyset$, por lo que $S(b_o)$ tiene último elemento, digamos c. Como $x \leq c < b_o$ para todo $x \in S(b_o)$, entonces $S(b_o) = S(c) \cup \{c\}$ y la unión es disjunta. Usando la suposición $A \prec S(b_o)$ obtenemos $A \preceq S(c)$, lo cual implica $c \in C$; esto –junto con $c \in S(b_o)$– no es posible, ya que b_o es el primer elemento de C.

Definición J¿ Para $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{N}_{\mathcal{I}}$ escribiremos $\mathcal{X} < \mathcal{Y}$ si existen $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$ tales que $X \prec Y$.

Teorema 3.2. *La relación $<$ definida en (J) es un orden estricto.*

PRUEBA. Es inmediato que $<$ es transitiva. La propiedad de tricotomía es consecuencia inmediata del teorema 1.9.

Lema 3.3. *Para cada $X \in \mathcal{X} \in \mathcal{N}_{\mathcal{I}}$ se verifica: $X \sim S(\mathcal{X})$.*

PRUEBA. Sean $X \in \mathcal{X} \in \mathcal{N}_{\mathcal{I}}$. Si $X = \emptyset$ el lema es inmediato, así es que supondremos $X \neq \emptyset$. Como X es un subconjunto finito de $\mathcal{I}$, por el teorema 1.3, existe un buen orden en X. Si $t \in X$, $\sigma(t)$ denotará el segmento inicial de t respecto del orden estricto inducido por el buen orden que estamos considerando en X. Si $t \in X$ tenemos $\sigma(t) \subset X$, por lo cual $\sigma(t) \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$. Debido a la finitud de X tenemos que $\sigma(t) \prec X$; en consecuencia la (única) clase de equivalencia $\mathcal{Z}$ a la que pertenece $\sigma(t)$ verifica $\mathcal{Z} < \mathcal{X}$. Así, la correspondencia $t \mapsto \mathcal{Z}$ define una función $\varphi : X \longrightarrow S(\mathcal{X})$. Probaremos que φ es inyectiva. En efecto:

$$\begin{aligned} \varphi(t) = \varphi(t') = \mathcal{Z} &\Longrightarrow \sigma(t) \in \mathcal{Z} \ \wedge \ \sigma(t') \in \mathcal{Z} \\ &\Longrightarrow \sigma(t) \sim \sigma(t') \\ &\Longrightarrow t = t' \quad \text{(por lema 2.1).} \end{aligned}$$

Finalmente, para probar que φ es sobreyectiva, basta probar que para cada $\mathcal{Y} \in S(\mathcal{X})$ existe $t \in X$ tal que $\sigma(t) \in \mathcal{Y}$. Si $\mathcal{Y} \in S(\mathcal{X})$, entonces $\mathcal{Y} < \mathcal{X}$, por lo que existen $Y \in \mathcal{Y}$, $Z \in \mathcal{X}$ tales que $Y \prec Z$; como $Z \sim X$, tenemos que $Y \prec X$. Sea $f : Y \longrightarrow X$ una aplicación inyectiva y no sobreyectiva. Por el lema 3.1, existe $t \in X$ tal que $f(Y) \sim \sigma(t)$, por lo cual $Y \sim \sigma(t)$ y como $Y \in \mathcal{Y}$, obtenemos: $\sigma(t) \in \mathcal{Y}$.

Teorema 3.4. *La existencia de un conjunto infinito es condición necesaria y suficiente para la existencia de un instrumento de conteo finito.*

PRUEBA. La necesidad es consecuencia inmediata de los teoremas 2.10 y 1.6. Veamos la suficiencia. Por teorema 3.2, basta probar que $(\mathcal{N}_{\mathcal{I}}, <)$ es s-finito y que para cada conjunto finito E, existe $\mathcal{E} \in \mathcal{N}_{\mathcal{I}}$ tal que $E \sim S(\mathcal{E})$. Lo primero es consecuencia inmediata del lema 3.3; para probar lo segundo, nos damos cualquier conjunto finito E y usamos (por primera y única vez) la hipótesis de ser $\mathcal{I}$ infinito, lo que junto con el teorema 1.10 permite establecer la existencia de una función inyectiva $f : E \longrightarrow \mathcal{I}$; con esto tenemos $E \sim f(E) \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ y si $\mathcal{E} \in \mathcal{N}_{\mathcal{I}}$ es la clase a la que pertenece $f(E)$, por lema 3.3 tenemos $f(E) \sim S(\mathcal{E})$, con lo cual: $E \sim S(\mathcal{E})$.

4. Conclusión.

Nuestra discusión muestra que, para los efectos de la fundamentación de la aritmética en un marco conjuntista, puede usarse el marco teórico indicado en la introducción y reemplazar el axioma del infinito de la teoría de conjuntos ZF (que postula la existencia de un conjunto sucesor) por un axioma más específico que postule directamente la e-xistencia de un instrumento de conteo finito. Esta alternativa es una forma de postular la existencia del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales de Peano, dejando transparente en el postulado el significado instrumental de $\mathbb{N}$Èquivalentemente –cuando se desee un enfoque "constructivo"–, el axioma del infinito de la teoría ZF puede sustituirse por un axioma menos específico que simplemente postule la existencia de un conjunto infinito $\mathcal{I}$. A partir de $\mathcal{I}$ se puede construir el instrumento de conteo finito de manera más o menos standard. Es importante subrayar que bajo cualquiera de estas alternativas se obtiene no sólo el conjunto $\mathbb{N}$, sino que sus propiedades fundamentales y, en particular, el principio de inducción matemática.

La estructura algebraica del instrumento de conteo finito $\mathbb{N}$ se puede obtener directamente de las operaciones conjuntistas de unión disjunta y producto cartesiano. (En [2] se discute a fondo el caracter cerrado de la clase de los conjuntos finitos bajo las operaciones conjuntistas habituales). Así presentada la estructura algebraica de $\mathbb{N}$, el instrumento de conteo finito es también un instrumento de *analogización* y *simulación* de las combinaciones conjuntistas finitas, aspecto que es importante subrayar desde las primeras etapas de la conceptualización numérica, superando esa enseñanza puramente algorítmica que impide la interpretación y la aplicación de la matemática por parte de nuestros estudiantes.

5. Bibliografía

[1] Alarcón Athens, W., *Una fundamentación instrumental de la aritmética*, Ciencia y Tecnología, 12(1–2): 157–171, 1988. Universidad de Costa Rica. San José, Costa Rica.

[2] Alarcón Athens, W., *Estudio de una definición no aritmética de finitud conjuntista*, Ciencia y Tecnología, 11(2): 5–15, 1988. Universidad de Costa Rica. San José, Costa Rica.

[3] Cohen P., *Set theory and the Continuum Hyphotesis*, Math. Lecture Notes Series, Benjamin. New York, 1966.

[4] Dedekind, R., *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, 1888. Trad. al inglés en *Essays on the Theory of Numbers*, Open Court, 1909.

UNA RESOLUCIÓN ITERATIVA DE LA ECUACIÓN DE TERCER GRADO

Winston Alarcón Athens
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

Resumen. Mostramos un método numérico iterativo para encontrar las raíces reales de la ecuación de tercer grado reducida $x^3 + Bx + C = 0$. El método no requiere partir con un cálculo aproximado de la raíz, sino sólo con su localización previa en uno de los intervalos $]-\infty, -\sqrt{|B|/3}[$, $]-\sqrt{|B|/3}, \sqrt{|B|/3}[$, $]\sqrt{|B|/3}, +\infty[$. Las fórmulas de recurrencia se obtienen directa y elementalmente de la ecuación a resolver, por lo que el método es implementable para su enseñanza en la educación media. Hay establilidad y control del error.

Introducción. Como se sabe, la ecuación de tercer grado es resoluble por radicales, pero la fórmula a utilizar no sólo carece de la necesaria sencillez que permita su uso en la enseñanza, sino que a menudo requiere una incursión en el álgebra de los números complejos, aún en casos en que las raíces sean reales. El uso generalizado de las calculadoras de bolsillo pone al alcance de un amplio público el empleo de diversos métodos de cálculo numérico, entre los cuales destacan los métodos de iteración simple. En la presente ponencia se expone un método numérico de aproximaciones sucesivas recientemente publicado en [1], para encontrar las raíces reales de la ecuación de tercer grado reducida†

$$x^3 + Bx + C = 0 \qquad \text{con} \quad B, C \neq 0 \tag{1}$$

El método que exponemos, no requiere de ningún cálculo aproximado inicial y sus fórmulas de recurrencia son fácilmente reconstruibles a partir de la propia ecuación (1); por ello, puede ser empleado no sólo como un ejemplo introductorio a los métodos de iteración simple, sino que, debido a su estabilidad y razonable rapidez de convergencia, puede usarse como un método de cálculo efectivo. En cuanto a la fundamentación teórica, aquí nos limitaremos a señalar sus ideas esenciales. El lector interesado puede consultar los detalles en [1].

2. El método. Con referencia a la ecuación (1), sea $a = \sqrt{|B|/3}$, considérese la función $f(x) = x^3+Bx+C$ y determínese el signo de $f(-a)$ y de $f(a)$.

i) Si $f(-a)f(a) = 0$, ¡Enhora buena!

ii) Si $f(-a)f(a) < 0$, hay una raíz $|\rho| < a$. Despejando la x del término de primer grado en la ecuación (1), se tiene:

$$x^3 + Bx + C = 0 \iff Bx = -(x^3 + C) \iff x = -(x^3 + C)/B$$

La siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ -(x_{n-1}^3 + C)/B & \text{si} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{2}$$

converge a ρ.

iii) Si $f(a) < 0$, hay una raíz $\rho' > a$. Despejando la x del término de tercer grado en la ecuación (1), se tiene:

$$x^3 + Bx + C = 0 \iff x^3 = -(Bx + C) \iff x = -\sqrt[3]{Bx + C}$$

† Si la ecuación de tercer grado que se trata de resolver tiene término cuadrático, digamos $a_0t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3 = 0$, mediante el cambio de variable $t = x - \frac{a_1}{3a_0}$ puede reducirse a la forma (1).

y la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$x_n = \begin{cases} a & \text{si} \quad n = 0 \\ -\sqrt[3]{Bx_{n-1} + C} & \text{si} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{3}$$

converge a ρ'.

iv) Si $f(-a) > 0$, hay una raíz $\rho'' < -a$. Usamos la misma iteración del caso anterior, pero arrancamos con $x_0 = -a$, es decir usamos la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$x_n = \begin{cases} -a & \text{si} \quad n = 0 \\ -\sqrt[3]{Bx_{n-1} + C} & \text{si} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{4}$$

y la sucesión así definida converge a ρ''.

3. Ejemplos. Antes de examinar la fundamentación teórica del método propuesto, veamos algunos ejemplos que ilustrarán la marcha de los cálculos.

Ejemplo 1.

$$x^3 - x - 1 = 0 \qquad a = .577350\ldots$$
$$f(-a) = -.615099\ldots < 0 \qquad f(a) = -1.3\ldots < 0$$

Hay una única raíz real y esa raíz es mayor que a. La marcha de los cálculos con la sucesión (3) es la siguiente:

n	x_n
0	0.577350...
1	1.164061...
2	1.293470...
3	1.318755...
4	1.323584...
5	1.324502...

n	x_n
6	1.324677...
7	1.324710...
8	1.324716...
9	1.324717...
10	1.324717...
11	1.324717...

Ejemplo 2.

$$x^3 + x - \tfrac{1}{5} = 0 \qquad a = .577350\ldots$$
$$f(-a) = -.56\ldots < 0 \qquad f(a) = .96\ldots > 0$$

Hay raíz una única raíz real y está entre $-a$ y a. La marcha de los cálculos con la sucesión (2) es la siguiente:

n	x_n
0	0
1	.200000...
2	.192000...
3	.192922...
4	.192819...
5	.192831...
6	.192829...
7	.192829...

Ejemplo 3.

$$x^3 - x + \tfrac{1}{5} = 0 \qquad a = .577350\ldots$$
$$f(-a) = .58\ldots > 0 \qquad f(a) = -.18\ldots < 0$$

Hay tres raíces reales $-a < \rho < a$, $\rho' > a$ y $\rho'' < -a$. La marcha de los respectivos cálculos con las sucesiones (2), (3) y (4) es la siguiente:

n	x_n
0	0
1	.200000...
2	.208000...
3	.208998...
4	.209129...
5	.209146...
6	.209148...
7	.209148...

n	x_n
0	−0.577350...
1	−0.919472...
3	−1.073856...
5	−1.086904...
7	−1.087944...
9	−1.088026...
11	−1.088033...
12	−1.088033...

n	x_n
0	.577350...
1	.722628...
5	.872615...
9	.878666...
13	.878877...
17	.878884...
19	.878885...
20	.878885...

4. Fundamentación del método.

Definamos las funciones g y h de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$, mediante:

$$g(x) = -\sqrt[3]{Bx + C}\,, \qquad h(x) = -(x^3 + C)/B$$

Observando que $g(h(x)) = x = h(g(x))$ para todo $x \in \mathbf{R}$, tenemos que g y h son inversa una de la otra.

i) Consideremos en primer lugar el caso $f(-a)f(a) < 0$.

i.1) Supongamos $B > 0$, $C < 0$.

Como $B > 0$, la derivada f' es positiva y f es estrictamente creciente en $\mathbf{R}$. Por esto, la ecuación (1) posee una única raíz real, digamos ρ. Como $f(-a)$ y $f(a)$ tienen distinto signo, también tenemos $f(-a) < 0 < f(a)$. Como $f(0) = C < 0$, tenemos $f(0) < 0 < f(a)$ y por continuidad de f: $\rho \in]0, a[$. De $f(a) > 0$ y $-C > 0$ se obtiene: $C^2 < \frac{16}{27}B^3$. En consecuencia: $h(h(0)) = h(-C/B) = \frac{C^3}{B^4} - \frac{C}{B} > \left(\frac{16}{27} - 1\right)\frac{C}{B} > 0$. Además, como $B > 0$, h y su inversa g son estrictamente decrecientes en $\mathbf{R}$. En particular, h es estrictamente decreciente en $[0, -C/B]$, por lo que la desigualdad $h(-C/B) > 0$ permite escribir: $0 < h(-C/B) \leq h(t) \leq h(0) = -C/B$ para todo $t \in [0, -C/B]$. Esto muestra que la restricción de h al intervalo $[0, -C/B]$ es una función de $[0, -C/B]$ en $[0, -C/B]$.

Se prueba que la sucesión $h^{2n}(0)$, obtenida por composición de h consigo misma $2n$ veces ($n \in \mathbb{N}$), es estrictamente creciente y es acotada superiormente por el número ρ; por ello converge a cierto número real $L \in]0, \rho]$. Similarmente se prueba que la sucesión $(h^{2n+1}(0))$ converge decrecientemente a un número real $M \in [\rho, -C/B]$.

Tenemos entonces que $L \leq \rho \leq M$, que L, ρ y M pertenecen al intervalo $[0, -C/B]$. Cada uno de estos tres números es raíz de la ecuación $h(x) = g(x)$. Se prueba que $L = \rho = M$, mostrando que la ecuación $h(x) = g(x)$ posee una única raíz en el intervalo $[0, -C/B]$.

i.2) El caso $B < 0$ y $C > 0$, manteniendo la hipótesis $f(-a)f(a) < 0$.

Como $B < 0$, f es estrictamente decreciente en $[-a, a]$. Esto, más la hipótesis implica $f(a) < 0$. Como $C = f(0) > 0$, tenemos que f cambia de signo en $[0, a]$ y por continuidad de f deducimos la existencia de una única raíz $\rho \in]0, a[$.
Se prueba que la sucesión $h^n(0)$ es estrictamente creciente y acotada superiormente por ρ, lo cual muestra la convergencia de la sucesión definida por (2) a cierto número $L \leq \rho$. Observando que la continuidad de h implica que L es una raíz de la ecuación $h(x) = x$, deducimos que $L = \rho$, puesto que ρ es la única raíz de esta ecuación en el intervalo $[0, a]$.

Los casos $f(-a)f(a) < 0$ con $B > 0$ y $C > 0$, y $f(-a)f(a) < 0$ con $B < 0$ y $C < 0$ se reducen respectivamente a los casos i.1) e i.2).

ii) Supongamos $f(a) < 0$. Como f es continua y $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$, hay una raíz $\rho' > a$. Observando que las ecuaciones $f(x) = 0$, $g(x) = x$ y $h(x) = x$ son equivalentes, tenemos que $g(\rho') = \rho' = h(\rho')$.

ii.1) Consideremos el caso $B > 0$. h y g son estrictamente decrecientes y se concluye que la restricción de g al intervalo $[a, g(a)]$ es una función de $[a, g(a)]$ en $[a, g(a)]$. Además se prueba que

$$|g'(t)| < 1 \quad \text{para todo } t \in [a, g(a)]$$

Esto muestra que $g : [a, g(a)] \longrightarrow [a, g(a)]$ es una aplicación contractiva, concluyéndose ([2], [3]) que la sucesión (3) converge al punto fijo $\rho' \in [a, g(a)]$ (ver figura 1).

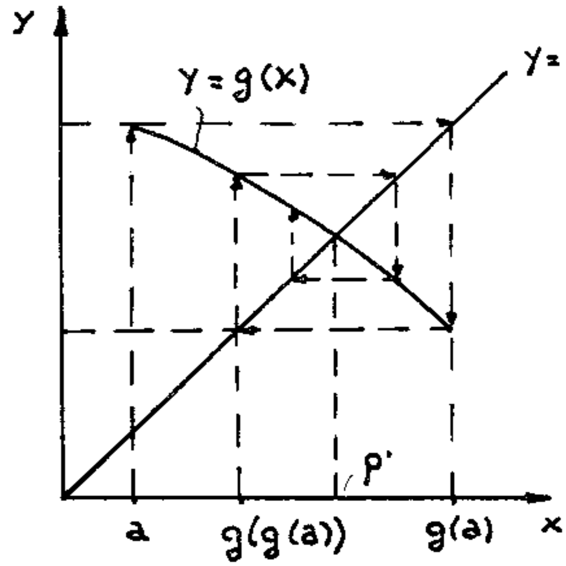


figura 1

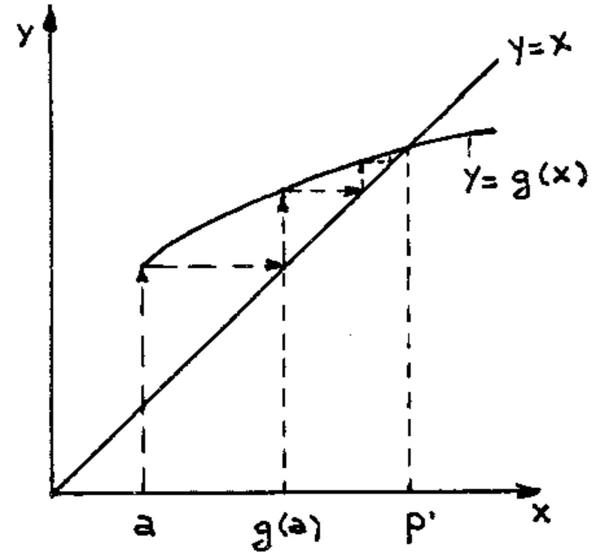


figura 2

ii.2) Consideremos el caso $B < 0$. Tenemos que g y h son estrictamente crecientes en $\mathbf{R}$, obteniéndose:

$$g([a, \rho']) \subseteq [a, \rho'],$$

junto con la desigualdad

$$|g'(t)| < 1 \quad \text{para todo } t \in [a, \rho']$$

Esto nos permite aplicar nuevamente el principio de las aplicaciones contractivas a la función $g : [a, \rho'] \longrightarrow [a, \rho']$, concluyendo que la sucesión (3) converge a ρ' (ver figura 2)

iii) El caso $f(-a) > 0$ se reduce al caso $f(a) < 0$, cambiando x por $-x$ y cambiando las funciones f, g, h por las funciones $-f$, $-g$ y $-h$ respectivamente.

Referencias.

[1] W. Alarcón Athens, *Resolución de la ecuación de tercer grado por aproximaciones sucesivas*, Ciencias Matemáticas, v.1, No.1, Universidad de Costa Rica, San José, 1990.

[2] N. S. Bakhvalov, *Numerical Methods*, Ed. MIR, Moscú, 1977.

[3] T. M. Apostol, *Análisis Matemático*, Ed. Reverté, Barcelona, 1977.

UN LEMA SOBRE FACTORES INTEGRANTES

Winston Alarcón Athens
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

Resumen. Proponemos un método general para establecer la existencia y el cálculo de factores integrantes que sólo dependan de una función dada de dos variables. El método generaliza y unifica los criterios que aparecen en la literatura.

Introducción. Como se sabe, la ecuación diferencial no exacta

$$M\,dx + N\,dy = 0 \tag{1}$$

(resoluble en un abierto U del plano xy) posee factores integrantes pero no se conoce una fórmula explícita para tales factores, o —lo que es lo mismo— no se conoce un procedimiento general para *reducir* (1) *a cuadraturas*. La ecuación diferencial de los factores integrantes,

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \tag{2}$$

es una ecuación en derivadas parciales cuya dificultad para ser resuelta es, en general, no menor que la que presenta la ecuación original. Sin embargo, en ciertas circunstancias es posible reducir a cuadraturas el cálculo de un factor integrante. Los ejemplos más frecuentemente citados en los textos ([2], [3], [4]), resultan cuando la ecuación posee un factor integrante que sólo depende de una de las dos variables x, o y, lo cual es posible reconocer de antemano examinando si ciertas funciones determinadas por M y N tienen esa propiedad.

Por ejemplo, si $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ es una función $f(x)$ que sólo depende de x, entonces la ecuación (1) posee un factor integrante $\mu = \mu(x)$ que sólo depende de x, el cual queda reducido a cuadraturas mediante la fórmula $\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$.

Similarmente, si $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ es una función $g(y)$ que sólo depende de y, entonces la ecuación (1) posee un factor integrante $\mu = \mu(y)$ que sólo depende de y, el cual queda reducido a cuadraturas mediante la fórmula $\mu(y) = e^{\int g(y)dy}$.

En algunos textos ([2]) se examinan —además de los dos casos anteriores— otras situaciones especiales, como por ejemplo, cuando la ecuación (1) posee un factor integrante que sólo depende de $x + y$, o sólo de xy, o sólo de x/y, etc. Naturalmente, la lista de posibilidades es interminable y a la par de cada situación especial hay dos fórmulas que aprender: una, que permite saber si la ecuación (1) posee un factor integrante que sólo dependa de cierta función dada $z = z(x, y)$ de las variables x, y; y la otra, que reduce a cuadraturas el cálculo del respectivo factor integrante.

En esta ponencia exponemos un criterio general desarrollado por el autor ([1]) para establecer la existencia de factores integrantes especiales, junto con una fórmula para su cálculo. Mediante ese criterio el estudiante sólo necesita aprender dos fórmulas, mediante las cuales podrá deducir en forma inmediata las $2n$ ($n = 2, 3, 4, \ldots$) fórmulas particulares de los textos.

El método. Supondremos que $z = M(x, y)$ y $z = N(x, y)$ son funciones continuas en un dominio rectangular $U =]a, b[\times]c, d[$ del plano cartesiano y que en U están definidas y son continuas las derivadas parciales $\frac{\partial M}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ y $\frac{\partial N}{\partial y}$. Supondremos también que la diferencia $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$ nunca se anula en U, por lo que la ecuación (1) es no exacta en U.

El criterio general es el siguiente:

Lema. Sea $z = z(x, y)$ una función real definida en $U =]a, b[\times]c, d[$, tal que las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ están definidas y son continuas en U y la función auxiliar φ_z definida por:

$$\varphi_z = \frac{M\frac{\partial z}{\partial y} - N\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}} \tag{3}$$

está definida y nunca se anula en U. Entonces la ecuación (1) admite en U un factor integrante que sólo depende de z si[(*)] la función auxiliar φ_z sólo depende de z. En caso afirmativo, es decir si $\varphi_z = f \circ z$, un factor integrante para (1) queda dado por:

$$\mu(x, y) = \exp\Big(-\int_{z(a,b)}^{z(x,y)} \frac{dt}{f(t)}\Big) \tag{4}$$

donde exp denota la función exponencial y (a, b) es un punto de U.

Prueba. Sea $z = z(x, y)$ una función que cumpla las hipótesis. Obsérvese que debido a las condiciones impuestas, el valor recíproco de φ_z dada por (3) es una función continua (y por lo tanto integrable) a lo largo de cualquier camino regular en U. Como φ_z sólo depende de z, tenemos que $\varphi_z = f \circ z$, donde f está definida y es continua en $z(U)$; entonces la función μ definida en U mediante (4) sólo depende de z y —por verificación directa— satisface la ecuación (2), esto es, tal μ es un factor integrante para (1) en U.

Corolario. Sean z_1, z_2 dos funciones admisibles para la ecuación (1) en U. Entonces (1) admite un factor integrante que sólo depende de

$$\begin{array}{rll} z_1 + z_2 & \text{si y sólo si} & \varphi_{z_1} + \varphi_{z_2} \ \text{ sólo depende de } \ z_1 + z_2 \\ z_1 \cdot z_2 & \text{si y sólo si} & \varphi_{z_1} \cdot z_2 + z_1 \cdot \varphi_{z_2} \ \text{ sólo depende de } \ z_1 \cdot z_2 \\ \dfrac{z_1}{z_2} & \text{si y sólo si} & \dfrac{\varphi_{z_1} \cdot z_2 - z_1 \cdot \varphi_{z_2}}{z_2^2} \ \text{ sólo depende de } \ \dfrac{z_1}{z_2} \end{array}$$

Ejemplo. Para ecuación $(y^2 + xy + 1)\,dx + (x^2 + xy + 1)\,dy = 0$ tenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = (2y + x) - (2x + y) = y - x \neq 0\,,$$

por lo que no es exacta. Ahora, para $z = x$:

$$\varphi_z = \frac{-N}{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}} = -\frac{x^2 + xy + 1}{y - x}\,,$$

y el criterio falla ya que φ_z no depende sólo de x. Para $z = y$:

$$\varphi_z = \frac{M}{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}} = \frac{y^2 + xy + 1}{y - x}\,,$$

que no depende sólo de y, así es que todavía no sabemos cómo calcular un factor integrante para nuestra ecuación. Sin embargo (usando el corolario y los dos cálculos anteriores), para $z = x + y$ se tiene:

$$\varphi_z = \varphi_{x+y} = \varphi_x + \varphi_y = -\frac{x^2 + xy + 1}{y - x} + \frac{y^2 + xy + 1}{y - x} = \frac{y^2 - x^2}{y - x} = x + y = z\,,$$

(*) El teorema también es "sólo si". Ver [1].

sólo depende de $x+y$. Entonces la ecuación admite un factor integrante que sólo depende de $x+y$, el cual —de acuerdo con (4)— puede calcularse mediante

$$\mu(x+y) = \exp\Big(-\int_1^{x+y}\frac{dz}{z}\Big) = e^{-\ln(x+y)} = \frac{1}{x+y}$$

Notemos además que para $z = xy$:

$$\varphi_z = \varphi_{xy} = \varphi_x y + x\varphi_y = -\Big(\frac{x^2+xy+1}{y-x}\Big)y + x\Big(\frac{y^2+xy+1}{y-x}\Big) = \frac{x-y}{y-x} = -1\,,$$

sólo depende de xy, por lo que la ecuación también admite un factor integrante que sólo depende de xy, a saber:

$$\mu(xy) = \exp\Big(\int_0^{xy} dz\Big) = e^{xy}$$

Referencias.

[1] W. Alarcón, *Un criterio general sobre factores integrantes especiales*, Matemática UNA Nº 4–5, Heredia, Costa Rica, 1989, pp. 1–5.

[2] L. Elsgoltz, *Ecuaciones diferenciales y Cálculo Variacional*, MIR (Moscú) 1969, pp. 38-41.

[3] L. M. Kells, *Ecuaciones Diferenciales Elementales*, McGraw-Hill (New York) 1965, pp. 44-46.

[4] M. R. Spiegel, *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas*, Prentice Hall Hispanoamericana (México) 1983, pp. 48-52.

ALGEBRAS ESTABLEMENTE EQUIVALENTES CON UNA ALGEBRA HEREDITARIA MANSA

Juan Boza Cordero

RESUMEN

En este trabajo se estudian ciertas características del diagrama de Auslander-Reiten de un álgebra establemente equivalente con un álgebra de dimensión finita hereditaria mansa, características que se utilizan luego par generalizar algunos resultados obtenidos en [6], para el caso de álgebras de tipo de representación infinito.

ABSTRACT

In this paper are studied certain characteristics of the Auslander-Reiten diagram of an algebra stably equivalent to a finite-dimensional tame hereditary algebra, which are then used to generalize some results of [6], to the case of algebras of infinite representation type.

1. PRELIMINARES

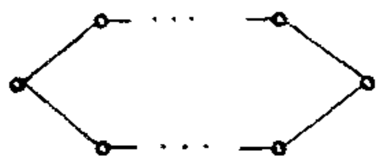
A lo largo de este trabajo, todas las álgebras son k-álgebras de dimensión finita, sobre un campo k algebraicamente cerrado. Si A es un álgebra, se denota por modA la categoría de los A-módulos izquierdos finitamente generados. El diagrama de Auslander-Reiten de A tiene por puntos las clases de isomorfía [M] de los A-módulos inescindibles M de modA. Por definición, existe una flecha $[M] \longrightarrow [N]$ si existe una aplicación irreducible $M \longrightarrow N$. Recuerde que un morfismo de A-módulos $f: M \longrightarrow N$ se llama irreducible si f no es un epimorfismo escindido ni un monomorfismo escindído, y para toda factorización $f = gh$, $M \xrightarrow{h} X \xrightarrow{g} N$, h es un monomorfismo escindido o g es un epimorfismo escindido.

Una sucesión exacta $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ en modA, con X y Z inescindibles, se llama una sucesión de Auslander-Reiten si no es una sucesión escindida, y para todo morfismo $h: Z' \longrightarrow Z$ que no sea un epimorfismo escindido, existe $h' : Z' \longrightarrow Y$ tal que $h = gh'$. Esta propiedad es equivalente a la siguiente: para todo morfismo $h : X \longrightarrow X'$ que no sea un monomorfismo escindido, existe $h' : Y \longrightarrow X'$ tal que $h = h'f$. En una tal sucesión de Auslander-Reiten, los términos X y Z se determinan unívocamente uno al otro.

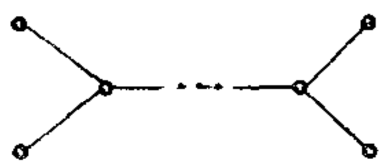
Para cada inescindible no proyectivo M en modA, existe el trasladado de M, τM ($=$ DTrM, como se introdujo en [1]), y una sucesión de Auslander-Reiten $0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$ .Para cada inescindible no inyectivo N en modA, existe el trasladado inverso $\tau^{-}N$ ($=$ TrDN), y una sucesión de Auslander-Reiten $0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow \tau^{-}N \longrightarrow 0$.

Las k-álgebras hereditarias de dimensión finita, básicas e indescomponibles de tipo manso, son precisamente las que tienen como carcaj ordinario alguno de los siguientes diagramas (con cualquier orientación de sus lados): $\tilde{A}_n$, $\tilde{D}_n$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$:

$\tilde{A}_n$



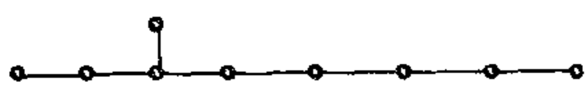
$\tilde{D}_n$



$\tilde{E}_6$

$\tilde{E}_7$

$\tilde{E}_8$



De ahora en adelante, se entenderá por álgebra hereditaria mansa alguna de las anteriores álgebras, para cuyas propiedades puede consultarse [12],[7].

El diagrama de Auslander-Reiten de un álgebra hereditaria mansa A se compone de tres partes: la componente preproyectiva $\mathcal{P}$; la componente preinyectiva $\mathcal{J}$; y la parte regular $\mathcal{R}$. $\mathcal{P}$ está constituida por los A-módulos inescindibles de la forma $\tau^{-n}P$, con P proyectivo inescindible y $n \geq 0$; $\mathcal{J}$ consta de los $\tau^{n}I$, para I inyectivo inescindible y $n \geq 0$. Los A-módulos inescindibles de modA que no están en $\mathcal{P}$ ni en $\mathcal{I}$, constituyen la parte regular, la cual está formada por una familia de componentes "tubulares", como se describe en [12] .

2. EQUIVALENCIA ESTABLE

Se utilizarán las definiciones y propiedades fundamentales de la equivalencia estable como aparecen en [5 ;3] . La categoría proyectivamente estable de un álgebra A se denota por $\underline{\mathrm{mod}}A$, y la misma es equivalente con la subcategoría plena $\mathrm{mod}_P A$ de modA, cuyos objetos son los A-módulos sin sumandos directos proyectivos. En lo que sigue, las categorías $\underline{\mathrm{mod}}A$ y $\mathrm{mod}_P A$ se considerarán idénticas. Dos álgebras A y A' se llaman establemente equivalentes si existe una equivalencia $\underline{\mathrm{mod}}A \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{mod}}A'$.

Propiedades importantes referentes a la equivalencia estable con álgebras hereditarias se establecen en los teoremas siguientes. Recuerde que un módulo se llama "sin torsión" si es submódulo de un módulo proyectivo; y un módulo se llama "sin cotorsión" si es imagen epimórfica de un módulo inyectivo.

<u>Teorema</u> 1.([5]) Para que un álgebra artiniana A sea establemente equivalente con un álgebra hereditaria, es necesario y suficiente que se verifiquen las siguientes condiciones : (1) Todo submódulo inescindible de un A-módulo proyectivo inescindible es proyectivo o simple. (2) Si S es un sub - módulo simple no proyectivo de un A-módulo proyectivo, entonces S es co - ciente de un módulo preyectivo.

<u>Teorema</u> 2. ([9]) Asuma que A es un álgebra establemente equivalente con un álgebra hereditaria, y sea M un A-módulo inescindible no proyectivo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes: (a) Existe un módulo proyectivo P y una cadena de aplicaciones irreducibles entre A-módulos inescindibles $P = C_t \longrightarrow \dots \longrightarrow C_o = M$. (b) Existe algún entero $n > 0$ tal que $\tau^n M$ es sin torsión. (c) Existe un entero K tal que la longitud de cualquier cadena de aplicaciones irreducibles entre A-módulos inescindibles no proyectivos $C_r \longrightarrow \dots \longrightarrow C_o = M$, es menor que K.

3. EL DIAGRAMA DE AUSLANDER-REITEN

En este apartado se establecen algunas propiedades del diagrama de Auslander-Reiten de un álgebra establemente equivalente con un álgebra hereditaria mansa. Se hará uso frecuente de ([3] ,Proposición 1.4), por la cual, si se tiene una equivalencia estable $F : \underline{\mathrm{mod}A} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{mod}A'}$ entre álgebras arbitrarias A, A', y si M, N están en $\mathrm{mod}_p A$, entonces existe una aplicación irreducible $M \longrightarrow N$ si, y solamente si, existe una aplicación irreducible $FM \longrightarrow FN$. Consecuencia inmediata es el siguiente corolario.

<u>Corolario</u> 1. Sean A, A' álgebras y suponga que existe una equivalencia estable $F : \underline{\mathrm{mod}A} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{mod}A'}$. Sea M inescindible en $\mathrm{mod}_p A$. Entonces existe una cadena de aplicaciones irreducibles entre A-módulos inescindibles no proyectivos $C_t \longrightarrow C_{t-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 = M$ si, y sólo si, existe una cadena de aplicaciones irreducibles entre los A'-módulos inescindibles no proyectivos $FC_t \longrightarrow FC_{t-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow FC_1 \longrightarrow FC_0 = FM$.

<u>Teorema</u> 3. Sea $F : \underline{\mathrm{mod}A} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{mod}A'}$ una equivalencia estable, y suponga que A es hereditaria mansa. Un inescindible M en $\mathrm{mod}_p A$ es preproyectivo si, y solamente si, $\tau^n(FM)$ es sin torsión, para algún $n > 0$.

<u>Demostración</u>. Sea M preproyectivo en $\mathrm{mod}_p A$. Por ser A hereditaria, M cumple la condición (a) del Teorema 2 ([10] , Prop. 1.5) y entonces también verifica la condición (c) del mismo Teorema 2. Por el Corolario 1, FM verifica entonces la condición (c) del Teorema 2, y entonces existe algún $n > 0$ tal que $\tau^n(FM)$ es sin torsión.

Recíprocamente, si $\tau^n(FM)$ es sin torsión para algún $n > 0$, FM satisface Teorema 2(c) y entonces, por el Corolario 1, M también la satisface, y de aquí, por ser A hereditaria, M cumple la condición (b) , es decir, $\tau^m M$ es sin torsión, para algún $m > 0$. Luego $\tau^m M$ es proyectivo, y M es preproyectivo.

<u>Definición</u> 1. Si A' es un álgebra establemente equivalente con un álgebra hereditaria mansa, se define la familia $\mathcal{P}'$ como el conjunto de los A'-módulos de la forma $\tau^{-n}M'$, para M' inescindible sin torsión y $n \geq 0$.

<u>Lema</u> 1. Sea A' un álgebra establemente equivalente con un álgebra hereditaria mansa, y considere la familia $\mathcal{P}'$ definida anteriormente. Si Y' está en $\mathcal{P}'$ y existe una aplicación irreducible $X' \longrightarrow Y'$, para X' inescincindible no inyectivo, ...

,entonces X' también está en $\mathcal{P}'$. Si Y' está en $\mathcal{P}'$ y X' es un inescindible tal que existe una aplicación irreducible $Y' \longrightarrow X'$, entonces X' también está en $\mathcal{P}'$.

Demostración. Para la primera parte, suponga $X' \longrightarrow Y'$ como en el enunciado. Es claro que si X' es proyectivo, entonces X' está en $\mathcal{P}'$. Para continuar, suponga que X' no es proyectivo, y sea $Y' = \tau^{-n}M'$, con M inescindible sin torsión y $n \geq 0$.

Se procede por casos sobre n. Si $n = 0$, $Y' = M'$ es sin torsión. Si Y' es proyectivo, por ([2], Proposición 3.1) el morfismo $X' \longrightarrow Y'$ es inyectivo, de donde X' es sin torsión y entonces X' está en $\mathcal{P}'$. Si Y' no es proyectivo, Y' es simple sin cotorsión, por el Teorema 1; si $0 \to N \to E \to Y' \to 0$ es la sucesión de Auslander-Reiten, por ([9], Proposición 1.3 c) E es inyectivo y como X' es sumando directo de E, X' es inyectivo, en contra de la hipótesis.

Sea ahora $n \geq 1$. Es suficiente mostrar que $\tau^n X'$ es sin torsión, pues de $X' = \tau^{-n}(\tau^n X')$, se sigue que X' está en $\mathcal{P}'$. A continuación se prueba que $\tau^n X'$ es sin torsión, para $n \geq 1$.

Sea $n = 1$. Dada $X' \to \tau^- M'$ irreducible, por ([2], Corolario 3.4) existe $M' \longrightarrow X'$ irreducible; y como X' no es proyectivo, existe $g : \tau X' \longrightarrow M'$ irreducible, la cual es necesariamente inyectiva. En efecto, si M' no fuera proyectivo, M' sería simple y por ([9], prop. 1.3c), X' sería proyectivo, en contra de la hipótesis. Luego M' es proyectivo y entonces, por ([2], Prop. 3.1), g es inyectiva. Luego $\tau X'$ es sin torsión.

Sea ahora $n > 1$. Si existe $X' \longrightarrow \tau^{-n}M'$ irreducible, como $\tau^{-n}M' = \tau^{-(n-1)}(\tau^- M')$, existe una irreducible $\tau^{n-1}X' \longrightarrow \tau^- M'$ y entonces $\tau(\tau^{n-1}M') = \tau^n M'$ es sin torsión.

Para la segunda parte, suponga $Y' \longrightarrow X'$ como en el enunciado. Puede suponerse que X' no es proyectivo, y entonces existe $\tau X' \longrightarrow Y'$ irreducible. Por la primera parte, $\tau X'$ está en $\mathcal{P}'$, es decir, existe N sin torsión tal que $\tau X' = \tau^{-m}N$, para algún $m > 0$, de donde $X' = \tau^{-(m+1)}N$ está en $\mathcal{P}'$.

Lema 2. Sea A un álgebra hereditaria mansa, y $F : \underline{\mathrm{mod}A} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{mod}A'}$ una equivalencia estable. Si M es un módulo inescindible en $\mathrm{mod}_p A$, entonces M es preproyectivo si, y solamente si, el A'-módulo FM está en $\mathcal{P}'$.

Demostración. Es consecuencia inmediata del Teorema 3.

<u>Teorema</u> 4. Sea A un álgebra hereditaria mansa, y suponga que existe una equivalencia estable $F : \underline{\mathrm{mod}}A \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{mod}}A'$. Entonces $\mathcal{P}'$ está formada precisa - mente por los FM, para M preproyectivo en $\mathrm{mod}_p A$, junto con los A'-módulos inescindibles proyectivos.

<u>Demostración</u>.Si M es un preproyectivo de $\mathrm{mod}_p A$, por el Lema 2 , FM es- tá en $\mathcal{P}'$. Es claro, además, que los A'-módulos inescindibles proyectivos es- tán en $\mathcal{P}'$.

Para la otra dirección, si N' está en $\mathcal{P}'$ y no es proyectivo, entonces N' = FN , para algún N en $\mathrm{mod}_p A$. Por el Lema 2, N es preproyectivo.

Para ubicar los resultados obtenidos hasta el momento, es útilrecordar que en el conjunto de los objetos inescindibles de modA, para un álgebra ar- bitraria A, existe una relación de equivalencia $\sim$, en donde $M \sim N$ si, y so- lamente si, existe una secuencia finita $M = M_o , M_1 , \ldots , M_n = N$ de módulos inescindibles tales que existe alguna aplicación irreducible $M_i \longrightarrow M_{i+1}$, o $M_{i+1} \longrightarrow M_i$ $(i = 0,1,\ldots,n-1)$. Si $0 \to N \to E \to M \to 0$ es una sucesión de Auslander-Reiten, las clases de equivalencia de M y N son la misma ([13]).

De acuerdo con lo anterior, la familia $\mathcal{P}'$ definida para un álgebra A' establemente equivalente con un álgebra hereditaria mansa, es una componen- te del diagrama de Auslander-Reiten de A', que contiene los proyectivos.

Si se tiene una equivalencia estable $F : \underline{\mathrm{mod}}A \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{mod}}A'$, y se supone que A es hereditaria mansa, es natural indagar por la imagen bajo F de la componente preinyectiva $\mathcal{I}$ de A. Como se verá a continuación, es posible un estudio enteramente similar al realizado para la componente $\mathcal{P}'$.

Para empezar, una equivalencia estable $F : \underline{\mathrm{mod}}A \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{mod}}A'$ entre álge- bras arbitrarias induce una equivalencia estable las categorías inyectiva- mente estables $F' : \overline{\mathrm{mod}}A \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{mod}}A'$, tal que el siguiente diagrama es conmu- tativo ([5]) :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{mod}}A & \xrightarrow[\sim]{F} & \underline{\mathrm{mod}}A' \\ {\scriptstyle\tau_A}\downarrow\wr & & \wr\downarrow{\scriptstyle\tau_{A'}} \\ \overline{\mathrm{mod}}A & \xrightarrow[F']{\sim} & \overline{\mathrm{mod}}A' \end{array} ,$$

es decir, $F'\tau_A(X) = \tau_{A'}F(X)$, para todo X en $\mathrm{mod}_p A$.

En este contexto, es válido el siguiente teorema, "dual" de ([9], Prop. 2.7).

Teorema 5. Sea A establemente equivalente con un álgebra hereditaria. Para un inescindible M en $\mathrm{mod}_I A$, las siguientes condiciones son equivalentes : (a) Existe un inyectivo I y una cadena de aplicaciones irreducibles entre inescindibles : $M = C_r \longrightarrow C_{r-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_o = I$. (b) Existe $n > 0$, tal que $\tau^{-n} M$ es sin cotorsión. (c) Existe un entero K, tal que la longitud de toda cadena de aplicaciones irreducibles entre inescindibles no inyectivos $M = C_o \longrightarrow C_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow C_t$, es menor que K.

Se define ahora el conjunto $\mathfrak{J}'$ como la familia de los A'-módulos de la forma $\tau^n Q'$, para Q' inescindible sin cotorsión y $n \geq 0$. Se tienen resultados análogos al Lema 1 y al Teorema 4, los cuales expresan que la familia $\mathfrak{J}'$ es una componente del diagrama de Auslander-Reiten de A', que contiene los inyectivos. Esta familia $\mathfrak{J}'$ está formada por los F'N, para N preinyectivo en $\mathrm{mod}_I A$, junto con los inyectivos inescindibles.

A continuación nos ocupamos de la imagen bajo $F : \underline{\mathrm{mod}A} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{mod}A'}$ de la parte regular del diagrama de Auslander-Reiten del álgebra hereditaria mansa A. Las únicas sucesiones de Auslander-Reiten en modA cuyo término intermedio posee un sumando directo proyectivo, son de la forma $0 \to S \to P \to \tau^{-}S \to 0$, en donde S es un simple proyectivo no inyectivo, y P es inescindible proyectivo. Asimismo, dado que A es hereditaria, por ([4], Pop.2.4), para toda sucesión de Auslander-Reiten $0 \to X \to Y \to Z \to 0$, en modA, con X y Z ambos regulares, existe una sucesión de Auslander-Reiten en modA' de la forma : $0 \to FX \to FY \oplus P' \to FZ \to 0$, con P' proyectivo. En este caso, necesariamente $P' = 0$, pues, de lo contrario, FX y FZ estarían en $\mathcal{P}'$, y entonces X y Z serían preproyectivos, en contra de la hipótesis. Se ha probado el siguiente resultado.

Lema 3. Sea $F : \underline{\mathrm{mod}A} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{mod}A'}$ una equivalencia estable, con A hereditaria mansa. Si se tiene una sucesión de Auslander-Reiten en modA : $0 \to X \to Y \to Z \to 0$, y X y Z son regulares, entonces se tiene una sucesión de Auslander-Reiten en modA' : $0 \to FX \to FY \to FZ \to 0$.

Procediendo como en [11] , si A' es establemente equivalente con una hereditaria, un A'-módulo inescindible M se llama regular si la componente del diagrama de Auslander-Reiten de A' que contiene a M, no contiene ningún módulo proyectivo ni inyectivo.

Lema 4. Sea F : $\underline{\text{mod}A} \xrightarrow{\sim} \underline{\text{mod}A'}$ una equivalencia estable, con A hereditaria mansa. Entonces un A-módulo N es regular si, y solamente si, el A'-módulo FN es regular.

Demostración. (a) Suponga que N no es A-regular. Por hipótesis, N no es proyectivo. Necesariamente, N está en $\mathcal{P}$ o N está en $\mathcal{J}$. Si N está en $\mathcal{P}$, FN está en $\mathcal{P}'$, y entonces FN no es A'-regular. Para considerar la otra posibilidad, suponga que N está en $\mathcal{J}$. Si N es inyectivo, FN es inyectivo, y entonces no es A'-regular. Si N está en $\mathcal{J}$ pero no es inyectivo, $F'N$ está en $\mathcal{J}'$, y entoces $F'N$ no es A'-regular. Para ver que FN no es A'-regular, observe que $FN \cong F'N$, debido a que : $F'N = \tau_{A'} F \tau_A^-(N) = \tau_{A'}(\tau_{A'}^- F'N) \cong F'N$.

(b) Si FN no es A'-regular, entonces FN está en $\mathcal{P}'$ o en $\mathcal{J}'$. Si FN está en $\mathcal{P}'$, como N no es proyectivo, N está en $\mathcal{P}$ y de aquí, N no es A-regular. Para terminar, si FN está en $\mathcal{J}'$, y FN es inyectivo, N es inyectivo. Pero si FN no es inyectivo, N no es inyectivo, y de aquí, N no es A-regular.

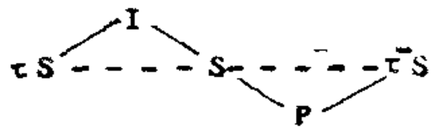
Consecuencia inmediata de estas consideraciones es el siguiente resultado.

Teorema 6. Si se tiene una equivalencia estable F : $\underline{\text{mod}A} \xrightarrow{\sim} \underline{\text{mod}A'}$, con A hereditaria mansa, entonces la restricción de F establece una equivalencia entre las subcategorías plenas de los A-módulos regulares y los A'-módulos regulares.

4. RELACIONES CERO

Es posible deducir algunas propiedades del carcaj ordinario de un álgebra establemente equivalente con una hereditaria, a partir del examen de su diagrama de Auslander-Reiten. Como se sabe, si A es hereditaria mansa, no hay morfismos, salvo el nulo, de un módulo regular hacia uno preproyectivo; tampoco hay morfismos no nulos de un preinyectivo hacia un preproyectivo o un regular. La situación es diferente si se trata de un álgebra establemente equivalente a una hereditaria.

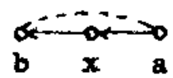
En efecto, si A' es establemente equivalente con una hereditaria mansa, y S es un simple no proyectivo sin torsión, por ([9], Prop.1.3), S es no inyectivo sin cotorsión. Existen entonces un inyectivo I y un proyectivo P, junto con un epimorfismo $f:I \longrightarrow S$ y un monomorfismo $h:S \longrightarrow P$. Es claro que $hf \neq 0$, es decir, existe un morfismo no nulo $I \longrightarrow P$. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que los A'-módulos I y P son inescindibles y que las aplicaciones f y h son irreducibles. Por ([9], Prop.1.3 c), en modA' existen sucesiones de Auslander-Reiten : $0 \to \tau S \to I \to S \to 0$ y otra de la forma $0 \to S \to P \to \tau^{-} S \to 0$. Se concluye que en el diagrama de Auslander-Reiten de A' existe una configuración :



.

Tomando ahora vértices b, x, a en el carcaj ordinario de A', tales que $P = P_b$, $I = I_a$ y $S = S_x$, se ha demostrado el siguiente teorema.

Teorema.7. Sea A' un álgebra establemente equivalente con una hereditaria mansa, y suponga que existe un morfismo no nulo $I_a \longrightarrow P_b$. Entonces en el carcaj ordinario de A' existe una relación cero de longitud dos del tipo:

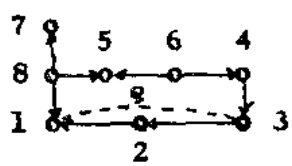


.

5. APLICACIONES

En este apartado se desarrolla un ejemplo de un álgebra cuyo carcaj tiene una relación cero de longitud dos, y que resulta ser establemente equivalente con una álgebra hereditaria mansa.El lector podrá observar que el método utilizado puede ser generalizado para obtener una tabla como la Tabla N° 1 de [6], esta vez para álgebras de tipo de representación infinito.

Considere el carcaj Q con una relación cero :

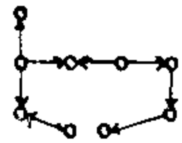


,

y dado un campo k algebraicamente cerrado, sea $A' := kQ/(\rho)$ la correspondiente k-álgebra.La ubicación de los proyectivos y los inyectivos inescindibles en el diagrama de Auslander-Reiten de A' se muestra en la Figura N°1.

Dado que A' satisface las condiciones 1 y 2 del Teorema 1, ella es establemente equivalente con cirta álgebra hereditaria H. Observe que hay un morfismo no nulo $I_1 \longrightarrow P_3$, que factoriza a través del simple S_2.

Considere ahora la k-álgebra hereditaria A dada por el carcaj de tipo $\tilde{E}_8$

A :  .

La componente $\mathfrak{I}'$ de A' es equivalente con la componente preinyectiva $\mathfrak{I}_A$ del álgebra hereditaria A. $\mathfrak{I}'$ es también equivalente con la componente preinyectiva $\mathfrak{I}_H$ del álgebra hereditaria H. Luego las álgebras A y H son isomorfas, por lo cual se tiene una equivalencia $\mathfrak{R}_A \xrightarrow{\sim} \mathfrak{R}_H$. Se deduce que la parte regular de A' es equivalente con la parte regular de A. El diagrama de Auslander-Reiten de A' se muestra en la Figura N° 2 .

Como el carcaj ordinario de A es también el carcaj del álgebra

$$B := \mathrm{End}_{A'}(L)^{op} \quad ,$$

en donde

$$L := (P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_8) \oplus S_2 \quad ,$$

se tienen las condiciones suficientes para demostrar que el álgebra A' es establemente equivalente con el álgebra hereditaria B, por medio de un funtor que se construye explícitamente de manera análoga a como se procedió en ([6], Teor. 2.5).

Este trabajo se realizó como parte del Proyecto N° 114- 89- 048 de la Vicerrectoría de Investigación de la Universidad de Costa Rica.

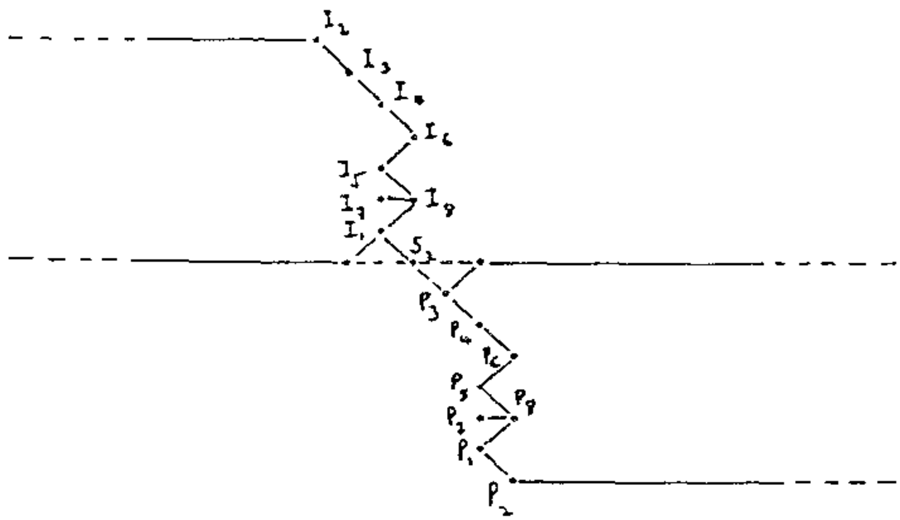


Figura N° 1

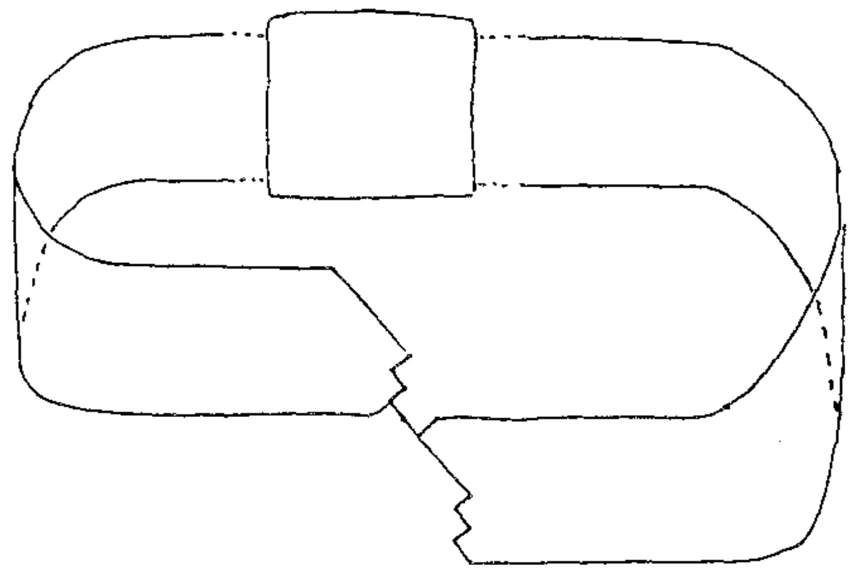


Figura N°2

REFERENCIAS

[1] M. Auslander, I. Reiten :"Representation theory of Artin algebras III", Comm. in Alg. 3 (3), 239-294, 1975.

[2] ________ : "Representation theory of Artin algbras IV", Comm. in Alg.5 (1977), 443-518.

[3] ________ : "Representation theory of Artin algebras V", Comm. in Alg.5 (1977), 519-554.

[4] ________ :"Representation theory of Artin algebras VI", Comm. in Alg. 6 (1978), 267-300.

[5] ________ :"Stable equivalence of Artin algebras", Springer Lecture Notes N° 353, 1973.

[6] J. Boza C. : "Cocientes de álgebras hereditarias y equivalencia estable", Tesis de Maestría, Universidad de Costa Rica, 1989.

[7] V. Dlab, C. M. Ringel :"Indecomposable representations of graphs and algebras", Memoirs A.M.S. 6, N° 173 (1976).

[8] P. Gabriel : "Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras". Springer Lecture Notes N° 831 (1980).

[9] M.I.Platzeck :"Representation theory of algebras stably equivalent to an hereditary Artin algebra". Trans. A.M.S. 238, 89-125 (1978).

[10] M.I.Platzeck, M. Auslander :"Representation theory of hereditary Artin algebras". Proc. Philadelphia Conf.,vol. 37 (1976).

[11] C.M. Ringel : "Finite dimensional hereditary algebras of wild representation type". Math. Z. 161, 235- 255 (1978).

[12] ________ : "Tame algebras and quadratic forms". Springer Lecture Notes 1099 (1984).

[13] M. Auslander,... :"Almost split sequences whose middle term has at most two indecomposable summa nds". Can. J. Math.,Vol.XXXI, N°5,1979,942-960.

Juan Boza Cordero
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica.

APLICACIONES DE LOS NUMEROS DE FIBONACCI

Edison De Faria Campos

Universidad de Costa Rica

RESUMEN

Aqui el autor presenta algunas aplicaciones de la sucesión de Fibonacci a la teoria de números, matrices, y a los cuasicristales.

1. INTRODUCCION

En 1202 el matemático Italiano Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci (contracción de filius Bonacci, que significa hijo de Bonacci) escribe su obra *Liber abaci* (un libro relacionado con abacus), y en la versión de 1228 aparece en las páginas 123-124 el famoso problema de los conejos : "¿Cuantas parejas de conejos pueden ser engendradas en un año a partir de una única pareja, si cada pareja de conejos reproduce una nueva pareja que se convierte en engendradora a partir del segundo mes?".

Este problema conduce a la interesante sucesión :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots, x, y, x+y, \ldots$$

en donde cada término representa el número de parejas de conejos presentes en el mes correspondiente.

Definición :

La sucesión (F_n) , $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1\ ,\ y \quad F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \quad ,\quad n = 2,3,\ \ldots \tag{1}$$

se denomina sucesión de Fibonacci, y cada término de ella se conoce como número de Fibonacci.

La sucesión de Fibonacci tiene fascinantes propiedades matemáticas y tiene una infinidad de aplicaciones en la teoria de números, geometría, física, geometría, arte, computación, etc.

Por ejemplo ([1]) en la flor del girasol se encuentran pequeños granos en forma de diamante y acotados por arcos de curvas en forma de espirales logaritmicas con origen en el centro y tal que el número de espirales en la dirección de las agujas del reloj y el número de espirales en la dirección contraria, son términos sucesivos en la sucesión de Fibonacci.

Lo anterior es verdadero para cualquier flor compuesta como por ejemplo la margarita.

La sucesión de Fibonacci aparece en el trabajo de Kepler en 1611 en conexión con el estudio de disposiciones de hojas y flores en plantas.

En 1844 G. Lamé utilizó sucesiones de Fibonacci para estudiar la eficiencia del algoritmo de Euclides. Esta fue la primera aplicación práctica de las sucesiones de Fibonacci.

Los escritos de Fibonacci fueron reimpresos en 1857 en dos tomos, y en 1963 un grupo de entusiastas en sucesiones de Fibonacci, encabezados por el Dr. Verner Hoggatt Jr., fundaron la Asociación Fibonacci e iniciaron con la publicación de la revista The Fibonacci Quarterly, dedicada principalmente a investigaciones sobre sucesiones de Fibonacci y temas relacionados con ellas.

2. ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NUMEROS DE FIBONACCI

P1 : Para todo $m \in \mathbb{N}$ y n entero mayor que 1 ,

$$F_{n+m} = F_nF_{m+1} + F_mF_{n-1} \tag{2}$$

Demostración : Utilizando inducción sobre m, tenemos :

Para m=1, $F_{n+1} = F_nF_2 + F_1F_{n-1} = F_n + F_{n-1}$ lo que es cierto por (1).

Suponga que (2) se cumple para m = k y m = k + 1 . Por lo tanto

$$F_{n+k} = F_nF_{k+1} + F_kF_{n-1} \quad \text{y}$$
$$F_{n+k+1} = F_nF_{k+2} + F_{k+1}F_{n-1}$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores obtenemos

$F_{n+k+2} = F_nF_{k+3} + F_{k+2}F_{n-1}$, que es (2) para m = k + 2 . □

P2 : Para n entero mayor que 1 ,

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \tag{3}$$

La identidad (3) es debido a J. D. Cassini ([2]).

Demostración : Probaremos inductivamente la identidad matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} , \quad n > 1 . \tag{4}$$

Para n = 2 , $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{pmatrix}$.

Suponga que la proposición es cierta para n > 2 . Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1}+F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$$

que es (4) para $n + 1$.

Tomando determinante en ambos lados de (4) obtenemos $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, que es (3). ∎

En [3] se generaliza la fórmula (3) :

Para $n > m \geq 1$, $F_{n+m}F_{n-m} - F_n^2 = (-1)^{n+m-1}F_m^2$ (5)

P3 : Para todo $n > m \geq 1$, $F_{n+1}F_m - F_nF_{m+1} = (-1)^{m+1}F_{n-m}$ (6)

Demostración : para $m = 1$, $F_{n+1} - F_n = (-1)^2F_{n-1} = F_{n-1}$ lo que es correcto.

Suponga que $F_{n+1}F_k - F_nF_{k+1} = (-1)^{k+1}F_{n-k}$, $k=2,\dots,m$.

Entonces $F_{n+1}F_{m+1} - F_nF_{m+2} = (F_{n+1}F_m - F_nF_{m+1}) + (F_{n+1}F_{m-1}-F_nF_m) = (-1)^{m+1}F_{n-m} + (-1)^mF_{n-m+1} = (-1)^{m+2}F_{n-m-1}$ que es (6) para $k = m+1$. ∎

Si sumamos (2) con (6), obtenemos

$$F_{n+m} + (-1)^{m+1}F_{n-m} = F_m(F_{n+1}+ F_{n-1}) \tag{7}$$

Si hacemos $n = m$ en (2) , obtenemos $F_{2n} = F_n\cdot(F_{n-1} + F_{n+1}) = (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$, es decir, la diferencia de cuadrados de dos números de Fibonacci cuyos indices difieren por 2 es un número de fibonacci con indice par.

P4 : Si $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ entonces $\phi^{n-2} \leq F_n \leq \phi^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. (8)

Demostración : Si $n = 1$, $F_1 = 1 = \phi^0$, y $\phi^{-1} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} < 1=F_1$.

Supongamos que $\phi^{k-2} \leq F_k \leq \phi^{k-1}$ para $k=1,2,\dots,n$.

Entonces $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \leq \phi^{n-2} + \phi^{n-1} = \phi^{n-2}(1+\phi)=\phi^{n-2}\phi^2=\phi^n$ pues $\phi^2 = 1 + \phi$, y $F_{n+1} = F_{n-1}+ F_n \geq \phi^{n-3} + \phi^{n-2} = \phi^{n-1}$, lo que completa la demostración. ∎

P5 : $F_n = \dfrac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} = \dfrac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$ (9)

en donde $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Algunos atribuyen el descubrimiento de la fórmula (9) a A. de Moivre, mientras que otros lo atribuyen a Binet.

Demostración : Sea $G(z) = F_1 z + F_2 z^2 + F_3 z^3 + F_4 z^4 + \ldots = z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + \ldots.$ (10)

la *función generadora* para la sucesión (F_n) . Entonces

$$zG(z) = F_1 z^2 + F_2 z^3 + F_3 z^4 + \ldots \quad \text{y}$$

$$z^2 G(z) = F_1 z^3 + F_2 z^4 + F_3 z^5 + \ldots$$

Restando obtenemos : $(1-z-z^2)G(z) = F_1 z + (F_2 - F_1)z^2 + (F_3 - F_2 - F_1)z^3 + (F_4 - F_3 - F_2)z^4 + \ldots = z$, pues $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$

Por lo tanto G(z) existe , y como las raices de $1-z-z^2=0$ $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ haciendo la descomposición de $\dfrac{z}{1-z-z^2}$ en fracciones parciales, obtenemos :

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\phi z} - \frac{1}{1-\psi z}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(\phi z)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(\psi z)^n\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{(\phi - \psi)z + (\phi^2 - \psi^2)z^2 + \ldots.\right\}$$ en donde $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Comparando los coeficientes de z en (10) con lo anterior, obtenemos

$F_n = \dfrac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$, $n \in \mathbb{N}$. ∎

El número $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ que aparece en las fórmulas (8) y (9) , satisface la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$, y posee propiedades muy interesantes.

Por ejemplo , como $\phi^2 = \phi + 1$, entonces $\phi^3 = \phi^2 + \phi = 2\phi + 1$, $\phi^4 = 2\phi^2 + \phi = 3\phi + 2$, y por inducción se demuestra que

$\phi^n = F_n \phi + F_{n-1}$, $n = 2,3, \ldots$.

Otra propiedad es que $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$, y como $\phi > 1$, esto nos dice que el inverso de ϕ presenta la misma expansión decimal de ϕ .

Euclides lo llamó "extremo y razón media" : La razón entre A y B es igual a la razón entre A+B y B si la razón entre A y B es ϕ. Los escritores del renacimiento lo denominaron "proporción divina", y en el último siglo ϕ llegó a ser conocido como "*razón áurea o número de oro*".

En el mundo del arte, la razón entre ϕ y 1 se dice ser la mejor proporción estética.

P6 : El número de Fibonacci F_n es el entero mas cercano al n-ésimo término a_n de la progresión geométrica cuyo primer término es $\phi/\sqrt{5}$ y cuya razón es ϕ (el número de oro).

Demostración : $\left| F_n - a_n \right| = \left| \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \left| \psi \right|^n$

Pero $\psi = (1 - \sqrt{5})/2 = -0.618\ldots$ y $|\psi| < 1$. Por lo tanto $|\psi|^n < 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$\left| F_n - a_n \right| < 1/\sqrt{5} < 1/2$, lo que prueba la propiedad ∎

En la demostración de la propiedad anterior, como $|\psi| < 1$ entonces $|\psi|^n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, y por lo tanto $|F_n - a_n|$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, es decir :

$$\lim_{n \to \infty} F_n = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} .$$

Utilizando la propiedad P6 podemos calcular F_n para valores elevados del índice n, calculando $\phi^n/\sqrt{5}$ y tomando el entero mas cercano a este número.

Para calcular $\phi^n/\sqrt{5}$ podemos utlizar logaritmos :

$\log \phi^n/\sqrt{5} = n\log\phi - \log\sqrt{5} \approx n(0.20898) - 0.34949$, y finalmente tomar exponencial.

3. LOS NUMEROS DE FIBONACCI Y EL ALGORITMO DE EUCLIDES.

Dados $a,b \in \mathbb{N}$, el algoritmo de Euclides aplicado a estos números produce el sistema de ecuaciones :

$$
\begin{array}{llll}
a & = bq_0+r_1 & , \quad 0 \le r_1 < b & (q = 0 \text{ si } a < b) \\
b & = r_1q_1+ r_2 & , \quad 0 \le r_2 < r_1 & \\
r_1 & = r_2q_2+ r_3 & , \quad 0 \le r_3 < r_2 & \\
 & \quad \cdots & & \\
r_{n-2} & = r_{n-1}q_{n-1}+ r_n & , \quad 0 \le r_n < r_{n-1} & \\
r_{n-1} & = r_nq_n & &
\end{array}
\tag{11}
$$

Este proceso nos lleva a determinar el máximo común divisor de a y b, (a,b) que es igual a r_n, el último residuo no nulo.

TEOREMA 1 : Dados $m,n \in \mathbb{N}$, si n es divisible por m entonces F_n es divisible por F_m.

Demostración : Sea $n = km$, con $k \in \mathbb{N}$. Utilizaremos inducción sobre k.

Si k=1, n=m y por lo tanto F_n es divisible por F_m.

Suponga que F_{km} es divible por F_m con $k > 1$.

$F_{(k+1)m} = F_{km+m} = F_{km}F_{m+1} + F_{km-1}F_m$ por (2).

Como $F_{km-1}F_m$ es divisible por F_m y por hipótesis de inducción $F_{km}F_{m+1}$ es divisible por F_m, entonces $F_{(k+1)m}$ es divisible por F_m. ∎

COROLARIO 1 : Si n es compuesto y distinto de 4 entonces F_n es compuesto.

Demostración : n es compuesto y distinto de 4, entonces existen enteros r y s con $1 < r < n$, $1 < s < n$, con $r > 2$ o $s > 2$, tales que $n = rs$.

Supongamos que $r > 2$. Por el teorema anterior, F_n es divisible por F_r y $1 < F_r < F_n$. Por lo tanto F_n es compuesto. ∎

TEOREMA 2 : Números de Fibonacci consecutivos son relativamente primos.

Demostración . En (3) tenemos $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$. Si $d > 1$ es un divisor común de F_n y F_{n+1} entonces d es divisor de $(-1)^n$ lo que es una contradicción. Entonces F_n y F_{n+1} son relativamente primos para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

TEOREMA 3 : $(F_n , F_m) = F_{(n,m)}$ para todo $m,n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Si m= n la igualdad es obvia.

Supongamos $m > n$. Aplicando el algoritmo de Euclides a m y n obtenemos el sistema (11) con m en el lugar de a y n en el lugar de b.

$$(F_n , F_m) = (F_n , F_{nq_0+r_1}) = (F_n , F_{nq_0-1}F_{r_1} + F_{nq_0}F_{r_1+1})$$

$= (F_n , F_{nq_0-1}F_{r_1})$ pues por el teorema 1 , $F_{nq_0}F_{r_1+1}$ es divisible por F_n .

Por el teorema 1, F_{nq_0} es divisible por F_n , y por el teorema 2 F_{nq_0} y F_{nq_0-1} son relativamente primos. Por lo tanto F_n y F_{nq_0-1} son relativamente primos, y $(F_n , F_{nq_0-1}F_{r_1}) = (F_n,F_{r_1})$

Entonces $(F_m , F_n) = (F_n , F_{r_1})$.

Analogamente, podemos probar que :

$(F_n,F_{r_1}) = (F_{r_1}, F_{r_2})$, $(F_{r_1} , F_{r_2}) = (F_{r_2} ,F_{r_3})$, ... , $(F_{r_{k-2}},F_{r_{k-1}}) = (F_{r_{k-1}}, F_{r_k})$. Por lo tanto $(F_m,F_n) = (F_{r_{k-1}},F_{r_k})$

y como r_k es un divisor de r_{k-1} , $F_{r_{k-1}}$ es divisible por F_{r_k} y $(F_{r_{k-1}} , F_{r_k}) = F_{r_k} = F_{(m,n)}$, pues $(m,n) = r_k$. ∎

COROLARIO 2. Si F_n es divisible por F_m entonces n es divisible por m.

Demostración : Como F_n es divisible por F_m , $(F_n,F_m) = F_m = F_{(n,m)}$ por el teorema 3. Entonces $(n,m) = m$, es decir n es divisible por m. ∎

Debido al teorema 1 y el corolario 2, podemos determinar la divisibilidad de los números de Fibonacci analizando la divisibilidad de sus indices.

En 1845, G. Lamé ([4]) demostró que si $k \in \mathbb{N}$, m,n son enteros con $n > m > 0$ tales que al aplicar el algoritmo de Euclides a m y n se requiere exactamente k divisiones sucesivas y con n tan pequeño cuanto posible que satisface estas condiciones entonces $n=F_{k+2}$ y $m=F_{k+1}$.

Por lo tanto, el peor de los casos al utilizar el algoritmo de Euclides ocurre cuando m y n son números de Fibonacci consecutivos.

4. MATRICES DE FIBONACCI.

En [5] se hace la conjetura de que si empezamos con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+x \end{pmatrix}$$

al hacer con que la primera entrada de A^n sea igual a 1 , la matriz resultante tiende a

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \beta^2 \end{pmatrix}$$ cuando n tiende al infinito , en donde

$$\beta = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} .$$

En el siguiente teorema demostramos que esta conjetura es correcta solamente para $x > -2$, y demostramos otros resultados interesantes.

TEOREMA 4. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, y

$$M^n = \frac{A^n \sqrt{x^2 + 4}}{\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)\left(1 + \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n - \left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)\left(1 + \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n}$$

$n \in \mathbb{N}$.

(i) Si $x > -2$, entonces $\lim_{n\to\infty} M^n = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \beta^2 \end{pmatrix}$, en donde

$$\beta = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} .$$

(ii) Si $x < -2$ entonces $\lim_{n\to\infty} M^n = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$, en donde

$$\alpha = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2} .$$

(iii) Si $x = -1$ entonces $A^n = \begin{pmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$ y

$\lim_{n\to\infty} \frac{A}{F_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} M^n = \begin{pmatrix} 1 & \phi \\ \phi & 1+\phi \end{pmatrix}$ con $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ el número de oro.

(iv) Si $x = -2$ entonces $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para n par , y $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ para n impar.

Demostración : La ecuación caracteristica de A es :

$$\det(A-\lambda I)=\lambda^2-(2+x)\lambda+x=0\ ,\quad \text{cuyas raices son}$$

$$r=1+\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}=1+\alpha\quad ;\ y\quad s=1+\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}=1+\beta\ .$$

y vectores caracteristicos $\begin{pmatrix}1\\ r-1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\ s-1\end{pmatrix}$ asociados respectivamente a r y s.

$$\text{Entonces}\quad A=\begin{pmatrix}1&1\\ r-1&s-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r&0\\ 0&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\ r-1&s-1\end{pmatrix}^{-1}\quad y$$

$$A^n=\begin{pmatrix}1&1\\ r-1&s-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r&0\\ 0&s\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1&1\\ r-1&s-1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{s-r}\begin{pmatrix}(s-1)r^n-(r-1)s^n & s^n-r^n\\ s^n-r^n & (s-1)s^n-(r-1)r^n\end{pmatrix}$$

$$\text{Como}\quad (r-1)(s-1)=-1\ ,\ (s-1)r^n-(r-1)s^n\neq 0\quad y$$

$$\frac{s-r}{(s-1)r^n-(r-1)s^n}=\frac{\sqrt{x^2+4}}{\beta(1+\alpha)^n-\alpha(1+\beta)^n}\qquad \text{entonces}$$

$$M^n=\frac{(s-r)A^n}{(s-1)r^n-(r-1)s^n}=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{s^n-r^n}{(s-1)r^n-(r-1)s^n}\\[2ex] \dfrac{s^n-r^n}{(s-1)r^n-(r-1)s^n} & \dfrac{(s-1)s^n-(r-1)r^n}{(s-1)r^n-(r-1)s^n}\end{pmatrix}$$

$$\text{es decir, } M^n=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1-(r/s)^n}{(s-1)(r/s)^n-(r-1)}\\[2ex] \dfrac{1-(r/s)^n}{(s-1)(r/s)^n-(r-1)} & \dfrac{(s-1)-(r-1)(r/s)^n}{(s-1)(r/s)^n-(r-1)}\end{pmatrix}\qquad (12)$$

$$\text{Si}\quad x>-2\ ,\qquad (r/s)^n=\left[\frac{2+x-(x^2+4)^{1/2}}{2+x+(x^2+4)^{1/2}}\right]^n\longrightarrow 0\ \text{cuando } n\longrightarrow\infty$$

$$\text{y por lo tanto}\quad \lim_{n\to\infty} M^n=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1}{1-r}\\[2ex] \dfrac{1}{1-r} & \dfrac{s-1}{1-r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & s-1\\ s-1 & (s-1)^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&\beta\\ \beta&\beta^2\end{pmatrix}\quad \text{que es (i).}$$

(ii) Si $x < -2$, $(s/r)^n = \left[\dfrac{2+x+(x^2+4)^{1/2}}{2+x-(x^2+4)^{1/2}}\right]^n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$

y siguiendo el procedimiento anterior, tenemos :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} M^n = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{1-s} \\ \dfrac{1}{1-s} & \dfrac{r-1}{1-s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r-1 \\ r-1 & (r-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

que es (ii) .

(iii) Si $x = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_3 \end{pmatrix}$.

Suponga que $A^k = \begin{pmatrix} F_{2k-1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k+1} \end{pmatrix}$ para $k > 1$. Entonces

$$A^{k+1} = A^kA = \begin{pmatrix} F_{2k-1}+F_{2k} & F_{2k-1}+2F_{2k} \\ F_{2k}+F_{2k+1} & F_{2k}+2F_{2k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{2k+1} & F_{2k+2} \\ F_{2k+2} & F_{2k+3} \end{pmatrix}$$

lo que completa la inducción.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{A}{F_{2n-1}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \begin{pmatrix} 1 & F_{2n}/F_{2n-1} \\ F_{2n}/F_{2n-1} & F_{2n+1}/F_{2n-1} \end{pmatrix} =$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \begin{pmatrix} 1 & F_{2n}/F_{2n-1} \\ F_{2n}/F_{2n-1} & 1 + F_{2n}/F_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \phi \\ \phi & 1+\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \phi \\ \phi & \phi^2 \end{pmatrix}$$

pues el limite del cociente entre dos números de Fibonacci consecutivos cuando $n \longrightarrow \infty$ es igual a ϕ .

(iv) Si $x = -2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $(r/s)^n = (-1)^n$,

$$(s-1)(r/s)^n-(r-1) = \begin{cases} 2\sqrt{2} & \text{si n es par} \\ -2 & \text{si n es impar} \end{cases} \qquad \text{y}$$

$$(s-1)-(r-1)(r/s)^n = \begin{cases} 2\sqrt{2} & \text{si n es par} \\ -2 & \text{si n es impar} \end{cases} \qquad \text{entonces en (12)}$$

$$M^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

5. LOS CUASICRISTALES.

El 12 de noviembre de 1984 Dany Schechtman descubre una aleación metálica (de aluminio y magneso) parecida a un cristal con simetría icosaédrica (polígono regular de veinte caras) la cual es prohibida para un cristal.

Estas aleaciones metálicas con propiedades excepcionales como por ejemplo resistencia mecánica muy elevada son actualmente denominados cuasicristales.

Son perfectamente ordenados, pero su estructura geométrica es no periódica. Son hermosas estructuras con varios tipos de simetrías, y las famosas figuras de Roger Penrose constituyen un prototipo para ellas.

Las únicas simetrías posibles para cristales son binaria la ternaria, la cuaternaria y la senaria. Todas las otras simetrías de rotación quedan excluidas.

Los cuasicristales tienen simetría de orden cinco, y en el cálculo de las estructuras de simetría quinaria aparece el número de oro ϕ , que es característico de la simetría de orden 5.

Los números racionales describen cadenas periódicas y los irracionales que se relacionan con cadenas no periodicas y con estructuras cuasicristalinas son algebraicos.

Así como los números irracionales son límites de sucesiones racionales, las estructuras no periódicas pueden ser aproximadas por sucesiones de estructuras periódicas, y esta aproximación es tanto mejor cuanto mayor sea la malla elemental de la estructura periódica aproximante.

Los aproximantes F_{n+1}/F_n para ϕ permiten obtener estructuras cristalinas que se aproximan a un cuasicristal. En el límite el cuasicristal es un cristal con malla elemental infinita y simetría no periódica. Vea [6]

REFERENCIAS

1. Eves Howard , Great Moments in Mathematics, The Mathematical Association of America, 1983.
2. Cassini J. D. , Histoire Acad. Roy. Paris 1 (1680), 201 .
3. Hoggath Verner E., Fibonacci and Lucas numbers, Houghton Mifflin, Boston, 1969.
4. Knuth Donald , The art of Computer programming, Vol. 2, p. 320, Addison-Wesley Publishing Company, 1969
5. Moore Sam, Fibonacci matrices, The Mathematical Gazette, Vol. 67, número 439, marzo 1983.
6. Duneau M., Kats A., Phys. Rev. Lett, 54, 2.688, 1985.

NUMEROS DE FIBONACCI, COEFICIENTES BINOMIALES Y FRACCIONES CONTINUAS

Edison De Faria Campos

RESUMEN

En este artículo el autor presenta algunos resultados que relacionan los números de Fibonacci con los coeficientes binomiales y con las fracciones continuas.

1. INTRODUCCION.

Consideremos la sucesión de Fibonacci (F_n), $n \in \mathbb{N}$, definida por :

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1\ ,\quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}\quad ,\ n \in \mathbb{N}.$$

Una forma ingeniosa de generar esta sucesión es dada en [1].

Dado un circuito con dos resistencias R y R_n en serie, y una resistencia R en paralelo, considere la resistencia R_{n+1} dada por :

$$\frac{1}{R_{n+1}} = \frac{1}{R + R_n} + \frac{1}{R} \tag{1}$$

Si $R_1 = R$, $R_2 = \frac{2R}{3}$ y $R_3 = \frac{5R}{8}$, entonces los coeficientes de R, 1/1 , 2/3 y 5/8 son F_1/F_2 , F_3/F_4 y F_5/F_6 , lo que sugiere que

$$R_n = R(F_{2n-1}/F_{2n})\quad ,\quad n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Por inducción se prueba fácilmente la ecuación (2). Si n=1, $R_1 = R(F_1/F_2) = R$.

Suponga que (2) es verdadera para n > 1. Entonces, de (1) ,

$$\frac{1}{R_{n+1}} = \frac{1}{R(F_{2n-1}/F_{2n})+R} + \frac{1}{R} = \frac{F_{2n}}{R(F_{2n-1}+F_{2n})} + \frac{1}{R} =$$

$$\frac{F_{2n}}{RF_{2n+1}} + \frac{1}{R} = \frac{F_{2n} + F_{2n+1}}{RF_{2n+1}} = \frac{F_{2n+2}}{RF_{2n+1}}\ ,$$ y por lo tanto, $R_{n+1} = R(F_{2n+1}/F_{2n+2})$, que es (2) para n+1 . ■

2. LOS NUMEROS DE FIBONACCI Y LOS COEFICIENTES BINOMIALES.

En la figura que sigue, consideremos los coeficientes binomiales dispuestos en forma triangular (triángulo de Pascal):

$$\begin{array}{lllll}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4}
\end{array}$$

...

es decir :

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

...

Consideremos las diagonales ascendientes que unen los números 1,1, (1,1), (1,2), (1,3,1), (1,4,3), (1,5,6,1), ...

TEOREMA 1. La suma S_k de los números que aparecen en la k-ésima diagonal ascendiente es un número de Fibonacci.

Demostración : La k-ésima diagonal ascendiente esta formada por los números

$$\binom{k-1}{0},\ \binom{k-2}{1},\ \binom{k-3}{2},\ \ldots$$

Utilizando las relaciones :

$$\binom{m}{0} = \binom{m-1}{0} = 1 \quad y \quad \binom{m}{i} + \binom{m}{i+1} = \binom{m+1}{i+1}, \text{ obtenemos}$$

$$S_{n-2} + S_{n-1} = \binom{n-3}{0} + \binom{n-4}{1} + \binom{n-5}{2} \ \ldots + \binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1}$$

$$+ \binom{n-4}{2} + \binom{n-5}{3} + \ldots \quad = \quad \binom{n-2}{0} + \left[\binom{n-3}{0} + \binom{n-3}{1}\right] +$$

$$\left[\binom{n-4}{1}+\binom{n-4}{2}\right]+\left[\binom{n-5}{2}+\binom{n-5}{3}\right]+\ldots = \binom{n-1}{0}+$$

$$\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\binom{n-4}{3}+\ \ldots\ = S_n\ .$$

Como $S_1 = S_2 = 1$ y $S_n = S_{n-2} + S_{n-1}$, $n = 3,4,\ldots$ concluimos que (S_n) es una sucesión de Fibonacci, y cada S_n es un número de Fibonacci. ■

3. LOS NUMEROS DE FIBONACCI Y LAS FRACCIONES CONTINUAS.

Considere la expresión :

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}} \qquad (3)$$

en donde $q_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots\ldots$, y $q_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se denomina *fracción continua* .

Tal fracción puede ser escrita en la forma mas compacta: $(q_0\ , q_1\ , q_2\ , \ldots\ldots\ , q_n\ )$.

Si ω es la fracción continua (3) decimos que :

$P_0/Q_0 \ := \ q_0$ es su primer convergente ,

$P_1/Q_1 \ := (q_0,q_1) = q_0 + \dfrac{1}{q_1}$ es su segundo convergente ,

$$P_k/Q_k \ := (q_0,q_1, \ldots,q_k) := q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_k}}}$$

es su k-ésimo convergente, en donde P_k y Q_k son enteros positivos relativamente primos.

La transición de P_k/Q_k a P_{k+1}/Q_{k+1} se realiza al reemplazar el último denominador q_k que aparece en P_k/Q_k por $q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$.

Dados a,b enteros con $b \neq 0$, podemos expandir $\frac{a}{b}$ en fracción continua utilizando el algoritmo de Euclides :

$$\begin{aligned}
a &= bq_0 + r_1 ,\\
b &= r_1q_1 + r_2 ,\\
r_1 &= r_2q_2 + r_3 ,\\
&\dots\\
r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n ,\\
r_{n-1} &= r_nq_n .
\end{aligned}$$

Entonces $$\frac{a}{b} = q_0 + r_1/b = q_0 + \frac{1}{b/r_1} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{r_1/r_2}} =$$

$$= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{r_2/r_3}}} = \dots = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}$$

Como $0 \leq r_n < r_{n-1}$, sigue que $q_n > 1$.

Entonces, todo número racional puede ser representado por una fracción continua , y como es fácil ver, la recíproca también es verdadera. Es decir, un número es racional si y sólo si se expande en fracción continua (limitada) y es irracional si y sólo si se expande en fracción continua ilimitada.

TEOREMA 2. Si P_k/Q_k esel k-ésimo convergente de la fracción continua $(q_0 , q_1 , \dots, q_n)$ con P_k , Q_k enteros positivos y relativamente primos, entonces :

$$P_{k+1} = P_kq_{k+1} + P_{k-1} \tag{4}$$

$$Q_{k+1} = Q_kq_{k+1} + Q_{k-1} \tag{5}$$

$$P_{k+1}Q_k - P_kQ_{k+1} = (-1)^k \tag{6}$$

Demostración . Por inducción sobre k.

Para $k = 1$, $P_1/Q_1 = q_0 + 1/q_1 = (q_0q_1 + 1)/q_1$, pero como $q_0q_1 + 1$ y q_1 son relativamente primos, el cociente entre estos dos números es irreducible. Por hipótesis P_1 y Q_1 son enteros positivos y relativamente primos . Por lo tanto,

$P_1 = q_0q_1 + 1 \quad$ y $\quad Q_1 = q_1$.

$$P_2/Q_2 = (q_0,q_1,q_2) = [\, q_0(q_1q_2 + 1) + q_2 \,] \,/\, (q_1q_2 + 1) \tag{7}$$

Pero el máximo común divisor entre $q_0(q_1q_2 + 1) + q_2$ y $q_1q_2 + 1$ es igual al máximo común divisor entre q_2 y $q_1q_2 + 1$ y este es igual al máximo común divisor entre q_2 y 1 que es igual a 1. Esto nos dice que el segundo miembro en (7) es irreducible y por lo tanto,

$$P_2 = q_0(q_1q_2 + 1) + q_2 = (q_0q_1 + 1)q_2 + q_0 = P_1q_2 + P_0$$

$$Q_2 = q_1q_2 + 1 = Q_1q_2 + Q_0 \quad , \quad y$$

$P_2Q_1 - P_1Q_2 = (P_1q_2 + P_0)Q_1 - P_1(Q_1q_2 + Q_0) = q_0q_1 - (q_0q_1 + 1) = -1 = (-1)^1$, que son (4), (5) y (6) para $k = 1$.

Supongamos que (4), (5), (6) son verdaderas para $k > 1$.

Entonces $P_{k+1}/Q_{k+1} = (P_kq_{k+1} - P_{k-1})/(Q_kq_{k+1} + Q_{k-1})$. Ahora , P_{k+2}/Q_{k+2} se obtiene reemplazando q_{k+1} por $q_{k+1} + 1/q_{k+2}$ en la expresión para P_{k+1}/Q_{k+1} . Como q_{k+1} no aparece en las fórmulas para P_k , Q_k , P_{k-1} y Q_{k-1} , obtenemos :

$$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}} = \frac{P_k(q_{k+1} + 1/q_{k+2}) + P_{k-1}}{Q_k(q_{k+1} + 1/q_{k+2}) + Q_{k-1}} = \frac{P_kq_{k+1} + P_{k-1} + P_k/q_{k+2}}{Q_kq_{k+1} + Q_{k-1} + Q_k/q_{k+2}}$$

$$= \frac{P_{k+1}q_{k+2} + P_k}{Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k} \tag{8}$$

Supongamos que $P_{k+1}q_{k+2} + P_k$ y $Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k$ tienen un factor común $d > 1$. Entonces la expresión

$(P_{k+1}q_{k+2}+P_k)Q_{k+1} - (Q_{k+1}q_{k+2}+Q_k)P_{k+1} = P_kQ_{k+1} - Q_kP_{k+1} = (-1)^{k+1}$ (por hipótesis de inducción) también es divisible por d , lo que falso. Por lo tanto la última fracción en (8) es irreducible, y entonces tenemos : $P_{k+2} = P_{k+1}q_{k+2}+P_k$, $Q_{k+2} = Q_{k+1}q_{k+2}+Q_k$ y $P_{k+2}Q_{k+1} - P_{k+1}Q_{k+2} = (P_{k+1}q_{k+2}+P_k)Q_{k+1} - P_{k+1}(Q_{k+1}q_{k+2}+Q_k) = P_kQ_{k+1} - Q_kP_{k+1} = (-1)^{k+1}$, que son (4), (5), y (6) para k+1. ■

COROLARIO 1. $$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^k}{Q_kQ_{k+1}}$$

Demostración : $P_{k+1}/Q_{k+1} - P_k/Q_k = (P_{k+1}Q_k - P_kQ_{k+1})/Q_kQ_{k+1} = (-1)^k / Q_kQ_{k+1}$. ■

Como $q_k \in \mathbb{N}$, k=0,1,2,... , entonces por el teorema 2 concluimos que

$$P_0 < P_1 < P_2 < \dots \quad y \quad Q_0 < Q_1 < Q_2 < \dots \tag{9}$$

TEOREMA 3. Si P_k/Q_k esel k-ésimo convergente de la fracción continua (1,1,1,...,1) con P_k , Q_k enteros positivos y relativamente primos, entonces : $P_n/Q_n = F_{n+2}/F_{n+1}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ en donde F_k es el k-ésimo número de Fibonacci.

Demostración . Por inducción sobre n. Si n = 0, $P_0/Q_0 = q_0 = 1/1 = F_2/F_1$.

$P_1/Q_1 = q_0 + 1/q_1 = 2/1$. Entonces $P_0 = 1$, $P_1 = 2$, $Q_0=1$ y $Q_1 = 1$.

Supongamos que $P_k/Q_k = F_{k+2}/F_{k+1}$ para k = 1,2,...,n . Como P_k y Q_k son relativamente primos , entonces $P_k=F_{k+2}$, y $Q_k=F_{k+1}$

Ahora, $P_{n+1} = P_nq_{n+1}+P_{n-1} = P_n + P_{n-1} = F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$, y $Q_{n+1} = Q_nq_{n+1}+Q_{n-1} = Q_n + Q_{n-1} = F_{n+1} + F_n = F_{n+1}$,

lo que completa la demostración . ■

Definición : La expresión $\omega = (q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots)$ (10)
se denomina *fracción continua infinita* .

Las definiciones y resultados anteriores son naturalmente extendidos a las fracciones continuas infinitas.

TEOREMA 4. La sucesión (P_k/Q_k) de convergentes de la fracción continua infinita (10) tiene límite ω .

Demostración . Consideremos las subsucesiones (P_{2k}/Q_{2k}) y (P_{2k+1}/Q_{2k+1}) , $k = 0,1, \ldots$.

Por el corolario 1 y por (9) tenemos :

$P_{2n+2}/Q_{2n+2} - P_{2n}/Q_{2n} = P_{2n+2}/Q_{2n+2} - P_{2n+1}/Q_{2n+1} + P_{2n+1}/Q_{2n+1} - P_{2n}/Q_{2n} = -1/Q_{2n+2}Q_{2n+1} + 1/Q_{2n+1}Q_{2n} > 0$.

Analogamente, $P_{2n+3}/Q_{2n+3} - P_{2n+1}/Q_{2n+1} = 1/Q_{2n+3}Q_{2n+2} - 1/Q_{2n+2}Q_{2n+1} < 0$.

Entonces (P_{2k}/Q_{2k}) es una sucesión creciente y (P_{2k+1}/Q_{2k+1}) es una sucesión decreciente.

Consideremos los números P_{2n}/Q_{2n} y P_{2m+1}/Q_{2m+1} con $n,m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sea k un número impar mayor que $\max(2n, 2m+1)$.
Por el corolario 1, $P_{k+1}/Q_{k+1} - P_k/Q_k = (-1)^k/Q_kQ_{k+1} < 0$ y
así,

$$P_k/Q_k > P_{k+1}/Q_{k+1} \tag{11}$$

Como (P_{2n}/Q_{2n}) es creciente, (P_{2m+1}/Q_{2m+1}) es decreciente ,$k > 2n$, $k > 2m+1$ y $k+1$ es par entonces :

$$P_{k+1}/Q_{k+1} > P_{2n}/Q_{2n} \tag{12}$$
$$P_k/Q_k < P_{2m+1}/Q_{2m+1} \tag{13}$$

De (11), (12) y (12), obtenemos :

$$P_{2n}/Q_{2n} < P_{2m+1}/Q_{2m+1} \quad , \text{ para todo } n,m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

es decir, cada término de la sucesión creciente (P_{2n}/Q_{2n}) es menor que cualquier término de la sucesión decreciente (P_{2n+1}/Q_{2n+1}) .

Además, $\left| P_{n+1}/Q_{n+1} - P_n/Q_n \right| = \left| (-1)^n/Q_nQ_{n+1} \right| < 1/Q_n^2 < 1/n^2$ pues $Q_0=1 < Q_1 < \dots < Q_n < \dots$.

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} P_{n+1}/Q_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} P_n/Q_n$, y esto implica que (P_{2n}/Q_{2n}) y (P_{2n+1}/Q_{2n+1}) convergen al mismo limite, que es por definición el valor de la fracción continua infinita (10). ■

COROLARIO 2. La fracción continuada infinita :

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}$$ es igual a $\lim\limits_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n = \phi$

con $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ el número de oro, y F_n el n-ésimo número de Fibonacci.

Demostración :En (2) se muestra que $F_n = \dfrac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$ en donde ϕ es el número de oro $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \phi$.

Entonces $\left| F_n - \phi^n/\sqrt{5} \right| = \left| \psi \right|^n/\sqrt{5} < 1/2$, pues $|\psi| < 1$ y asi, ϕ_n es el entero mas cercano a $\phi^n/\sqrt{5}$, es decir :

$F_n = \phi^n/\sqrt{5} + \theta_n$, con $|\theta_n| < 1/2$ para todo n.

Por los teoremas (3) y (4) , $\omega = \lim\limits_{n\to\infty} P_n/Q_n$

$$= \lim_{n\to\infty} F_{n+2}/F_{n+1} = \lim_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi^{n+1}/\sqrt{5} + \theta_{n+1}}{\phi^n/\sqrt{5} + \theta_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi + \sqrt{5}(\theta_{n+1}/\phi^n)}{1 + \sqrt{5}(\theta_n/\phi^n)} = \phi$$, pues θ_n es acotado para todo n, y $\phi > 1$, lo que implica $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt{5}(\theta_{k+1}/\phi^k) = 0$. ■

El corolario anterior nos dice que la razón entre dos números de Fibonacci consecutivos tiende al número de oro ϕ cuando el índice crece. En [3] aparecen algunos resultados relacionando expansiones de números racionales con fracciones continuas, y números irracionales con fracciones continuas infinitas.

REFERENCIAS

1. Beran Ladislav, Schemes generating Fibonacci sequence, The Mathematical Gazette, Vol. 70, número 451, Marzo 1986.
2. Rowland Tim , Toss Fibonacci ! The Mathematical Gazette, Vol. 68, Número 445, Octubre 1984.
3. Jones, Burton , The Theory of Numbers, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
4. Vorobyov N.N., The Fibonacci Numbers, D.C. Heath and Company Boston, 1963.

POLINOMIOS REALES DE UNA VARIABLE REAL. SUS RAÍCES REALES Y MÉTODOS NUMÉRICOS.

Edwin Castro F/ Escuela de Matemática/ UCR.
Gerardo Mora A./ Sede de Occidente/ UCR.
San José, Costa Rica.

RESUMEN

Aquí estudiaremos algunos aspectos relacionados con polinomios reales de una variable real, tales como el Método de Sturn para calcular el número de raíces reales, el Método de Newton para acotar los ceros de un polinomio *P*, evaluación de *P* utilizando el Método de Horner, el cálculo aproximado de sus raíces, utilizando Métodos Numéricos, e integrar los métodos aquí mencionados, en un programa de computación.

§I. INTRODUCCIÓN.

La ecuaciones polinomiales empiezan a estudiarse ya desde la secundaria, partiendo del estudio de ecuaciones lineales con una variable.

Luego se pasa al estudio de ecuaciones de segundo grado, y aunque estas pueden ser resueltas explícitamente, con la "Fórmula General", aquí ya aparece el problema del cálculo aproximado de raíces cuadradas.

Posteriormente se incursiona un poco en la solución de algunas ecuaciones polinomiales de grado superior a dos. Aquí, generalmente es estudiado el "Teorema del Factor", para una vez encontrado un cero, poder reducir la ecuación polinomial en un grado, y para hacer los cálculos, el "Método de Horner".

Sin embargo, lo descrito anteriormente "funciona", solo si la ecuación polinomial a resolver tiene ceros racionales.

El estudio de la solución de ecuaciones polinomiales, debe profundizarse un poco más, pues estas aparecen en múltiples problemas, como por ejemplo, cuando se hacen cálculos de volúmenes, problemas relacionados con la física, la economía, la medicina, la ingeniería, etc.

Incluso el cálculo de algunas funciones trigonamétricas puede reducirse al cálculo de una de las raíces de una ecuación polinomial.

Lo que aquí proponemos al respecto, es integrar algunos resultados del álgebra de polinomios, la solución numérica, y el uso de la microcomputadora, de tal forma que, hacer una gran cantidad de cálculos no sea una limitante para poder obtener el número de ceros reales de una ecuación polinomial, y poder aproximar estos, con algún número de decimales exactos.

Vamos a empezar describiendo el "Método de Sturn" para determinar el número de ceros reales de un polinomio $P(x)$, real de variable real, y de grado n.

§II. EL MÉTODO DE STURN.

Un concepto que debe interiorizarse, antes de estudiar el Sistema de Sturn, para calcular el número de ceros reales de un polinomio P, es el "número de variaciones de signo" en un conjunto finito y ordenado de números reales diferentes de cero.

Aquí vamos a entender por conjunto finito y ordenado de números reales diferentes de cero, a un grupo de, digamos n números reales diferentes de cero, de tal forma que los podamos ordenar por: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots, x_n$, donde x_1 es el primer elemento, y x_n es el último.

.l concepto de número de variaciones queda claro, si lo introducimos en forma inductiva.

Así, en un conjunto unitario, no hay variaciones de signo.

Si lo que tenemos es un conjunto de dos elementos ordenados y diferentes de cero, entonces diremos que hay una variación de signo, si uno de los números es positivo, y el otro negativo. $(2,-\sqrt{3})$ y $(-4,9)$ presentan una variación de signo. Si ambos números tienen el mismo signo, entonces diremos que no hay variaciones de signo.

En un conjunto ordenado de tres elementos diferentes de cero, pueden darse los siguientes casos: (supongamos que a, b y c representan números reales positivos)

1. (-a,b,c) una variación.
2. (a,-b,c) dos variaciones.
3. (a,b,-c) una variación.
4. (-a,-b,c) una variación.
5. (a,-b,-c) una variación.
6. (-a,b,-c) dos variaciones.
7. (a,b,c) ninguna variación, y

8. $(-a,-b,-c)$ ninguna variación.

DEFINICIÓN 1.

En general, si se tienen n números rales, ordenados y diferentes de cero, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n, diremos que el número de variaciones de signo $v_n(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$ se determina por el número de veces que aparezcan dos números x_k y x_{k+1} con diferente signo entre ellos, $1\leq k\leq n-1$. Así, por ejemplo:

$v_6(5,-1,-4,10,11,14)=2$ $\qquad$ $v_6(-2,3,7,-4,6,8)=3$

$v_6(4,-3,-2,1,-4,6)=4$ $\qquad$ $v_6(4,-3,1,-2,6,-4)=5.$

Ahora definiremos lo que en adelante llamaremos *Sistema de Sturn*. [Kurosch, 1977. pp. 251]

DEFINICIÓN 2.

Sea P un polinomio real, de variable real, con coeficientes reales, y de grado n, $n\geq 2$, y supongamos que P no tiene raíces múltiples.

NOTA: Si P tiene raíces múltiples, entonces puede calcularse el *máximo común divisor* de $P(x)$ y $P'(x)$, donde P' se define de la siguiente forma:

$$P'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots+2a_{n-2}x+a_{n-1},$$

dado que: $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n$.

Sea $T(x)$ el máximo común divisor a $P(x)$ y $P'(x)$. Entonces $P(x)$ es divisible por $T(x)$, y si $S(x)=P(x)\div T(x)$, S es un polinomio sin ceros múltiples, y α es un cero de P si y solo si α es un cero de S. [Kurosch, 1977. pp. 148-149]
P' se llama primera derivada de P, [Kurosch, 1977. pp. 148] y en forma inductiva se define k-ésima derivada de P por:

$$P^{(k)}=\left(P^{(k-1)}\right)', \ 0\leq k\leq n, \text{ y } P^{(l)}=0, \text{ si } l>n.$$

Sean $P=P_0$, P_1, P_2, $\cdots$,P_s, $s\in\mathbb{N}$, s constante.

Diremos que $(P_0,P_1,P_2,\cdots,P_s)$ forma un *Sistema de Sturn* si y solo si:

1. P_{k-1} y P_k no tienen raíces reales comunes, $(\forall k)$ $k\in\mathbb{N}$, $1\leq k\leq s$.

2. P_m no tiene raíces reales.

3. Si α es una raíz de P_k, $k\in\mathbb{N}$, $1\le k\le m-1$, entonces: $P_{k-1}(\alpha)P_{k+1}(\alpha)<0$.

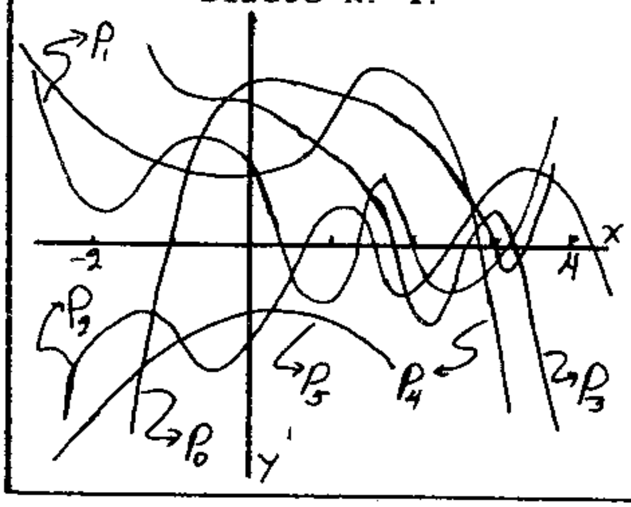
4. Si α es una raíz de P_0, $\alpha\in\mathbb{R}$, existe un intervalo $[\alpha-s,\alpha+r]$, $s\in\mathbb{R}$, $s>0$, $r\in\mathbb{R}$, $r>0$, s y r constantes, tales que: $P_0(x)P_1(x)<0$ $(\forall x)$ $x\in[\alpha-s,\alpha[$, y $P_0(x)P_1(x)>0$ $(\forall x)$ $x\in]\alpha,\alpha+r]$.

La construcción de un Sistema de Sturn no es única, como se puede observar en los Dibujos N. 1 y 2, donde se representan Sistemas de Sturn asociados al polinomio definido por:

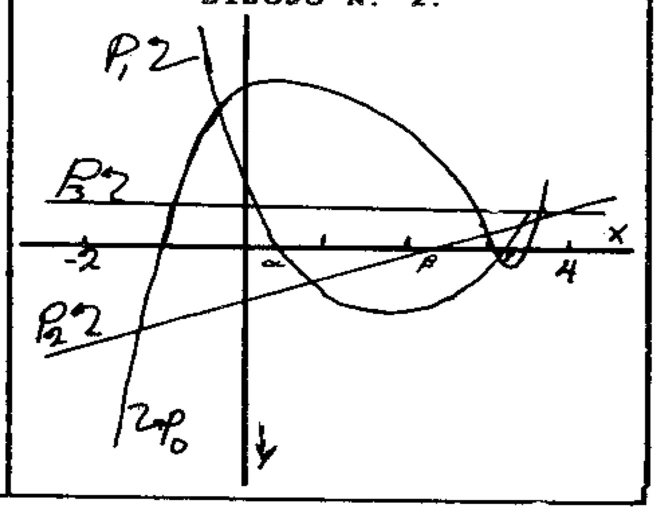
$$P(x)=(x+1)(x-3)(x-\sqrt{12}).$$

Los polinomios del Sistema de Sturn del Dibujo N. 1 fueron construidos, únicamente tomando en cuenta las condiciones que deberían de cumplir dichos polinomios.

DIBUJO N. 1.



DIBUJO N. 2.



Aquí presentaremos cómo construir Sistemas de Sturn como el que se presenta en el Dibujo N. 2, pero antes de esto, enunciemos el siguiente teorema:

TEOREMA 1. (Teorema de Sturn)

Sea P un polinomio tal que:

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n.$$

$a_k\in\mathbb{R}$, $(\forall k)$ $k\in\mathbb{N}$, $0\le k\le n$, $a_0\ne 0$, $x\in\mathbb{R}$.

Sea $P_0=P$, y sea $(P_0, P_1, P_2, \cdots, P_s)$ un Sistema de Sturn.

Sea c una constante real, v(c) el número de variaciones de signo que presenta:

$$(P_0(c), P_1(c), P_2(c), \cdots, P_s(c))$$

donde los $P_j(c)=0$, $0\leq j\leq s$ han sido eliminados.

Si **a** y **b** son constantes reales, $a<b$, entonces $v(a)\geq v(b)$ y $v(a)-v(b)$ es igual al número de raíces reales de $P(x)=0$, entre **a** y **b**.

La demostración de este teorema puede encontrarse en [Kurosch, 1977. pp. 251-256]. Aquí trataremos de describirlo en forma intuitiva, utilizando para ello los Dibujos N. 1 y 2.

Empecemos con el Dibujo N. 2.

Es conveniente que el lector verifique que los polinomios que se representan en este dibujo, (N. 2) satisfacen las cuatro condiciones para que (P_0, P_1, P_2, P_3) sea un Sistema de Sturn.

La idea aquí es la siguiente. Obsérvese que si $a<-1$, entonces se tendrá que:

$$P_0(a)<0,\ P_1(a)>0,\ P_2(a)<0,\ y\ P_3(a)>0$$

y por lo tanto, el conjunto $(P_0(a), P_1(a), P_2(a), P_3(a))$ presenta exactamente tres variaciones de signo, o sea que $v(a)=3$, $(\forall a)$ $a<-1$.

Para contar el número de variaciones de signo de

$$(P_0(a), P_1(a), P_2(a), P_3(a)),$$

puede utilizarse la siguiente representación: −+−+, y contar los cambios de signo consecutivos, que en este caso son tres. Un caso particular, resulta si hacemos $a=-2$, y fácilmente se comprueba que $v(-2)=3$.

Por otra parte, si escogemos ahora **b** tal que $-1<b<3$, entonces se tendrá necesariamente que:

$$P_0(b)>0,\ P_1(b)>0,\ P_2(b)<0,\ y\ P_3(b)>0,\ \text{para } b<\alpha.$$

o sea: ++−+, lo cual indica que en este caso $v(b)=2$.

$$P_0(\alpha)>0,\ P_1(\alpha)=0,\ P_2(\alpha)<0,\ y\ P_3(\alpha)>0,$$

luego, $P_1(\alpha)$ se elimina, y nos queda $+-+$, y $v(\alpha)=2$.

Si $\alpha<b<\beta$, entonces

$$P_0(b)>0,\ P_1(b)<0,\ P_2(b)<0,\ y\ P_3(b)>0,$$

por lo que $v(b)=2$ también en este caso. $(+--+)$

Para $b=\beta$, se tiene que

$$P_0(\beta)>0,\ P_1(\beta)<0,\ P_2(\beta)=0,\ y\ P_3(\beta)>0,$$

y tenemos ahora $+-+$, pues $P_2(\beta)$ se elimina por ser igual a cero. De nuevo vemos que $v(b)=2$, en este caso con $b=\beta$.

Por su parte, si $b>\beta$, entonces

$$P_0(b)>0,\ P_1(b)<0,\ P_2(b)>0,\ y\ P_3(b)>0,$$

y nuevamente $v(b)=2$. $(+-++)$

De los párrafos anteriores, podemos concluir que $(\forall b)$ $-1<b<3$, $v(b)=2$. Luego, $v(a)-v(b)=1$, $(\forall a)$ $a<-1$ y $(\forall b)$ $-1<b<3$.

Por su parte, si c es tal que $3<c<\sqrt{12}$, entonces $v(c)=1$. Por ejemplo $P_0(3.25)<0$, $P_1(3.25)<0$, $P_2(3.25)>0$, y $P_3(3.25)>0$, por lo que $v(3.25)=1$. $(--++)$, mientras que

$$P_0(\gamma)<0,\ P_1(\gamma)=0,\ P_2(\gamma)>0,\ y\ P_3(\gamma)>0,$$

por lo que $(P_0(\gamma), P_2(\gamma), P_3(\gamma))$ presenta exactamente una variación de signo.

El lector puede comprobar que, $(\forall c)$ $3<c<\sqrt{12}$, $v(c)=1$, y que $(\forall d)$ $d>\sqrt{12}$, $P_0(d)>0$, $P_1(d)>0$, $P_2(d)>0$, y $P_3(d)>0$, o sea que $v(d)=0$, $(\forall d)$ $d>\sqrt{12}$, y de esta forma concluir que:

1. $v(a)-v(b)=1$, por lo tanto, entre a y b, P tiene un cero real.

2. $v(b)-v(c)=1$, luego, entre b y c hay una raíz de $P(x)=0$.

3. $v(c)-v(d)=1$ y entre c y d, la ecuación $P(x)=0$ tiene una única solución.

4. $v(a)-v(d)=3$, y este resultado concuerda con en número de ceros reales que tiene la ecuación $P(x)=0$.

Los resultados del Dibujo N. 2 representan un caso particular de un Sistema de Sturn.

Observaciones similares pueden hacerse, con respecto al

Dibujo N. 1, y así inducir que, si P representa un polinomio real, de variable real, y de grado n, el cual carece de raíces múltiples, y dadas las constantes reales a y b, a<b, y $P(a)P(b)\neq 0$, entonces $v(a)-v(b)$ es igual a el número de raíces reales de $P(x)=0$, para x entre a y b, y si escogemos a y b tales que la ecuación $P(x)=0$ no tenga soluciones reales, $(\forall x)$ $x\in\mathbb{R}-]a,b[$, entonces $v(a)-v(b)$ nos da el número de ceros reales de P.

En párrafos posteriores, veremos cómo podemos calcular a y b, tales que P no tenga ceros reales en $\mathbb{R}-]a,b[$.

Ahora vamos a describir como puede obtenerse un Sistema de Sturn, como el que se representa en el Dibujo N. 2.

§III. CONSTRUCCIÓN DE UN SISTEMA DE STURN.

Sea $P(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+a_3x^{m-1}+\cdots+a_{m-2}x^2+a_{m-1}x+a_m$ un polinomio de grado m, $x\in\mathbb{R}$, y $a_i\in\mathbb{R}$, $(\forall i)$ $i\in(0,1,2,\cdots,m)$. Además, supongamos que $P(x)=0$ no tiene raíces múltiples.

Sean $P_0=P$ y $P_1=P'$, donde P' se calcula de acuerdo con la Definición 2.

Para $1\leq k\leq s$, calcúlese P_k de la siguiente manera:

Sean S_k y R_k polinomios tales que:

$$P_{k-2}(x)=P_{k-1}(x)S_k(x)+R_k(x).$$

donde grado de R_k es menor que grado de P_{k-1}.

Luego hágase $P_k=-R_k$.

Deténgase cuando P_k es constante, o sea cuando R_k es un polinomio de grado cero. P_k constante implica $k=s$. (También puede detenerse el cálculo de los P_k, si se puede garantizar, de alguna forma, que P_k no tiene ceros reales, aún cuando este no sea constante)

Este sistema así construido cumple con todas las propiedades que se establecieron en la definición 2, y una demostración puede observarse en [Kurosch, 1977. pp. 254-255].

Es muy probable que el lector ya esté pensando en le tiempo que podría llevarse, para construir un Sistema de Sturn asociado, por ejemplo al polinomio definido por:

$$P(x)=3x^{7}-4x^{6}+5x^{5}+11x^{4}-23x^{3}-30x^{2}+11x-17.$$

y en el trabajo que llevaría luego, el evaluar cada uno de los polinomios obtenidos, para determinar el número de raices reales entre **a** y **b**.

Nosotros, aquí lo que proponemos, es que se integren los microcomputadores a la Enseñanza, y la Aplicación de las Matemáticas, pues esto es, entre otras cosas, lo que nos motivó a escribir sobre este tema.

§IV. EVALUACIÓN DE POLINOMIOS.

Una vez que se ha construido un Sistema de Sturn, nos enfrentamos a la tarea de evaluar polinomios.

Desde el punto de vista computacional, un método muy eficaz y fácil de programar, es el "Metodo de Horner", también conocido como "División Sintética", y que tiene la particularidad de que si

$$P(x)=a_0x^{n}+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-1}+\cdots+a_{n-2}x^{2}+a_{n-1}x+a_n$$

entonces $P(c)=c_n$, donde $c_0=a_0$, y $c_k=cc_{k-1}+a_k$, para $k\in\mathbb{N}$, $1\leq k\leq n$. [Kurosch, 1977. pp. 146-147].

Siguiendo la idea de Horner, para obtener el cociente y el residuo que resulta de dividir $P(x)$ por $Q(x)$, donde:

$$P(x)=a_0x^{m}+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+a_3x^{m-1}+\cdots+a_{m-2}x^{2}+a_{m-1}x+a_m$$

$$Q(x)=b_0x^{n}+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+b_3x^{n-1}+\cdots+b_{n-2}x^{2}+b_{n-1}x+b_n$$

con $m\geq n$, y $a_0b_0\neq 0$, tenemos que si $P(x)=Q(x)S(x)+R(x)$, entonces:

$$S(x)=\sum_{j=0}^{m-n}\frac{c_j}{b_0}x^{m-n-j} \quad \text{y} \quad R(x)=\sum_{j=0}^{n-1}c_jx^{n-1-j}$$

donde c_k $k\in(0,1,2,\cdots,m)$ está determinado por:

$$c_0=a_0 \ \text{ y } \ c_k=\left[a_kb_0-\sum_{j=0}^{k-1}c_jb_{k-j}\right]\div b_0$$

Los coeficientes c_i, con la ayuda de un microcomputador son fácilmente calculables.

§VI. COTAS PARA LAS RAÍCES REALES DE $P(X)=0$.

Otro de los aspectos que interesa aquí, es poder determinar cotas superiores e inferiores para las raíces reales positivas o negativas, de un polinomio de grado n.

Aunque existen varias fórmulas para calcular cotas, [Kurosch, 1977. pp. 245-250] aquí describiremos el Método de Newton, el cual permite encontrar cotas "muy estrechas", y es fácil de aplicar, si se utiliza un microcomputador.

Lo que Newton propone es que, dado un polinomio P, tal que

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n$$

con $a_i\in\mathbb{R}, i\in(0,1,2,\cdots,n)$. $a_0>0$ y $x\in\mathbb{R}$. Si α es un número real positivo tal que $P^{(n)}(\alpha)>0$, $P^{(n-1)}(\alpha)>0$, $P^{(n-2)}(\alpha)>0$, $\cdots$, $P'(\alpha)>0$, y $P(\alpha)>0$, entonces cada raiz real positiva de $P(x)=0$ debe ser necesariamente menor que α.

Dicha afirmación es válida, ya que:

$$P(x)=P(\alpha)+P'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{P''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2+\cdots+\frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

(Desarrollo de Taylor de $P(x)$, alrededor de $x=\alpha$) [Kurosch, 1977. pp. 152, 249] [Apostol, Tom, 1978. V. I. pp. 335-336] y si $\iota>\alpha$, dado que $P^{(n)}(\alpha)>0$, $P^{(n-1)}(\alpha)>0$, $P^{(n-2)}(\alpha)>0$, $\cdots$, $P'(\alpha)>0$, $P(\alpha)>0$, y $\iota-\alpha>0$, entonces $P(\iota)>0$, $(\forall\iota)$ $\iota>\alpha$.

En forma análoga, para obtener una cota inferior de las raíces positivas de $P(x)=0$, calcúlese una cota superior para las raíces positivas de $x^nP(1/x)$. Si dicha cota es β, entonces las ríces positivas de $P(x)=0$, serán mayores que $1/\beta$.

Para las raíces negativas de $P(x)=0$, debemos estudiar el polinomio $P(-x)$, ya que γ es una raíz positiva de $P(-x)=0$ si y solo si $-\gamma$ es raíz de $P(x)=0$. [Kurosch, 1977. pp. 245-250]

Una vez que se tiene infomación sobre el número de ràíces reales de $P(x)=0$, y los intervalos donde estas se encuentran (cotas para las raíces positivas y las negativas) nos proponemos a calcular números racionales que las aproximen.

§VII. SOLUCIÓN NUMÉRICA.

De nuevo proponemos, que se integre el microcomputador a la solución númerica de ecuaciones polinomiales, utilizando para tal efecto algoritmos apropiados.

Existen muchos métodos para resolver numéricamente una ecuación real, de variable real. A nivel de secundaria, podrían utilizarse, ya sea el Método de la Bisección, [Burden, Richard. Faires, J. Douglas, 1985. pp. 40-45] [Mora, Gerardo, 1990. pp. 30-68] o el Método de las Cuerdas. [Burden, Richard. Faires, J. Douglas, 1985. pp. 58-59] [Mora, Gerardo, 1990. pp. 69-101]

También se puede utilizar el Método de Newton, el cual genera sucesiones que convergen "muy rápido" hacia una de las raíces de $P(x)=0$.

Otra situación, a la que nos enfrentamos es, cómo separar las raíces de $P(x)=0$, si sabemos que esta se encuentra en el intervalo $]\alpha,\beta[$.

Una posibilidad es dividir $]\alpha,\beta[$ en N partes iguales, y calcular los productos $P(\alpha+lp)P(\alpha+(l+1)p)$, $l\in\{0,1,2,\cdots,N-1\}$, con $p=(\beta-\alpha)/N$. De esta forma, si $P(\alpha+lp)P(\alpha+(l+1)p)<0$, entonces, necesariamente, en el intervalo $]\alpha+lp),\alpha+(l+1)p[$ habrá por lo menos una raíz.

Por supuesto, que esto no resuelve por completo el problema de la separación de raíces, pues si en un intervalo $[s,t]$ hay raíces reales de $P(x)=0$, y la diferencia entre dos de ellas es muy pequeña (menor que $(\beta-\alpha)/N$), entonces lo descrito en el párrafo anterior podría ser que no funcione.

BIBLIOGRAFÍA:

Apostol, Tom M: *Calculus*. Segunda Edición. Editorial Reverté S.A. Barcelona. 1978.

Burden, Richard y Faires, J. Douglas: *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamérica. México. 1985.co. 1985.

Kurosch, A. G.: *Curso de Álgebra Superior*. Tercera Edición. Editorial Mir, Moscú. 1977.cú. 1977.

Mora, Gerardo. *Solución numérica de ecuaciones algebraicas*. Tesis de Grado para optar al título de Licenciado en Enseñanza de la Matemática. San José. 1990.

HOMOMORFISMOS Y CONGRUENCIAS

Josefa I. García
Universidad de Puerto Rico en Arecibo
(Con la colaboración de
John Hilde brant
Louisiana State University)

El estudio de congruencias en semigrupos está estrechamente ligado al estudio de homomorfismos. Es sabido que el núcleo de todo homomorfismo entre semigrupos es una congruencia del dominio. Aquí se analizan las características de esta congruencia, se demuestra que la preimagen homomórfica de una congruencia es también una congruencia del dominio, y se estudia la imagen homomórfica de una congruencia.

Además, se demuestra que las imágenes homomórficas de grupos, semigrupos cíclicos y semigrupos ideales con la Propiedad de Extensión de Congruencias (PEC) también poseen PEC.

HOMOMORFISMOS Y CONGRUENCIAS

Sea $\phi : S \twoheadrightarrow X$ un homomorfismo de un semigrupo S sobre un semigrupo X. Defínase el núcleo K de ϕ por $K\phi = \{(a, b) \in S \times S: \phi(a) = (b)\}$.

Es fácil ver que $K\phi$ es una congruencia en S. Por otro lado, si σ es cualquier congruencia en un semigrupo S, puede ser considerada como el núcleo del homomorfismo natural π, definido por $\pi : S \longrightarrow S/_{\sigma}$ tal que $\pi(a) = \bar{a} = \{b \in S: (a, b) \in \sigma\}$.

Acordemos que, a través de toda esta presentación, ϕ es un homomorfismo de un semigrupo S sobre un semigrupo X.

<u>Definición</u>: Un semigrupo S tiene la Propiedad de Extensión de Congruencia (PEC) si para cada subsemigrupo T de S y para cada congruencia σ en T existe una congruencia $\bar{\sigma}$ en S tal que $\bar{\sigma} \cap (T \times T) = \sigma$.

Obsérvese que toda congruencia σ en T genera una congruencia mínima $\langle\sigma\rangle_S$ en S, pero ésta no cumple, en general, con la propiedad de restricción.

Lemma:

Sea Y un subsemigrupo de X y σ una congruencia en Y. Entonces la relación $\rho = \{(x, y) \in \phi^{-1}(Y) \times \phi^{-1}(Y) : (\phi(x), \phi(y)) \in \sigma\}$ es una congruencia del subsemigrupo $\phi^{-1}(Y)$.

La demostración es sencilla.

Llamaremos a ρ el pullback de σ.

Proposición: Sea S un semigrupo. Entonces, los siguientes postulados son equivalentes:

(a) S tiene la Propiedad de Extensión de Congruencia (PEC).

(b) Para cada subsemigrupo T de S y cada homomorfismo $\phi: T \longrightarrow Y$, de T sobre un subsemigrupo Y de X, existe un homomorfismo $\gamma : S \longrightarrow X$ y una inmersión α $Y \longrightarrow X$ tal que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\gamma"] & X \\ T \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\phi"'] & Y \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

(c) Para cada subsemigrupo T de S y cada congruencia σ en T, la congruencia generada por σ en S, $\langle\sigma\rangle_S$ tiene la propiedad que $\langle\sigma\rangle_S \cap (T \times T) = \sigma$

Esto significa que $\langle\sigma\rangle_S$ es la extensión mínima de σ a S.

Definimos, usualmente,

$\langle\sigma\rangle_S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \rho^{(n)}$ donde $\rho = \{(xay, xby) : (a,b) \in \delta$

$x, y \in S^1, \quad \delta = \sigma \cup \Delta \quad \therefore \rho^n = \rho \circ \rho \circ \rho \ldots$ n veces

(Véase Clifford & Preston, Algebraic Theory of Semigrups, AMS)

<u>Proposición</u>:

Sea S un semigrupo, T un subsemigrupo de S, σ una congruencia en T, y $\bar{\sigma}$ una congruencia en S.

Entonces

$\bar{\sigma}$ es una extensión de σ si y solamente si existe una inmersión $\phi : T/_{\sigma} \longrightarrow S/_{\bar{\sigma}}$ tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\alpha"] & S/_{\bar{\sigma}} \\ T \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\beta"] & T/_{\sigma} \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión T en S, y, α Y β son los homomorfismos naturales.

<u>Lemma</u>: Sea α una congruencia en X y sea ρ pullback de α a S.

Entonces $K\phi \subseteq \rho$.

Aún más,

(i) Si $\rho = \Delta_S$, entonces $\alpha = \Delta_X$.

(ii) Si $\alpha = \Delta_X$, entonces $\rho = K\phi$.

(iii) Si $\alpha = \Delta_X$ Y ϕ es inyectiva, entonces $\rho = \Delta s$.

(iv) $\rho = S \times S$ si y solo si $\alpha = X \times X$.

(v) Si β es una congruencia en X con pullback σ y $\alpha \leq \beta$ entonces

$\rho \leq \sigma$

Estos cinco datos, fáciles de verificar, serán la base de las demostraciones de los siguientes resultados:

Proposición:

Sea α, una relación en X y ρ, una relación en S, tales que α y ρ son sus cerraduras transitivas, $\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_1^{(n)}$, $\rho = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \rho_1^{(n)}$ entonces

(i) Si ρ_1 está contenida en el pullback de α_1, entonces ρ está contenida en el pullback de α.

(ii) Si el pullback de α, está contenida en ρ, entonces el pullback de α está contenida en ρ.

(iii) Si ρ_1 es el pullback de α_1 entonces ρ es el pullback de α

Proposición:

Sea ρ una congruencia en S y defínase $\alpha_1 = \{(x,y) \in X \times X : (x,y) = (\phi(a), \phi(b)) \; \exists \, (a,b) \in \rho\}$, $\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_1^{(n)}$

Entonces

α es una congruencia X.

Llamamos a α el pushout de la congruencia ρ.

Lemma:

Sea α una congruencia en X y sea ρ el pullback de α a S.

Entonces α es el pushout de ρ a X.

Lemma:

Sea ρ una congruencia en S y sea α el pushout de ρ a X. Sea σ el pullback de α a S. Entonces $\rho \leq \sigma$.

Lemma:

Sean ρ y σ congruencias en S, y sea α el pushout de ρ, β el pushout de σ. Si $\rho \leq \sigma$ entonces $\alpha \leq \beta$.

Lemma:

Sea Y un subsemigrupo de X, y $T = \phi^{-1}(Y)$. Sea α una congruencia en Y, $\bar{\alpha} = \langle \alpha \rangle_X$, ρ el pullback de α a T y $\bar{\rho} = \langle \rho \rangle_S$.

Entonces $\bar{\alpha}$ es el pushout de $\bar{\rho}$.

Lemma:

Sea ρ una congruencia en S y sea α el pushout de ρ X. Entonces ρ es el pullback de α si y solamente si $K\phi \leq \rho$. Además, $\sigma = \rho \vee K\phi$ es el pullback de α a S.

Teorema:

Sea Y un subsemigrupo de X y sea α una congruencia Y. Entonces si el pullback de $\bar{\alpha} = \langle \alpha \rangle_X$ es una extensión del pullback de α, entonces α se extiende a una congruencia en X.

Teorema:

Supóngase que S tiene la Propiedad de Extensión de Congruencia (PEC), y sea Y un subsemigrupo de X, y $T = \phi^{-1}(Y)$. Si

$$\langle K\phi \cap (T \times T) \rangle_S = K\phi$$

entonces toda congruencia de Y puede extenderse a X.

Corolario:

Sea S un semigrupo con PEC y sea I un ideal de S. Entonces S/I tiene PEC.

Un semigrupo S se llama semigrupo cíclico si S = $a, a^2, \ldots a^p, a^{p+1} = a^s$ para algún $S \geq p$. A p se le llama el índice de S.

Lemma:

Sea S un semigrupo cíclico con índice p , $\phi: S \longrightarrow X$ un homomorfismo de S sobre X. Entonces X es un semigrupo cíclico con índice $q \leq p$.

Obsérvese que un semigrupo cíclico se puede definir como:

$S = \{a, a^2, \ldots a^{p+1}\} \cup M(S)$ donde M(S) es el ideal mínimo de S y es un grupo cíclico.

Teorema:

Un semigrupo cíclico S tiene en Propiedad de Extensión de Congruencia (PEC) si y solo si índice es menor o igual a 3.

Corolario:

La imagen homomórfica de un semigrupo cíclico en PEC también tendrá en PEC.

Sea S un semigrupo. Decimos que S es un semigrupo ideal si toda congruencia σ en S puede expresarse como $\sigma = (I \times I) \cup \Delta_S$ para algún ideal I de S.

Proposición:

Sea S un semigrupo ideal. Entonces

(i) S tiene un elemento cero que llamaremos 0.

(ii) Si ρ es una congruencia en S entonces

$$\rho = (I \times I) \cup \Delta_S \text{ donde}$$
$$I = \{x \in S : (x,0) \in \rho\}$$

Lemma:

La imagen homomórfica de un semigrupo ideal es un semigrupo ideal.

Proposición:

Sea S un semigrupo ideal. Entonces S tiene la PEC si y sólo si S tiene la propiedad de extensión de ideales y cada subsemigrupo de S es un semigrupo ideal.

Corolario:

La imagen homomórfica de un semigrupo ideal con PEC también tendrá PEC.

Es sabido (véase Biró, Kiss & Pálfy, 1977, Best and Taussky, 1942 y Zacker, 1952) que un grupo G tiene la propiedad de extensión de congruencias de subgrupos (PECG) si y sólo si para todo subgrupo H, $H < G$ y todo subgrupo normal $K \lhd H$, existe un subgrupo normal $N \lhd G$ tal que $N \cap H = K$. Esto equivale a decir que la propiedad " es subgrupo normal de " es transitiva entre los subgrupos de G.

Proposición:

Un grupo G tiene la propiedad de extensión de congruencias (PEC) si y sólo si G es un grupo de torsión que tiene la propiedad de extensión de congruencias de subgrupos (PECG).

Teorema:

La imagen homomórfica de un grupo con PEC también tendrá PEC.

Resumen:

Las siguientes propiedades son homomórficas:

1. Propiedad de Extensión de Ideales (PEI)
2. Semigrupo ideal (SI)
3. Propiedad de Extensión de Congruencias de subgrupos (PECG)
4. PEC para semigrupos cíclicos
5. PEC para semigrupos ideales
6. PEC para grupos

Preguntas abiertas:

1. ¿Es la PEC homomórfica, en el caso general?
2. Una caracterización total de semigrupos con PEC - Hemos trabajado una propiedad que los identifica, pero ésta no es fácilmente observable.

ACERCA DE LA POSIBILIDAD DE UN CONTRA-EJEMPLO A LA CONJETURA DE POINCARE

por

Howard Lambert

Professor of Computer Science,
la Universidad del Este de Nuevo Mexico
y Profesor Visitante,
el Instituto Tecnológico de Costa Rica

RESUMEN: Presentamos evidencia a favor de la hipótesis de que la Conjetura de Poincaré es falsa en dimensión 3.

ABSTRACT: We present evidence for the hypotheis that the Poincaré Conjecture in dimension 3 is false.

TERMINOLOGIA:

Sean En el espacio euclideano de dimensión n, S^n la esfera estandar de n dimensiones y C^n el cubo estandar de n dimensiones, n > -1. Si V es una variedad de n dimensiones, denominemos su frontera por Bd V. Estamos trabajando en la categoría de complejos simpliciales.
Si V menos una pequeña vecindad de un punto en el interior de V es contractible y el grupo fundamental de V es iqual a los números enteros,denominemos V una esfera homotópica.
Otra terminología está en [3].

LA CONJETURA DE POINCARE:

Sea V^n una variedad compacta y contractible. Si V^n tiene una frontera que es una esfera homotópica, entonces V^n es iqual a C^n .(Hay un homeomorfismo entre V^n y C^n.)

LO QUE SE SABE ACTUALMENTE:

La conjetura de Poincaré ha sido demostrado en cualquiera dimension excepto la dimension 3! En las dimensiones mayores de 4 la conjetura ha sido demostrado en [4].
En el caso de 4 dimensiones ha sido demostrado por Freedman en [2] y en el caso de < 3 dimensiones ha sido demostrado por Papakyriakopolous.

LA CONJETURA DEL AUTOR:

La Conjetura de Poincaré es falsa en dimension 3

EVIDENCIA QUE LA CONJETURA DE POINCARE
SEA FALSO EN LA DIMENSION 3:

El autor construye una variedad M de 4 dimensiones en la siguiente manera:

> Sea $T = S^1 \times C^2$ y
> sea $L_0 = S^1 \times C^2 \times \{0\}$ y
> sea L la curva que el autor va a presentar en su conferencia y L´ consiste en L y m copias de L con intersección vacía entre ellas pero cerca de L, con m par.

Pegar un 1-mango a lo largo de L para formar M.

Lema 1. M es contractible.

Demostración: Este lema ha sido demostrado por Mazur [1].

Lema 2. Bd M es una esfera homotópica.

Demostración: Existe una superficie planar F en $S^2 \times C^2 \subset T$ con exactamente un punto en la intersección de F con L y la frontera de F consiste en curvas cerradas en la frontera de $S^1 \times C^2$ que son fronteras de discos en $S^1 \times C^2$. La existencia de F implica que Bd M es simplemente conexo.

Lema 3 (CONJETURA): No existe una superficie planar en T con frontera $L' \cup L$

(El autor no puede demostrar el lema 3 todavía.)

El autor presentará en su conferencia unos ejemplos para ilustrar las dificultades en domostrar lema 3.).

Teorema 1. Si L no está la frontera de ningún disco en M, entonces Bd M es un contra-ejemplo a la conjetura de Poincaré en dimensión 3.

Demostración: Supongamos que Bd M = S^3. Entonces seqún Lema 1 y la observación despues del teorema 1.6 de [2], M = C^4. Por lo tanto, L es la frontera de un disco D en M. Seqún la existencia del D, se construye una superficie planar en T con frontera $L' \cup L$. Si se puede demostrar Lema 3, entonces tenemos una contradicción y, por tanto, la conjetura de Poincaré sería falsa en dimension 3.

BIBLIOGRAFIA:

1. S. Akbulut & R. Kirby, "Mazur manifolds" Michigan Math. J., 26(1979) 259-284.

2. Michael Freedman "The topology of four-dimensional manifolds", J. Differential Geom. 17 (1982), 502-521.

3. H. Seifert y W. Threlfall, "Lecciones de Topología"

4. S. Smale, "Generalized Poincare's conjecture in dimensions > 4", Ann. of Math. 74 (1961) 391-466.

FUNCIONES ELEMENTALES I

Gerardo Mora
Sección de Matemática/ Sede Regional de Occidente/ Universidad de Costa Rica/ San José, Costa Rica

Edwin Castro
Escuela de Matemática/ Universidad de Costa Rica/ San José, Costa Rica

Ioan Muntean
Universidad Babes-Bolyai/ Cluj-Napoca, Rumanía

RESUMEN

El trabajo resume los principales métodos para definir las funciones $\sqrt{x}$, $\ln x$, $\exp(x)$. Una vez que se discuten las definiciones se destacan los inconvenientes que tienen para ser introducidas a un nivel elemental; luego se introducen las funciones anteriores por el método de sucesiones recurrentes y se analizan las propiedades deducibles a partir de esta definición.

El trabajo es útil para estudiantes y profesores de secundaria así como para estudiantes y profesores universitarios.

#1. Introducción ([2], [8], [10])

La utilidad de las funciones exponencial, logaritmo, de las funciones trigonométricas y sus inversas, de la función radical, es un hecho indiscutible que hace necesario introducirlas en los textos de enseñanza media desde los primeros años; sin embargo este aspecto lleva consigo numerosos problemas entre los cuales podríamos citar : imprecisión, falta de claridad y continuidad y exceso de énfasis en las ideas geométricas. A un nivel elemental se introducen las funciones trigonométricas definiéndolas en primer lugar en triángulos rectángulos y más adelante se construyen en el círculo trigonométrico, estas ideas hacen necesario que el estudiante tenga claras las nociones de ángulo y de longitud de arco, hecho que a menudo no sucede y por consiguiente el estudiante se ve imposibilitado a captar ciertas propiedades de estas funciones con claridad; no raras veces esas lagunas repercuten en los cursos superiores universitarios.

El problema es más grave aún con las funciones exponencial y logarítmica las cuales por introducirse en forma imprecisa conducen a que el estudiante tenga problemas al extender los dominios de definición.

Las formas precisas y elegantes conocidas para construir las funciones citadas anteriormente generalmente no están al alcance del estudiante que apenas da sus primeros pasos en el terreno de las matemáticas.

§2. Algunas formas de introducir las funciones trascendentes elementales

El método de las series de potencias es quizás el método más conocido y el más unificador para definir estas funciones; a continuación mencionamos algunas :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \ ; \ -1 < x < 1, \quad \text{(Mercator, 1668)}$$

$$\text{Arctan}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \ ; \ -1 < x < 1, \quad \text{(J.Gregory, 1668)}$$

$$\text{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \ ; \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{(I.Newton, 1669)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \ ; \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{(I.Newton, 1669)}$$

Para poder calcular el valor de las funciones logaritmo y arcotangente en algunos puntos que no estén comprendidos en el dominio especificado se requieren algunas transformaciones elementales; sin embargo otros métodos no tienen este inconveniente, además el manejo de las series de potencias requiere la noción de convergencia uniforme.

El <u>método de las integrales</u> está basado en el hecho de que algunas funciones trascendentes son primitivas de otras con una estructura bastante simple, por ejemplo $\ln x$, $\arctan x$, $\operatorname{arcsen} x$ son primitivas en el orden citado de $\frac{1}{x}$ para $x > 0$, $\frac{1}{1 + x^2}$ para $x \in \mathbb{R}$ y $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ para $-1 < x < 1$.

Este método requiere el teorema de existencia de primitivas de las funciones continuas y conocimientos de cálculo integral.

Un método relacionado con el anterior es el <u>método de las ecuaciones diferenciales</u> y se basa en el hecho de que las funciones elementales verifican ecuaciones diferenciales de primer orden, como por ejemplo la $\tan x$ verifica la ecuación $f'(x) = 1 + (f(x))^2$. Este método requiere conocimiento de los teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales.

El método de las <u>ecuaciones funcionales</u> se basa en el hecho de que funciones como $\ln x$, $\arctan x$, $\cos x$ – entre otras – verifican ecuaciones funcionales de la forma :

$$f(xy) = f(x) + f(y) \ ; \ x > 0 \ , \ y > 0$$

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right) \ ; \ x, \ y \in \mathbb{R} \ , \ xy < 1$$

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y) \ ; \ x, \ y \in \mathbb{R}$$

Este método también requiere teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones funcionales. Un hecho importante es que en las ecuaciones funcionales anteriores no figuran derivadas.

Algunos autores, como por ejemplo L. Euler (1748), introducen las funciones elementales como <u>productos infinitos</u> y otros como <u>fracciones continuas</u> :

$$\operatorname{sen}x = x\left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

y

$$\ln(1+x) = \cfrac{x}{1+\cfrac{1^2.x}{2+\cfrac{1^2.x}{3+\cfrac{2^2.x}{4+\cfrac{2^2.x}{5+\ldots}}}}}$$

respectivamente.

§3. Algunas conclusiones preliminares

Habiendo resumido los principales métodos para introducir las funciones elementales observamos que todos ellos son de gran utilidad para determinados objetivos, por ejemplo : el método de fracciones continuas es útil para aproximar funciones, el método de ecuaciones funcionales es útil en el estudio de las propiedades de los grupos. Pero para la enseñanza de tales funciones a un nivel elemental sería necesario un método que satisfaga al menos las condiciones :

A. Nos de algoritmos simples de cálculo, aunque ellos no sean los mejores en exactitud.

B. Sea riguroso.

C. No requiera conocimientos de niveles más avanzados para deducir las propiedades.

D. Se pueda relacionar con los otros métodos y en especial con el método geométrico, todo esto de acuerdo con los objetivos previamente fijados por el profesor.

Siguiendo la misma idea usada para introducir la raíz cuadrada, por medio de la fórmula :

$$x_o = 1 \ , \ x_{p+1} = \frac{1}{n}\left[(n-1)x_p + \frac{x}{x_p^{n-1}} \right] , \ p \in \mathbb{N} \qquad (4.2)$$

se introduce la función radical de orden n o raíz enésima.

Las aproximaciones que producen las fórmulas tipo (4.1) - (4.2) se muestran en la figura 1. Cabe señalar que estas fórmulas también resultan del método de la tangente de Newton (1669) ([1], [9], [5]).

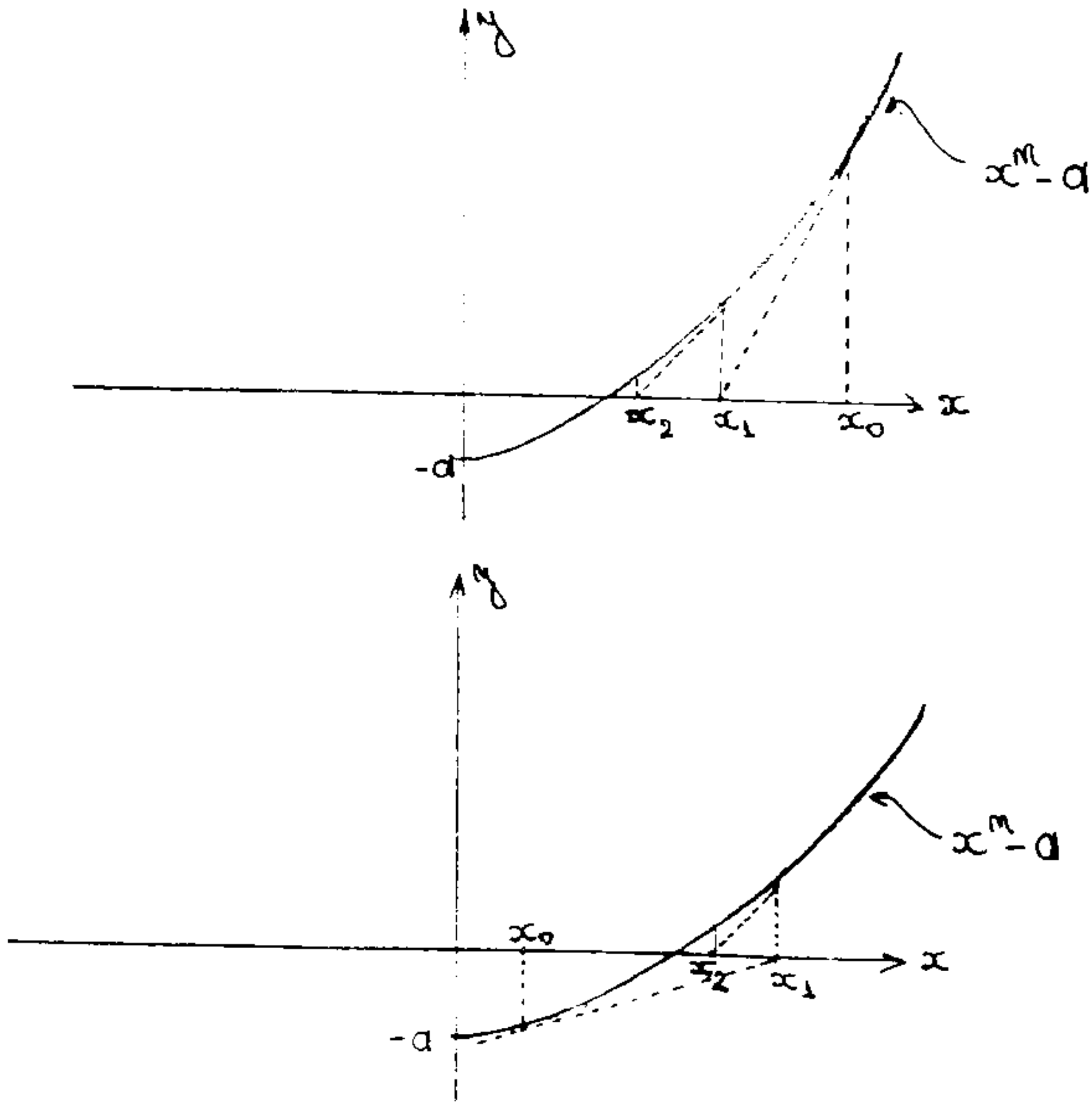


Figura 1

Aproximación de $\sqrt[n]{a}$

§5. La función logarítmica ([8], [6])

Como se mencionó en el párrafo 1 de este trabajo, existen problemas diversos a la hora de introducir la función logarítmica y sus propiedades.

El estudiante que ha realizado un primer curso de cálculo diferencial e integral conoce el resultado :

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^h - 1}{h} = \ln x \ , \quad \text{para } x > 0$$

Nosotros vamos a partir de la relación (5.1) para definir la función logarítmica, dando origen a un logaritmo de cálculo que aunque no es muy exacto, permite calcular con mucha sencillez el logaritmo de cualquier número positivo, al menos con tres cifras decimales exactas

Para definir el logaritmo considere la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida de la siguiente forma :

$$z_0 = x \ , \ z_{n+1} = \sqrt{z_n} \quad \text{para } n \geq 0 \qquad (5.1)$$

A partir de la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos las sucesiones siguientes :

$$x_n = 2^n(z_n - 1) \quad ; \quad y_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{z_n} \right) \quad n \in \mathbb{N} \qquad (5.2)$$

Fácilmente se obtiene :

Lema 5.1 Sea $x > 0$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por (5.1), entonces se tiene :

$0 < z_n < z_{n+1} < 1$, si $x < 1$

$1 < z_{n+1} < z_n$, si $x > 1$

$z_n = 1$, si $x = 1$

En cualquier caso $\lim_{n\to+\infty} z_n = 1$

Teorema 5.2 Sea $x > 0$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ las sucesiones definidas por (5.2); entonces se tiene :

$$y_{n-1} < y_n < x_n < x_{n-1} \quad \text{cuando } x \neq 1 \text{ y } n \geq 1.$$

Además, las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes al mismo límite $k \in \mathbb{R}$; $k = 0$ cuando $x = 1$ y

$$y_n < k < x_n \quad \text{si } x \neq 1 \text{ y } n \geq 0$$

Demostración. Sea $x \neq 1$ y $n \geq 1$. Si $x < 1$ la desigualdad $y_{n-1} < y_n$ es equivalente a $1 - z_n^{-2} < 2(1 - z_n^{-1})$ y la cual a su vez es equivalente a $1 + z_n^{-1} > 2$ la que es cierta en base al lema 5.1. Las otras desigualdades se prueban análogamente lo mismo que el caso $x > 1$.

La convergencia de las sucesiones resulta ahora del hecho de que son monótonas y acotadas. Como $x_n = y_n z_n$ resulta que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n$.

Las desigualdades (5.3) son evidentes.

Definición. La función $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ que asocia a cada número real $x > 0$ el límite $k \in \mathbb{R}$ del teorema 5.2 :

$$\ln x = k = \lim_{n\to+\infty} 2^n(z_n - 1)$$

se llama función logarítmica.

En base a la definición anterior y a las propiedades de las sucesiones definidas anteriormente se puede probar que :

1) $\ln 1 = 0$

2) $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$ si $x > 0$ y $x \neq 1$

3) $2(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}) < \ln x < 2(\sqrt{x} - 1)$ si $x > 0$ y $x \neq 1$

4) $\ln xy = \ln x + \ln y$, $x > 0$, $y > 0$

5) $\ln x$ es estrictamente creciente en $]0, +\infty[$

6) $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

7) $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$, $\lim_{x\to 1} \ln x = 0$, $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

8) $\ln x$ es una función continua en $]0, +\infty[$, además es biyectiva

9) $\ln x$ es derivable en $]0, +\infty[$ y $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ para $x > 0$

n	z_n	x_n	y_n
0	2	1	0.5
1	1.4142135	0.828427	0.5857864
2	1.189207	0.756828	0.6364144
3	1.0905076	0.7240608	0.6639672
4	1.0442737	0.7083792	0.6783472
5	1.0218971	0.7007072	0.6856928
6	1.0108892	0.6969088	0.689408
7	1.0054298	0.6950144	0.691264
8	1.0027112	0.6940672	0.6921984
9	1.0013546	0.6935552	0.6926336

§6. La función exponencial ([6], [7], [8])

En la propiedad (8) del párrafo anterior se dice que la función logaritmo es biyectiva, entonces es invertible y podríamos dar la definición :

Definición. La función exponencial $\exp : \mathbb{R} \rightarrowtail]0, +\infty[$ es la inversa de la función logarítmica.

Fácilmente se concluye que la función exponencial es estrictamente creciente y continua y además verifica la ecuación funcional :

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y) \quad \text{para } x, y \in \mathbb{R},$$

además de las propiedades :

$$\exp 0 = 1 \ , \ \lim_{y \to -\infty} \exp(y) = 0 \ , \ \lim_{y \to +\infty} \exp(y) = +\infty$$

En algunos trabajos (por ejemplo ([7], [10]) los autores introducen la función exponencial usando las definiciones:

$$\exp(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{n} \right)^{n} \text{ ó } \exp(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{2^n} \right)^{2^n}$$

Más aún :

$$\exp(x) = \lim_{h\to 0} (1 + hx)^{1/h}$$

para números complejos.

Las fórmulas (6.1) ayudan a obtener acotaciones de la forma

$$\left(1 + \frac{x}{n} \right)^{n+p(x)} \le \exp(x) \le \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+q(x)} \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

como puede consultarse en ([10], [7]).

En base a la definición dada al inicio de este párrafo se puede definir la función potencia $f(x) = x^{\alpha}$ como :

$$x^{\alpha} =: \exp(\alpha \ln x) \text{ , para } x > 0,\ y \in \mathbb{R},$$

y la función $g(x) = a^x$ para $a > 0$, por $a^x =: \exp(x.\ln a)$,es decir la función exponencial de base a y demostrar las principales propiedades de estas, como por ejemplo la siguiente :

Si $a > 0$ la función exponencial de base a es derivable y se tiene que :

$$\left(a^x \right)' = a^x \ln a$$

La siguiente propiedad justifica nuestro punto de partida :

Proposición 6.1 Sea $x > 0$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^h - 1}{h} = \ln(x) \tag{6.2}$$

Demostración. En base a la regla de L'Hôpital y a las definiciones anteriores, tenemos.:

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^h \ln x}{1} = \ln x \exp(h.\ln x) = \ln x \ .$$

BIBLIOGRAFIA

1. Burden, Richard; Faires, Douglas J ; Análisis Numérico. Gruoo Editorial Iberoamérica. México, 1985.

2. Calvo Manuel ; Las Funciones Trigonométricas. Boletín Matemático Costarricense. Vol.3, número 1. Universidad de Costa Rica, 1972.

3. Carlson B.C ; A Connection betwen Elemtary Function and Higher Trascendental Functions. SIAM J.Appl Math. 17 (1969), 116 - 148.

4. Deakin, M.A.B ; A Numerical Approach to Natural Logarithm The Math. Theacher. 66 (1973),239 - 242.

5. Demidovich, B. ; Cálculo Numérico Fundamental. Editorial Mir, Moscú.

6. Huntington E. V ; An Elementary Theory of the Exponencial and Logaritmic Functions. Amer. Math. Monthly, 23 (1916) , 241 - 246.

7. Melzak, Z. A. ; On the Exponencial Function. Amer. Math. Monthly, 82 (1975) , 842 - 844.

8. Muntean, Ioan ; Functii Elementare. Caiete Metódico-Stiintifice. Universitatea din Timisoara, 1987.

9. Mora, Gerardo ; Solución Numérica de Ecuaciones Algebraicas. Tesis. Universidad de Costa Rica, 1990.

10. Takeuchi, Yu ; Sucesiones y Series. Tomo 1, Tomo 2. Editorial Limusa. México, 1983.

SECCION MATEMATICAS APLICADAS

TRASLAPE DE DISTRIBUCIONES: Una aplicación a la distribución de tallas de la Corvina Agria, Golfo de Nicoya-1983.

Alpízar J. Russell
Esc. Estadística

Muñoz H. Breda
Esc. Matemática

RESUMEN

Se pretende abordar el problema del traslape de distribuciones para estimar la composición por tallas de las capturas de una de las especies de mayor valor comercial: CORVINA AGRIA. Se expone el procedimiento de estimación de los parámetros para dos componentes normales traslapadas. Los datos provienen de muestreos biológicos de desembarques en el Golfo de Nicoya, 1983.

INTRODUCCION:

"Hoy día se ha puesto considerable atención al estudio de las pesquerías artesanales alrededor del globo. Entre éstas, las pesquerías de zonas tropicales han suscitado especial interés.

La recolección de datos es uno de los primeros pasos de un proceso cuyo objetivo final es fijar políticas y crear la legislación necesaria y adecuada que permita el manejo racional de un recurso como la pesca. El análisis estadístico de datos es el paso siguiente, que permite convertir esos datos en información útil para la administración del recurso.

En pesquería, la recolección de "datos biológicos" es un asunto de vital importancia para estudiar la dinámica de las poblaciones explotadas. Entre los datos más importantes que a menudo se recolectan están: especie, sexo, peso y talla" (Chavarría, 1984).

Los datos utilizados han sido suministrados por el Centro de Investigaciones Marítimas y Limnología, de la Universidad de Costa Rica de los muestreos biológicos de desembarque realizados por el Departamento de Pesca del MAG, en el año 1983.

EL PROBLEMA:

En aguas tropicales se ha probado que no es fácil, y en ocasiones imposible, determinar la edad de los individuos para la mayoría de las especies; por esta razón, no se pueden aplicar las técnicas de evaluación de poblaciones basadas en ese dato. Sin embargo, haciendo algunos supuestos sobre la forma de las relaciones entre la talla y la edad, se pueden utilizar datos de composición por tallas en lugar de datos de composición por edades. La idea es efectuar algunas modificaciones en las técnicas de análisis de cohortes, o en el análisis de población virtual de modo que estas técnicas puedan ser aplicadas a datos de tallas (Jones, 1982).

Para el modelaje de la composición de la captura, el agrupamiento de los peces por talla (sin tomar en cuenta la anatomía) puede no ser lo más obvio, pero como el tamaño del cuerpo tiene algunos efectos predecibles sobre las tasas de vida animal, esta aproximación tiene por lo tanto, mucho merito.

En el análisis de datos de composición por tallas y edades, se utiliza ampliamente el modelo de Beverton y Holt (1957), que divide el ciclo vital en dos partes, las cuales son tratadas separadamente. A este modelo le atañe en su forma más simple, esta parte denominada población y no se toma en cuenta la inmigración proveniente de otras poblaciones. El análisis que surge de éste y otros modelos semejantes, permite a los científicos comprender que está pasando en las poblaciones de peces, al observar el número de peces capturados en los diferentes grupos de edad. Dentro de este modelo, cada intervalo de tallas representa un intervalo sucesivo en el ciclo de vida anual, aunque la duración del intervalo pueda variar (Jones, 1982).

Un problema que a menudo se observa en la distribución de las tallas es el que se conoce como traslape de distribuciones, que consiste en la presencia de una distribución multimodal. En estos casos, deben identificarse claramente concentraciones de puntuaciones alrededor de estos valores modales, esas concentraciones, representan categorías subyacentes (fundamentales) que son los diferentes grupos de edad a los cuales cada individuo puede pertenecer (Titterington, 1985).

Conociendo las características de esta distribución, se puede determinar en que edades del ciclo reproductivo sé encuentran los individuos capturados de una determinada especie. Esta información sería de mucha utilidad debido a que el ciclo reproductivo de los peces se vería afectado por un desequilibrio, provocado por la pesca excesiva de individuos en edades no adecuadas.

Desde el punto de vista biológico, económico y de administración del recurso, es necesario conocer la distribución por especies y por tallas de las capturas.

En particular, este artículo pretende abordar el problema de traslape de distribuciones de frecuencias para estimar la composición por tallas de los desembarques de una de las especies de mayor valor comercial: LA CORVINA AGRIA.

DISTRIBUCIONES TRASLAPADAS:

Definiciones basicas:

Sea X una variable aleatoria o un vector de variables aleatorias, $X \in \chi$ (espacio muestral), es decir, X toma sus valores en el espacio muestral χ. Su distribución puede ser representada por una función de densidad de probabilidad de la forma:

$$p(x) = \sum_{j=1}^{k} \pi_j \, f_j(x), \qquad (x \in \chi), \qquad (1)$$

$$\text{donde } \pi_j > 0, \; j = 1,\ldots,k \qquad \sum_{j=1}^{k} \pi_j = 1,$$

$$\text{y} \qquad f_j(.) \geq 0 \,, \qquad \int_{\chi} f_j(x) \, dx = 1 \quad , \; j = 1,\ldots,k$$

en tal caso podemos decir, que X tiene una distribución finita traslapada y p(.) es la función de densidad traslapada finita.

Los parámetros π_j, son llamados las ponderaciones de traslape y las $f_j(.)$, las densidades componentes del traslape.

En muchas situaciones las $f_j(.)$, tienen parámetros específicos y de esta forma, (1) se convierte en un representación más explícita:

$$p(x) = \sum_{j=1}^{k} \pi_j \, f_j(x|\theta_j),$$

donde, θ_j son los parámetros propios de f_j

Se denotará Θ el conjunto de todos los parámetros distintos propios de las densidades componentes $f_j(.)$ y ψ el conjunto completo de todos los parámetros distintos propios del modelo traslapado.

No es un requisito que las densidades componentes que aparezcan pertenezcan a una misma familia paramétrica, sin embargo, en muchas aplicaciones, éste puede ser el caso. La función de densidad finita traslapada puede tener la forma:

$$p(x|\psi) = \sum_{j=1}^{k} \pi_j \, f(x|\theta_j), \qquad (2)$$

donde, $f(.|\theta)$ denota un miembro genérico de la familia paramétrica.

En el caso del modelo de traslape finito definido por (2), cada uno de los θ_j es un elemento del mismo espacio paramétrico Θ.

Un problema que a menudo se presenta es la incertidumbre sobre el número de componentes de una distribución tralapada. Algunas veces, interesa encontrar el traslape con el menor número de componentes que de un ajuste satisfactorio a los datos. Este problema puede resolverse haciendo uso del Análisis de Conglomerados y el Análisis Discriminante.

Como el interés de este artículo se centra en la ilustración del problema del traslape de distribuciones no se hará referencia específica a la forma de determinar el número de componentes.

Cuando se está en presencia de distribuciones paramétricas traslapadas, el problema se reduce al ajuste de una curva, estimando los parámetros desconocidos que definen cada una de las componentes. Esto se puede lograr haciendo uso de alguno de los siguientes métodos de estimación de parámetros: máxima verosimilitud, momentos, mínimos cuadrados, aproximación bayesiana, etc.

Las aplicaciones del traslape de distribuciones se dan en diversas disciplinas, como por ejemplo en pesquería, economía, medicina, psicología, paleontología, geología, botánica, agricultura y zoología.

Cada una de ellas se caracteriza por un tipo particular de traslape de distribuciones, entre los más conocidas están: normales, gammas, exponenciales, beta, etc.

Un tipo frecuente de traslape es el de distribuciones normales, el cual fue inicialmente estudiado por Karl Pearson en 1894. En el caso de dos densidades normales, la función de densidad traslapada tiene la forma:

$$p(x|\psi)=\alpha\ \phi(x|\mu_1,\sigma_1) + (1-\alpha)\ \phi(x|\mu_2,\sigma_2)$$

donde: α y $(1-\alpha)$ son las ponderaciones de traslape

$\phi(x|\mu_i,\sigma_i)$ son densidades normales univariadas, con media μ_i y variancia σ_i^2, $i=1,2$

y $\psi = (\alpha,\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2)$

En lo que sigue se denotará esta función de densidad traslapada por:

$$p(x)=\alpha\ f_1(x) + (1-\alpha)\ f_2(x)$$

donde:

$$f_1(x)=(2\pi\sigma_1^2)^{-\frac{1}{2}}\ \exp[-(x-\theta_1)^2/\sigma_1^2]/2$$

$$f_2(x)=(2\pi\sigma_2^2)^{-\frac{1}{2}}\ \exp[-(x-\theta_2)^2/\sigma_2^2]/2$$

Pearson derivó estimadores para los parámetros de esta distribución por medio del planteamiento de ecuaciones, en las cuales se relacionan los momentos muestrales con los momentos poblacionales. La obtención de estos estimadores involucra la búsqueda de una raíz negativa de la ecuación de grado nueve resultante.

PROCEDIMIENTO DE ESTIMACION EN EL CASO DE DOS NORMALES :

El k-ésimo momento de f(x) tiene la siguiente forma general:

$$\mu_k' = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\ f_1(x)\ dx + (1 - \alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\ f_2(x)\ dx$$

El k-ésimo momento central de f(x) puede escribirse como:

$$\mu_k = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_1')^k\ f_1(x)\ dx + (1 - \alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_1')^k\ f_2(x)\ dx.$$

Defina: $m_1 = \theta_1 - \mu_1'$

$m_2 = \theta_2 - \mu_1'$

sustituyendo en los primeros cinco momentos centrales y no centrales, se llega a las siguientes ecuaciones:

$$\mu_1' = \alpha\ \theta_1 + (1 - \alpha)\ \theta_2$$

$$\mu_1 = \alpha\ m_1 + (1 - \alpha)\ m_2 = 0.$$

$$\mu_2 = \alpha\ (\sigma_1^2 + m_1^2) + (1-\alpha)\ (\sigma_2^2 + m_2^2)$$

$$\mu_3 = \alpha\ m_1(3\sigma_1^2 + m_1^2) + (1 - \alpha)\ m_2(3\sigma_2^2 + m_2^2)$$

$$\mu_4 = \alpha\ [3\sigma_1^4 + 6m_1^2\sigma_1^2 + m_1^4] + (1 - \alpha)[3\sigma_2^4 + 6m_2^2\sigma_2^2 + m_2^4]$$

$$\mu_5 = \alpha\ m_1[15\sigma_1^4 + 10m_1^2\sigma_1^2 + m_1^4] + (1 - \alpha)\ m_2[15\sigma_2^4 + 10m_2^2\sigma_2^2 + m_2^4]$$

Sin pérdida de generalidad se puede suponer $\theta_1 \leq \theta_2$.

Por lo tanto:

$$\theta_1 \leq \mu_1' \leq \theta_2 \quad y \quad m_1 \leq 0 \leq m_2 .$$

Manipulando algebraicamente se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$m_1 m_2 [3\beta - 2(m_1 + m_2)] = -\nu_3$$

$$m_1 m_2 [3\beta^2 - 2(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2)] = -k_4 \qquad (3)$$

$$m_1 m_2 [15(m_1 + m_2)\beta^2 - 20(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2)\beta + 6(m_1 + m_2)(m_1^2 + m_2^2)] = -k_5$$

donde k_4 y k_5 son "los semi-invariantes" muestrales de quarto y quinto orden que se definen de la siguiente manera:

$$k_4 = \nu_4 - 3\nu_2^2$$
$$k_5 = \nu_5 - 10\nu_2\ \nu_3$$

Con el objetivo de simplificar el sistema (3), se introducen las siguientes transformaciones:

$$r = m_1 + m_2 \qquad\qquad v = m_1 m_2$$

Después de considerable manipulación algebraica se obtiene la siguiente ecuación de grado nueve (Cohen, 1967)

$$a_9 v^9 + a_8 v^8 + a_7 v^7 + a_6 v^6 + a_5 v^5 + a_4 v^4 + a_3 v^3 + a_2 v^2 + a_1 v + a_0 = 0 \qquad (4)$$

donde

$a_9 = 24$ $\qquad\qquad$ $a_4 = 444 k_4 \nu_3^2 - 18 k_5^2$

$a_8 = 0$ $\qquad\qquad$ $a_3 = 288 \nu_3^4 - 108 \nu_3 k_4 k_5 + 27 k_4^3$

$a_7 = 84 k_4$ $\qquad\qquad$ $a_2 = -(63 \nu_3^2 k_4^2 + 72 \nu_3^3 k_5)$

$a_6 = 36 \nu_3^2$ $\qquad\qquad$ $a_1 = -96 \nu_3^4 k_4$

$a_5 = 90 k_4^2 + 72 k_5 \nu_3$ $\qquad\qquad$ $a_0 = -24 \nu_3^6$

Como $m_1 < 0$ y $m_2 > 0$, se tiene que $v = m_1 m_2 < 0$, por lo que la estimación v^* de v, es una raíz negativa de (4).

Una vez que v^* es determinado con el grado de exactitud deseado, la estimación de los parámetros tiene la forma:

$$\sigma_1^* = m_1^* \beta^* + \nu_2 - m_1^{*2}$$

$$\sigma_2^* = m_2^* \beta^* + \nu_2 - m_2^{*2}$$

$$\theta_1^* = m_1^* + x$$

$$\theta_2^* = m_2^* + x$$

$$\alpha_2^* = m_2^* / (m_1^* - m^*)$$

donde m_1^2 y m_2^2 son las raíces de la siguiente ecuación cuadrática:

$$X^2 - r^* X + v^* = 0 \qquad \text{y}$$

$$r^* = \frac{-8\nu_3 v^{*3} + 3k_5 v^{*2} + 6\nu_3 k_4 v^* + 2\nu_3^3}{(2v^{*3} + 3k_4 v^* + 4\nu_3^2) v^*}$$

Desafortunadamente algunas combinaciones de datos muestrales producen en la ecuación nónica más de una raíz negativa, por lo que Pearson sugirió en 1894, escoger aquel conjunto de estimadores que produjeran la mayor proximidad entre el sexto momento central muestral, y el correspondiente valor poblacional

En el caso en que r^* es conocido, la ecuación a resolver es la siguiente:

$$6v^3 - 2r^2 v^2 + (3k_4 - 4r\nu_3)v + \nu_3^2 = 0 \qquad (5)$$

la raíz negativa de esta ecuación proporciona una estimacion de v^*. Posteriormente se procede a obtener estimaciones para los parametros.

En el caso particular en que las variancias son iguales, el proceso se simplifica por lo que se resuelve una ecuacion cúbica, la cual tiene la siguiente forma:

$$2v^3 + k_4 v + \nu_3^2 = 0 \qquad (6)$$

si $\nu_3^2 \neq 0$, la ecuación anterior tiene una raíz negativa, que es la estimación buscada de v^*. Se sigue que una estimacion para r es:

$$r^* = \frac{-\nu_3}{v^*}$$

una vez determinados v^* y r^*, se pueden obtener estimaciones para los parámetros.

Una manera de obtener las estimaciones de los parámetros en el caso de dos normales traslapadas, consiste en asumir un valor de r y determinar por medio de un proceso iterativo aproximaciones a las estimaciones requeridas. A menos que exista mucha diferencia entre los valores de σ_1 y σ_2, la estimación de r que resulta al asumir variancias iguales, proporciona un punto inicial satisfactorio para el proceso iterativo, que culmina en la obtención de los estimadores.

Aplicación a la Corvina Agria:

Se conoce que la distribución de las tallas sigue el comportamiento de una densidad normal (Titterington,1985); con el propósito de ilustrar el procedimiento expuesto en la sección anterior, se tratará de obtener las componentes que muestran la distribución de frecuencias de las tallas de la corvina agria (Gráfico #1). Se puede apreciar en el gráfico la clara existencia de al menos dos componentes, sugeridas por los valores modales 390 y 552. A continuación se presenta un cuadro que resume esa distribución de 8690 datos, recolectados a través de muestreos de desembarque del Golfo de Nicoya, en 1983.

Cuadro #1: Distribucion de las Tallas de la Corvina Agria del Golfo de Nicoya, 1983

Intervalos de clase	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa	Acumulada Relativa
Menos de 250	3	.0	.0
250 a menos 300	67	.8	.8
300 a menos 350	624	7.2	8.0
350 a menos 400	858	9.9	17.9
400 a menos 450	871	10.0	27.9
450 a menos 500	1468	16.9	44.8
500 a menos 550	2120	24.4	69.2
550 a menos 600	2013	23.2	92.3
600 a menos 650	477	5.5	97.8
650 a menos 700	150	1.7	99.6
700 a menos 750	28	.3	99.9
750 y mas	11	.1	100.0
TOTAL	8690	100.0	

Fuente: Muestreo de Desembarque de la Pesca Artesanal del Golfo de Nicoya, Convenio MAG-CIMAR, 1983

Grafico #1: Distribucion de Tallas de la Corvina del Golfo de Nicoya, 1983

```
Frecuencia   Intervalo
absoluta     numero

     3          1   :
    67          2   :X
   624          3   :XXXXXXXX
   858          4   :XXXXXXXXXXX
   871          5   :XXXXXXXXXXX
  1468          6   :XXXXXXXXXXXXXXXXXX
  2120          7   :XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
  2013          8   :XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
   477          9   :XXXXXX
   150         10   :XX
    28         11   :
    11         12   :

                    I.........I.........I.........I
                    0        800      1600      2400
```

Fuente: Muestreo de Desembarque de la Pesca Artesanal del Golfo de Nicoya, Convenio MAG-CIMAR, 1983

A partir de estos datos se pretende obtener estimaciones de los parámetros, que definen las funciones de densidad de cada componente.

Puede suponerse, que con esas distribuciones se tiene definida la composición de tallas para un año particular, de esta manera, es posible utilizar la teoría de probabilidades para hacer proyecciones y realizar estimaciones para la captura de esta especie en ese año. Los datos que se recolectan también pueden facilitar estimaciones de la captura por épocas del año y por áreas de pesca dentro del Golfo de Nicoya, realizando procedimientos análogos que tomen en cuenta estas otras variables.

El Cuadro #2 muestra los cálculos necesarios para la estimación de los parámetros que definen las componentes de la distribución traslapada de las tallas de la Corvina Agria y en el Gráfico #2 se muestra la densidad traslapada ajustada con sus respectivas componentes.

CUADRO #2: RESUMEN DE ESTIMACIONES REQUERIDAS SUPONIENDO $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Momentos muestrales	Polinomio de tercer orden (a)	Polinomio de tercer orden (b)	
ν_1 = 495.5	a_0 = 4.6925645E10	a_0 = 4.6925645E10	m_1^* = -102.50
ν_2 = 7793.8	a_1 = -1169785.9	a_1 = -67551873.2	m_2^* = 28.59
ν_3 = -216623.3	a_2 = 0	a_2 = -10925.4	β = -73.91
ν_4 = 181061677.6	a_3 = 2	a_3 = 6	Parámetros Estimados
Semi-invariante de cuarto orden	Raiz negativa	Raiz negativa	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ = 4862.93
κ_4 = -1169785.9	v_0^* = -2930.91	v_1^* = -2930.91	θ_1 = 392.98
			θ_2 = 524.08
	r_0^* = -73.91	r_1^* = -73.91	α = 0.22

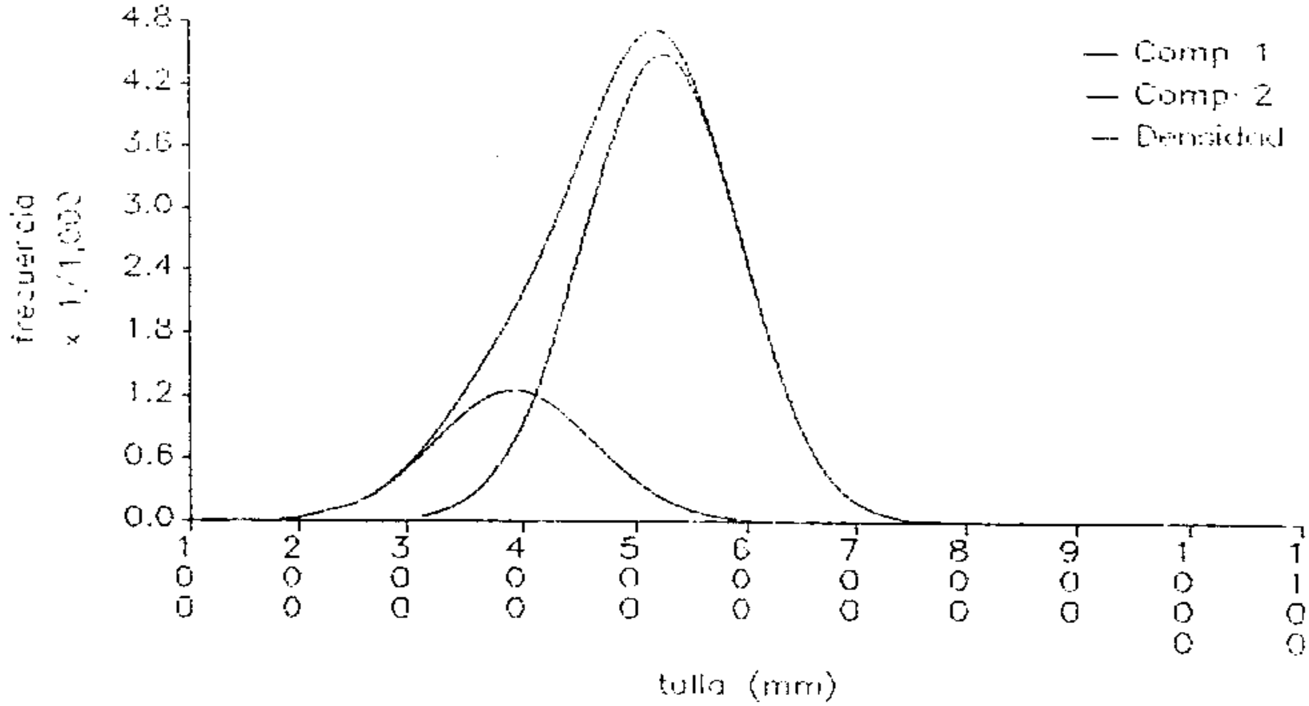
(a) Referirse a ecuación (6)
(b) Referirse a ecuación (5)

El Gráfico #3 muestra que el ajuste de la función traslapada a los datos observados es adecuado, eso se refleja también al contrastar el primer y segundo momento muestral con los respectivos momentos poblacionales teóricos:

$\bar{x}$ = 495.5 θ = 489.57

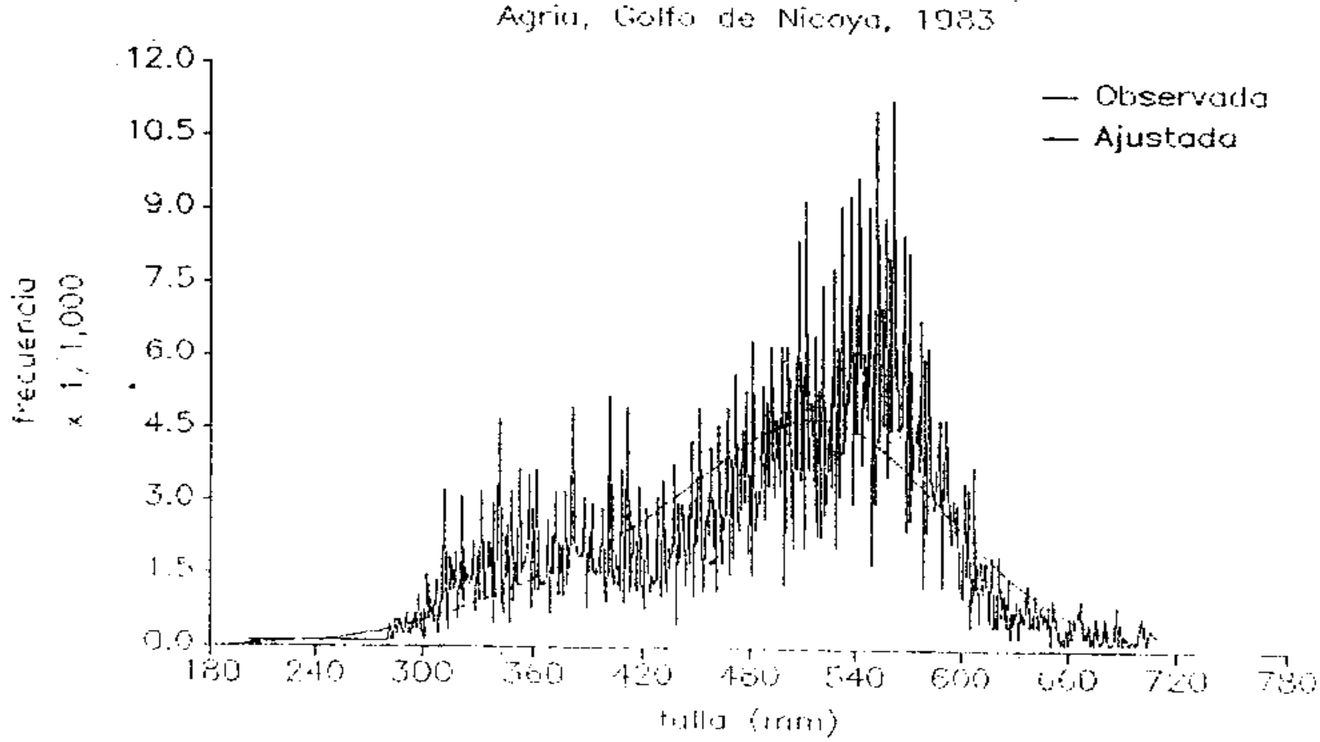
s^2 = 7793.8 σ^2 = 6991.62

Grafico #2: Funcion de densidad trasla-
pada y componentes: Ajuste para datos de
talla de la Corvina Agria, 1983



Fuente: Muestreo de Desembarques de la Pesca Artesanal del Golfo de Nicoya, Convenio MAG-CIMAR, 1983

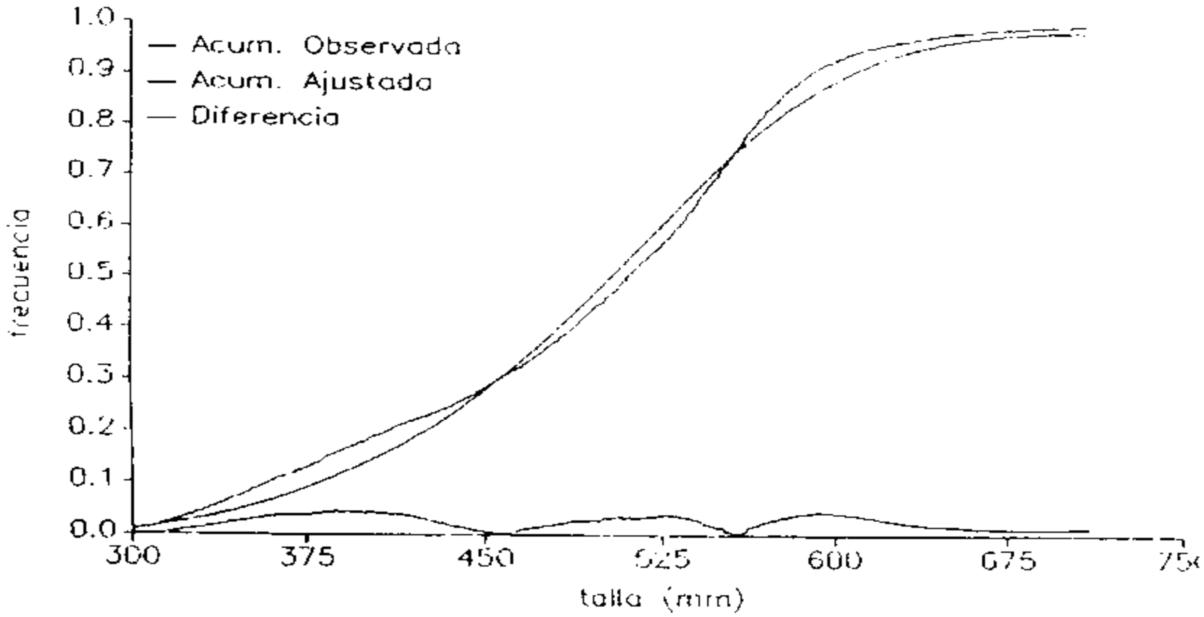
Grafico #3: Distribucion Observada y
Ajustada de las tallas de la Corvina
Agria, Golfo de Nicoya, 1983



Fuente: Muestreo de Desembarques de la Pesca Artesanal del Golfo de Nicoya, Convenio MAG-CIMAR, 1983

Otra manera de evaluar la bondad del ajuste, es siguiendo el principio de la prueba Kolmogorov-Smirnov (Siegel,1972), contrastando las distribuciones de frecuencias acumuladas observada y esperada (Gráfico #4); es importante resaltar que la diferencia máxima encontrada entre éstas es de 4.54%

Grafico #4. Distribucion de frecuencias Acumulada Observada y Ajustada, Diferencia entre ambas: talla Corvina Agria



Fuente: Muestreos de Desembarques de la Pesca Artesanal del Golfo de Nicoya. Convenio MAG-CIMAR, 1983

Referencia Bibliográfica:

Chavarría, J. B. y Campos M. J. "Convenio de asesoría UCR-MAG-PESCA, Informe final: Evaluación del tipo de información; Calidad de los datos; Procedimiento de Recolección y Presentación de la Información ", UCR, 1984.

Cohen, A. Clifford. "Estimation in Mixtures of two normal distributions". Technometrics, Vol. 9, No. 1, pp. 15-29, Febrero, 1967.

Hasselblad, Victor. "Estimation of parameters for a mixture of normal distributions". Technometrics, Vol. 8, No. 3, pp. 431-446, Agosto, 1966.

Jones, R. "El uso de datos de composición por tallas en la evaluaciónde poblaciones de peces (con notas sobre VPA y Analisis de Cohortes", FAO, Circulares de Pesca, No. 7347, Italia, 1982.

Kennedy, John F. "Mathematics of Statistics". D. Van Nostrand Company, Inc., pp. 60-77, New York, 1939.

Murray, G. David y Titterington, D.M. "Estimation Problems with Data from a mixture". Applied Statistics, 27, No. 3, pp. 325-334, mayo 1978.

Rahman, N. A. "A course in theorical Statistics". Griffin Company, pp. 95-111, New York, 1968.

Siegel, Sidney. "Estadística no paramétrica. Aplicada a las ciencias de la conducta". Editorial Trillas, México, pp. 69-74, 1972.

Titterington, D. M. "Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions". John Wiley & Sons. Ltd., Gran Bretaña, 1985.

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE: UNA HERRAMIENTA QUE ENVEJECE PERO QUE NO AGONIZA.

Geovanny A. Delgado Cascante
Escuela de Ingeniería Eléctrica.
Universidad de Costa Rica.
San José, Costa Rica.

RESUMEN.

Métodos de modelado clásico y métodos de modelado moderno de sistemas lineales. La transformada bilateral de Laplace y sus condiciones de convergencia, con un estudio de analicidad y conclusiones a partir de respuestas de funciones temporales asociadas a sistemas lineales.

Sistemas y funciones causales. La transformada unilateral de Laplace y sus condiciones de convergencia. Funciones de transferencia y algunos criterios de estabilidad de sistemas lineales basados en la Transformación de Laplace.

Cuando en 1812 el matemático francés Pierre-Simon de Laplace dió a conocer la transformación de Laplace, realizó uno de los aportes más transcendentales a la teoría de control clásico primero y a los fundamentos de solución de la teoría de control moderna más recientemente. Hoy, casi doscientos años después, la transformada de Laplace sigue vigente como una herramienta de análisis de sistemas lineales y más que una metodología en desuso es, en un medio altamente tecnificado como el actual, uno de los pilares fundamentales de la matemática aplicada a la ingeniería.

MODELOS MATEMATICOS DE SISTEMAS LINEALES.

La ingeniería realiza todo el análisis y síntesis de los objetos físicos a través de sus modelos matemáticos. Para ello, se reconocen dos métodos para la obtención de tales abstracciones matemáticas: el modelado analítico y el modelado empírico.

El los albores de la Ingeniería como disciplina metodologizada del conocimiento, los modelos matemáticos se desarrollaron con base en una estructura causa-efecto, creando relaciones de entrada/salida como una función de alguna variable independiente: las coordenadas espaciales, la longitud, la distancia y fundamentalmente el tiempo.

Si bajo esta concepción clásica de modelado, se consideran algunos criterios respecto a la observación del fenómeno físico (tipicamente conocido como SISTEMA), tales como concentración de parámetros, invarianza en el tiempo de los mismos, etc y si la evolución del efecto debido a alguna causa determinística se analiza en función de la variable tiempo continuo, entonces el modelo matemático clásico del sistema está representado por medio de una ecuación diferencial de orden N, de la forma:

$$\begin{aligned} a_0y^{(N)}(t)+a_1y^{(N-1)}(t)+\ldots+a_{N-1}y^{(1)}(t)+a_Ny(t) &= \\ b_0u^{(M)}(t)+b_1u^{(M-1)}(t)+\ldots+b_{M-1}u^{(1)}(t)+b_Mu(t) & \end{aligned} \tag{1}$$

donde los coeficientes $a_0,a_1,\ldots,a_N$ y $b_0,b_1,\ldots,b_M$ son constantes para las consideraciones dadas, $y(t)$ es la salida o efecto y $u(t)$ es la entrada o causa. Además, es claro que la relación (1) es una ecuación diferencial ordinaria.

Con el avance tecnológico a partir de la Segunda Guerra Mundial, la metodología de modelado basada en una relación causa-efecto quedó estrecha, principalmente en el caso de sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas, donde una causa genera un conjunto interrelacionado de efectos. Se plantea entonces una nueva metodología de modelado que puntualiza su enfoque alrededor del estado energético del objeto. Esto da origen a la teoría de control moderna con el del surgimiento de los Modelos en Variables de Estado. Esta teoría propone el modelado del sistema como un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden que, para el caso de sistemas de paramétros concentrados e invariantes con el tiempo, adquieren la siguiente forma matricial:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\,\mathbf{x}(t) + B\,\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\,\mathbf{x}(t) + D\,\mathbf{u}(t) \end{aligned} \qquad (2)$$

donde el vector $\mathbf{x}(t)$ es el vector de variables de estado del sistema contenido en R^N, $\mathbf{y}(t)$ es el vector de salidas contenido en R^p, $\mathbf{u}(t)$ es el vector de entradas contenido en R^m. Además la matriz de estados es A en $R^{N\times N}$, la matriz de entradas B en $R^{N\times m}$, la matriz de salidas es C en $R^{p\times N}$ y la matriz de prealimentación es D en $R^{p\times m}$ y N es el orden del sistema, p es el número de salidas y m el número de entradas. Estas matrices, para las consideraciones especificadas anteriormente, son reales.

En el modelo clásico (1) la ecuación diferencial es de orden N, mientras que en el modelo moderno (2) el número de ecuaciones diferenciales del sistema es N. Al índice N se le conoce como orden del sistema y es igual al número de elementos almacenadores de energía independientes. Uno de los métodos más utilizados para analizar un sistema es mediante la Función de Transferencia, para el modelo (1), o la Matriz de Transferencia, para el modelo (2).

Invariablemente en la teoría clásica del control, como en la teoría moderna, los métodos de solución de los modelos matemáticos (1) y (2) son fundamentados en la Transformación de Laplace.

LA TRANSFORMADA BILATERAL DE LAPLACE.

La Transformada Bilateral de Laplace, de una función de tiempo continuo f(t), está definida como la integral:

$$F(S) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad (3)$$

En la ecuación (3) S es una variable compleja, de la forma $S = \sigma + j\,w$, donde j denota la unidad imaginaria. La existencia de la Transformada Bilateral de Laplace se garantiza si la integral (3) es finita. Luego es posible afirmar que la Transformada Bilateral de Laplace existe si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\ e^{-st}\|\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|\ e^{-\sigma t}\ dt < \infty \qquad (4)$$

Considérese ahora que la función de tiempo continuo $f(t)$ se puede escribir como la suma de dos funciones de la forma:

$$f(t) = f_n(t) + f_p(t)$$

donde $f_n(t)$ es una función de tiempo negativo, o sea una función que es distinta de cero para $t < 0$, y $f_p(t)$ es una función de tiempo positivo, o sea una función que es distinta de cero para $t > 0$. Las restricciones de crecimiento para $\|f(t)\|$, en la expresión (4), se obtienen si se analiza el caso en que se cumplen las desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} \|f_n(t)\| &< Ke^{\beta t} \\ \|f_p(t)\| &< Ke^{\alpha t} \end{aligned} \qquad (5)$$

Considérese ahora la integral (3) escrita como:

$$F(S) = \int_{-\infty}^{0} f_n(t)\ e^{-st}\ dt + \int_{0}^{\infty} f_p(t)\ e^{-st}\ dt \qquad (6)$$

Si se incluyen las consideraciones (4) y (5) en la expresión (6) se obtiene que:

$$F(S) < \int_{-\infty}^{0} Ke^{\beta t}\ e^{-\sigma t}\ dt + \int_{0}^{\infty} Ke^{\alpha t}\ e^{-\sigma t}\ dt$$

de donde:

$$F(S) < \left.\frac{K\ e^{(\beta-\sigma)t}}{(\beta-\sigma)}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{K\ e^{(\alpha-\sigma)t}}{(\alpha-\sigma)}\right|_{0}^{\infty} \qquad (7)$$

Analizando la expresión (7) se observa que el primer sumando converge, cuando $t \to -\infty$, si $\beta > \sigma$, mientras que el segundo sumando converge, cuando $t \to +\infty$, si $\alpha < \sigma$. Estas restricciones impuestas para $f_n(t)$ y para $f_p(t)$ definen una región de convergencia para la Transformada Bilateral de Laplace $F(S)$ de la función $f(t)$. Esta región de convergencia, denotada por RCO, queda descrita por medio de la siguiente expresión de resumen:

$$\alpha < Re\{S\} < \beta \qquad (8)$$

La expresión (8) lleva implícito el hecho de que tanto $f_n(t)$ como $f_p(t)$ deben ser funciones cuya característica de crecimiento es, a lo más, como una función exponencial. O sea estas son Funciones de Orden Exponencial, tales que:

$$\lim_{t \to -\infty} e^{\beta t} f_n(t) = 0 \qquad \lim_{t \to +\infty} e^{\alpha t} f_p(t) = 0$$

A partir de la expresión (8) también pueden anotarse las siguientes observaciones:

i) La transformada bilateral de Laplace, de una función de tiempo negativo, converge en la región del plano complejo S que cumpla que $\sigma < \beta$. O sea, en esta región la función transformada es una función libre de singularidades.

ii) La transformada Bilateral de Laplace, de una función de tiempo positivo, converge en la región del plano complejo S que cumpla que $\sigma > \alpha$. O sea, en esta región la función transformada es una función libre de singularidades.

Las anteriores observaciones indican que la región de convergencia (RCO) de la Transformada Bilateral de Laplace de la función f(t), dada por $\alpha < \sigma < \beta$, es una región libre de singularidades, es decir, en esta región la función de variable compleja F(S) es una FUNCION ANALITICA. Pueden anotarse además las siguientes conclusiones:

i) Las singularidades que aporta la función de tiempo negativo $f_n(t)$, a la Transformada Bilateral de Laplace de f(t), se encuentran a la derecha de la región de convergencia.

ii) Las singularidades que aporta la función de tiempo positivo $f_p(t)$, a la Transfomada Bilateral de Laplace de f(t), se encuentran a la izquierda de la región de convergencia.

Finalmente la conclución general de este análisis es que la Transformada Bilateral de Laplace de una función de tiempo continuo f(t) queda definida en FORMA UNICA, por medio de la función de variable compleja F(S) y por su región de convergencia.

SISTEMAS Y FUNCIONES CAUSALES.

Una función causal es aquella que no tiene componente de tiempo negativo, o sea $f_n(t) = 0$ para todo t. Un sistema causal, consecuentemente es aquel en el que todas las funciones que describen su dinámica son funciones causales. En los sistemas causales se tiene que el índice N, en la expresión (1), es siempre mayor que el índice M.

La transformada de Laplace de la expresión (3) queda reducida a:

$$F(S) = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad (9)$$

para funciones causales. A la expresión (9) se le conoce como Transformada Unilateral de Laplace y es la más extensivamente utilizada en Ingeniería, en virtud de que todos los sistemas físicos realizables son causales.

Las condiciones de convergencia (8), quedan reducidas a:

$$\alpha < \mathrm{Re}\{S\}$$

para funciones causales. Quiere esto decir que en el caso de funciones causales el intervalo de convergencia se convierte en una absisa de convergencia (ABSC). Además todas las singularidades de la Transformada Unilateral de Laplace se encuentran localizadas a la izquierda de la absisa de convergencia.

Si se aplica la Transformada Unilateral de Laplace al modelo matemático de la ecuación (1), bajo la hipótesis de que toda la energía inicial del sistema es cero, y se despeja el cociente H(S) = Y(S)/U(S), definido como la Función de Transferencia, se obtiene:

$$H(S) = \frac{b_0S^M + b_1S^{M-1} + \ldots + b_M}{a_0S^N + a_1S^{N-1} + \ldots + a_N} \quad (10)$$

De igual forma si se aplica la Transformada Unilateral de Laplace a la expresión (2) se obtiene que la Matriz de Transferencia viene dada por:

$$H(S) = C(SI-A)^{-1}B + D \quad (11)$$

donde I es una matriz identidad de orden N y H(S) es la Matriz de Transferencia (MTR), formada por las funciones de transferencia obtenidas de la relación cruzada de cada entrada con cada salida. La expresión (11) se reduce a (10) para un sistema de una sola entrada y una sola salida.

Si a la expresión (10) se le aplica la transformada inversa de Laplace entonces la función del tiempo generada {h(t)} se le conoce como respuesta al impulso del sistema. De igual forma, la matriz transformada inversa de la expresión (11) se le llama Matriz de Respuesta al impulso.

CRITERIOS DE ESTABILIDAD.

Se dice que una función causal, de tiempo continuo, f(t) es estable si satisface que:

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) < \infty$$

O sea una función es estable si permanece acotada cuando t crece indefinidamente. Además se dice que un sistema es estable si las funciones constitutivas de la Matriz de Respuesta al Impulso son funciones estables.

Es claro que para sistemas lineales, causales e invariantes en el tiempo, la MTR de la expresión (11) está constituida por funciones racionales. Además, en virtud de que las matrices en (2) son reales entonces la MTR puede ser escrita como:

$$H(S) = C\,\frac{adj[(SI-A)]}{det(SI-A)}\,B + D \quad (12)$$

Las raices del polinomio caracterítico de la MTR son llamadas polos del sistema, o sea, aquellos valores que satisfacen la expresión det(SI-A) = 0.

A partir de la discusión anterior es claro que, si se analizan todas las posible formas de los factores en el polinomio det(SI-A), se puede determinar en que casos la Matriz de Respuesta al Impulso y, por lo tanto, el sistema es estable. A continuación se presenta una tabla con todos los posibles factores de det(SI-A)=0 y los respectivos términos en el dominio del tiempo.

FACTORES NO REPETIDOS DE det(SI-A)=0	
FACTOR EN det(SI-A)	TERMINO RESPECTIVO EN t
a. S	K
b. $(S-\alpha)$	$e^{\alpha t}$
c. $(S^2 + \beta^2)$	$\text{sen}(\beta t)$ ó $\cos(\beta t)$
d. $(S-\alpha)^2 + \beta^2$	$e^{\alpha t}\text{sen}(\beta t)$ ó $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$
FACTORES REPETIDOS DE det(SI-A)=0	
FACTOR EN det(SI-A)	TERMINO RESPECTIVO EN t
e. S^n	t^k
f. $(S-\alpha)^n$	$t^k\ e^{\alpha t}$
g. $(S^2 + \beta^2)^n$	$t^k\text{sen}(\alpha t)$ o $t^k\cos(\alpha t)$
h. $[(S-\alpha)^2 + \beta^2]^n$	$t^k\ e^{\alpha t}\ \text{sen}(\beta t)$ o $t^k\ e^{\alpha t}\ \cos(\beta t)$

En la tabla anterior los valores de α, β, K y k son todos reales. De esta tabla se pueden obtener las siguientes observaciones:

i) Los términos de las formas a. y c. son siempre estables, pues sus límtes cuando t tiende a infinito permanecen acotados.

ii) Los términos de las formas e. y g. son siempre inestables, pues sus límites cuando t tiende a infinito divergen.

iii) Los términos de las formas b., d., f. y h. serán estables sii el valor de α es menor que cero.

En la observación i) los polos involucrados están sobre el eje imaginario y son simples. En la observación ii) los polos involucrados están sobre el eje imaginario y tienen multiplicidad (también llamado cardinalidad) mayor que uno. Finalmente en la observación iii) los polos involucrados son reales puros o complejos conjugados. A partir de este análisis puede obtenerse la siguiente conclusión general:

Un sistema es estable sii los polos de su Matriz de Transferencia satisfacen que:

i) Polos imaginarios puros deben ser simples.
ii) Polos reales puros, repetidos o no, deben ser negativos.
iii) Polos complejos conjugados, repetidos o no, deben tener parte real negativa.

CONCLUSIONES.

La estabilidad de un sistema puede ser analizada por medio de la Transformada de Laplace realizando un estudio de la ubicación geométrica de los polos de su Matriz de Transferencia. El análisis de estabilidad de un sistema es uno de los aspectos más importante en la ejecución dinámica del mismo: la ubicación de satélites, el posicionamiento de radares,ect, son ejemplos de sistemas de control donde la estabilidad es un factor crítico. Un inconveniente importante en este análisis surgió originalmente para sistemas de orden alto, pues la factorización del polinomio característico puede conllevar serias dificultades matemáticas. Para ello han sido desarrolladas técnicas analíticas alternativas como el Criterio de Routh-Hurwitz y técnicas grafo-analíticas como El

Lugar Geométrico de las Raices. Sin embargo, actualmente este inconveniente es salvado por medio del uso de programas para microcomputador que factorizan rapidamente polinomios de orden superior.

La transformada de Laplace ha sido también utilizada extensivamente para análisis y diseño de circuitos eléctricos y electrónicos en muchos de los sofismas electrónicos que sorprenden nuestros días. En la realidad tecno-científica actual esta importante herramienta de ayuda realiza su legado gerontológico: envejece pero no agoniza.

SOBRE ALGUNAS ECUACIONES PARA OSCILADORES CUANTICOS

JUAN CARLOS MAURY F.†
JORGE PAEZ
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE FÍSICA
GRUPO DE ASTROFÍSICA

RESUMEN: A partir de la ecuación radial de Schrödinger para un oscilador anarmónico de grado sexto en el espacio de dos dimensiones, y gracias a transformaciones de variables y de consideraciones asintóticas; se obtienen las ecuaciones y las soluciones de:

1) El oscilador doblemente anarmónico,
2) El oscilador armónico rotante
3) El oscilador armónico simple
4) La ecuación de Schrödinger para el potencial de confinamiento $\frac{-a}{r} + br + cr^2$.

El enlace común entre todas estas ecuaciones y sus soluciones es la ecuación biconfluente de Heun y su solución.

De manera natural también se obtiene la ecuación del oscilador de sexto grado, al plantearse la ecuación de Schrödinger para una partícula de prueba, moviéndose en un espacio curvo, descrito por la métrica magnética de Melvin.

Finalmente, se estudian las conecciones entre las ecuaciones antes apuntadas y la correspondiente al caso de Melvin. Este análisis nos permite inferir el espectro de autovalores en una forma aproximada, debido a las dificultades que se tienen al considerar los parámetros particulares de éste caso.

† DEPARTAMENTO DE FÍSICA UNIVERSIDAD NACIONAL, HEREDIA

1 Introducción

La ciencia Física, desde sus primeros pasos, siempre ha contado con la Matemática como un gran aliado. Para poder dar una descripción sistemática y general válida de la leyes de la Naturaleza, así como para poder alcanzar esas leyes por medio de los métodos de los cálculos, se ha hecho necesario el conocimiento por parte de los físicos de muchas ramas de las Matemáticas. Claro que esa necesidad de ayuda a su vez se ha convertido en un gran acicate para el progreso de las Matemáticas. Así, esa unión de estas dos partes del conocimiento humano a veces a sido tan grande y completa (con el mayor o menor agrado de quienes la practican !), que ellas han llegado verdaderamente a confundirse. A menudo oímos a la gente que habla de *Fisicomatemática*. Tal cosa sucede cada vez con más fuerza y en mayor número de casos en la Física moderna. La abstracción, la complejidad y la carencia de la guía que nos puede proporcionar los sentidos en el estudio de los fenómenos microscópicos o a gran escala, hacen que cada vez se trabaje más en el campo teórico. Sin embargo, en este Congreso hemos decidido contribuir con un tema que ha sido modelo de muchas teorías: los osciladores cuánticos, pero sin usar el aparato matemático más moderno; nuestro objetivos es de una manera clara y sencilla; ilustrar como algunos fenómenos físicos, descritos por ecuaciones, tienen un origen común. En la Física atómica y molecular, y por lo tanto, en la Quimica, el tema es de gran importancia. La ecuaciónde Schrödinger no-relativista, es la que describe el movimiento de los sistemas en este caso. Veremos como, a partir de la ecuación de un oscilador anarmónico de grado mayor, se obtienen ecuaciones que tienen la forma de osciladores anarmónicos de grado menor, o incluso del oscilador armónico, o ecuaciones correspondientes de otros potenciales. Los osciladores nombrados han sido objeto de estudio por parte de muchos, siempre con aproximaciones o técnicas numéricas. Aquí citaremos únicamente a dos autores[1],[2],[3] que han trabajado en forma exacta, y no a otros,que lo han hecho en forma aproximada. Nuestro tra bajo tiene ciertas aportaciones originales con respecto a ellos. Nuestra contribución totalmente original radica en el planteamiento de la ecuación de onda para una partícula de prueba en un fondo gravitatorio, que se denomina el Universo Magnético de Melvin[45], que representa un campo magnético que se mantiene estático gracias a la atracción gravitatoria de sus líneas de fuerza. Tal campo aparece en (1-1,a), y la geométría de ese espacio la describe (1-1.b):

$$B_z = \frac{B_0}{\Lambda^2} \qquad (1-1.a)$$

$$ds^2 = \Lambda^2\left(c^2dt^2 - d\rho^2 - dz^2\right) - \frac{\rho^2}{\Lambda^2}d\phi^2 \qquad (1-1.b)$$

$$\Lambda = 1 + \frac{\rho^2}{\hat{a}^2} = 1 + \frac{B_0^2 G\rho^2}{4c^4} \qquad (1-1.c)$$

ρ, ϕ, z son las coordenadas cilíndricas, B_0 es una constante (el valor de B_z para $\rho = 0$) y $\hat{a} = \frac{2c^2}{B_0\sqrt{G}} \sim \frac{6.96 \cdot 10^{24}}{B_0}$ Gauss-cm es un parámetro con dimensiones de longitud; c es la velocidad de la luz en el vacío y G es la constante universal de la gravitación de Newton.

En los últimos años, la influencia de la gravedad en los sistemas microscópicos ha despertado interés en los que desean un mayor entendimiento de la leyes de la Naturaleza o en aquellos que desean explicar fenómenos en Astrofísica. En lo que a nosotros concierne aquí, veremos que la ecuación radial que se obtiene para una función de onda escalar; es la ecuación de un oscilador de los que previamente habíamos tratado, y llegaremos a la conclusión de que a pesar de eso, la solución obtenida anteriormente no es aplicable a este caso†. Esperamos, también, que con este pequeño aporte, se divulgue un poco la ecuación de Heun, poco conocida en nuestro medio.

2 La Ecuación de Algunos Osciladores y su Solución Común

La ecuación radial de Schrödinger (E.R.Sch.) de un oscilador anarmónico de grado sexto (O.An. G6), en el plano, toma la forma de (2-1), donde $\rho^2 = x^2 + y^2$ y $\frac{a}{\rho^2}$ es el término del llamado potencial centrífugo, b depende de la energía total E y $l^2 = a$:

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{a}{\rho^2} + b - \hat{c}\rho^2 - d\rho^4 - \hat{e}\rho^6\right) \mathcal{F}(\rho) = 0 \qquad (2-1)$$

Las cantidades a, b, $\hat{c}$, d y $\hat{e}$ son constantes, llamadas los parámetros de la ecuación del oscilador, hasta el momento de carácter totalmente general, y en un problema físico particular, son característicos de ese problema.

De acuerdo con un método bien establecido para encontrar las soluciones de la ecuación de Schrödinger, se buscan primero las soluciones correspondientes a la variable independiente ρ, cuando ésta es pequeña $\mathcal{F}(\rho \to 0) = \mathrm{f}$, luego cuando ésta es grande $\mathcal{F}(\rho \to \infty) = \mathrm{F}$ y entonces se enuncia la resolución, como el producto de ambas, fF. Las ecuaciones correspondientes a los casos citados, conteniendo sólo las partes dominantes que hemos escogido, aparecen en (2-2a) y (2-2b):

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{a}{\rho^2}\right) f = 0; \qquad f = \rho^{\frac{1}{2} \pm \sqrt{a+\frac{1}{4}}} \qquad (2-2a)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + b - \hat{c}\rho^2 - d\rho^4 - \hat{e}\rho^6\right) F = 0 \qquad (2-2b)$$

† Esto nos obliga a presentar una solución en forma aproximada, aprovechando la pequeñez de algunos parámetros de origen gravitatorio. Esta solución es completa en cuanto que contiene todos los autovalores de la energía, también calculados con las mismas aproximaciones que se usaron para las autofunciones

Para ρ pequeño domina el término centrífugo y las soluciones son $\rho^{\frac{1}{2}\pm\sqrt{a+\frac{1}{4}}}$ ó combinaciones de éstas. Para ρ grande despreciamos el término centrífugo (lo que equivale a anular l ó a) y (2-2b) es entonces la ecuación de un oscilador ***doblemente anarmónico*** en una dimensión (O.2 An.), en ese caso todavía no conocemos la resolución $\mathcal{F}_{O.An.G6}(\rho \to \infty) = \mathcal{F}_{O.2An.}$. En resumen:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{O.An.G6}(\rho) = \rho^{\frac{1}{2}\pm\sqrt{a+\frac{1}{4}}} \cdot F \qquad (2-3a)$$

Escribiendo $f = \rho^{\frac{1}{2}\pm\sqrt{a+\frac{1}{4}}} = e^{-\mathcal{G}(\rho\to 0)}$ y $F = Pe^{-\mathcal{G}(\rho\to\infty)} = \mathcal{F}_{O.2An.}$, donde P proporcina información sobre los ceros de $\mathcal{F}$; entonces el producto $fF = e^{-g}Pe^{-G} = Pe^{-\mathcal{G}(\rho)}$, y nuestro *Ansatz* (2-3a) toma la forma (2-3b):

$$\mathcal{F} = Pe^{-\mathcal{G}} \qquad (2-3b)$$

Para resolver (2-2b), sustituimos (2-3b) en (2-1) y seguidamente obtenemos una ecuación para P y $\mathcal{G}$ acoplados, como lo indicamos en (2-4a):

$$\left(\frac{d^2P}{d\rho^2} - \frac{2dP}{d\rho}\cdot\frac{d\mathcal{G}}{d\rho}\right) + \left[\left(\frac{d\mathcal{G}}{d\rho}\right)^2 - \frac{d^2\mathcal{G}}{d\rho^2}\right]P = \left(\frac{a}{\rho^2} - b + \hat{c}\rho^2 + d\rho^4 + \hat{e}\rho^6\right)P \qquad (2-4a)$$

Si P es un polinomio de grado (n), como se desea, entonces $P = P^n$ y si n=0, $P^0 = a_0$ una constante; el estado fundamental del (O.An.G6) estaría representado entonces por $\mathcal{F}^0 = P^0e^{-\mathcal{G}}$, y una solución asintótica sería: $F^0 = P^0e^{-G} = \mathcal{F}^0_{O.2An}(\rho)$. En la ecuación (2-4a) se anula el término entre paréntesis redondo, a la izquierda, para n=0, por lo tanto $\mathcal{G}$ debe ser un polinomio de grado 4 en ρ grande:

$$G = \sum_{r=1}^{2}\frac{\beta_r(\varsigma\rho)^r}{2r} \qquad (2-4b)$$

Una variable radial proporcional a ρ^2 es recomendable, puesto que las potencia de ρ son pares. La solución asintótica, en función de esa, se indica en (2-5b):

$$v(\rho) = \varsigma\rho^2 \qquad (2-5a)$$

$$F = e^{-\frac{\beta_1 v}{2} - \frac{\beta_2 v^2}{4}} = \mathcal{F}^0_{O.2An.} \qquad (2-5b)$$

Por lo tanto: $\mathcal{G} = g + G = -(\frac{1}{2} \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}})ln\rho + \frac{\beta_1 \varsigma \rho^2}{2} - \frac{\beta_2 \varsigma^2 \rho^2}{4}$; al derivar y sustituir en (2-4a) para n=0, se obtienen ligaduras entre los parámetros y además el autovalor b como función de éstos ($\alpha \equiv \pm\sqrt{a + \frac{1}{4}}$):

$$2\beta_1 \varsigma(\alpha + 1) = b(0) \qquad \varsigma^2 \left[\beta_1^2 - 2\beta_2(\alpha + 2)\right] = \hat{c}(0) \qquad (2-6a)$$

$$2\beta_1 \beta_2 \varsigma^3 = d \qquad \beta_2^2 \varsigma^4 = \hat{e} \qquad (2-6b)$$

Finalmente, escribimos nuestro ***Ansatz*** en (2-7b), que formalmente es la solución de (2-1) para cualquier n, siempre y cuando se cumplan las condiciones de resolubilidad (2-6) para n=0; en realidad son éstas condiciones muy especiales para un problema particular; β_1 y β_2 se obtienen de (2-6b):

$$0 < \beta_2 \varsigma^2 = \pm \hat{e}^{\frac{1}{2}} \qquad 2\varsigma\beta_1 \hat{e}^{\frac{1}{2}} = \pm d \qquad (2-7a)$$

Cuando $a = 0$ ó $\alpha = -\frac{1}{2}$; $\mathcal{F}^0 = F^0 = \mathcal{F}^0_{O.2An.}$ y (2-7b) se convierte en la solución de (2-2b) para n=0; si $l = \pm 1, \pm 2, \ldots$, en la solución del (O.An.G6) usamos $|\alpha|$ para evi tar infinitos en $\rho = 0$. (Además, en (2-6) se debe de sustituir α por $-\frac{1}{2}$ ó $|\alpha|$ en cada caso), así:

$$\mathcal{F}^\alpha = v^{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha} p^\alpha exp(-\tfrac{1}{2}\beta_1 v - \frac{\beta_2 v^2}{4}) \qquad (2-7b)$$

$$\mathcal{F}^{0,-\frac{1}{2}} = \mathcal{F}^0_{O.2An} \qquad \mathcal{F}^{0,|\alpha|} = \mathcal{F}^{0,\alpha}_{O.An.G6} \qquad (2-7c)$$

Siempre con la idea de que $\mathcal{F}$ sea finita, impondremos la condición a β_2 de que sea positiva; mientras que β_1 puede ser positiva ó negativa. Tal cosa, en un problema particular depende de que $\hat{e}^{\frac{1}{2}}$ y d sean positivas ó negativas, y de la escogencia del signo en (2-7a).

Otras ecuaciones podemos obtener de (2-1), por medio de transformaciones de las variables. Por ejemplo, con el cambio de variable dependiente (2-8a) si $b \neq 0$, y se escogen signos iguales para β_1 y β_2 en (2-7a), (2-8b) tiene la forma de la (E.R.Sch.) correspondiente a un potencial de confinamiento ($\alpha^2 = 1 + 4l_c^2$):

$$\mathcal{J} = v^{\frac{-1}{4}} J \qquad 4\gamma \equiv \beta_1^2 - \frac{\hat{c}}{\varsigma^2} \tag{2 - 8a}$$

$$\left(\frac{d^2}{dv^2} - \frac{(\alpha^2 - 1)}{4v^2} + \frac{b}{4\varsigma v} + \gamma - \left(\tfrac{1}{2}\beta_1 + \tfrac{1}{2}\beta_2 v\right)^2 \right) J_b = 0 \tag{2 - 8b}$$

Dicho potencial es importante en la Física de los *Quarks* . Desde luego que aquí la variable independiente no es el radio ρ, ni el radio r de las coordenadas esféricas, sino que v viene dada por (2 - 5a).

El autovalor es γ, que gracias a (2 - 6a) es igual, para n=0, a $\frac{1}{2}\beta_2(\alpha + 2)$. También, si b=0, y se escogen signos distintos para β_1 y β_2 en (2 - 7a), el cambio de variable independiente (2 -9a) nos lleva a (2 - 9b), que tiene la forma de la (E.R.Sch.) correspondiente a un oscilador armónico rotante (O.A.R.):

$$u = \frac{\beta_2 v_1}{\beta_1} \tag{2 - 9a}$$

$$\left(\frac{d^2}{du^2} - \frac{(\alpha^2 - 1)}{4u^2} + \frac{\gamma}{\beta_2} \left(\frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_2}} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_2}} \right)^4 (u - 1) \right) J_0 = 0 \tag{2 - 9b}$$

Para u grande, la parte dominante en (2-9b) permanece en (2-10b), luego de despreciar el término $\frac{(\alpha^2-1)}{4u^2}$ (ó hacer $\alpha = \pm 1$), y de hacer el cambio (2-10a); para $\beta_2 = 2$:

$$w = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right) (u - 1) = \left(\tfrac{1}{2}\beta_1\right) (u - 1) \tag{2 - 10a}$$

$$\left(\frac{d^2}{d^2} + \gamma - w^2 \right) J_0 = 0 \tag{2 - 10b}$$

La ecuación (2-10b) es la ecuación de Schrödinger de un oscilador armónico simple (O.A.S.) cuántico en una dimensión; $J_0(u \to \infty) = J_0 = J_{O.A.S.} = J_{O.A.R.}(u \to \infty)$.

Para $\gamma = 1$; $J^0_{O.A.S.} = H^0 e^{-\frac{1}{2}w^2}$, donde H^0 es una constante; y $J^0_{O.A.S.}$ es la representación del estado fundamental (n=0) del O.A.S., para $\gamma = 2n + 1$ y $\alpha = -1$, entonces (2-10b) tiene como solución (2-10c), donde H^n son los polinomios de Hermite de grado n:

$$J^n_{O.A.S.} = J^n_0 = H^n\left(\tfrac{1}{2}\beta_1(u - 1)\right) e^{-\left(\frac{1}{2}\beta_1\right)^2 \frac{1}{2}(u-1)^2} \tag{2 - 10c}$$

Para u pequeña, dejamos sólo $\frac{(\alpha^2-1)}{4u^2}$ como predominante ($\alpha \neq \pm 1$), y la ecuación es (2-11), con su solución respectiva. La solución de (2-9b) esperamos que sea entonces $J_0(u \to 0) \cdot J_0(u \to \infty) = j_0 \cdot J_0$, para γ dependiente de α:

$$\left(\frac{d^2}{du^2} - \frac{(\alpha^2-1)}{4u^2}\right) j_0 = 0 \qquad j_0 = u^{\frac{1}{2}(\alpha+1)} \tag{2 - 11}$$

$$J_0^\alpha = J_0^{n,\alpha}(u) = u^{\frac{1}{2}(\alpha+1)} H^{n,\alpha}\left(\tfrac{1}{2}\beta_1(u-1)\right) e^{-\left(\frac{1}{2}\beta_1\right)^2 \frac{1}{2}(u-1)^2} \tag{2 - 12}.$$

Desde luego, al hacer en (2-12) $\alpha = -1$, tenemos que $J_0^{n,-1} = J_{O.A.S.}^n$ y para $\alpha \to |\alpha|$, confiamos que $J_0^{n,|\alpha|} = J_{O.A.R.}^{n,|\alpha|}$. Recordemos que de acuerdo con (2 - 8a)

$$J_0^\alpha = v^{\frac{1}{2}} J^\alpha = v^{\frac{1}{2}(\alpha+1)} P^\alpha exp - \tfrac{1}{2}\beta_1 v - \frac{\beta_2 v^2}{4}$$

y $\alpha = -1$ y $|\alpha|$ correspondería al O.A.S. y al O.A.R. respectivamente. Pero, (2-12) no es solución de (2-9b) más que para $\gamma(n) = 2n+1$, cuando $\alpha = -1$, o sea para cuando u es grande y $J_0 = J_{O.A.S.}^n$.

En realidad el polinonio $H^{n,\alpha}$ es independiente de los valores de α, por lo tanto no debe llevar esa etiqueta: $H = H^n$; debemos buscar otro polinomio $P^{n,\alpha}$ que si sea sensible a la información que proporciona α a la rotación. A eso nos encaminamos, pues desde (2-3b) y (2-7) vemos que para completar la solución, es necesario obtener P.

3 La Solución Polinomial. La Ecuación de Heun

Sustituyendo (2-7b) en (2-1), se obtiene la ecuación para P, escrita en (3-1a) y la cual corresponde a algún ς todavía sin elegir:

$$\left(\frac{v d^2}{dv^2} + \left(\beta_0 - \beta_1 v - \beta_2 v^2\right)\frac{d}{dv} + (\beta_3 v - \theta)\right) P^\alpha = 0 \tag{3 - 1a}$$

$$\beta_0 \equiv \alpha + 1 \qquad \beta_3 \equiv -\tfrac{1}{2}\beta_2(\alpha+2) + \gamma \tag{3 - 1b}$$

$$\theta \equiv \tfrac{1}{2}\beta_1(\alpha+1) - \frac{b}{4\varsigma} \tag{3 - 1c}$$

En realidad, (2-8b) es la forma patrón de (3-1a). La solución en forma de serie infinita (3-2a) da las relaciones de recurrencia (3-2b) con tres términos que conectan coeficientes pares e impares. Al sustituir en (3-1a):

$$P^{\alpha} = v^{\sigma} \sum_{r=0}^{\infty} a_r v^r \qquad (3-2a)$$

se obtiene la siguiente relación de recurrencia:

$$(r+\sigma)(r+\sigma+\alpha)a_r = [\beta_1(r-1+\sigma)+\theta]\,a_{r-1} - [\beta_3 - \beta_2(r-2+\sigma)]\,a_{r-2} \qquad (3-2b)$$

Para r=0 en (3-2b) la ecuación indicial nos da dos valores de σ; σ' corresponde a la solución regular en el origen $P^{\alpha}_{\sigma'}(v)$:

$$\sigma = \sigma' = 0 \qquad\qquad \sigma = \sigma'' = -\alpha \qquad (3-2c)$$

Para r grande, los coeficientes a_r se vuelven muy extensos, pero siempre serán de la forma (3-3a) al aplicar (3-2b) repetidamente, $(x)_r$ es la notación de Pochhammer $x(x+1)\ldots(x+r-1) = (x)_r$ y $(x)_0 = 1$:

$$a_r = \frac{A_r}{(\alpha+1)}\frac{a_0}{r!} \qquad \alpha \neq -1, \ldots, -(r-1) \qquad (3-3a)$$

$$A_r = \theta(\theta+\beta_1)\ldots[\theta+(r-1)\beta_1] + O.T., \qquad A_0 = 1 \qquad (3-3b)$$

O.T. significa otros términos y dependen de los parámetros de (2-1) y de θ, el autovalor de (3-1a). A_r es un polinomio de grado r en θ, por lo tanto a_r también lo es.

Buscamos soluciones polinomiales del tipo (3-4a); al sustituir éstas en (3-1a) satisfacen la ecuación si cumplen con (3-2b) y además obedecen la relación limitante (3-4b):

$$P^{n;\alpha}_{\sigma'} = \sum_{r=0}^{n} a_r v^r \qquad (3-4a)$$

$$\beta_3 = n\beta_2 \qquad (3-4b)$$

$$(\theta + n\beta_1)a_n = \beta_2 a_{n-1} \qquad (3-4c)$$

De acuerdo con (3-1b) la condición (3-4b) que corresponde a (2-6a) para las soluciones polinomiales, se convierte en :

$$\gamma(n,\alpha) = \beta_2[(n+1) + \tfrac{1}{2}\alpha]$$

Si $\beta_2 = 2$ y también $\alpha = -1$, entonces γ es el autovalor del O.A.S.; pero por (3-3a) $P^{n,-1}_{\sigma'}$ no puede ser solución del O.A.S (no volveremos a usar la etiqueta σ'). Para que (3-2a) se trunque en el término n-ésimo, debe de cumplirse que $a_r = 0$ para $r > n$; en particular $a_{r+1} = 0$ ó $A_{n+1} = 0$, anulan un polinomio en θ de grado n+1, por lo tanto hay (n+1) raíces que llamaremos :$\theta^n_0, \theta^n_1, \ldots, \theta^n_n$, ninguna de las cuales se obtiene de hacer $a_n = 0$, ó $a_{n-1} = 0$, etc. Estas θ^n_w deben ser autovalores correspondientes a $P^{n,\alpha}_w$, la autofunción de (3-1a), para $w = 0, 1, ..., n$. Para cualquier $r \le n$ dado n, $a_r = a_r(n)$ en (3-4a); a_r no es el mismo para P^m que para P^n con $m \neq n$, luego hay que utilizar la etiqueta n. Debido a eso y a (3-4b), (3-2b) se escribe como (3-5a) y (3-4a) como (3-5b):

$$r(r+\alpha)a_r(n) = [\beta_1(r-1) + \theta^n]a_{r-1}(n) - [n-(r-2)]\beta_2 a_{r-2}(n) \qquad (3-5a)$$

$$P^{n,\alpha}_w = a_0(n,w)\sum_{r=0}^{n} \frac{A_r(n,w)}{(\alpha+1)_r}\cdot\frac{v^r}{r!} \qquad \alpha \neq -r, \ldots, -(n-1) \qquad (3-5b)$$

Los valores propios de (3-1a) para n=0 y n=1 se obtienen fácilmente, al hacer $A_1(0) = 0$ y $A_2(1) = 0$:

$$\theta^0 = 0 \qquad (3-6a)$$

$$\theta^1_0 = -\tfrac{1}{2}\beta_1\left[1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{\beta_2}{\beta_1^2}\right)(\alpha+1)}\right] \qquad (3-6b)$$

$$\theta^1_1 = -\tfrac{1}{2}\beta_1\left[1 - \sqrt{1 + 4\left(\frac{\beta_2}{\beta_1^2}\right)(\alpha+1)}\right] \qquad (3-6c)$$

Estos tres elementos del espectro son un buen ejemplo de que

$$\theta_w^n(0 \le w \le n) \ne \theta_w^{n-1}(0 \le w \le n-1) \ne \ldots \ne \theta_w^0(w=0).$$

Por eso el anular $A_{n+1}(n,w)$ no implica que $A_{n+2}(n,w), A_{n+3}(n,w), \ldots$, etc, sean nulos también, a menos que O.T.=0 en (3-3b); en ese caso, A_r serán determinantes de matrices diagonales de $r \times r$, y tendríamos $\theta_0^n = 0, \theta_1^n = -\beta_1, \ldots, \theta_n^n = -n\beta$, al anular a $A_{n+1}(n)$, pero solo $\theta_n^n = -n\beta$ sería la raíz que truncaría la serie infinita en el término de grado n(v^n), las otras la truncarían en grados menores. Ese comportamiento exhiben, por ejemplo, los polinomios de Laguerre.

Si β_2=2, (3-1a) tiene la forma canónica de la ecuación biconfluente de Heun (B.C.H.); entonces $\varsigma = \left(\frac{1}{2}\hat{c}^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ y v es una variable adimensional.

4 El Fondo Gravitatorio

La consideración de una partícula de prueba sin *spin* en un fondo gravitatorio, es un problema cuántico en la Relatividad General (R.G.). La ecuación por plantear es entonces la de Klein-Gordon (K.G.). Sin embargo, en el espacio curvo de Melvin, dado por la forma cuadrática fundamental (1-1b), se obtiene una ecuación radial reducida que tiene la misma forma que la que proporciona la ecuación de Schrödinger, con los coeficientes métricos g_{ik} $\quad j,k = 1,2,3$ de esa geometría. Como nuestro interés es más de tipo matemático-demostrativo, y lo que deseamos es ver cómo se puede obtener la ecuación del oscilador (2-1), en un problema particular, trabajamos con la ecuación de Schrödinger covariante:

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m}\left[g^{-\frac{1}{2}}\sum_{j,k} D_j g^{\frac{1}{2}} g^{jk} D_k\right]\varphi \qquad (4-1a)$$

$$D_j \equiv \partial_j - i\hat{q}A_j \qquad (4-1b)$$

En este caso el potencial eléctrico es nulo, g es el determinante de la matriz del tensor métrico[6], $\partial_j = \frac{\partial}{\partial q^j}$, y A_j son las componentes del potencial magnético vectorial; un ejemplo lo constituye el caso en que $A_1 = A_3 = 0$; además, $\hat{q} = \frac{q}{\hbar c}$. Desarrollando (4-1a), la ecuación para φ es :

$$\left(\partial_1^2 + \frac{1}{\rho}\partial_1 + \frac{\Lambda^4}{\rho^2}D_2 + \partial_3^2\right)\varphi = \frac{2m\Lambda^2}{\hbar}i\frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad (4-2)$$

(Si hubieramos planteado la ecuación de K.G., en el lado derecho aparecería el término $\left(\frac{\Lambda^2 m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_0^2}\right)\varphi$, y en el izquierdo no habría ningún cambio). Observando que φ y z son coordenadas ignorables, o bien procediendo por separación de variables, se propone una amplitud de onda φ, como en (4-3):

$$\varphi = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{i\alpha\phi} e^{ik_3 z} R(\rho) \qquad (4-3)$$

E, α,k_3 son constantes de separación. Sustituyendo (4-3) en (4-2) se logra la ecuación radial (4-4). Esta coincide con la que se logra a partir de la ecuación de K.G., si hacemos la sustitución siguiente:

$$-k_3 + \frac{2mE}{\hbar^2} \to -k_3 = \hat{E}^2 + \hat{m}^2 c^4$$

$$\left[\partial_1^2 + \frac{1}{\rho}\partial_1 - \frac{\Lambda^4}{\rho^2}\left(\alpha - \hat{q}A_2\right)^2 - k_3^2 + \frac{2mE}{\hbar^2}\Lambda^2\right] R = 0 \qquad (4-4)$$

Mediante la transformación (4-5a), y para $A_2 = \frac{B_0\rho^2}{2\Lambda}$, se llega a la ecuación patrón (4-5b), ó ecuación radial reducida:

$$R = \rho^{-\frac{1}{2}} \mathcal{F} \qquad (4-5a)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{a}{\rho^2} + b - \hat{c}\rho^2 - d\rho^4 - \hat{e}\rho^6\right)\mathcal{F} = 0 \qquad (4-5b)$$

$$a = \alpha^2 - \frac{1}{4} \qquad (4-6a)$$

$$b = \alpha\hat{q}B_0^2 + 2\hat{m}c^2\hat{E} - k_3^2 - \frac{4\alpha^2}{\hat{a}^2} \qquad (4-6b)$$

$$\hat{c} = \frac{\hat{q}^2 B_0^2}{4} - \frac{(4\hat{m}c^2\hat{E} + 3\alpha\hat{q}B_0)}{\hat{a}^2} + 6\frac{\alpha^2}{\hat{a}^4} \qquad (4-6c)$$

$$d = \frac{\hat{q}^2 B_0^2}{2\hat{a}^2} - \frac{(2\hat{m}c^2\hat{E} + 3\alpha\hat{q}B_0)}{\hat{a}^4} + 4\frac{\alpha^2}{\hat{a}^6} \qquad (4-6d)$$

$$\hat{e} = \frac{\tilde{q}^2 B_0^2}{4\hat{a}^4} - \frac{\alpha \hat{q} B_0}{\hat{a}^6} + \frac{\alpha^2}{\hat{a}^8} = \left(\frac{\hat{q} B_0}{2\hat{a}^2} - \frac{\alpha}{\hat{a}^4} \right)^2 \qquad (4-6d)$$

La ecuación (4-5b) tiene la forma de (2-1) y los parámetros (4-6) son característicos de nuestro problema particular, los términos que contienen a $\frac{1}{\hat{a}^2}$ ó potencias de ésta, son de origen gravitatorio. Si $\hat{a}^{-2} \to 0$, (4-5b) es la (E.R.Sch.) de una partícula en un campo magnético uniforme en un espacio plano, pues $\frac{B_0 \rho}{\hat{A}^2}$, derivable de A_2, tiende a $B_0 \rho$. En ese caso $d = \hat{e} = 0$, y b y $\hat{c}$ sufren modificación parcial.

De aquí en adelante, la solución de (4-5b) se desarrolla idénticamente a la de (2-1) (el problema general), y el comportamiento físico de la partícula de prueba en un fondo como el que nos ocupa, debe ser análogo al de los osciladores de los párrafos anteriores.

Para que la solución polinomial ensayada la podamos aplicar en el (U.M.M), la condición (3 -4.b), $\gamma(n, \alpha) = 2(n+1) + \alpha$ se debe cumplir en nuestro caso. De (2 - 8a), esa condición se escribe también (para $\beta_2 = 2$) $4c\hat{e} = d^2 - 8\hat{e}^{\frac{3}{2}}[2(n+1) + \alpha]$, de manera que se vea más claro el acople entre $\hat{c}$, d y $\hat{e}$, y cómo éste depende de n y α. Trabajando con órdenes de magnitud, si $B_0 \sim 10^{12}$ Gauss, $\hat{a}^{-2} \sim 10^{-24} cm^{-2}$, y a^{-4}, a^{-6}, a^{-8} se vuelven pequeñísimos. Entonces en un mismo parámetro de los definidos en (4 -6), hay cantidades que difieren entre sí (para α pequeña) por muchos órdenes de magnitud. Efectuando los productos en (3-4b), y conservando los términos hasta a^{-4}, llegamos a : $\frac{q^4 B_0^4}{4\hat{a}^4} = \frac{\hat{q}^4 B_0^4}{4\hat{a}^4} \pm O(\hat{a}^{-6})$, donde $O(\hat{a}^{-6})$ significa términos de orden superior o igual a $\hat{a}^{-6}$. Así, para n y α peque ños, la ligadura entre parámetros deseada, se cumple con gran exactitud.

La ecuación de (B.C.H.) muestra también, entre sus parámetros, grandes diferencias para el caso del (U.M.M.). Para $B_0 \sim 10^{12}$ Gauss, $\gamma >> \delta >> \beta_1$, ($\delta \equiv -\frac{1}{2} b (\frac{4}{\hat{e}})^{\frac{1}{4}}$) y $\frac{\theta}{\beta_1} + r \simeq \frac{\theta}{\beta_1}$, si r=1,2,...,n (para n pequeño); para ese caso los determinantes A_r de (3 -3) se escriben de forma aproximada en (4-7a), y la serie infinita (3 -2) se convierte en (4 -7a), donde ${}_1F_1$ es la serie hipergeométrica confluente:

$$A_r \approx (\frac{\theta}{\beta_1})_r \beta_1^r \qquad (4-7a)$$

$$P^\alpha \approx a_0 \sum_{r=a}^{\infty} \frac{(\frac{\theta}{\beta_1})_r}{(\alpha+1)_r} \frac{(\beta_1 v)^r}{r!} = a_0 \left[{}_1F_1(\frac{\theta}{\beta_1}; \alpha+1; \beta_1 v) \right] \qquad (4-7b)$$

Así, hemos despreciado justificadamente los O.T. de (3-3) y los determinantes A_r son diagonales, y al anular a A_{n+1} hay n+1 raíces θ_w^n, de las cuales n raíces ya se conocían de anular a $A_n(n-1)$, ·, etc., por lo que $\theta_n^n = -n\beta_1$ es la que vale y trunca (4-7b) para todo $r > n$. Los polinomios son entonces los asociados de Laguerre (n pequeña !):

$$P^{n,\alpha} \approx a_0(n) \sum_{r=0}^{n} \frac{(-n)_r}{(\alpha+1)_r} \frac{(\beta_1 v)^r}{r!} = a_0(n) L_n^{(\alpha)}(\beta_1 v) \qquad (4-8)$$

La nueva variable radial $\beta_1 v$ es tal que $\beta_1 v >> v$. De las propiedades de los polinomios de Laguerre, obtenemos, en función de la vieja variable v; puesto que $\beta_1 >> 1$:

$$L_n^{(\alpha)}(\beta_1 v) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+\alpha)_n (1-\beta_1)^{n-k}}{(n-k)!(1+\alpha)_k} \beta_1^k L_k^{(\alpha)}(v) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+\alpha)_n (-1)^{n-k}}{(n-k)!(1+\alpha)_k} \beta_1^n L_k^{(\alpha)}(v) \qquad (4-9)$$

Puesto que $L_n^{(\alpha)}(\beta_1 \varsigma \rho^2)$ es solución de la ecuación asociada de Laguerre, que tiene como autovalores a $\theta_L = -n = \frac{-b}{4\beta_1 \varsigma} + \frac{1}{2}|\alpha| + \frac{1}{2}$, entonces usando (4-6c), (4-6d) hasta $\hat{a}^{-2}$, y (4-6a) y (2-7a):

$$\hat{E} - \frac{k_3^2}{2\hat{m}c^2} \approx \frac{1}{2\hat{m}c^2} \left[4|\hat{q}|B_0 \left(n + \frac{1}{2}|\alpha| + \frac{1}{2} - \frac{\alpha \hat{q}}{4|\hat{q}|} \right) + \frac{4\alpha}{\hat{a}^2} \right]$$

este resultado coincide con los autovalores cuando se resuelve el problema para el campo magnético uniforme ($\hat{a}^2 \to \infty$).

5 Conclusiones y análisis

A partir de una ecuación más compleja, en lo que respecta al potencial que consta de más términos polinomiales, y de grado superior; se han obtenido otras ecuaciones que tienen la forma de ecuaciones de problemas físicos conocidos, ya sea por consideraciones asintóticas, o por transformación de variables. Dado el común ancestro de todas ellas, se obtuvo una solución común, que proporcionó soluciones particulares por manipulación de los parámetros, en especial el denominado α:

$$\mathcal{F}^{n,\alpha} = \rho^{\frac{1}{2}+\alpha} P^{n,\alpha} exp - \tfrac{1}{2}\beta_1 \varsigma \rho^2 - \frac{\beta_1 \varsigma^2 \rho^4}{4} \qquad (5-1a)$$

$$\mathcal{F}^{n,-\frac{1}{2}}(\rho) = \mathcal{F}^{n}_{O.2AN.}(\rho) \quad ; \quad \mathcal{F}^{n,|\alpha|}(\rho) = \mathcal{F}^{n,\alpha}_{O.AN.G6}(\rho) \qquad (5-1b)$$

$$v^{\frac{1}{4}}\mathcal{F}^{n,|\alpha|}(v) = \mathcal{J}_0^{n,|\alpha|}(v) = J_{O.A.R.} \qquad ; \qquad v^{\frac{1}{4}}\mathcal{F}_b^{n,|\alpha|}(v) = \mathcal{J}_{conf.}^{n,|\alpha|} \tag{5 - 1c}$$

A manera de contraejemplo se repasa el oscilador armónico simple. La búsqueda de $P^{n,\alpha}$ nos lleva directamente a la ecuación (B.C.H.), si $\varsigma = (\frac{1}{2}\hat{e}^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$. Esta ecuación resulta ser de poca ayuda en el cálculo de los autovalores de los problemas involucrados. En alguna medida, los trabajos citados se han complementado favorablemente, por ejemplo, con respecto a [1], la introducción de la variable radial (2-5a) nos evitó hacer el análisis de una doble secuencia de coeficientes pares e impares; y con respecto a [2], el uso de (2-4a) permite conocer cuando las soluciones son válidas de acuerdo con los parámetros que aparecen en los problemas allí citados. El establecimiento de la relación, u origen común de los diversos potenciales, será probablemente de ayuda en la interpretación física, por ejemplo, de los O.An.G6 que aparescan en diferentes contextos, como en el caso de la partícula de prueba en el (U.M.M)[7], el cual se estudia por nosotros de manera completamente original.

Referencias

[1] Rampal,A., Datta,K., J. Math. Phys. **24** (1983) 860.

[2] Leaute,B., Marcilhacy,G., J.Phys.A:Math.Gen. **19** (1986) 352.

[3] Datta,A., Willey,R., J. Math. Phys **29** (1988) 892.

[4] Melvin,M., Phys. Letters **8** (1964) 65.

[5] Bonnor,W.B., Proc.Roy. Phys.Soc. **67A** (1953) 225.

[6] Maury, J., Partículas en Campos Magnéticos Axiales. Tésis de Maestría U. C. R. (1989).

[7] Maury, J, Partículas en Campos Magnéticos Axiales. Tésis de Maestría, capítulo 10, U. C. R. (1989).

LA MATEMATICA ELEMENTAL DEL PROCESO DE VALORIZACION DEL CAPITAL

Henry Ml. Mora Jiménez
Escuela de Economía, Universidad Nacional
Heredia, Costa Rica

RESUMEN

En este trabajo se hace uso de herramientas elementales del álgebra y el cálculo diferencial para fomalizar matemáticamente los principales resultados de la teoría marxiana del plusvalor absoluto sujetos a cuantificación. Con ello, tesis teóricas importantes son sintetizadas y aclaradas, abriéndose la posibilidad de una nueva senda de desarrollo de la CRITICA DE LA ECONOMIA POLITICA.

INTRODUCCION

La piedra angular de la CRITICA DE LA ECONOMIA POLITICA desarrollada por K. Marx es su teoría del plusvalor, la cual, y en lo que toca a sus elementos básicos, es presentada en el Libro I de El Capital. Marx distingue dos métodos de producción de plusvalor: plusvalor absoluto y plusvalor relativo. La producción de plusvalor absoluto (prolongación de la jornada laboral más allá del tiempo necesario para reproducir el equivalente del valor de la fuerza de trabajo consumida) no es sólo una forma particular de extracción capitalista de excedente (al lado del plusvalor relativo), sino además, la forma general y básica, por lo que su compresión resulta crucial para entender y desarrollar el trabajo teórico de Marx sobre el capitalismo. Por eso, aquí nos limitaremos a este método de obtención del plusvalor.

El objetivo es formalizar matemáticamente, con ayuda del álgebra y el cálculo elemental, los principales resultados teóricos de la sección tercera del Libro I susceptibles de tratamiento cuantitativo, aunque buena parte de este trabajo fue adelantada por Marx en el capítulo que sirve de conclusión a dicha sección y a la investigación del plusvalor absoluto en cuanto categoría básica de la CRITICA DE LA ECONOMIA POLITICA.

FORMULAS QUE RELACIONAN LA TASA Y LA MASA DE PLUSVALOR

Marx resume en tres "leyes" los principales resultados de su investigación (sección tercera del Libro I) susceptibles de expresión matemática. Analicemos cada una de ellas

<u>Primera ley</u>:

> " La masa del plusvalor producido es igual a la magnitud del capital variable adelantado multiplicada por la tasa del plusvalor, o bién se determina por la razón compuesta entre el número de las fuerzas de trabajo por el mismo capitalista y el grado de explotación de cada fuerza individual de trabajo.

Por tanto, si denominamos P a la masa del plusvalor; p al plusvalor diariamente proporcionado, término medio por el obrero individual, v al capital variable adelantado por día para comprar cada fuerza de trabajo; V a la suma total del capital variable; f al valor de una fuerza de trabajo media; t´/t (plustrabajo/trabajo necesario) a su grado de explotación, y n al número de los obreros utilizados, tendremos entonces:

$$P = \begin{cases} \frac{p}{v} * V \\ f * \frac{t'}{t} * n'' \end{cases}$$

(El Capital Libro I, pp. 368-369)

Así, podemos representar nuestra primera ecuación de la asiguiente manera:

(1) $P = \dot{p} * V$

donde, P = masa de plusvalor por jornada laboral

$\dot{p}$ = tasa de plusvalor vigente

V = suma global del capital variable adelantado por jornada laboral.

Si ahora suponemos una determinada masa de plusvalor, la ecuación (1) se convierte en:

(2) $Po = \dot{p} * V$ o

(2') $\dot{p} = Po / V$

donde Po es una masa de plusvalor de magnitud dada.

Como es obvio, la ecuación (2') define la rama de una hipérbole equilátera cuyas asíntotas son los ejes del primer cuadrante del plano cartesiano.

Si consideramos a V como variable independiente y p variable dependiente, entonces la gráfica de la ecuación (2') sería como sigue.

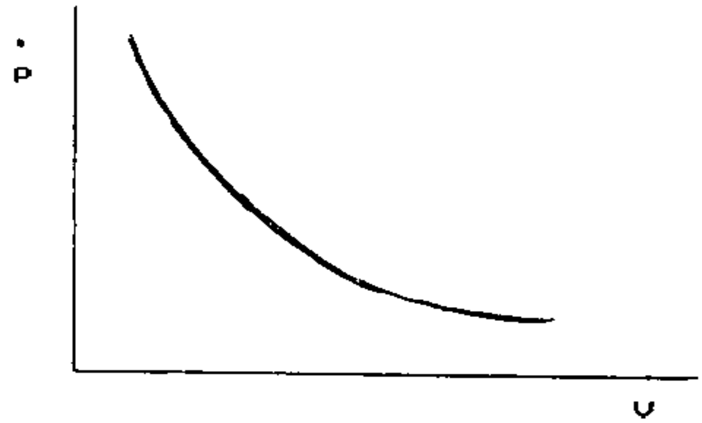


GRAFICO N.1

Como ejemplo, si suponemos que Po= $50, f= $1, n_1= 50, n_2= 100 y n_3= 200; entonces obtemos la siguiente representación gráfica (suavizada):

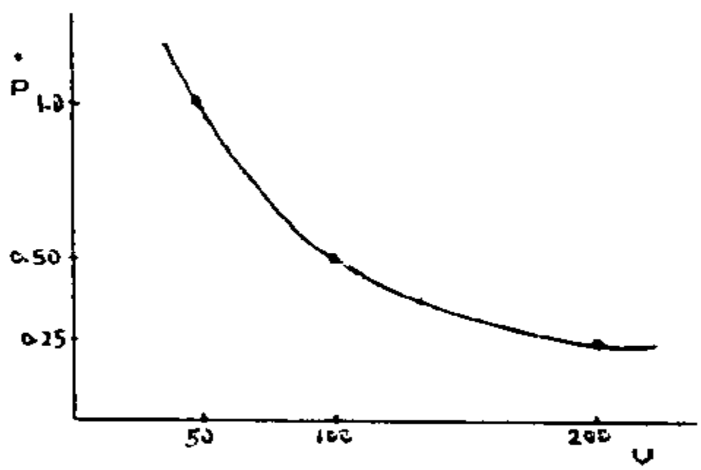


GRAFICO N.2

Además como la tasa de plusvalor ($\dot{p}$) y la tasa de plustrajo ($\dot{t}$) son escalares idénticos, y dado que

(3) $T = T'/ T$

donde T'= plustrabajo por jornada laboral (por unidad de fuerza de trabajo).
T = trabajo necesario por jornada laboral (por unidad de fuerza de trabajo).

Entonces, del gráfico nº. 2 y suponiendo que $T = To = 6$ horas de trabajo social podemos derivar el gráfico nº. 3.

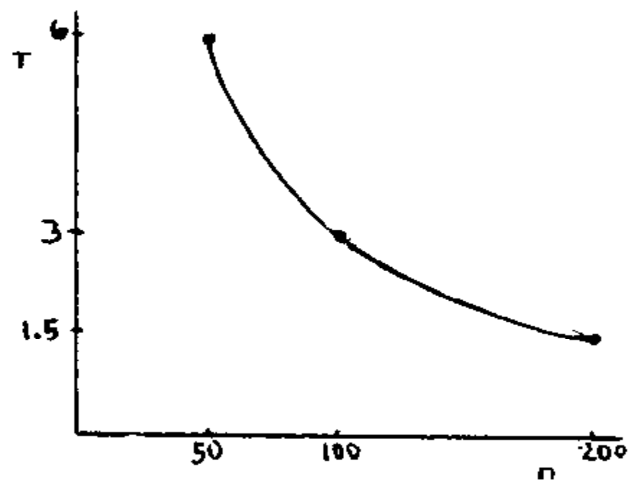


GRAFICO N. 3

donde Mo representa una masa de plustrabajo de 300 horas por jornada laboral.

Si además recordamos que la extensión de la jornada laboral (JL) se puede dividir en dos partes, a saber:
(4) $JL = T' + T$

Entonces podemos obtener el siguiente gráfico que relaciona las distintas combinaciones en la extensión de la jornada laboral y el número de unidades de fuerza de trabajo explotadas con las que podría obtenerse una misma masa de plusvalor de $50 (masa de plustrabajo de 300 horas) (*)

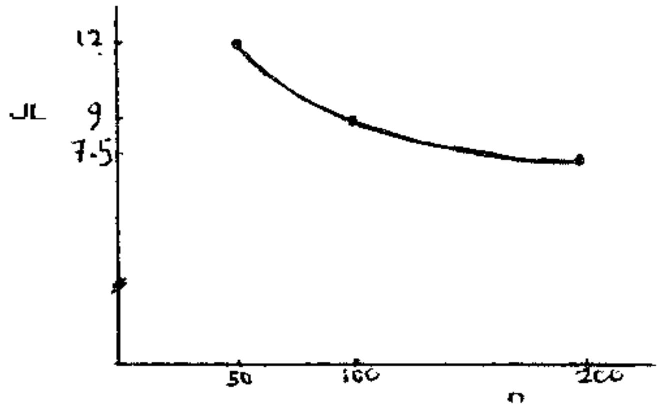


GRAFICO N.4

Como se desprende claramente de los gráficos 3 y 4, en condiciones inalteradas de productividad del trabajo (T=To) la única vía de reducir la extensión de la jornada loboral sin disminuir la masa de plusvalor y plustrabajo que se puede obtener en un periódo determinado de tiempo; es aumentando n, es decir, aumentando el volumen de la población asalariada de que dispone el capital, lo cual históricamente ha ocurrido en todos los procesos de acumulación originaria, cuando el capital debe operar sobre una base técnica dada (**).

Segunda ley:

> " El límite absoluto de la jornada laboral media, que por naturaleza será siempre de menos de 24 horas, constituye una barrera absoluta para compensar la reducción del capital variable aumentando la tasa del plusvalor, o la restricción

* A diferencia de los gráficos anteriores, el N.4 no representa una hipérbole.

** Desde luego, lo habitual es que durante estos períodos n y JL aumenten simultáneamente.

del número de obreros explotados aumentando el grado de explotación de la fuerza de trabajo" (ibid, p.340).

Regresemos a la ecuación (2´)

$$\dot{p} = Po / V$$

dicha ecuación satisface (es solución de) la ecuación diferencial de primer orden

$$(5) \quad V * \frac{d\dot{p}}{dV} + \dot{p} = 0$$

de modo que la elasticidad de la ecuación (2´) es constante e igual a 1 (en valor absoluto) a lo largo de toda la curva definida. Esto implica que cambios relativos en p deben ocurrir conjuntamente con cambios relativos en V de igual mangnitud, pero de signo contrario, para que nos mantengamos en una misma curva (masa de plusvalor de magnitud dada).

Así dentro de ciertos límites (como advierte Marx), es posible compensar (sustituir) disminuciones (aumentos) en $\dot{p}$ (y por tanto en T´y en JL) con aumentos (disminuciones) proporcionales en V, sin alterar la masa de plusvalor que se obtiene.

Interesa además observar la derivada de la ecuación (2´) la cual obviamente resulta:

$$(6) \quad \frac{d\dot{p}}{dV} = -\frac{Po}{V^2}$$

lo cual indica que disminuciones sucesivas en p de <u>igual magnitud</u> requieren aumentos en V de magnitud <u>creciente</u> a fin de mantener una misma masa de plusvalor.

Por ejemplo, partiendo de $\dot{p} = 1$ y $V = \$50$, tenemos para

Po= $50 las siguientes posibilidades:

$-\Delta\dot{p}$	$+\Delta V$	$(\Delta\dot{p}/\Delta V)$
0.1	5.5	0.0180
0.1	7.0	0.0140
0.1	8.9	0.0110
0.1	11.9	0.0084
0.1	16.7	0.0059

Este resultado no es advertido por Marx, pero tiene una importancia práctica significativa, pues indica que para un nivel dado de la fuerzas productivas del trabajo social, disminuciones en p (y en JL) que no impliquen disminuciones en P (la base de la acumulación) deben acompañarse por aumentos crecientes en V (y en n), es decir, tanto en la población asalariada como en la disponibilidad de capital-dinero.

Tercera ley:

> "Dados la tasa del plusvalor y el valor de la fuerza de trabajo, las masas del plusvalor producido estarán en relación directa a las magnitudes del capital variable adelantada" Ibid, p. 371

Podemos asumir esta "ley" como un teorema y representarla gráficamente como sigue:

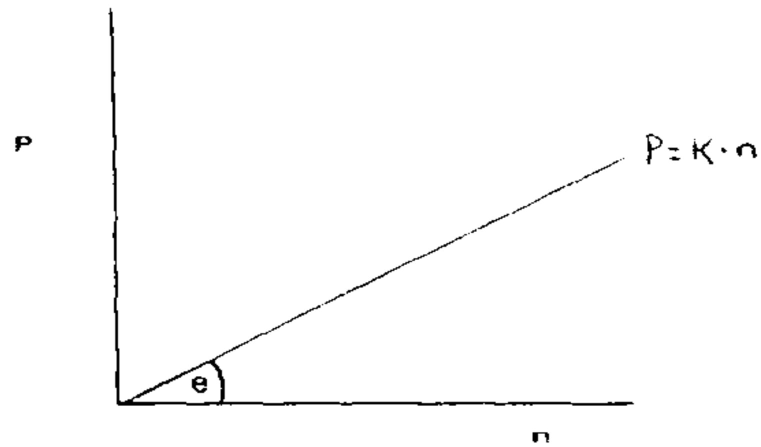


GRAFICO N.5

Donde $K = \dot{p} * f = \tan(\theta)$ (k es el plusvalor diario por unidad de fuerza de trabajo explotada).

Este teorema se cumple si y solamente si la siguiente igualdad es válida.

$$\frac{dP}{dn} = \frac{P}{n}$$

lo cual es obvio en este caso:

$$\frac{dP}{dn} = k\,\frac{dn}{dn} = \dot{p} * f = \frac{p}{v} * f = \frac{f}{v} * p = \frac{p}{n}$$

Además se cumple la siguiente condición

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta n}{n}$$

Para su demostración, partamos de la ecuación (1):

$$P = \dot{p} * V = \dot{p} * f * n$$

aplicando diferencias:

$$\Delta P = \dot{p} * f * \Delta n$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{v} * f * \Delta n$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta n}{n}$$

Es decir, en condiciones de productividad del trabajo constantes, la tasa de crecimiento temporal de P tiene como límite el valor de la tasa de crecimiento en la población asalariada, lo cual advierte claramente la necesidad del capital de reproducir a escala ampliada la transformación de la fuerza de trabajo en mercancía.

CONCLUSIONES

La economía es (o aspira a ser) una ciencia social que por su particular objeto de estudio permite y requiere la cuantificación de los procesos sociales en que centra su interés; y aunque probablemente se han cometido (y se siguen cometiendo) muchos abusos en ese campo, no podemos renunciar a una tarea que es requisito para el desarrollo de la teoría científica del capitalismo.

El propio Marx advirtió que la CRITICA DE LA ECONOMIA POLITICA incluye dentro de su espacio y preocupaciones teóricas, la formulación matemática de sus principales resultados, tarea en la que él mismo contribuyó en forma no despreciable.

No obstante, las "reformulaciones matemáticas" de Marx por parte de autores modernos, han pretendido o han tenido el efecto de sustituir el método dialéctico del autor de El Capital, por el método matemático, con lo cual se violenta y destruye la riqueza metodológica que el pensamiento dialéctico puede ofrecer.

He querido en este breve trabajo, ilustrar como es posible utilizar matemáticas elementales para formalizar importantes tesis marxianas, relacionadas en este caso con la teoría del plusvalor absoluto, quizás sea más prudente un esfuerzo de este tipo que pretender "matematizar El Capital"

LA PLUSVALIA
COMO CONDICION DE EQUILIBRIO
DEL MODELO DE REPRODUCCION AMPLIADA

César Solano*

RESUMEN

En el presente trabajo se introduce una condición de equilibrio sobre la Plusvalía (o la Fuerza de Trabajo) para analizar, con ayuda del control elaborado en Solano(1990a), el comportamiento del Modelo de Reproducción Ampliada de Marx,C.(1971). Utilizando la Teoría de Control, se logra dar una respuesta completa al problema de precisar la política más ventajosa a seguir para obtener crecimiento equilibrado, en dependencia de la situación incial de la Economía.

PROPIEDADES DEL CONTROL DE ACUMULACION

En todo lo que sigue se utilizan los conceptos e hipótesis dados en Solano(1990a). Se supone que la Economía está compuesta de dos sectores: el Sector de Bienes de Capital y el Sector de Bienes de Consumo. En términos de valor, el producto global de cada sector esta dado por $Y_1(t), Y_2(t)$. Además, se supone que tal producto puede descomponerse en Capital Constante $(C_1(t), C_2(t))$, Capital Variable $(V_1(t), V_2(t))$ y Plusvalía $(P_1(t), P_2(t))$. De otro modo:

(1) $$Y_i(t)=K_i(t)+V_i(t)+P_i(t), \quad i=1,2.$$

Además: $$K_i(t)=c_iY_i(t), \quad i=1,2$$
$$V_i(t)=v_iY_i(t), \quad i=1,2$$
$$P_i(t)=p_iY_i(t), \quad i=1,2$$

Se designa la Composición de Capital de cada sector por $k_i=c_i/v_i$, $i=1,2$ y la Tasa de Explotación, común a ambos sectores por $\varepsilon=p_i/v_i$, $i=1,2$. La relación entre las composiciones de capital se denota por $\delta=k_1/k_2$.

---

*Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica.

Al igual que en Stoleru,L.(1965) y Solano,C.(1990) se supone que se trata de una economía cerrada, sin nexos con el exterior; que la inversión de bienes de capital es inmediata y que no es posible intercambiar Bienes de Capital entre ambos sectores. No se toma en cuenta la depreciación. El símbolo $\mathring{x}(t)=dx/dt$, denota la derivada de la función correspondiente y Σa denota la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1}$.

Las ecuaciones de Acumulación de Capital adquieren la forma siguiente (Kurz,M.(1965), Stoleru,L.(1965), Morishima,M.(1977))

$$Y_1=K_1+\mathring{K}_1+K_2+\mathring{K}_2\geq 0,\ \ t\geq 0. \tag{2}$$

Además, se va a utilizar, ampliamente, el control introducido en Solano(1990a) dado por

$$u(t)=c_1\left[1+\frac{\alpha(t)p_1}{c_1+v_1}\right]=\frac{K_1+\mathring{K}_1}{K_1+\mathring{K}_1+K_2+\mathring{K}_2}=\frac{K_1+\mathring{K}_1}{Y_1},\ \ t\geq 0. \tag{3}$$

con la condición $0\leq\tilde{\alpha}\leq\alpha(t)\leq\alpha\leq 1$, $t\geq 0$, donde $\alpha(t)$ ocupa el lugar de la Tasa de Acumulación del Sector I y puede tener un número finito de discontinuidades. Siempre con el fin de facilitar el manejo de la simbología, se utilizará la notación

$v(\alpha(t))=\left[1+\frac{\alpha(t)p_1}{c_1+v_1}\right]$ para el factor de crecimiento de modo que $u(t)=c_1 v(\alpha(t))$. Y cuando los factores de crecimiento son constantes se escribe:

$v(\tilde{\alpha})=\left[1+\frac{\tilde{\alpha}p_1}{c_1+v_1}\right]$, $v(\alpha)=\left[1+\frac{\alpha p_1}{c_1+v_1}\right]$, de donde $c_1 v(\tilde{\alpha})\leq u(t)\leq c_1 v(\alpha)$.

Para continuar con el estudio del modelo se mantiene el cambio de variables:

$$(4)\qquad \begin{aligned} y(t)&=\frac{K_1(t)}{K_1(0)}e^{t},\ \ y(0)=1,\ \ t\geq 0.\\ z(t)&=\frac{K_2(t)}{K_1(0)}e^{t},\ \ z(0)=K_2(0)/K_1(0)=\sigma,\ \ t\geq 0. \end{aligned}$$

Con estas definiciones, se obtiene el siguiente sistema:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{\mathring{y}(t)}{y(t)}=\frac{K_1(t)+\mathring{K}_1(t)}{K_1(t)}=\frac{u(t)Y_1(t)}{K_1(t)}=\left[1+\frac{\alpha(t)s_1}{c_1+v_1}\right]=v(t),\ \ t\geq 0.\\ &\mathring{y}(t)=v(t)y(t),\\ &\mathring{z}(t)=(1-u(t))y(t)/c_1.\\ &c_1 v(\tilde{\alpha})\leq u(t)\leq c_1 v(\alpha). \end{aligned}$$

Entonces, las variables y,z están determinadas por la relación:

$$\mathring{y}(t)+\mathring{z}(t)=\frac{y(t)}{c_1},\ t\geq 0. \tag{6}$$

Ahora conviene analizar el Modelo de Reproducción Ampliada desde la perspectiva de la acumulación total de Plusvalía, suponiendo que tal proceso de acumulación responde a un comportamiento de crecimiento exponencial, según una Tasa (ν) fijada exógenamente.

Si se considera que la masa total de Plusvalía crece, a partir de cierto momento $T\geq 0$, según la tasa ν, se tiene la ecuación:

$$P_1(t)+P_2(t)=(P_1(0)+P_2(0))e^{\nu t},\ t\geq T. \tag{7}$$

donde $P_1(0)+P_2(0)$ indica la masa de Plusvalía con que cuenta la Economía en su momento inicial. Utilizando las relaciones (4), dicha ecuación puede expresarse en la forma:

$$y+\delta z=p_o e^{\gamma t},\ t\geq T. \tag{8}$$

Aquí $p_o=1+\pi$; $\pi=P_2(0)/P_1(0)$. Mientras $0\leq t<T$, se establece la condición de trayectoria:

$$y+\delta z\neq p_o e^{\gamma t}. \tag{9}$$

De este modo, (6) y (8) configuran el sistema

$$\begin{cases} \mathring{y}(t)+\mathring{z}(t)=\dfrac{y(t)}{c_1} \\ y+\delta z=p_o e^{\gamma t},\ t\geq T. \end{cases} \tag{10}$$

cuya solución está dada por

$$\begin{aligned} y(t)&=Ae^{\gamma t}+(y(T)-Ae^{\gamma T})e^{\zeta(t-T)},\ t\geq T \\ z(t)&=Be^{\gamma t}+(z(T)-Be^{\gamma T})e^{\zeta(t-T)},\ t\geq T \end{aligned} \tag{11}$$

donde $A=\dfrac{p_o c_1\gamma}{c_1\gamma+\delta(1-c_1\gamma)}$, $B=\dfrac{p_o(1-c_1\gamma)}{c_1\gamma+\delta(1-c_1\gamma)}$ y el signo de $\zeta=\dfrac{\delta}{c_1(\delta-1)}$ depende del hecho de que $\delta>1$ o $\delta<1$. En este caso sería adecuado suponer que $c_1\gamma<1$, para que A y B sean positivas, pero como se verá más adelante, dicha condición surge de modo bastante natural como resultado del método de acumulación empleado en el modelo. Por ahora conviene retener las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} &A/B=\sum c_1\gamma, \\ &\pi=\sigma\delta, \\ &A>1 \text{ si y solo si } \sigma>1/\sum c_1\gamma. \\ &A=1 \text{ si y solo si } \sigma=1/\sum c_1\gamma. \text{ En tal caso } B=\sigma. \end{aligned} \tag{12}$$

Por otra parte, si $\delta<1$, la solución (13) tiende a la solución de crecimiento balanceado dada por $y(t)=Ae^{\gamma t}$, $z(t)=Ae^{\gamma t}$, $t\geq 0$, resultado que es análogo al dado por Morishima(1977). Pero si

$\delta>1$, que es la situación analizada por Marx y que según su criterio es la que corresponde a una economía capitalista ya madura, no se logra crecimiento balanceado a menos que se alcance el objetivo dado por

$$(13)\qquad \begin{aligned} y(T)&=Ae^{\gamma T}\\ z(T)&=Be^{\gamma T}. \end{aligned}$$

En lo que sigue se estudiarán las condiciones que hacen posible alcanzar dicho objetivo, suponiendo desde luego, que prevalece en la economía un proceso de acumulación del tipo esbozado en la primera parte de este trabajo (Ver Solano(1990a)).

Antes conviene señalar que las ecuaciones (10) son equivalentes a las dadas por Stoleru(1965). En particular, es preciso decir que, dado que en la economía prevalece una tasa de explotación ε constante e igual para ambos sectores, $P_i(t)=\varepsilon V_i(t)$, $i=1,2$, la ecuación (7) es idéntica a $V_1(t)+V_2(t)=(V_1(0)+V_2(0))e^{\nu t}$, $t\geq T$, la cual a su vez dice que la tasa de crecimiento de la Fuerza de Trabajo empleada en la economía debe ser igual a la tasa de crecimiento de la Plusvalía.

En vista de que en este modelo la tasa de crecimiento de la economía está determinada, como se verá más adelante, por la tasa de crecimiento de la Plusvalía (o de la Fuerza de Trabajo), caben las siguientes palabras de Morishima(1977:132): "...la fuerza de trabajo puede expandirse a una tasa más elevada que la tasa máxima de crecimiento del capital, o al menos que la oferta de trabajo puede adaptarse rápida y flexiblemente a su demanda."

EL PROBLEMA DE TIEMPO MINIMAL

En cuanto al problema variacional de tiempo mínimo ligado al proceso comandado por (5), éste ya fue resuelto en Solano,C. (1990a). La ecuación característica toma la siguiente forma:

$$(14)\qquad \begin{aligned} &\mathring{x}(t)=-1, && x(0)=0,\\ &\mathring{y}(t)=v(t)y(t), && y(0)=1,\\ &\mathring{z}(t)=(1-u(t))y(t)/c_1, && z(0)=\sigma,\\ &c_1 v(\tilde{\alpha})\leq u(t)\leq c_1 v(\alpha). \end{aligned}$$

En resumen, se obtiene dos familias de controles, denominadas por

$$(15)\qquad C_1:\begin{cases} \bar{u}(t)=c_1 v(\alpha) & \text{cuando } 0\leq t<\tau,\\ \bar{u}(t)=c_1 v(\tilde{\alpha}) & \text{cuando } t>\tau. \end{cases}$$

$$C_2:\begin{cases} \bar{u}(t)=c_1 v(\tilde{\alpha}) & \text{cuando } 0\leq t<\tau,\\ \bar{u}(t)=c_1 v(\alpha) & \text{cuando } t>\tau. \end{cases}$$

que conforman el conjunto solución de la ecuación característica.

CONDICIONES TERMINALES

El propósito de esta sección consiste en mostrar:

1) Si $\sigma=1/\sum c_1\gamma$ entoces el punto de partida de la economía $(1,\sigma)$ se encuentra sobre el rayo de Von Neumann, de modo que hay crecimiento balanceado a partir de $T=0$, $\tau=0$.
2) Si $\sigma>\sum c_1\gamma$, entonces existe solamente un control, perteneneciente a la Familia C_1, que puede llevar al objetivo definido por (13).
3) Por el contrario, en caso de que $\sigma<\sum c_1\gamma$, el control debe debe pertenecer a la Familia C_2.

Las condiciones terminales para la familia C_1 quedan especificadas del siguiente modo (Solano(1990a)):

I FASE ($0\le t<\tau$): Según (7), $\mathring{y}=v(\alpha)y$, con lo cual se logra

$$y(t)=e^{v(\alpha)t};$$

$$z(t)=\sigma+(e^{v(\alpha)t}-1)/\sum c_1 v(\alpha).$$

II FASE ($\tau<t\le T$):

$$y(t)=y(\tau)e^{v(\tilde{\alpha})(t-\tau)};$$

$$z(t)=z(\tau)+y(\tau)(e^{v(\tilde{\alpha})(t-\tau)}-1)/\sum c_1 v(\tilde{\alpha}).$$

Si se utiliza un control de la Familia (C_1), los requisitos para alcanzar las condiciones terminales están dados por la posibilidad de resolver las ecuaciones:

$$(16)\qquad \begin{aligned} Ae^{\gamma T}&=e^{(v(\alpha)-v(\tilde{\alpha}))\tau+v(\tilde{\alpha})T}\\ Be^{\gamma T}&=\sigma+\left[\frac{Y(T)}{\sum c_1 v(\alpha)}-\frac{Z(T)}{\sum c_1 v(\alpha)}\right]+\\ &\quad+e^{v(\alpha)T}\left[\frac{1}{\sum c_1 v(\alpha)}-\frac{1}{\sum c_1 v(\alpha)}\right]. \end{aligned}$$

lo cual equivale a estudiar los ceros de la ecuación $\phi(T,\alpha,\tilde{\alpha},\gamma)=0$, donde:

$$\tau=(\ln A+(\gamma-v(\tilde{\alpha}))T)/(v(\alpha)-v(\tilde{\alpha}))$$

$$\phi(T,\alpha,\tilde{\alpha},\gamma)=M(T,\alpha,\gamma)+K(\alpha)+L(\alpha,\tilde{\alpha})*e^{N(T,\alpha,\tilde{\alpha},\gamma)},$$

$$M(T,\alpha,\gamma)=Ae^{\gamma T}\left[\frac{1}{\sum c_1 v(\alpha)}-\frac{1}{\sum c_1\gamma}\right]$$

(17) $$N(T,\alpha,\tilde{\alpha},\gamma)=\frac{v(\alpha)}{(v(\alpha)-v(\tilde{\alpha}))}\ (\ln A+(\gamma-v(\tilde{\alpha}))T)$$

$$K(\alpha)=\sigma-\frac{1}{\sum c_i v(\tilde{\alpha})}$$

$$L(\alpha,\tilde{\alpha})=\left[\frac{1}{\sum c_i v(\alpha)}-\frac{1}{\sum c_i v(\tilde{\alpha})}\right]$$

Conviene señalar que (16) se ha utilizado para obtener la expresión M(T) de modo tal que su signo va a depender de la relación entre $v(\tilde{\alpha})<\gamma<v(\alpha)$. Lo mismo puede decirse de N(T). Además, es esencial para el problema en discusión que $0\leq\tau\leq T$. Utilizando (16), se ve que esta condición se cumple siempre que

(18) $$(v(\alpha)-\gamma)T\geq\ln(A)\geq(v(\tilde{\alpha})-\gamma)T.$$

ESTUDIO DE $\phi(T,\alpha,\tilde{\alpha})=0$

Caso 1: $\sigma=1/\sum c_i\gamma$. En vista de (12), A=1 y el único valor que anula $\phi(T,\alpha,\tilde{\alpha},\gamma)$ está dado por T=0. De (17) se concluye que $\tau=0$. Esto se debe a que $(1,\sigma)$, el punto de partida de la economía, está situado sobre el rayo que pasa por el origen y el punto (A,B). Es decir, la economía se encuentra ya desde el inicio en equilibrio. En tal caso $y+\delta z=p_o e^{\gamma t}$, $t\geq0$. (Ver Gráfico de Fases I)

Caso 2: $\sigma>1/\sum c_i\gamma$. En este caso A>1 y se puede mostrar que la derivada de $\phi(T,\alpha,\tilde{\alpha},\gamma)$ se anula en $T_1=\ln(A)/(v(\alpha)-\gamma)$, $T_1>0$, que $\phi(T,\alpha,\tilde{\alpha},\gamma)$ decrece en $(-\infty.T_1)$, crece en $(T_1,+\infty)$ y que $\phi(T_1,\alpha,\tilde{\alpha},\gamma)<0$. Dado que $\lim_{T\to\infty}\phi(T,\alpha,\tilde{\alpha},\gamma)=+\infty$, existe $T_o>T_1$ tal que $\phi(T_o,\alpha,\tilde{\alpha},\gamma)=0$. Dicho cero cumple la exigencia (18) de modo que τ en (17) cumple la condición $0\leq\tau\leq T_o$. En tal situación $y+\delta z<p_o e^{\gamma t}$, $0\leq t<T$ y se satisface la condición de trayectoria. Conviene indicar además que $T_1\leq\tau\leq T$. (Ver Gráfico de Fases II).

Caso 3. $\sigma<1/\sum c_i\gamma$. Análogamente se puede mostrar que el mayor cero de $\phi(T,\alpha,\tilde{\alpha},\gamma)$ es negativo, así que no hay solución adecuada al modelo para este caso.

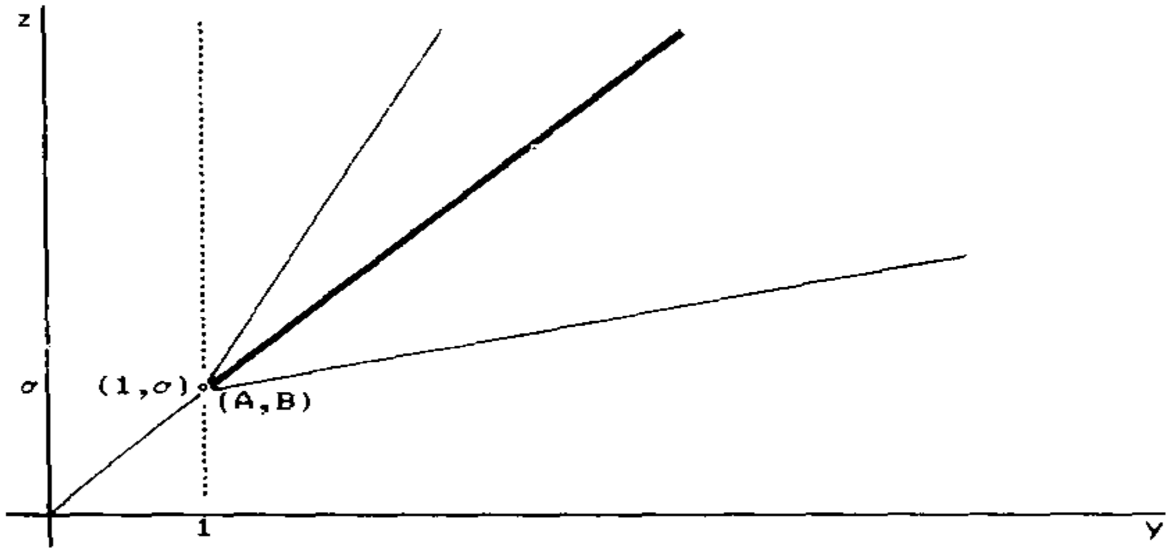


GRAFICO DE FASES I

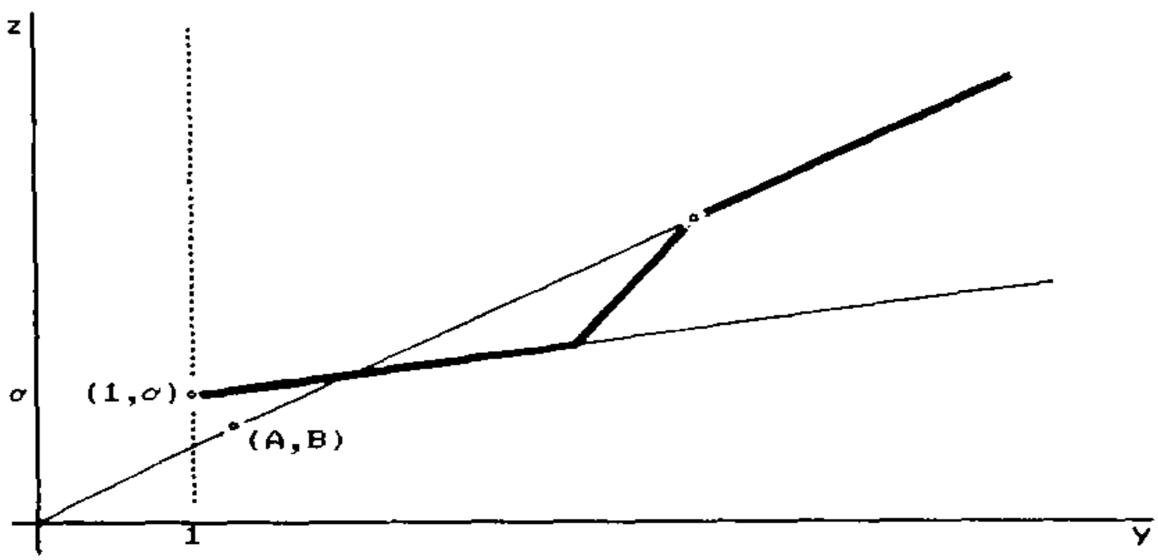


GRAFICO DE FASES II

Nota: El cono de origen $(1,\sigma)$ que aparece en cada uno de los gráficos de fase se ha denominado Cono de Acumulación o Cono de Marx-Von Neumann (Ver Solano,C.(1990a)) a fin de resaltar la íntima conexión entre los conceptos implícitos en el modelo planteado por C.Marx y los conceptos desarrollados por Von Neumann a propósito de los problemas del crecimiento (Ver Morishima,M.(1969).

Cabe destacar además, que la necesidad de los conceptos de la Teoría de Control aparecen en el momento en que se crea una diferenciación entre $(1,\sigma)$ y (A,B) (Ver supra caso 1.). Y tal y como se ha mostrado, solo bajo la condición $v(\tilde{\alpha})<\gamma<v(\alpha)$, o sea, solo dentro del Cono de Acumulación es posible resolver el problema de control aquí estudiado.

Por último, conviene señalar que $\lim\limits_{v(\alpha)\to\gamma} T_1=+\infty$, de modo que el tiempo necesario para alcanzar crecimiento equilibrado puede hacerse muy grande si el factor de acumulación no se diferencia mucho de la tasa de Crecimiento propuesto para la economía. De hecho, tal y como lo mostró la simulación efectuada en la computadora, existe una inestabilidad muy pronunciada en el modelo cuando $v(\alpha)\cong\gamma$, lo cual es típico en este tipo de modelos. (Cfr.Morishima(1973:76).

Ahora se considera un control de la Familia (C_2). Para alcanzar las condiciones terminales es preciso resolver ecuaciones análogas a (17).Es decir:

$$Ae^{\gamma T}=e^{(v(\tilde{\alpha})-v(\alpha))\tau+v(\alpha)T}$$

$$(19)\qquad Be^{\gamma T}=\sigma+\left[\frac{Y(T)}{\sum c_1 v(\alpha)}-\frac{Z(T)}{\sum c_1 v(\alpha)}\right]+$$

$$+e^{v(\alpha)T}\left[\frac{1}{\sum c_1 v(\alpha)}-\frac{1}{\sum c_1 v(\alpha)}\right].$$

o sea $\psi(T,\alpha,\tilde{\alpha},\gamma)=0$ donde $\psi(T,\alpha,\tilde{\alpha},\gamma)=\phi(T,\tilde{\alpha},\alpha,\gamma)$ (Simetría de las cotas $\alpha,\tilde{\alpha}$). El estudio de $\psi(T,\alpha,\tilde{\alpha},\gamma)=0$ se efectúa de modo completamente similar al realizado para $\phi(T,\alpha,\tilde{\alpha},\gamma)=0$ por cuanto se trata de un intercambio de los parámetros $\alpha,\tilde{\alpha}$. En este caso también se llega a la conclusión de que:

1) Si $\sigma=1/\sum c_1\gamma$, la única solución es $\bar{T}=0$, $\bar{\tau}=0$.

2) Si $\sigma>1/\sum c_1\gamma$, $\psi(T,\alpha,\tilde{\alpha},\gamma)$ no tiene solución positiva. En caso contrario, si $\sigma<1/\sum c_1\gamma$ se obtiene una solución positiva $\bar{T}_o$ para $\psi(T,\alpha,\tilde{\alpha},\gamma)=0$. En tal caso, $\bar{T}_o>\ln A/(v(\tilde{\alpha})-\gamma)>0$ dado que que $A<1$ y existe $\bar{\tau}$ que cumple $0\le\bar{\tau}\le\bar{T}_o$. Además, $y+\delta z>p_o e^{\gamma t}$, $0\le t<T$.

CONCLUSIONES:

1.- Los resultados obtenidos en este trabajo son de carácter general y en este sentido se diferencian de los dados por Stoleru(1965), pues este autor establece sus conclusiones con base en valores particulares de parámetros obtenidos para la economía de Algeria. De hecho, la posibilidad de dar una respuesta general al modelo descansó en buena parte en las relaciones (14). Mención particular merece la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(c_1\gamma)^{n+1}$, que viene a ser un caso particular de las series que aparecen en el modelo original de Marx (Ver Solano(1988)) y que formalmente representa el inverso de la pendiente del rayo de Von Neumann.

Un análisis muy completo de un modelo bisectorial puede verse en Kurz(1965), al cual debe hacérsele la misma observación que al trabajo de Stoleru(1965) en lo que se refiere al caracter del control que utilizan. En efecto, ambos consideran solamente controles que toman los valores u=1,0 lo cual lleva implícita una acumulación de capital *negativa* en cada uno de los sectores antes de alcanzar el equilibrio (Cfr. el gráfico de las producciones dado en Stoleru(1965:335)). Esto da como resultado un comportamiento de las producciones poco probable, al menos en condiciones que no sean de crisis.

2.- En segundo lugar conviene referirse al intento de Stoleru(1965) de identificar el concepto de "Pleno Empleo" con lo que, hechas las salvedades del caso, en Marx se denomina "Fuerza de Trabajo". En efecto, pleno empleo dice de la utilización máxima de los recursos humanos de que dispone la sociedad. Por el contrario, la Fuerza de Trabajo se refiere a las necesidades del Capital, las cuales, por norma general, andan por debajo de la población con capacidad de trabajar. En tal sentido, el índice de crecimiento de la Fuerza de Trabajo (ν) es menor que el índice de crecimiento de la población (n). Esta diferencia es preciso tenerla en cuenta, con mucho mayor razón, cuando se trata de modelar situaciones en países en vías de desarrollo, como es el caso de Algeria.

3.-Resulta interesante ver que con los parámetros que Marx(1971) utiliza, no se puede obtener crecimiento balanceado con la familia C_1, como cabría esperar, sino con la familia C_2, que privilegia primero al Sector de Bienes de Consumo y luego dirige la inversión hacia el Sector de Bienes de Capital.En efecto, con los valores utilizados por Marx(1977) y la Tasa de Crecimiento para la Plusvalía (o la Fuerza de Trabajo) dada por Stoleru(1965), se obtiene $\sigma<1/\sum(c_1\gamma)^{n+1}$, ($\sigma=.375<.4651=1/\sum(c_1\gamma)^{n+1}$, $\gamma=1.025$, $c_1=2/3$, $c_2=1/2$, $\varepsilon=1$, $Y_1(0)=6000$, $Y_2(0)=3000$), $\alpha=.3$, $\tilde{\alpha}=0$), de modo que solo es posible llegar al equilibrio con ayuda de la familia de controles C_2.

De todo esto se puede concluir que del modelo de C.Marx no se puede extraer ninguna conclusión en cuanto a la prioridad que debe asignársele a los sectores a la hora de considerar el mejor camino para invertir la Plusvalía acumulada. En cada caso es preciso hacer un análisis particular de la economía en estudio, a la hora de tomar las decisiones más adecuadas en materia de inversión.

BIBLIOGRAFIA

Kurz,M.(1965), *Optimal Paths of Capital Accumulation Under the Minimun Time Objective*, Econometrica, Vol.33, No.1.

Marx,K.(1971), *El Capital*, Fondo de Cultura Económica, México.

Morishima,M.(1969),

(1973), *Teoría del Crecimiento Económico*, *Tecnos*.

(1977), *La Teoría Económica de Marx*, Tecnos, España.

Pontriaguine,L.et al.(1974), *Theorie Mathematique des Processus Optimaux*, Editions MIR, Moscou.

Solano,C.(1987), *Modelo de Reproducción Ampliada de Marx con Tasa de Acumulación Variable*, Revista de Ciencias Económicas, Vol.VII, No.2.

(1988), *Modelo de Reproducción Ampliada de Marx con Composición Variable de Capital*, Revista de Ciencias Económicas, Vol.VIII, No.2.

(1990a) *El Modelo de Reproducción Ampliada Visto Como Proceso Optimal*, Revista de Ciencias Económicas, Vol X,No.2, 1990 (En prensa).

Stoleru,L.(1965), *An Optimal Policy for Economic Growth*, Econometrica, Vol.33, No.2.

Uzawa,H.(1961), *On a Two Sector Model of Economic Growth*, Review of Economic Studies, Vol.XXIX, October.

EL PROBLEMA DEL CONSUMO MINIMO EN EL MODELO DE REPRODUCCION AMPLIADA

César Solano*

RESUMEN

En este trabajo se establece las condiciones requeridas por el Modelo de Reproducción Ampliada de C.Marx(1971) cuando se introduce un criterio de Consumo Mínimo que impone cambios en el patrón de Acumulación. Se muestra que la senda que conduce al crecimiento equilibrado transcurre a la largo del Rayo de Von Neumann.

CARACTERISTICAS DEL PROCESO DE ACUMULACION SIN RESTRICCIONES

En un trabajo anterior (Solano,C.(1990b)) se muestra que la dinámica del Modelo de Reproducción Ampliada de Marx,C.(1971) conduce a un modelo de crecimiento bisectorial en el cual el patrón de Acumulación depende de la estructura del Capital inicial con que cuenta la Economía. A continuación se resume algunos resultados de dicho trabajo, necesarios para abordar dicho modelo cuando se impone ciertas restricciones al comportamiento del Sector II de la Economía.

Al igual que en Stoleru,L.(1965) y Solano,C.(1990a) se supone que se trata de una economía cerrada, sin nexos con el exterior; que la inversión de bienes de capital es inmediata y que no es posible intercambiar Bienes de Capital entre ambos sectores. No se toma en cuenta la depreciación. El símbolo $\mathring{x}(t)=dx/dt$, denota la derivada de la función correspondiente y el símbolo Σa indica la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1}$.

El Modelo de Reproducción Ampliada queda expresado en las guientes ecuaciones:

(1) $$Y_i(t)=K_i(t)+V_i(t)+P_i(t),\ i=1,2.$$

Donde Y_i denota el Producto Global, K_i el Capital, V_i el Capital Variable y P_i la Plusvalía, para cada uno de los sectores I y II. Además,

(2) $$K_i(t)=c_iY_i(t),\ i=1,2.$$
$$V_i(t)=v_iY_i(t),\ i=1,2.$$
$$P_i(t)=p_iY_i(t),\ i=1,2.$$

En adelante $k_i=c_i/v_i$ designarán la composición de Capital de y $\varepsilon=p_i/v_i$ la Tasa de Explotación de ambos sectores y $\delta=k_1/k_2$. Por otra parte, mediante las sustituciones

---

*Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica.

$$y(t)=\frac{K_1(t)}{K_1(0)}\,e^{t},\; y(0)=1,\; t\geq 0.$$
(2)
$$z(t)=\frac{K_2(t)}{K_1(0)}\,e^{t},\; z(0)=K_2(0)/K_1(0)=\sigma,\; t\geq 0.$$

aplicadas a las ecuaciones de Acumulación de Capital (Morishima (1977), Stoleruy,L.(1965), Kurz,M.(1965)):

(3) $$Y=\mathring{K}_1+\mathring{K}_1+\mathring{K}_2+\mathring{K}_2\geq 0,\quad t\geq 0,$$

se obtiene el sistema siguiente:

$$\mathring{y}(t)=v(t)y(t),$$
(4)
$$\mathring{z}(t)=(1-u(t))y(t)/c_1.$$
$$c_1v(\tilde{\alpha})\leq u(t)\leq c_1v(\alpha).$$

Aquí $u(t)$ designa el control de acumulación que resulta del Modelo original de C.Marx (Solano,C.(1990a)). De hecho, dicho control tiene la siguiente forma:

$u(t)=c_1\left[1+\dfrac{\alpha(t)p_1}{c_1+v_1}\right]$, $t\geq 0$, donde $\alpha(t)$ ocupa el lugar de la Tasa de Acumulación del Sector I y puede tener un número finito de discontinuidades y está acotado de modo que $0\leq\tilde{\alpha}\leq\alpha(t)\leq\alpha\leq 1$, $t\geq 0$. A esto se agrega la condición de crecimiento de la Plusvalía (o de la Fuerza de Trabajo),

(5) $$P_1(t)+P_2(t)=(P_1(0)+P_2(0))e^{\nu t},\; t\geq T$$

con lo cual se llega a las ecuaciones de equilibrio

(6) $$\begin{cases}\mathring{y}(t)+\mathring{z}(t)=\dfrac{y(t)}{c_1}\\ y+\delta z=p_o e^{\gamma t},\; t\geq T\end{cases}$$

La solución de este sistema está dada por

$$y(t)=Ae^{\gamma t}+(y(T)-Ae^{\gamma T})e^{\zeta(t-T)},\; t\geq T$$
(7)
$$z(t)=Be^{\gamma t}+(z(T)-Be^{\gamma T})e^{\zeta(t-T)},\; t\geq T$$

donde $A=\dfrac{p_oc_1\gamma}{c_1\gamma+\delta(1-c_1\gamma)}$, $B=\dfrac{p_o(1-c_1\gamma)}{c_1\gamma+\delta(1-c_1\gamma)}$.

Aquí $p_o=1+\pi$; $\pi=P_2(0)/P_1(0)$. En nuestro caso, interesa el estudio del modelo bajo la condición $\delta>1$. Además, mientras $0\leq t<T$, se establece la condición de trayectoria:

(8) $$y+\delta z\neq p_o e^{\gamma t}$$

Siempre con el fin de facilitar el manejo de la simbología, se utilizará la notación

$v(\alpha(t))=\left[1+\dfrac{\alpha(t)p_1}{c_1+v_1}\right]$, para el factor de crecimiento de modo que el control queda expresado por $u(t)=c_1v(\alpha(t))$. Y cuando los factores de crecimiento son constantes se escribe:

$$v(\tilde{\alpha})=\left[1+\frac{\tilde{\alpha}p_1}{c_1+v_1}\right],\quad v(\alpha)=\left[1+\frac{\alpha p_1}{c_1+v_1}\right],\text{ de donde } c_1v(\tilde{\alpha})\le u(t)\le c_1v(\alpha).$$

En resumen, se obtiene dos familias de controles, denominadas

$$C_1:\begin{cases}\bar{u}(t)=c_1v(\alpha) & \text{cuando } 0\le t<\tau,\\ \bar{u}(t)=c_1v(\tilde{\alpha}) & \text{cuando } t>\tau.\end{cases}$$

(9)

$$C_2:\begin{cases}\bar{u}(t)=c_1v(\tilde{\alpha}) & \text{cuando } 0\le t<\tau,\\ \bar{u}(t)=c_1v(\alpha) & \text{cuando } t>\tau.\end{cases}$$

que conforman el conjunto solución de la ecuación característica y se ofrece los siguientes resultados:

$$A/B=\sum c_1\gamma,$$

$$\pi=\sigma\delta,$$

(10) $A>1$ si y solo si $\sigma>1/\sum c_1\gamma$.

$A=1$ si y solo si $\sigma=1/\sum c_1\gamma$. En este caso $B=\sigma$.

A esto se agrega las siguientes proposiciones:

I) Si $\sigma=1/\sum c_1\gamma$ entoces el punto de partida de la economía $(1,\sigma)$ se encuentra sobre el rayo de Von Neumann, de modo que hay crecimiento balanceado a partir de $T=0$, $\tau=0$.

II) Si $\sigma>\sum c_1\gamma$, entonces existe solamente un control, perteneciente a la Familia C_1, que puede llevar al objetivo definido por (15).

III)Por el contrario, en caso de que $\sigma<\sum c_1\gamma$, el control debe pertenecer a la Familia C_2.

Las condiciones terminales para la familia C_1 quedan especificadas del siguiente modo (Solano(1990a)):

I FASE: $(0\le t<\tau)$: $\quad y(t)=e^{v(\alpha)t}$

$$z(t)=\sigma+(e^{v(\alpha)t}-1)/\sum c_1v(\alpha).$$

II FASE: $(\tau<t\le T)$: $\quad y(t)=y(\tau)e^{v(\tilde{\alpha})(t-\tau)};$

$$z(t)=z(\tau)+y(\tau)(e^{v(\tilde{\alpha})(t-\tau)}-1)/\sum c_1v(\tilde{\alpha}).$$

EL PROBLEMA DEL CONSUMO MINIMO

Ahora se va a considerar aquella situación matemática que surge cuando se establece una condición sobre el mínimo consumo que es aceptable para la economía en estudio.

Se supone que la Fuerza de Trabajo está expresada por la relación

(11) $$V_1(t)+V_2(t)=(V_1(0)+V_2(0))e^{\nu t},\quad t\ge 0,$$

la cual proviene de la condición (5) sobre la Plusvalía y el hecho de que la Tasa de Explotación es constante.

Si se considera el cociente entre el incremento relativo de la producción del Sector II y el incremento relativo de la Fuerza de Trabajo, se obtiene una relación que indica el "Consumo per Capita". En efecto, utilizando las relaciones (3) y (11) se llega a

$$\frac{Y_2(t)/Y_2(0)}{e^{\nu t}} = \frac{z}{\sigma e^{\gamma t}}, \quad t\geq 0. \tag{12}$$

Se puede establecer un consumo mínimo mediante la condición

$$z\geq \sigma m e^{\gamma t}, \quad t\geq 0. \tag{13}$$

De este modo se ha establecido una condición sobre la fase z del problema de control optimal, y se trata de establecer las condiciones que permiten resolver el problema optimal de tiempo mínimo.

En lo que sigue se va a considerar las dos situaciones que corresponden a $\sigma=\sum c_1\gamma$, y a $\sigma>\sum c_1\gamma$.

1.Caso: $\sigma=\sum c_1\gamma$. Cuando la economía en estudio se encuentra en el momento inicial con dicha estructura de Capital ($\sigma=K_2(0)/K_1(0)$) entonces se sabe que la economía se encuentra en equilibrio puesto que σ pertenece al Rayo de Von Neumann (Solano,C.(1990b)), por lo cual, en (9) se tiene $A=1$, $B=\sigma$, $y(t)=e^{\gamma t}$, $z(t)=\sigma e^{\gamma t}$, $t\geq 0$. En tal caso, $z(t)\geq m$ bajo la sola condición $0\leq m\leq 1$. Dicho de otro modo, la estructura de capital garantiza, desde el inicio, el logro de un consumo mínimo, de cualquier nivel ($0\leq m\leq 1$), de la Fuerza de Trabajo.

2.Caso: $\sigma=\sum c_1\gamma$. Esta situación requiere una mayor elaboración para ser debidamente respondida. Para eso se seguirá utilizando la metodología propuesta por Stoleru(1965) y los métodos de Teoría de Control tal y como se desarrollan en Pontryaguin et al.(1972).

Para ello conviene retener que $A>1$, $\sigma>B$, a causa de (10).

Además, se sabe que la familia de controles que conduce a la situación de crecimiento balanceado, cuando no hay restricciones sobre las coordenadas de fase, esta dada por C_1.

Es por eso que se va a trabajar con dicha familia de controles. Este hecho simplifica en gran medida las cosas, al menos en comparación con el trabajo de Stoleru, dado que en nuestro caso se dispone de una única familia de controles a considerar.

En efecto, sea $u(t)$ un control extremal de la familia C_1. Tal control es del tipo

$$u(t)=\begin{cases} c_1 v(\alpha) & \text{si } 0\leq t<\tau \\ c_1 v(\tilde{\alpha}) & \text{si } t>\tau \end{cases} \tag{14}$$

En tal caso, y,z adquieren la siguiente forma según la fase correspondiente:

I FASE: $(0\leq t<\tau)$: $\quad y(t)=e^{v(\alpha)t}$

$$z(t)=\sigma+(e^{v(\alpha)t}-1)/\sum c_1 v(\alpha).$$

II FASE: $(\tau<t\leq T)$: $\quad y(t)=y(\tau)e^{v(\tilde{\alpha})(t-\tau)}$,

$$z(t)=z(\tau)+y(\tau)(e^{v(\tilde{\alpha})(t-\tau)}-1)/\Sigma c_1 v(\hat{\alpha}).$$

En esta situación el problema consiste en escoger un control optimal de tal naturaleza que la trayectoria correspondiente pertenezca al conjunto $S=\{(z,t)/z\geq\sigma m e^{\gamma t}\}$, $S\subseteq Z\times T$. En vista de que S es cerrado, es preciso considerar las condiciones de salto establecidas para este tipo de situaciones (Pontryaguin et al.(1972:VI).

En primer lugar, es preciso que $B\geq\sigma m$ para que tenga sentido la condición terminal:

(15) $$Be^{\gamma T}\geq\sigma m e^{\gamma T},\ 0\leq\tau\leq T.$$

En vista de que en este caso $\sigma>B$, el problema tiene sentido solo si $1>m$.

Por otra parte, dada la continuidad de y,z, a partir de t=0, y durante algún tiempo $0\leq t<\tau$, (z,t) pertenece al interior del conjunto S. Es decir, $z>\sigma m e^{\gamma t}$.

Supóngase ahora que en $t=\tau$, $z(\tau)=\sigma m e^{\gamma\tau}$. Para esto es preciso que tenga solución la ecuación:

(16) $$f(t)=\sigma+(e^{v(\alpha)t}-1)/\Sigma c_1 v(\alpha)-\sigma m e^{\gamma t}=0,\ t>0.$$

Se puede mostrar que f tiene un mínimo en

(17) $$t_o=\ln\left[\frac{\sigma\gamma m\Sigma c_1 v(\alpha)}{v(\alpha)}\right]/(v(\alpha)-\gamma).$$

Además, como $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=+\infty$ y $f(t_o)<0$ si $1>m\geq m_o$ donde

(18) $$m_o=\frac{v(\alpha)}{\gamma\sigma\Sigma c_1 v(\alpha)}\left[\frac{\gamma\sigma\Sigma c_1 v(\alpha)-\gamma}{v(\alpha)-\gamma}\right]^{(v(\alpha)-\gamma)/v(\alpha)}$$

se puede concluir que bajo dichas condiciones existe $\tau>0$, $\tau<t_o$, en el cual $z(\tau)=\sigma m e^{\gamma\tau}$. Es inmediato que, cuando $m<m_o$, sencillamente no hay restricción sobre la coordenada de fase y el control optimal pertenece a la familia C_1. Y cuando $m=m_o$, el instante τ en el cual la coordenada de fase llega al borde de S, coincide con el instante en el cual el control de C_1 cambia de valor.

Ahora es preciso establecer la condición necesaria para que exista un punto de salto, y luego se va a demostrar que en caso de haber alguno, necesariamente debe darse cuando un control de la familia C_1 cambia de valor.

Una condición necesaria para que exista un punto de salto en el instante τ es que los puntos $(z(u(t),t)$ pertenezcan a S para los valores $\tau<t<\tau+\epsilon$, donde ϵ es cualquier numero arbitrariamente pequeño y donde u(t) es un control optimal que conduce la trayectoria de z al borde S. En nuestro caso, la condición de salto está dada por:

$$(19)\qquad \tau\geq \ln\left[\frac{\sigma\gamma m\Sigma c_1 v(\tilde{\alpha})}{v(\tilde{\alpha})}\right]/(v(\alpha)-\gamma)=t_1.$$

En efecto, si se considera un control de la familia C_1 y se utiliza la representación que le corresponde a z para la II Fase, es preciso que

$$z(u(\tau+\varepsilon))=z(\tau)+y(\tau)\left[\frac{e^{v(\tilde{\alpha})\varepsilon}-1}{\Sigma c_1 v(\tilde{\alpha})}\right]\geq\sigma m e^{\gamma(\tau+\varepsilon)}.$$

En vista de que ε es arbitrariamente pequeño, se puede utilizar el desarrollo limitado de $e^x=1+x$. De este modo se llega a la la expresión $\dfrac{v(\tilde{\alpha})e^{v(\alpha)\tau}}{\Sigma c_1 v(\tilde{\alpha})}\geq\sigma\gamma m e^{\gamma\tau}$ de la cual se obtiene (18).

De este modo, la condición de salto está dada por $t_0<\tau<t_1$ en (17) y (19), bajo la única condicion $v(\tilde{\alpha})<v(\alpha)$, la cual es consustancial al modelo.

Ahora bien, para que en el instante τ exista un punto de salto es preciso que haya un cambio de valor del control $u(t)$ perteneciente a la familia C_1 y que conduzca la trayectoria al borde de S. Pero cualquier control de C_1 siempre hace que $z(t)$ interseque la función $\sigma m e^{\gamma t}$, dado que $z(t)$ esta compuesto de trayectorias exponenciales del tipo $e^{v(\alpha)t}$, $v(\alpha)>\gamma$. Ademas, dicha intersección no es tangencial, de modo que solo es posible obtener un punto de salto si en τ existe un cambio de valor del control $u(t)$. Por otra parte, solo puede haber un único punto de salto dada la naturaleza de los controles de C_1.

Luego,

$$u(t)=c_1 v(\alpha) \text{ si } 0\leq t<\tau$$

$$u(t)=c_1 v(\tilde{\alpha}) \text{ si } t>\tau$$

$$y(u(\tau))=e^{v(\alpha)\tau}$$

$$z(u(\tau))=\sigma m e^{\gamma\tau}=\sigma+(e^{v(\alpha)\tau}-1)/\Sigma c_1 v(\alpha).$$

Con estos elementos, se puede mostrar la siguiente proposición análoga a la dada por Stoleru,L.(1965).

Proposición: Un control optimal para el problema del consumo mínimo pertenece al conjunto de controles Γ definidos del siguiente modo:

$$(20)\qquad u(t)=\begin{cases} c_1 v(\alpha) \text{ si } 0\leq t<\tau \\ \phi(t) \text{ si } \tau\leq t\leq\theta, \\ c_1 v(\tilde{\alpha}) \text{ si } \theta<t\leq T\end{cases}$$

donde τ es la solución de la ecuación (16) y donde ϕ es el control que mantiene la trayectoria $z(t)$ sobre el borde de S.

Prueba: Si $\theta\geq\tau$, los controles $u(t)=c_1 v(\tilde{\alpha})$ hacen que las trayectorias de $z(t)$, $t>\tau$, estén formadas por componentes exponenciales del tipo $e^{v(\tilde{\alpha})t}$, las cuales no intersecan $e^{\gamma t}$, a causa de $v(\tilde{\alpha})<\gamma<v(\alpha)$. Por lo tanto, ningún control de C_1 puede llevar la trayectoria de z(t) de regreso al conjunto S.

Ahora conviene estudiar el comportamiento que induce un control de Γ sobre las coordenadas de fase y,z. Como se puede ver, de (20) se puede construir, formalmente, las expresiones para y,z en las fases I y III:

I FASE: $(0\le t<\tau)$:
$$y(t)=e^{v(\alpha)t}$$
$$z(t)=\sigma+(e^{v(\alpha)t}-1)/\sum c_1 v(\alpha).$$

III FASE: $(\theta\le t\le T)$:
$$y(t)=y(\theta)e^{v(\tilde{\alpha})(t-\theta)};$$
$$z(t)=z(\theta)+y(\theta)(e^{v(\tilde{\alpha})(t-\theta)}-1)/\sum c_1 v(\tilde{\alpha}).$$

Solo falta estudiar el eventual comportamiento de y,z en la II Fase $(\tau<t<\theta)$. En esta fase, $u(t)=\phi(t)$ debe ser el control que mantenga la trayectoria de z(t) en el borde $\bar{S}$. Por lo tanto las condiciones deben ser

$$\begin{aligned} & z(t)=\sigma m e^{\gamma t}, && \tau<t<\theta. \\ (21)\qquad & \mathring{y}(t)=\phi(t)y(t)/c_1, && y(\tau)=e^{v(\alpha)\tau} \\ & \mathring{z}(t)=(1-\phi(t))y(t)/c_1, && z(\tau)=\sigma m e^{\gamma\tau} \end{aligned}$$

En este punto se puede utilizar la ecuación diferencial de segundo orden de Stoleru,L.(1965):

$$(22)\qquad \frac{\ddot{z}}{\mathring{z}} = -\frac{\mathring{\phi}}{1-\phi}+\frac{\mathring{y}}{y}=\gamma,\quad \tau<t<\theta$$

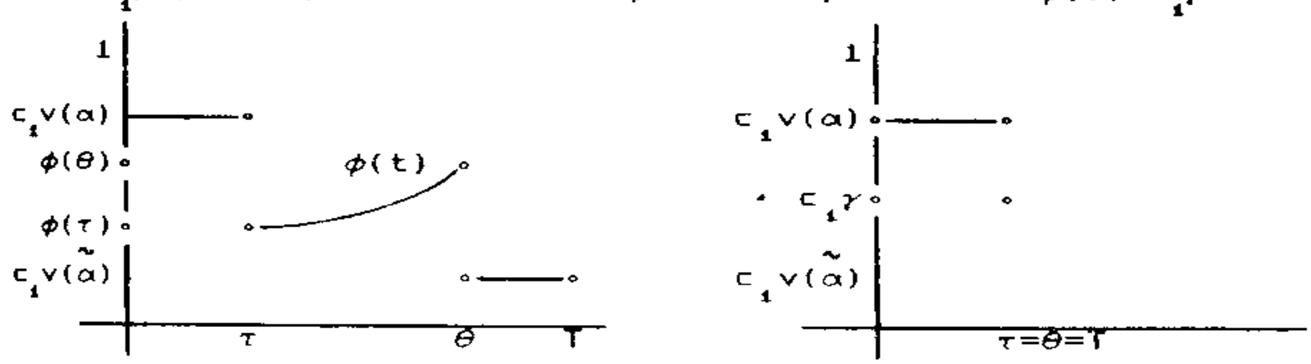
la cual conduce, en nuestro caso, debido a (20), a la ecuación

$$(23)\qquad \frac{c_1\mathring{\phi}}{(1-\phi)(\phi-c_1\gamma)}=1 \quad \text{con } 1-\phi(\tau)=c_1\gamma\sigma m e^{-(v(\alpha)-\gamma)\tau}$$

Utilizando separación de variables la solución está dada por

$$(24)\qquad \phi(t)=\frac{c_1\gamma+Ce^{\gamma(t-\tau)/\Sigma c_1\gamma}}{1+Ce^{\gamma(t-\tau)/\Sigma c_1\gamma}},\quad C=\frac{\phi(\tau)-c_1\gamma}{1-\phi(\tau)}$$
$$\phi(\tau)=1-c_1\gamma\sigma m e^{-(v(\alpha)-\gamma)\tau}.$$

Conviene señalar que $C\ge 0$ si y solo si $e^{(v(\alpha)-\gamma)\tau}\ge\sigma m\Sigma c_1\gamma$. En tal caso $c_1\gamma\le\phi(t)<1$, $\tau<t<\theta$. Además, C=0 si y solo si $\phi(\tau)=c_1\gamma$.



Con ayuda de este control, se puede construir y,z para la II

Fase. En efecto:

$$(25)\qquad \begin{aligned} y(t)&=e^{\gamma t+(v(\alpha)-\gamma)\tau}\left[\frac{1+Ce^{\gamma(t-\tau)/\Sigma c_1\gamma}}{1+C}\right],\ \tau\le t\le\theta.\\ z(t)&=\sigma m e^{\gamma t},\ \tau\le t\le\theta.\end{aligned}$$

Ahora es posible, con la ayuda de las expresiones correspondientes a las tres fases, plantear las condiciones terminales del problema de control:

$$(26)\qquad \begin{aligned} Ae^{\gamma T}&=y(\theta)e^{v(\tilde{\alpha})(T-\theta)},\ T\ge\theta.\\ Be^{\gamma T}&=\sigma m e^{\gamma\theta}+y(\theta)(e^{v(\tilde{\alpha})(T-\theta)}-1)/\Sigma c_1 v(\tilde{\alpha}),\ T\ge\theta.\end{aligned}$$

Haciendo las sustituciones apropiadas y utilizando la relación (25), el problema se reduce al estudio de la ecuación en $T-\theta$ dada por:

$$(27)\qquad e^{\gamma\theta}\left[Ae^{\gamma(T-\theta)}\left[\frac{1}{\Sigma c_1\gamma}-\frac{1}{\Sigma c_1 v(\tilde{\alpha})}\right]-\sigma m+\frac{Ae^{(\gamma-v(\tilde{\alpha}))(T-\theta)}}{\Sigma c_1 v(\tilde{\alpha})}\right]=0$$

En efecto, mediante la sustitución $s=T-\theta$ aparece la función g dada por

$g(s)=Ae^{\gamma s}\left[\frac{1}{\Sigma c_1\gamma}-\frac{1}{\Sigma c_1 v(\tilde{\alpha})}\right]-\sigma m+\frac{Ae^{(\gamma-v(\tilde{\alpha}))s}}{\Sigma c_1 v(\tilde{\alpha})}$. Esta función tiene un máximo en $s_o=\ln(1-c_1 v(\tilde{\alpha}))/v(\tilde{\alpha})$, $s_o<0$, crece en el intérvalo $]-\infty,s_o[$, decrece en el intervalo $]s_o,+\infty[$ y $\lim_{t\to\infty} g(t)=-\infty$. Además, $g(s_o)>0$ si y solo si $A/c_1\gamma>\sigma m$. Pero esta última condición se satisface dado que $A/c_1\gamma>A/\Sigma c_1\gamma^{n+1}=B\ge\sigma m$. Más aún, $f(0)=0$ si y solo si $B=\sigma m$, lo cual nos dice cuando $T=\theta$. En todos los demás casos, g posee un cero s positivo, de modo que $s=T-\theta>0$, lo cual está en todo de acuerdo con los resultados esperados. En vista de que $T=\theta+s$, se puede hacer una sustitución en (24), con lo cual se obtiene la relación entre τ y θ:

$$(27)\qquad \theta=\tau+(1/\gamma)\Sigma c_1\gamma*\ln\left[\frac{Ae^{(\gamma-v(\alpha))s}-\sigma m\Sigma(c_1\gamma)^{n+1}}{e^{(v(\alpha)-\gamma)\tau}-\sigma m\Sigma(c_1\gamma)^{n+1}}\right].$$

Es inmediato que $\theta\ge\tau$ si y solo si $Ae^{(\gamma-v(\alpha))s}\ge e^{(v(\alpha)-\gamma)\tau}$. De este modo, las coordenadas de fase y,z quedan resumidas así para las tres fases:

I FASE: $(0\le t<\tau)$:

$$\begin{aligned} y(t)&=e^{v(\alpha)t}\\ z(t)&=\sigma+\left[e^{v(\alpha)t}-1\right]/\Sigma c_1 v(\alpha).\end{aligned}$$

II FASE $(\tau<t<\theta)$:

$$\begin{aligned} y(t)&=\sigma m\Sigma c_1\gamma*e^{\gamma t}\left[1+\left[e^{(v(\alpha)-\gamma)\tau}-\sigma m\Sigma c_1\gamma\right]\frac{e^{(t-\tau)\gamma/\Sigma c_1\gamma}}{\sigma m\Sigma c_1\gamma}\right]\\ z(t)&=\sigma m e^{\gamma t}\end{aligned}$$

$$y(t)=Ae^{(\gamma-v(\tilde{\alpha}))(\theta+s)+v(\tilde{\alpha})t}$$

$$z(t)=\sigma m e^{\gamma\theta}+Ae^{\gamma\theta}\ e^{(\gamma-v(\tilde{\alpha}))s}\left[e^{v(\tilde{\alpha})(t-\theta)}-1\right]/\Sigma c_1 v(\tilde{\alpha})$$

Las trayectorias dadas por y,z se pueden representar en un gráfico de fases. De hecho, tal y como se muestra en Solano,C. (1990a,b), las trayectorias de los puntos (y,z) corren a lo largo de los rayos del Cono de Acumulación en las fases I y III. Pero también es posible dar la correspondiente trayectoria para la II Fase. Utilizando la expresión (25) para la II Fase de z en la expresión de y, junto con el valor de θ dado por (27), se puede mostrar que y queda como función de z:

$$(28)\qquad y(z)=z\Sigma c_1\gamma\left[1+D\left[z/\sigma m\right]^{1/\Sigma c_1\gamma}\right],\quad D=Ce^{-\gamma\tau/\Sigma c_1\gamma}.$$

Además, y es creciente y cóncava hacia arriba en términos de z. (Ver Diagrama de Fases II).

Por último, resulta interesante ver que existe un nivel de consumo para el cual el tiempo necesario para llegar al equilibrio es menor que el tiempo normalmente utilizado por la trayectoria sin restricciones.

El asunto consiste en observar que la curva dada por (28) degenera en el rayo de Von Neumann cuando $B=\sigma m$. En tal caso, $s=T-\theta=0$ en (27), $A=e^{((v(\alpha)-\gamma)\tau}=\sigma m\Sigma c_1\gamma$, de modo que $C=0$ y $\phi(\tau)=c_1\gamma$ (Ver el gráfico del control). Entonces $y=z\Sigma c_1\gamma$, la cual es la ecuación del rayo de Von Neumann. De hecho, $y(\tau)=e^{v(\alpha)\tau}=Ae^{\gamma\tau}$, $z(\tau)=Be^{\gamma\tau}$, $\tau=\theta=T$. Por último, $\tau=\ln A/(v(\alpha)-\gamma)$. Dicho valor de τ es estrictamente menor que el instante en el cual debe cambiar de valor un control de la familia C_1 en el modelo sin restricciones al consumo (Ver Solano,C.(1990b)). Queda pues de manifiesto que el Modelo de Reproducción Ampliada con Consumo Mínimo contiene un control que hace un "salto" hacia la trayectoria de crecimiento equilibrado que no permite el modelo sin restricciones.

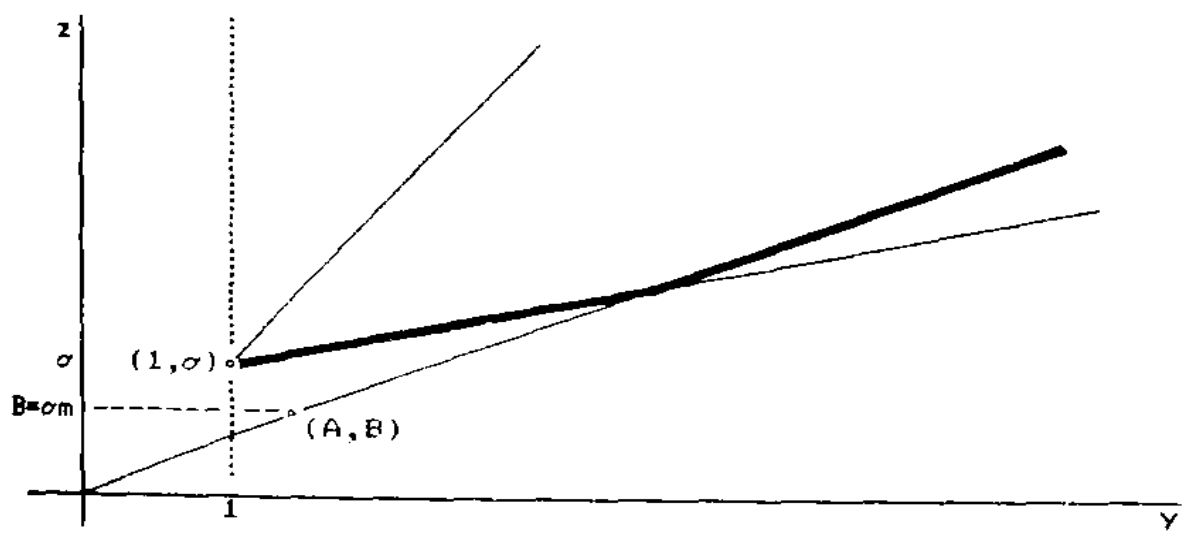


DIAGRAMA DE FASES I

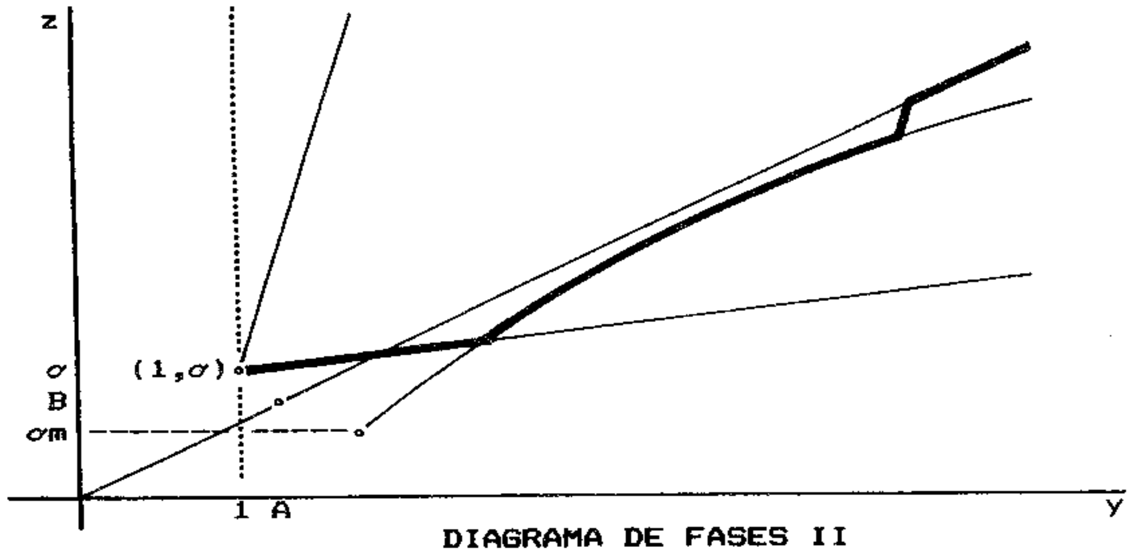


DIAGRAMA DE FASES II

El segundo diagrama de fases muestra que la senda que conduce al crecimiento equilibrado se encuentra a lo largo del rayo de acumulación que corresponde a la Tasa de Acumulación α, luego transcurre a lo largo de una curva que se aproxima al rayo de von Neumann en un cierto trayecto, para continuar finalmente por un rayo paralelo al que corresponde a la Tasa de Acumulación $\tilde{\alpha}$. Vistas así las cosas, queda en evidencia que estamos ante un problema típico de crecimiento que algunos autores han llamado de "Turnpike" (Ver Morishima, M. (1973)). Naturalmente, recorrer la senda hacia el equilibrio puede tomar más tiempo en una Economía de Consumo Mínimo que cuando no hay restricciones, pero tal y como lo muestra el modelo, aquella Economía va creando una estructura de Capital muy aproximada a la que requiere el crecimiento balanceado.

BIBLIOGRAFIA

Kurz, M. (1965), *Optimal Paths of Capital Accumulation Under the Minimum Time Objective*, Econometrica, Vol.33.

Morishima, M. (1973), *Teoría del Crecimiento Económico*, Tecnos, Madrid.

Pontriaguine, L. et al. (1974), *Theorie Mathematique des Processus Optimaux*, Editions MIR, Moscou.

Solano, C. (1990a) *El Modelo de Reproducción Ampliada Visto Como Proceso Optimal*, Revista de Ciencias Económicas, Vol X, No.2, 1990 (En prensa).

(1990b) *La Plusvalía Como Condición de Equilibrio del Modelo de Reproducción Ampliada*, ponencia al III Congreso de Matemática de Costa Rica, San José, Octubre de 1990.

Stoleru, L. (1965), *An Optimal Policy for Economic Growth*, Econometrica, Vol.33, No.2.

SECCION MATEMATICAS Y COMPUTACION

ACCESSIBLE BOUNDARY SADDLES AND GENERATION OF MANIFOLDS FOR THE DUFFING ATTRACTOR

By

Jorge A. Gutiérrez

ABSTRACT

In the present work we calculate, by numerical integration, the coordinates of a saddle orbit for a pair of attractors (out of the possible four) in phase space for a Duffing system of differential equations describing the motion of a viscuously damped mass harmonically driven in a double potential. Once we obtained the coordinates of the saddle orbit we generated the stable and unstable manifolds by integrating a grid of initial conditions centered at the saddle orbit. The stable manifold was obtained by integrating backwards in time and the unstable manifold was gotten by integrating forward in time.

CHAPTER 1
INTRODUCTION AND THEORY

We focus our interest on the behavior in phase space of the solutions to a Duffing system of differential equations [1]. These equations describe, for example, the motion of a mass attached to a nonlinear (usually cubic) spring. The equation of motion for this system has the form

$$x'' + 2\gamma x + \alpha x + x^3 = f(t).$$

This is a nonlinear equation of second order. For our case α is a positive real number. In order to study the behavior of the solutions to the equation written above, we will make a plot of x versus x'. This set of coordinates defines a special space called the phase space.

As parameters are changed in a dynamical system, the stability of the fixed points can also vary. The number of fixed points can also change [2]. Bifurcation theory studies these changes in nonlinear problems as system parameters are varied. We will consider, as an example, the solutions to the undamped Duffing oscillator

$$x'' + \alpha x + \beta x^3 = 0,$$

where α and β are positive real numbers.

By plotting the fixed points as a function of α we can see that as α changes from positive to negative, one fixed point splits into three fixed points (see figure 1). This type of transformation is called a bifurcation. The theory just described is called a local analysis because it only tells what happens dynamically in the vicinity of each equilibrium point. We would like to piece together all the local pictures and describe a global picture of how trajectories move between and among fixed points. Such an analysis is possible when sets of different trajectories corresponding to different initial conditions move more or less together. Such a thing happens when the phase space has only two dimensions. However, when there are three or more first-order equations, the groups of trajectories can split apart and get tangled up into what are nowadays called chaotic motions [2]. The particular system we studied is

$$x' = y,$$

$$y' = \frac{-1}{m}(ax^3 - kx + cy) + F\cos(z),$$

$$z' = w,$$

where F is the driving force, k is a linear (repulsive) spring constant, a is a cubic (attractive) spring constant, w is the frequency and c is a damping term. The Duffing equation gives an approximate description of an elastic strip clamped at one end in a rigid framework [1] and limited to move in one plane. Two magnets are attached to the frame (as shown in figure 2) to cause the beam to buckle either to the left or to the right, its central position being unstable. The whole framework is now driven sinusoidally. This driving force plays a very important role in the peculiar behavior of the system since, for small excitation amplitudes, periodic motions are observed about either stable equilibrium points. If the amplitude is increased then a transition to chaotic motion is observed. In this state the beam oscillates irregularly about first one and then the other equilibrium point. The dynamics of the Duffing equation are studied in the phase space. Here, the motion of a particle is represented by a flow line or trajectory and the behavior of the dynamical system is described by the flow of points in this space.

The phase space we are working with is toroidal. It is generated by the Cartesian product R^2 X C^1 where R^2 is the plane produced by the mapping of x versus x' and C^1 is a dimension associated to the flow of time which is of the form $\theta = (wt)mod(2\pi)$ (see figure 3). We next define a cross section for the flow, called Poincaré section (see figure 4). We can now study the behavior of the flow lines by looking at the Poincaré section produced after several turns of these flow lines around the phase space torus. A fourth-order Runge-Kutta method was used to integrate the differential equations. The Poincaré sections are calculated by means of a subroutine written by Dr. R.W. Rollins. This subroutine was employed in all the programs we have used. The cross sections are calculated at several multiples of the period 2π; the initial one, being always taken at zero phase. The relation among the points in a Poincaré section is given by a mapping called Poincaré map.

We ought to emphasize that the system described here is not a Hamiltonian system, as a matter of fact, the presence of dissipative forces is responsible for the shrinking of a volume in phase space [3]. The object towards which a volume in phase space is contracted is called attractor. The basin of an attractor is defined as the biggest open set of initial conditions which eventually end on the attractor [4] (see figure 5).

The Duffing equation possesses four different attractors for the particular choice of parameters we used. In this work we only considered two of them, hence we are left with only two basins of attraction. The boundary that separates them is called basin boundary (figure 6). This one can sometimes be a smooth curve and under certain conditions it can become a fractal,that is, a curve whose dimensionality is not an integer number.

CHAPTER 2
NUMERICAL CALCULATIONS

Our work consisted in the calculation of the coordinates of the saddle point and the plot of the stable and unstable manifolds. These calculations consist on the integration of the differential equations

$$x' = y,$$

$$y' = \frac{-l}{m}(ax^3 - kx + cy) + F\cos(z),$$

$$z' = w,$$

made with the help of the following programs.

DUFFING. This program calculates the coordinates of the attractors in the Poincare section. We work at the driving frequency $w = 1.00000$, driving force $F = 1.0125$, damping term $c = 0.50000$, linear spring constant $l = -1.00000$ and cubic spring coefficient $a = 0.10000$. We focus our attention on only two attractors, designated as A and B. The coordinates of the attractors corresponding to the conditions previously mentioned are

a) Attractor A

$$x_A = 3.685143117,$$

$$v_A = 1.471038991.$$

b) Attractor B

$$x_B = 1.788833334.$$

$$v_B = 1.685024604.$$

It is important to point out that we are working in phase space and hence the position x corresponds to the abscissa of a point, and the velocity v corresponds to the ordinate of a point.

DUFFBAS5. This program calculates the coordinates of the saddle point. The algorithm employed here is due to Grebogi et al. [5]. We choose two points, each one of them is in a different basin of attraction. We then determine the distance between these two points, each on either side of the basin boundary, and divide it in several segments (figure 7 a). We now pick one of these two points and displace it toward the basin boundary by a length equal to one of the segments and integrate the Duffing equation having as initial condition the coordinates of this new point. Successive integrations will permit us to study the evolution of the flow line corresponding to this initial condition and to identify the attractor towards which the flow line is approaching. If it converges to the attractor that generates the basin of attraction in which our initial point is, we then choose a new initial point by moving the previous one one more step towards the basin boundary (figure 7 a) and repeat the same process for studying the behavior of the flow line associated to this new initial condition. If the flow line does not converge to the attractor that generates the basin of attraction in which our initial point is (figure 7 b), we then save the coordinates of the point we used before this last one and begin the whole process of choosing successive points and studying the evolution of their flow lines in the other basin of attraction (figures 7 c and 7 d). This will yield the coordinates of a second point, the distance between these two points is used as a condition for stopping the program. In our case this separation is less than 10^{-14} (figure 7 e), this small difference allows us to choose as a point of the basin boundary either one of the points found by means of the algorithm we previously mentioned. We can now find the saddle point by starting on the basin boundary and integrating forward in time for about 50 cycles (figure 7 f). Since the basin boundary is the stable manifold, this takes us to the saddle point (figure 8). An interesting point here is that if we pay attention to the behavior of a flow line having a starting trajectory near the saddle orbit we see that this unstable orbit needs about 200 turns around the phase space torus before showing any evidence of instability. The coordinates of the saddle point are

$$saddlepoint[x] = 3.47241857311768,$$

$$saddlepoint[y] = 1.74412773443000.$$

DUFFBAS6. With this program we can calculate and plot in a Poincaré section the points belonging to the stable manifold by integrating bacwards in time a grid of initial conditions centered at the saddle point found by means of DUFFBAS5. The grid is a square whose edges have a length of 0.000002. Each edge is divided in 50 parts. Therefore we have a grid of 2500 initial conditions. The same can be done in order to get the set of points constituting the unstable manifold by integrating forward in time the points belonging to the grid of initial conditions previously mentioned. The results of these calculations are shown in figure 5. A sketch of these is shown is figure 8.

CHAPTER 3. CONCLUSIONS

We were able to find an accessible saddle orbit and, as expected, it lies at the intersection of the stable and unstable manifolds. We can check that the stable manifold is the right one by comparing figure 5 with figure 9. Since the stable manifold happens to be the basin boundary, it should have the shape of the boundary between the basins of attraction shown in figure 5. We found that the stable manifold is the same as the basin boundary.

REFERENCES.

[1] B.D. Greenspan,P.J. Holmes, Homoclinic orbits, subharmonics and the global bifurcations in forced oscillations. **Nonlinear Dynamics and Turbulence**. 172. Pitman Publishing Inc., 1983.

[2] F. Moon,**Chaotic Vibrations**, Wiley, New York, 1983.

[3] C. Grebogi, E. Ott, J.A, Yorke, **Physica** 17d, 125, 1985.

[4] R.J. Mondragón Ceballos, **Estadisticas de las iteraciones de un mapa del circulo sobre si mismo**, thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 1984.

[5] C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, Plasma preprint UMLPF 86-001, 1985.

[6] A.B. Pippard, **Response and Stability**, Cambridge University Press, 1985.

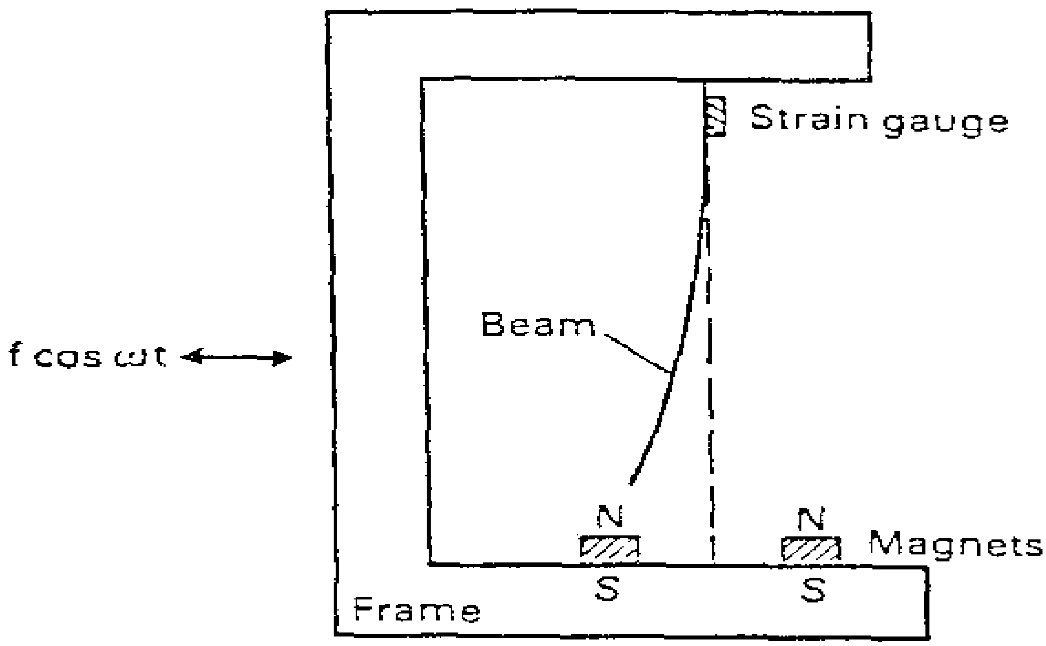
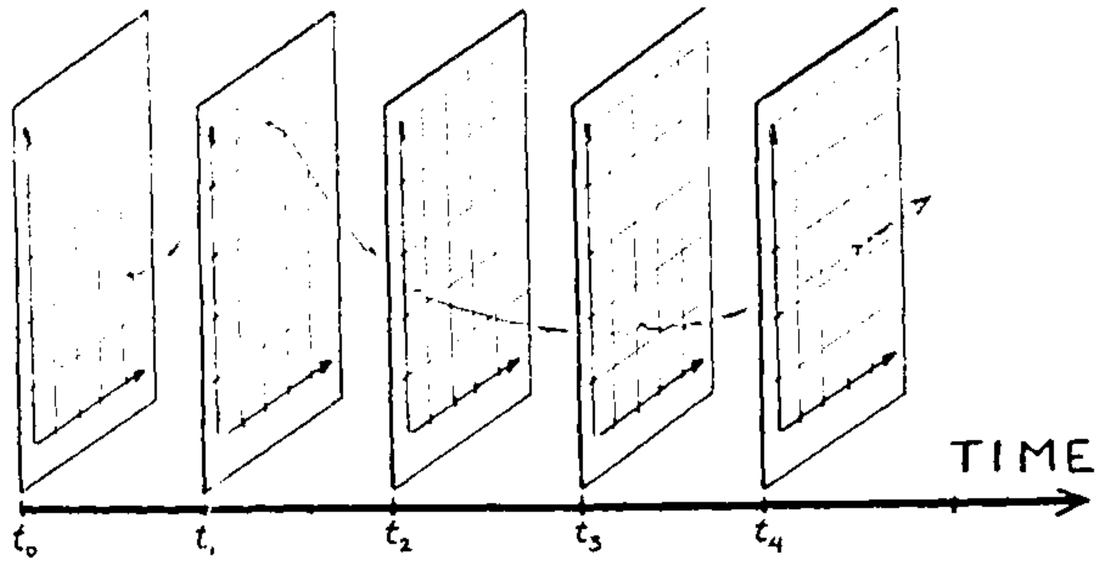
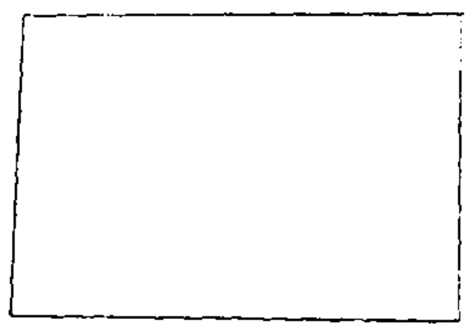


Figure 2



Here the vertical plane represents the state space, and the horizontal axis represents the time of observation. The parameters observed at a given time are plotted in the vertical plane passing through the appropriate point on the time axis.

(a)



(b)

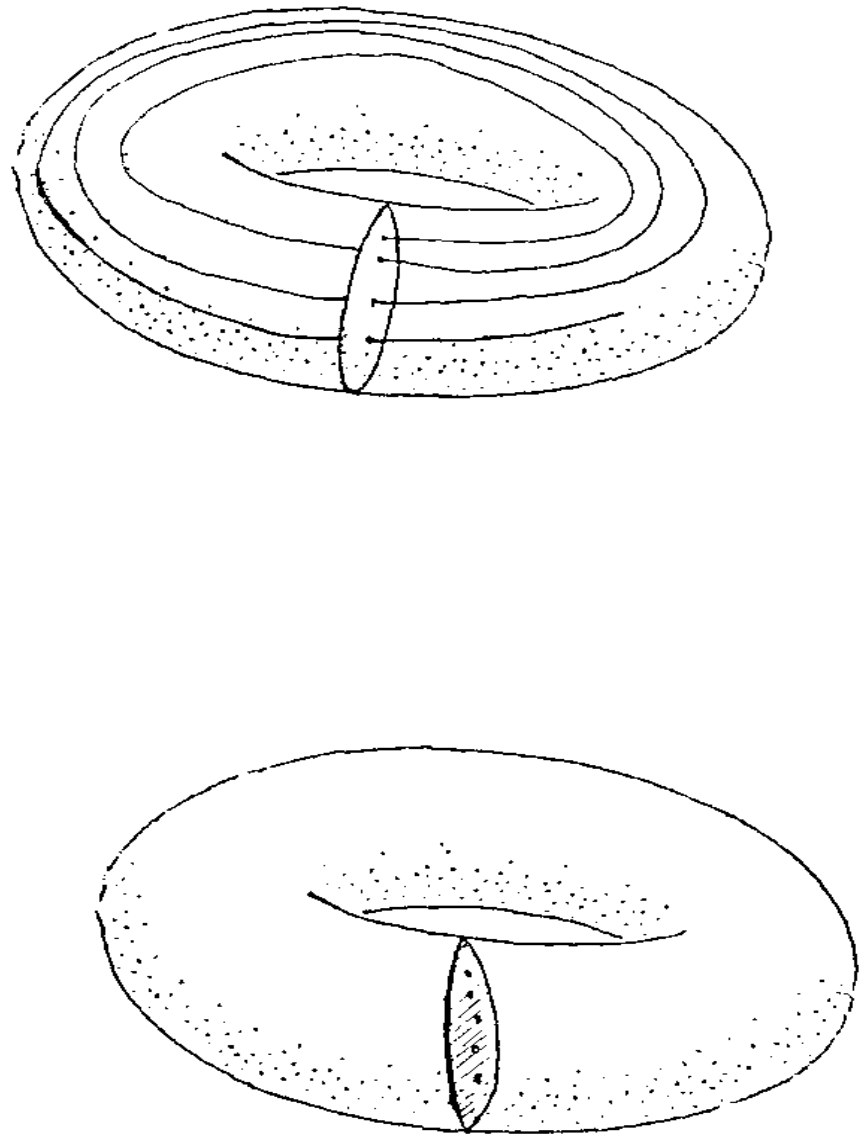
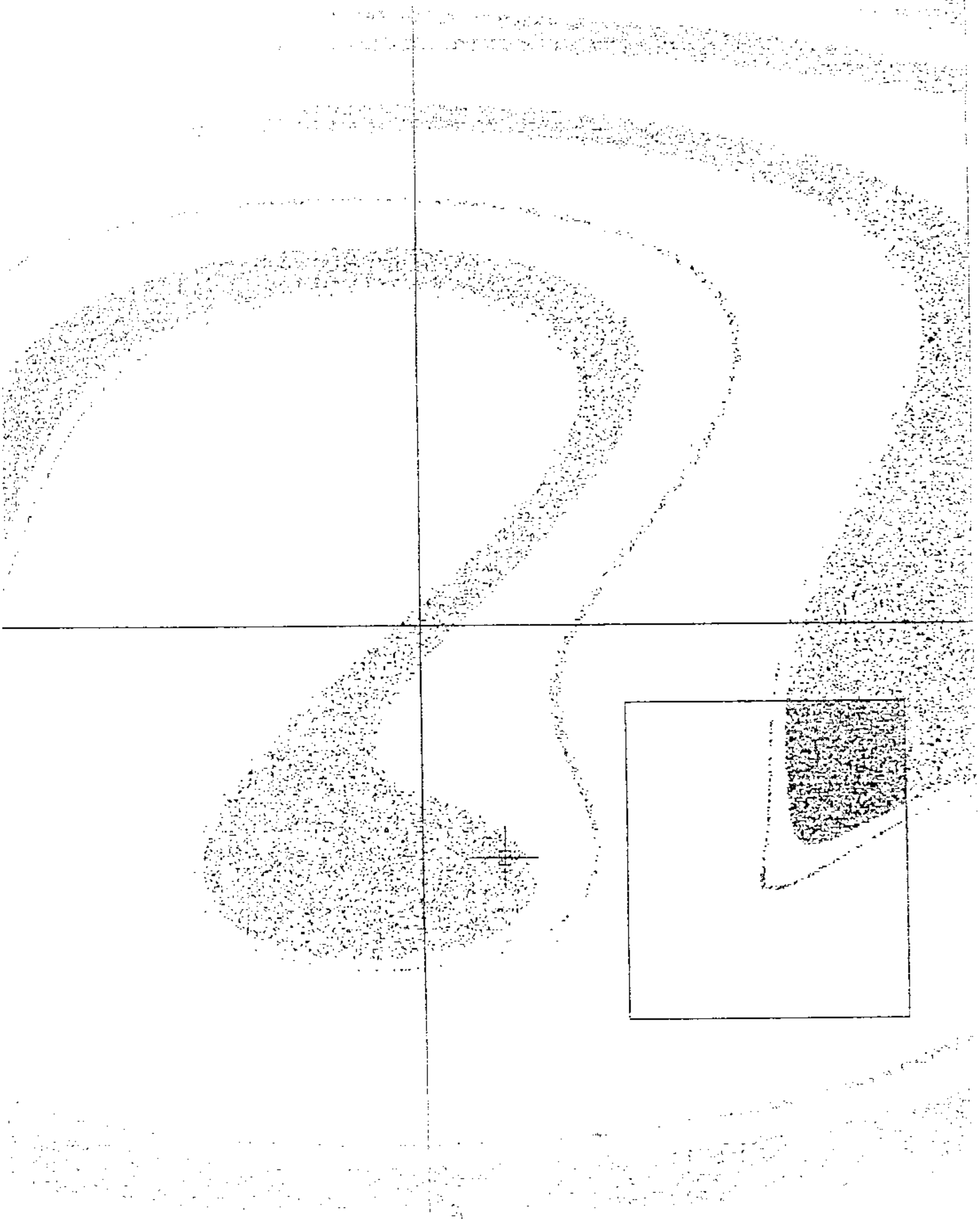


Figure 4



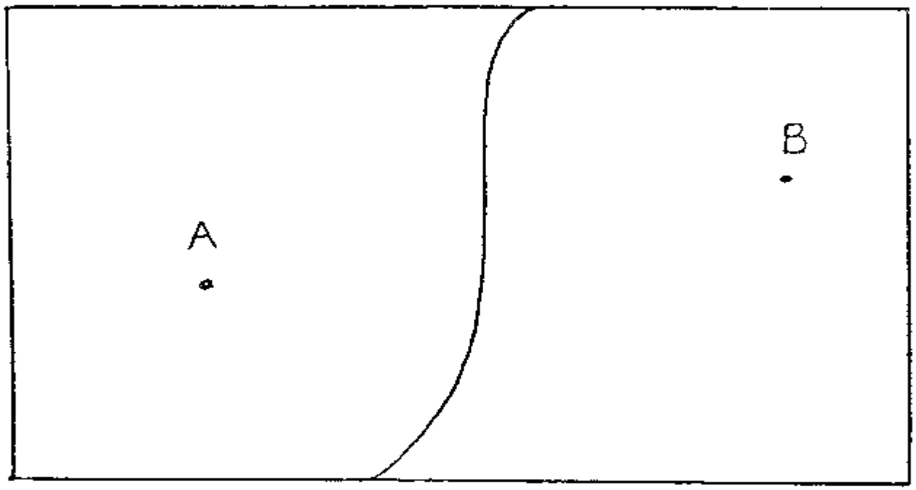


Figure 6

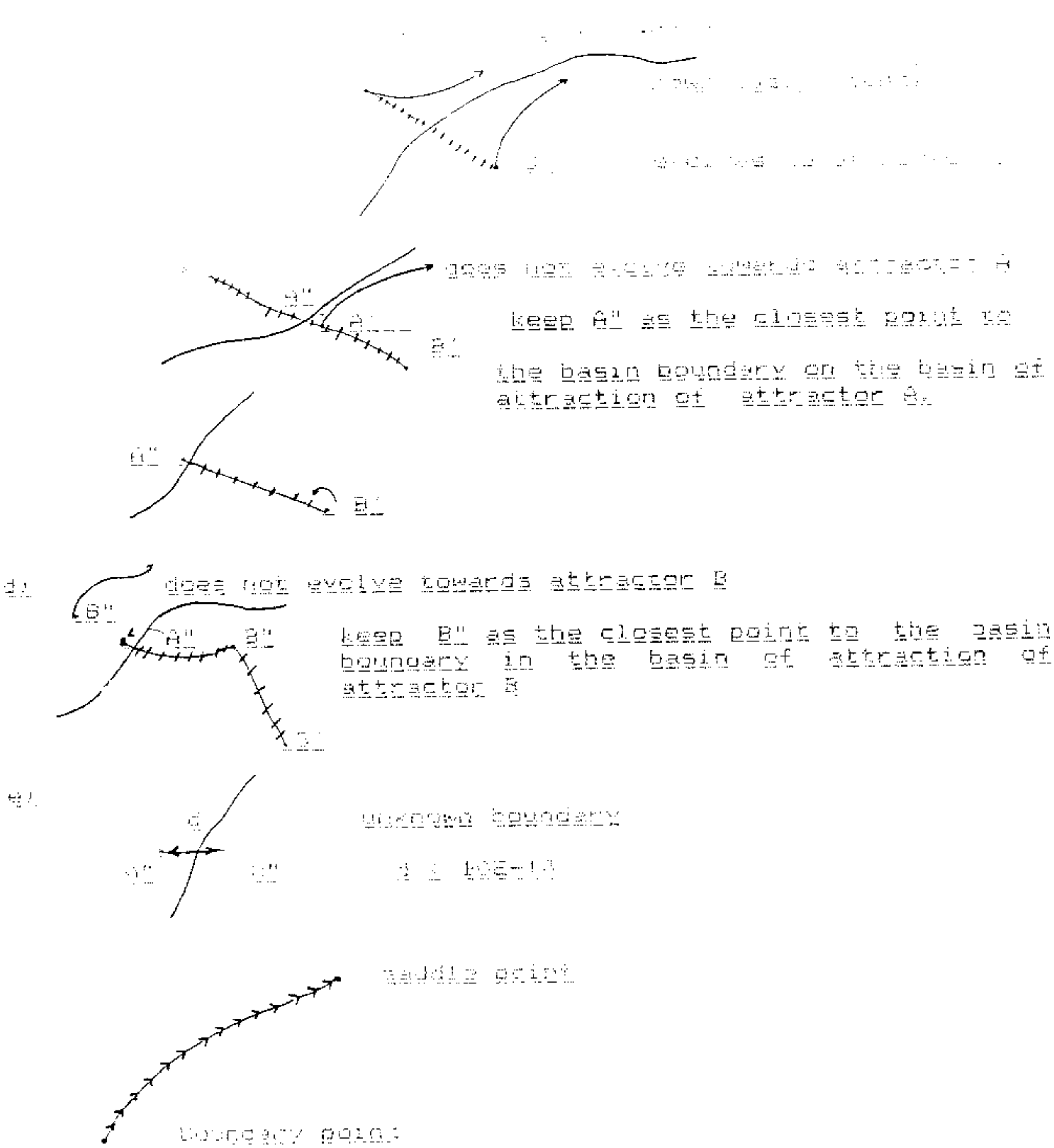

keep A" as the closest point to
the basin boundary on the basin of
attraction of attractor A.
does not evolve towards attractor B
keep B" as the closest point to the basin boundary in the basin of attraction of attractor B
unknown boundary
saddle point
boundary point

Figure 7

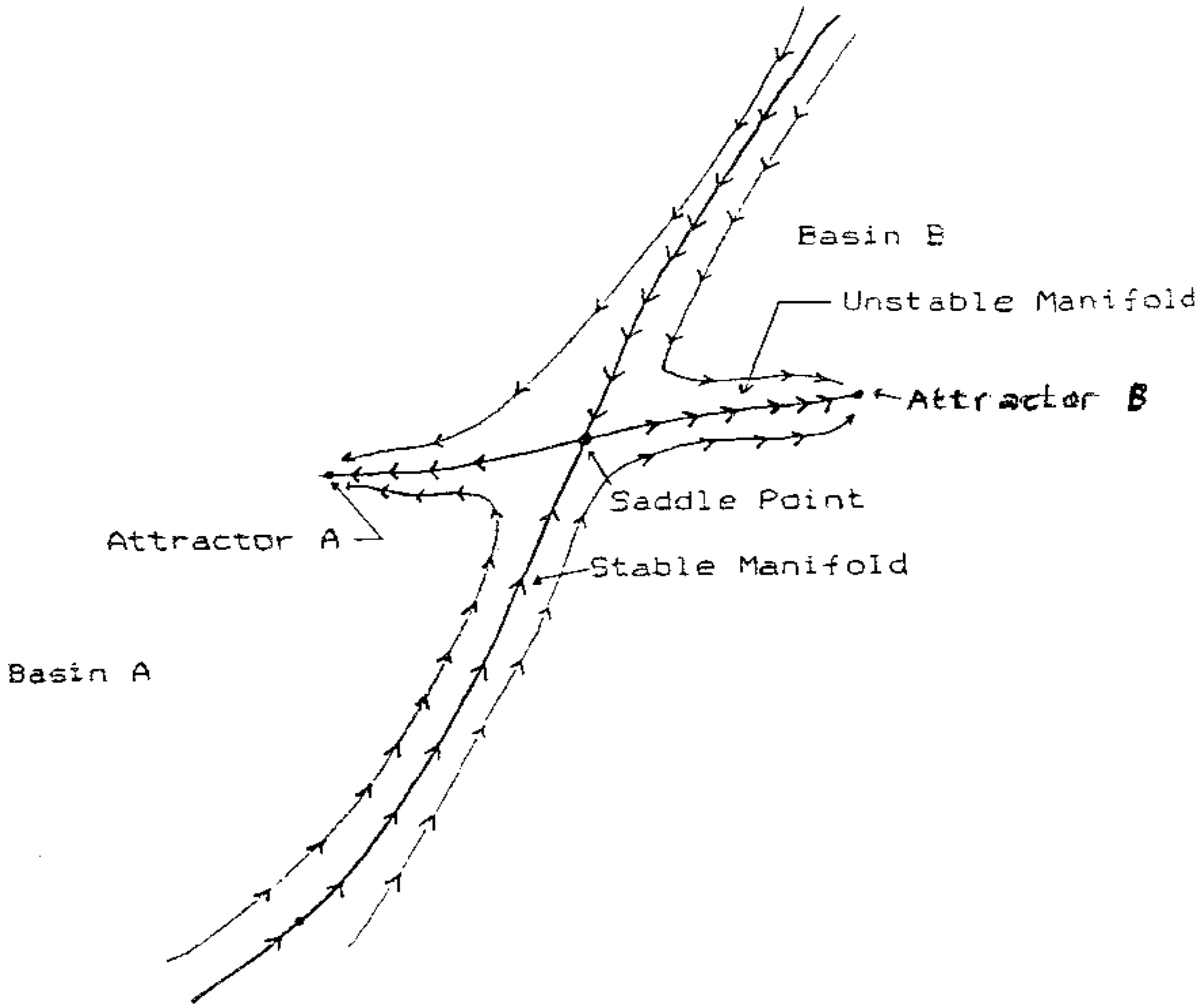

Basin B
Unstable Manifold
Attractor B
Saddle Point
Attractor A
Stable Manifold
Basin A

Figure 8

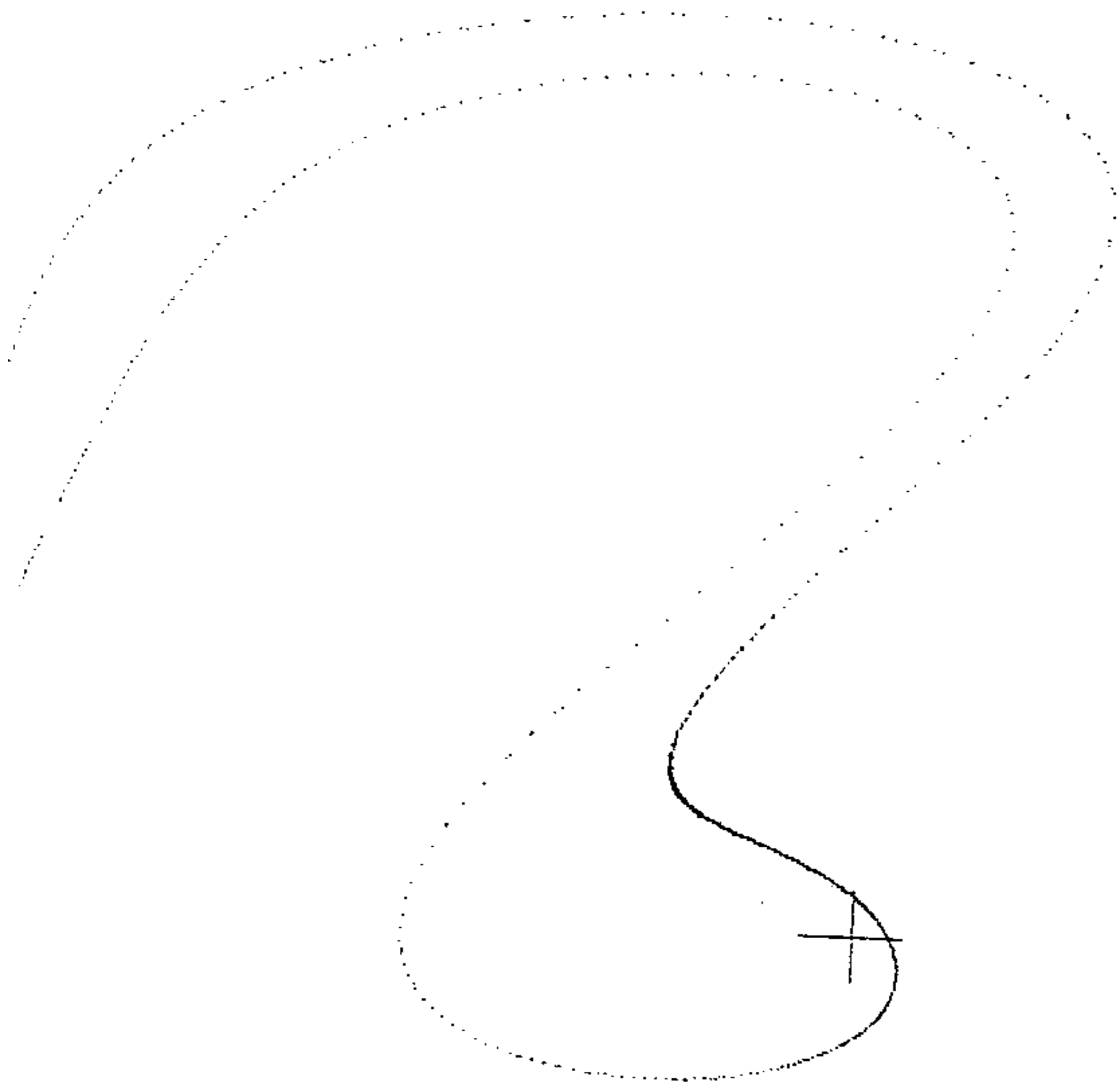


Figure 9

La matemática experimental

Por Jorge M. López
Departamento de Matemática
Universidad de Puerto Rico
Río Piedras, Puerto Rico

Resumen

El desarrollo de la tecnología de las computadoras y la gran accesibilidad del cálculo matemático a un número cada vez mayor de personas, la computadora ha pasado a ser en la matemática un instrumento de investigación y de exploración. Es común que los matemáticos modernos utilicen el computador para investigar situaciones desconocidas con la idea de ganar un mejor entendimiento de una situación matemática dada. En este sentido los matemáticos utilizan la computadora de una manera análoga a la forma en que un astrónomo utiliza el telescopio o un biólogo el microscopio. Si bien estas exploraciones electrónicas no constituyen pruebas de enunciados matemáticos, las mismas son de capital importancia para el descubrimiento del enunciado matemático "plausible" que tiene posibilidades de poder ser cierto. Este ejercicio de descubrimiento es uno que raras veces realizamos en la escuela.

En mi intervención durante el dia de hoy me gustaria hablar sobre las ferias científicas y matemáticas que celebramos en mi pais. Como verán, mi experiencia en estas actividades me ha dado la oportunidad de observar de cerca las formas ingeniosas mediante las cuales nuestros jóvenes estudiantes se valen de la computación para descubrir datos interesantes y nuevos de las ciencias y la matemática. Los ejemplos que habré de presentar fueron tomados de proyectos desarrollados por nuestros estudiantes en el área de las matemáticas, los cuales se presentaron en ferias científicas a todo tipo de nivel de competencia, desde las ferias estatales hasta las internacionales. En efecto, dos de los ejemplos que habré de mencionar representan temas recurrentes de las ferias científicas internacionales.

La naturaleza deductiva de la matemática se ha señalado como la diferencia más notable que la separa del resto de las ciencias. El conocimiento científico es uno que necesita nutrirse constantemente de las observaciones y los experimentos ya que son los hechos observables precisamente los que las ciencias aspiran a explicar. Así pues, el conocimiento científico es una mezcla bien balanceada de procesos inductivos y deductivos de razonamiento. Toda la ciencia parte de ciertos principios fundamentales, los cuales se toman como ciertos y de los cuales, mediante las reglas de la lógica y las matemáticas, se ***deducen*** resultados que pueden ser observados. La predicciones teóricas se comparan, mediante el diseño de experimentos, con los datos observables y medibles. La coincidencia de los datos observados con los predichos es la que a fin de cuentas decide la propiedad y la validez de los supuestos subyacentes en la ciencia. Las revoluciones más importantes de la ciencia se han suscitado precisamente del modo descrito. Por ejemplo, tratando de armonizar las observaciones con las predicciones del electromagnetismo y la mecánica de Newton surgen los principios de la teoria de la relatividad.

Vemos pues que los principios de la ciencia empirica están constantemente matizados por las observaciones. La matemática, sin embargo, nunca ha estado sujeta a este tipo de control de las observaciones. La matemática es un ejercicio puramente deductivo de manera que todo tipo de medición y observación es considerado muchas veces como irrelevante e impertinente. ¡Nadie ha visto a un matemático con instrumentos de medición tratando de probar la validez de resultados matemáticos! Las pruebas de los resultados matemáticos se realizan en el terreno de la inferencia lógica a partir de ciertos principios lógico-matemáticos que se suponen válidos (axiomas y postulados) y resultados que se obtienen de estos mediante las reglas de la inferencia lógica. No empece a esta realidad, el desarrollo de la tecnología de las computadoras y la gran accesibilidad del cálculo matemático a un número cada vez mayor de personas, la computadora ha pasado a ser en la matemática un instrumento de investigación y de exploración Es común que los matemáticos modernos utilicen el computador para investigar situaciones desconocidas con la idea de ganar un mejor entendimiento de una situación matemática dada. En este sentido los matemáticos utilizan la computadora de una manera análoga a la forma en que un astrónomo utiliza el telescopio o un biólogo el microscopio. Los proyectos matemáticos que presentaré a continuación representan intentos por resolver problemas matemáticos investigando escenarios matemáticos mediante la utilización de instrumentos electrónicos de cálculo. Si bien estas exploraciones electrónicas no constituyen pruebas de enunciados matemáticos, las mismas son de capital importancia para el descubrimiento del enunciado matemático "plausible" que tiene posibilidades de poder ser cierto. Este ejercicio de descubrimiento es uno que raras veces realizamos en la escuela.

Hace ya algún tiempo un estudiante, buscando ayuda entre profesores universitarios, trajo a mi atención el siguiente curioso problema: si en una calculadora electrónica, con un número cualquiera en la ventanilla, oprimimos en sucesión las teclas

$$\sqrt{x}, +, 1, =, \sqrt{x}, +, 1, =, \sqrt{x}, +, 1, =,$$

etc, se obtiene, luego de un rato, un valor estable de 2.618033989, correcto a los lugares decimales indicados. El estudiante también señalaba que el orden en que se oprimían las teclas parecía tener importancia. Por ejemplo, si oprimimos

$$+, 1, =, \sqrt{x}, +, 1, =, \sqrt{x}, +, 1, =, \sqrt{x},$$

etc, obtenemos un valor estable de 1.618033989, independientemente del valor inicial de la ventanilla. El folklore matemático relaciona este famoso número (la razón áurea) con el ombligo de las mujeres, las semillas del girasol, la reproducción de los conejos, la fachada del partenón y más.

El estudiante de este relato pudo observar además que este patrón se repetía con otras teclas de la calculadora, como por ejemplo, con las teclas trigonométricas. Si oprimimos repetidamente

$$\text{sen}, x, 2, =,$$

obtenemos un valor estable de 1.895494267. Cambiando el orden en que oprimimos las teclas,

$$x, 2, =, \text{sen},$$

obtenemos un valor estable de .947747134.

Es fácil experimentar con otras combinaciones de teclas. He aquí algunas posibles; invitamos al lector a que intente en una calculadora los procesos indicados:

$$1, +, x, =, \sqrt{x}, 1/x,$$

$$1, +, x^2, =, \sqrt{x}, 1/x,$$

$$1, +, x, =, 1/x.$$

Todos los problemas indicados son casos especiales del problema de la determinación de los "puntos fijos de una función f, es decir la determinación de valores x tales que $f(x) = x$. Hay mucho de la literatura matemática de hoy día que se ha dedicado a este problema. En efecto, algunos desarrollos importantes de la física y la matemática de hoy día se han desarrollado examinando los puntos fijos de varias transformaciones especiales. El estudiante de este relato desarrolló un proyecto que le mereció varios premios en ferias científicas locales e internacionales.

Un problema recurrente en las ferias científicas en el área de las matemáticas es el llamado problema de "3x+1", el cual ha ganado mucha notoriedad últimamente. Se tienen las siguientes reglas:

Si x es par dividimos x por 2 para obtener x/2.

Si x es impar multiplicamos x por 3 y sumamos 1 para obtener 3x+1.

La pregunta es: ¿Llegaremos siempre al número 1 al comenzar con un número arbitrario y seguir el proceso descrito al pie de la letra? Este problema, que a muchos parece sencillo la primera vez que lo ven, se ha resistido a los intentos de demostración de muchos talentosos matemáticos. Las transparencias que se muestran ilustran algunos ejemplos de casos específicos.

Otro problema, también difícil, es uno que se refiere al número 153, al cual se hace referencia en la Biblia. En el versículo 11 del último capítulo del evangelio según San Juan (versión bíblica de Casiodoro de Reina según revisada por Cipriano de Valera) aparece:

Subió Simón Pedro y sacó la red a tierra, llena de grandes peces, ciento cincuenta y tres; y aun siendo tantos, la red no se rompió.

San Agustín ofreció el siguiente argumento "numerológico" para explicar el carácter especial del número 153 en el pasaje bíblico. Decía San Agustín que si sumamos el número de mandamientos de la vieja ley mosáica (10) al número de los dones del espíritu (7), símbolo de la nueva dispensación, obtenemos una suma de 17 la cual representa la unión de lo viejo y lo nuevo. San Agustín señaló además que

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 17 = 153.$$

Es también interesante notar (aunque esto no lo señaló San Agustín) que

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153.$$

Phil Kohn, de Yokneam, Israel, descubrió una curiosa e interesante propiedad del 153. Kohn observó primeramente que 153 es un número (hay **cinco** tales) que vale la suma de los cubos de sus dígitos:

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153.$$

Además, 153 es el **único** múltiplo de tres que satisface esta propiedad. Kohn apuntó además que se cumplía el siguiente curioso fenómeno. Suponga que comenzamos con un múltiplo cualquiera de tres y sumamos los cubos de sus dígitos. Si al número que resulta, que curiosamente también es divisible por tres, le aplicamos el mismo procedimiento y continuamos de este modo, siempre iremos a morir al 153. Ilustramos la aseveración mediante dos ejemplos. Comenzando con el número 6 tenemos:

6	$6^3 = 216$
216	$2^3 + 1^3 + 6^3 = 8 + 1 + 216 = 225$
225	$2^3 + 2^3 + 5^3 = 8 + 8 + 125 = 141$
141	$1^3 + 4^3 + 1^3 = 1 + 64 + 1 = 66$
66	$6^3 + 6^3 = 216 + 216 = 432$
432	$4^3 + 3^3 + 2^3 = 64 + 27 + 8 = 99$
99	$9^3 + 9^3 = 729 + 729 = 1458$
1458	$1^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 = 1 + 64 + 125 + 512$ $= 702$
702	$7^3 + 2^3 = 343 + 8 = 351$
351	$3^3 + 5^3 + 1^3 = 27 + 125 + 1 = 153.$

Si se comienza con el número 1611, el lector comprobará fácilmente que este proceso genera la siguiente sucesión de números:

1611, 219, 738, 882, 1032, 36, 243, 99, 1458, 702, 351, 153.

¿ Qué ocurre si en lugar de comenzar este proceso con un múltiplo de tres comenzamos con un entero positivo arbitrario ? Por ejemplo, ¿ qué ocurre si comenzamos con el número 4589 ? El lector podrá verificar sin dificultad alguna que en este caso se genera la siguiente sucesión de números:

4589, 1430, 92, 737, 713, 371.

Nótese que $371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$, de manera que 371 es otro entero que vale lo mismo que la suma de los cubos de sus dígitos. Por otra parte, si comenzamos con el 46, se genera la siguiente sucesión:

46, 280, 520, 133, 55, 250, 133, 55, 250, etc.

Notamos pues que en este caso no terminamos con un número igual a la suma de sus propios dígitos, sino mas bien con una cierta "órbita" (133, 55, 250) que se repite indefinidamente.

¿ Cómo podemos describir matemáticamente el fenómeno que estamos observando ? Muchos de los proyectos de las ferias científicas y matemáticas tratan propiedades especiales de este problema, con variados exponentes e incluso bases diferentes a la base decimal.

Otros problemas posibles para la investigación tiene que ver con las fracciones egipcias. El papiro de Rhind, famoso documento que contiene tablas y anotaciones matemáticas pertenecientes a varias civilizaciones egipcias del segundo siglo antes de Cristo, contiene una colección de curiosos e interesantes problemas relacionados con las fracciones. El documento contiene entre otras cosas una tabla que expresa las fracciones de numerador 2 cuyos denominadores varían de 3 a 99 como sumas de fracciones de numerador 1. El papiro también describe métodos para resolver ecuaciones de la forma $(a/b)x = c$ y algoritmos numéricos para aproximar las soluciones de ciertos tipos de ecuaciones. Además, en el papiro se tratan las series aritméticas y geométricas y se tocan temas de la Geometría.

Con la curiosa excepción de la fracción 2/3, los egipcios del segundo siglo antes de Cristo sólo utilizaban la notación fraccional para escribir fracciones de la forma $1/n$, siendo n un entero positivo. Por tal motivo las fracciones de este tipo han pasado a conocerse en los tiempos modernos como ***fracciones egipcias.*** Se alega que el siguiente problema (notación moderna) aparece en el papiro. ¿Cómo podemos dividir equitativamente 6, 7, 8 ó 9 hogazas de pan entre 10 hombres? Las contestaciones que aparecen en el papiro son las siguientes:

$$1/2 + 1/10$$

$$1/3 + 1/3 + 1/30$$

$$1/3 + 1/3 + 1/10 + 1/30$$

$$1/3 + 1/3 + 1/5 + 1/30.$$

Las sumas indicadas representan ***descomposiciones en fracciones egipcias*** de las fracciones 6/10, 7/10, 8/10 y 9/10 respectivamente. Esto significa en particular que 6/10 = 1/2 + 1/10, 7/10 = 1/3 + 1/3 + 1/30 y así sucesivamente. Observemos primeramente que estas últimas relaciones resuelven en efecto el problema planteado en el papiro. Por ejemplo, la relación 6/10 = 1/2 + 1/10 indica que podemos dividir equitativamente 6 hogazas de pan entre 10 hombres si damos a cada uno media hogaza más una décima de una hogaza. En general, estas soluciones al problema del papiro están lejos de ser únicas. Por ejemplo, las siguientes son descomposiciones en fracciones egipcias para 3/8:

$$3/8 = 1/4 + 1/8$$

$$3/8 = 1/5 + 1/10 + 1/20 + 1/40.$$

Otro ejemplo:

$$7/17 = 1/3 + 1/17 + 1/51,$$

$$7/17 = 1/3 + 1/13 + 1/663,$$

$$7/17 = 1/3 + 1/15 + 1/85.$$

Se ha conjeturado que la fracción 4/n siempre se puede representar con una descomposición en fracciones egipcias de tres términos o menos. También se ha conjeturado que las fracciones de la forma 5/n se pueden escribir utilizando descomposiciones de tres o menos términos.

Otro de los temas que aparecen en las ferias científicas con cierta frecuencia es uno relacionado con los triples pitagóricos. Un triple pitagórico es un triple de enteros no negativos (a, b, c) tal que $a^2 + b^2 = c^2$. Por ejemplo (0, 1, 1) es un triple pitagórico al igual que (5, 12, 13) y (27, 36, 45). Decimos que un triple pitagórico (a, b, c) es *consecutivo* si b = a + 1. Así pues (0, 1, 1), (3, 4, 5) y (20, 21, 29) son triples pitagóricos. En efecto, estos son los primeros tres triples pitagóricos cosecutivos. ¿Cuales son los próximos triples pitagóricos? Una buena dosis de experimentación muestra que los próximos triples pitagóricos cosecutivos son:

(119, 120, 169)
(696, 697, 985)
(4059, 4060, 5741)
(23,660, 23,661, 33,461)

Notemos que estos números se podrian encontrar utilizando la fuerza bruta de una calculadora electrónica o uña computadora. Sin embargo, un poco de experimentación mostrará que los cuadrados de los números en los triples se hacen cada vez más grandes de modo que la calculadora y la computadora son de poca utilidad en la determinación de los próximos triples pitagóricos. Por ejemplo, $33{,}461^2 = 1{,}119{,}638{,}521$, una cifra de 10 dígitos. Por consiguiente el próximo triple pitagórico cosecutivo, (137,903, 137,904, 195,025) está al alcance de pocas calculadoras electrónicas y computadoras personales. Si formamos los cocientes de las primeras dos entradas de los triples pitagóricos encontrados hasta ahora, notamos un patrón muy interesante:

20/3 =	6.6667
119/20 =	5.9500
696/119 =	5.8487
4059/696 =	5.8319
23660/4059 =	5.8290

Vemos pues que esta razón se hace aproximadamente 5.8 de manera que podemos estimar la cercanía del próximo entero que será la primera entrada del próximo triple pitagórico consecutivo.

ALGUNAS PREGUNTAS Y RESPUESTAS SOBRE LOGO.
Reflexiones sobre la escogencia de Logo en el Programa de Informática Educativa MEP-FOD.

Francisco Quesada Ch.

RESUMEN

Algunas de las preguntas y objeciones que comunmente se hacen a Logo y su uso en el Programa de Informática Educativa, puesto en marcha por el Ministerio de Educación Pública y la Fundación Omar Dengo, se tratan de contestar en este artículo en forma de preguntas y respuestas.

PREGUNTAS.

¿Quien decidió que debería ser Logo el software a usarse en el programa MEP-FOD?

¿Qué es Logo?

¿Estuvieron los niños entre los objetivos de los creadores de Logo o se trata de un lenguaje de programación más, entre los muchos que existen?

¿No sería mejor haber escogido software con el cual se obtuviesen resultados más inmediatos?

Cuando se habla de la adquisición de conceptos a través de Logo, ¿no se habla de cosas demasiado intangibles, quizás demasiado quiméricas? Con CAI uno al menos sabe dónde está parado y que puede esperar de él.

¿Persigue Logo enseñar a programar?

¿Qué hacen los niños en el laboratorio? ¿Sobre qué contenidos aprenden?

El tema de la informática educativa es un tema de incuestionable actualidad. Sobre él se discute a diario en foros y medios de comunicación en prácticamente todos los rincones del mundo. Los países que aún no han incorporado las computadoras en la educación básica, poseen algunas escuelas o colegios que ya experimentan con ellas y cuando menos realizan algún tipo de gestión preparatoria para la introducción sistemática y a mayor escala de la informática en su sistema educativo. La cuestión es muy simple: la computadora llegó y está invadiendo cada vez mayores porciones de la vida cotidiana de lo que denominamos la sociedad moderna. Esta es una realidad que no podemos ignorar y aunque a no todo el mundo le causa simpatía este estado de cosas, la realidad es que los gobiernos y la sociedad en su conjunto deben dar una respuesta adecuada a este nuevo reto.

En Costa Rica, la vigencia del tema es incuestionable. Desde que se tomó la acertada decisión de eliminar los impuestos a las computadoras el país se vió prácticamente invadido por la nueva tecnología, la cual verdaderamente ha hecho que el país realice el "despegue" en esta materia. Un vistazo a los periódicos, en especial a las ofertas de trabajo nos muestran claramente hasta qué punto nuestras instituciones y empresas se han informatizado.

En el plano de la educación, el país ha entrado de lleno en la era de la informática. En la actualidad podríamos señalar la existencia de tres tipos de gestiones que impulsan el uso de las computadoras en la educación básica costarricense. Existe una cierta cantidad de centros de informática instalados en algunos colegios públicos del país, surgidos por iniciativa del Ministerio de Educación y los cuales prestan servicio a estudiantes y miembros de las comunidades, ofreciendo cursos diversos. A nivel de educación primaria pública, existe el programa que el Ministerio de Educación y la Fundación Omar Dengo han puesto conjuntamente en marcha y que a la fecha ha logrado instalar en dos años laboratorios de 20 computadoras en 130 escuelas repartidas a lo largo y ancho de la geografía nacional. Como tercera gestión, podemos citar el conjunto de iniciativas que una gran cantidad de escuelas y colegios privados han emprendido para dotar de computadoras a sus respectivas instituciones. Este tipo de gestión no corresponde a un programa integrado sino que cada institución ha tomado sus propias iniciativas en cuanto al tipo de software y hardware a emplear. En conjunto, este esfuerzo alcanza proporciones importantes.

En este artículo pretendo contestar algunos de los interrogantes que con frecuencia el público se hace con respecto al Programa de Informática Educativa MEP-FOD. Por ser muchas las cuestiones relacionadas con esta programa y a fin de no hacer este artículo demasiado extenso, en esta ocasión me concentraré en la cuestión referente a la escogencia de Logo como espina dorsal del programa. He reproducido algunas de las preguntas que he escuchado formular en diversas situaciones y que en mi opinión más directamente apuntan en el sentido indicado y he procurado darles una respuesta concisa. Espero que esa respuesta también haya sido clara.

¿Quíen decidió que debería ser Logo el software a usarse en el programa MEP-FOD?

El programa MEP-FOD fue gestado por los fundadores de la FOD, entre los cuales se encontraba el anterior ministro de educación Dr. Pacheco. Fue la FOD quién diseñó la estructura del actual programa, incluído el hecho de que se comenzaría con el uso del lenguaje Logo. Esta decisión se tomó luego de intensa reflexión y consulta con expertos internacionales. Ha sido la Fundación Omar Dengo quien con dineros donados por agencias internacionales (contrariamente a lo que algunas personas aún creen, no se trata de dineros del Ministerio de Educación ni del Gobierno) ha comprado al momento presente 2600 computadoras y las ha instalado en 127 escuelas públicas costarricenses. Todas estas decisiones las tomó la FOD en coordinación con el Ministerio de Educación y sus más altas autoridades, a fin de garantizar que el programa podría ponerse en marcha exitosamente.

¿Qué es Logo?

Logo es un lenguaje de programación, el cual ha ido evolucionando hasta convertirse en lo que hoy día se suele llamar "un ambiente de aprendizaje". La versión actualmente usada en el programa MEP-FOD es LogoWriter y está totalmente traducida al español. LogoWriter mantiene como núcleo central al lenguaje de programación Logo pero también incluye un procesador de palabras que es programable desde Logo, es decir el niño puede incrementar la potencia del procesador programando a su gusto funciones específicas de modo prácticamente ilimitado. LogoWriter ofrece grandes facilidades para la programación gráfica, lo cual ha sido motivo de confusión para algunos, quienes han visto en LogoWriter una herramienta exclusivamente para dibujar. El lenguaje Logo permite construir programas gráficos como puramente "algorítmicos" o de procesamiento de datos. Logo es un lenguaje derivado del lenguaje LISP el cual es bien conocido por quienes poseen alguna familiaridad con el tema de la Inteligencia Artificial y al igual que éste, gira en torno de las estructuras de datos conocidas como "listas".

¿Estuvieron los niños entre los objetivos de los creadores de Logo o se trata de un lenguaje de programación más, entre los muchos que existen?

Definitivamente sí, el Dr. Seymour Papert y sus colaboradores desarrollaron el lenguaje Logo en el Instituto Tecnológico de Massachusetts pensando muy especialmente en los niños. El profesor Papert, quien trabajó durante algún tiempo con Jean Piaget en Ginebra, estaba interesado en estudiar los procesos mediante los cuales los niños construyen sus propios procesos de aprendizaje. Papert y el profesor Marvin Minsky fundaron el Laboratorio de Inteligencia Artificial del MIT, donde entre otras cosas se ha investigado intensamente sobre la posibilidad de construir máquinas que sean capaces de aprender. Fue en este contexto que el Profesor Papert descubrió el enorme potencial encerrado en la computadora como herramienta apta para el aprendizaje, y concibió la idea de construir un lenguaje de programación que sirviese como un medio para que los niños pudiesen aprender sobre nociones tradicionalmente consideradas difíciles y abstractas. Una de las tesis del Dr. Papert consiste en la afirmación de que el juicio según el cual clasificamos cierto conocimiento como "abstracto" es algo relativo y depende fuertemente de los elementos culturales circundantes.

Desde luego, el lenguaje que creó para tal fin no debería imponer limitaciones al crecimiento intelectual de los niños y debía ser igualmente apto para adultos. La potencia de Logo como lenguaje de programación es equivalente a la de cualquier otro lenguaje conocido como Basic, Pascal o C.

¿No sería mejor haber escogido software con el cual se obtuviesen resultados más inmediatos?

Esta es una cuestión discutible. No perdamos de vista un hecho esencial que es el tiempo de exposición de cada niño a la computadora. Pese al gran logro que significa dotar a 130 escuelas de 20 computadoras en dos años, el tiempo de exposición de cada alumno a la máquina está dentro de lo que podríamos considerar bajo. Esto significa que la escogencia del software debe hacerse teniendo en cuenta esto como uno de los factores más significativos. No creo que nadie en la Fundación y posiblemente tampoco dentro del Ministerio sea capaz de negar que existen otras opciones y que las mismas pueden resultar provechosas e interesantes. Mas aún, tampoco está excluído que algunas de estas opciones sean probadas en un futuro cercano

La Fundación recomendó Logo y al hacerlo, esta es mi opinión, actuó con gran visión. LogoWriter no es el tipo de producto que uno escogería cuando se trata de obtener efectos superficiales, para impresionar al tipo de público que asiste a una feria. En educación no se trata de escoger cosas para impresionar a nadie sino de escoger cosas idóneas. A este respecto se me viene a la mente una analogía. Ud. puede llevar a su hijo a recibir clases de pintura porque quisiera desarrollar en él su sentido artístico y tal vez porque quisiera canalizar adecuadamete su habilidad innata para la pintura. Doy por un hecho que no escogería aquella academia, caso de que exisitiera, donde pintan ese tipo de cuadros que están seccionados en pequeñas áreas con un numerito dentro (indicando cuál color poner dentro de cada área). No importaría que el producto que el niño podría mostrale al finalizar la primera semana pueda causarle una impresión inicial muy favorable. Esta analogía enseña que un producto puede ser impresionante pero sólo en la superficie. Si buscamos que tipo de habilidades desarrolla el niño que es sometido a la práctica de pintar "con numeritos" llegaremos rápidamente a la conclusión de que por ese camino no sólo no le estamos potenciando sus habilidades sino que probablemente le estamos obstruyendo el camino para la consecución de logros importantes. El crecimiento del intelecto requiere de la posibilidad de equivocarse. Mirando un cuadro hecho por un niño de 5 años, con manchones e imperfecciones (si cabe aplicar tal palabra), se comprende que más importante que el producto final es el proceso que se está llevando a cabo en la mente del niño para lograr ese producto. Yo recomiendo a las personas que analizan un trabajo hecho con Logo, que no pierdan de vista este hecho fundamental, me refiero a no dejar de ver el proceso como la parte más importante de una producción.

LogoWriter está enmarcado dentro de este esquema conceptual. LogoWriter es un ambiente donde el niño encuentra herramientas para construir cosas de variada índole, de modo muy parecido a quien explora con un "meccano" o con ladrillos Lego. La maestra debe saber brindar el apoyo adecuado a cada niño, sin entorpecer el proceso de descubrimiento y adquisición de conceptos por un lado y sin permitir el estancamiento y la rutina por otro. Como se ve, para la maestra se trata de un rol bastante más difícil y delicado que simplemente usar software donde los niños siguen secuencias preestablecidas por el programa.

En este sentido, la decisión de la Fundación de optar por Logo ha sido una decisión de mayor riesgo, pero al tomar esta decisión ha dado un voto de confianza al educador costarricense. Y creo que maestros y niños de Costa Rica están respondiendo de modo magnífico a este voto de confianza. Esto es algo que debe complacernos mucho. Me refiero al hecho de que se haya partido de premisas robustas y ascendentes en vez de premisas débiles. En este caso se trata de partir de la premisa de que los costarricenses somos inteligentes y capaces y que tomar acciones en concordancia con esta premisa traerá progreso y beneficio a nuestra sociedad.

Cuando se habla de la adquisición de conceptos a través de Logo, ¿no se habla de cosas demasiado intangibles, quizás demasiado quiméricas? Con CAI uno al menos sabe dónde está parado y que puede esperar de él.

No voy a discutir que es más fácil determinar si un niño aprendió las tablas de multiplicar usando un programa tipo CAI que determinar la magnitud de su progreso intelectual como resultado de escribir procedimientos (programas) en Logo. Esto último, es un proceso mucho más complejo y aunque los progresos son detectables, en ocasiones hay facetas evolutivas que los test tradicionales tiene mucha dificultad en detectar. Por ejemplo, yo recuerdo durante mi época de colegio, cuando en una ocasión logré resolver un problema que el profesor puso a la clase como desafío. Mucho más importante que la "técnica" que pude haber aprendido o desarrollado a través de la resolución del problema, creo que lo fueron ciertos hechos que estimo sumamente difíciles de medir (de

cuantificar). Entre estos hechos puedo citar la revelación que para mi fue comprender la potencia del uso correcto de variables en el planteo y resolución de problemas, la confianza en mí mismo derivada de haber logrado una solución y finalmente el mayor grado de atención e interés que dediqué en el futuro a cuestiones relacionadas con álgebra y problemas matemáticos en general.
Tales fenómenos son ciertamente algo intangibles pero de indudable valor y no creo que se puedan lograr a base de meras acciones repetitivas como las que imponen algunos programas que hay en el mercado.

Por otro lado, no estoy tratando de insinuar que los beneficios de la exposición acertada a LogoWriter sean completamente intangibles. Yo creo que son esencialmente tangibles pero que su detección requiere el método adecuado. El niño que navega dentro del ambiente Logo está siendo invitado a usar un lenguaje que tiene las características del lenguaje matemático y en muchos aspectos es coincidente con este último. Así por ejemplo, Logo comparte con el lenguaje matemático su falta de ambigüedad, su precisión y concisión y sus esquemas de construcción tienen un amplio grado de generalidad, similar al de los conceptos matemáticos, en especial los de la matemática moderna. Para no hablar en abstracto, citaré un par de ejemplos. Las primitivas de Logo que utilizan argumentos o datos de entrada están construídas de modo que pueden ser concatenadas entre sí de modo prácticamente ilimitado, con el único requisito de que las concatenciones tengan sentido, del mismo modo que en matemática se pueden componer funciones sin importar la naturaleza de su dominio y ámbito, siempre y cuando las construcciones tengan sentido. Otra gran virtud del lenguaje Logo es su "modularidad"' enteniéndose por esto la facilidad que brinda para que construcciones menores sean "pegadas" o ensambladas en estructuras de mayor grado de complejidad. El principio que permite resolver una tarea sabiéndola dividir en partes o módulos que gozan de cierta independencia y que pueden ser finalmente pegadas en un todo, es un principio de gran poder que tiene aplicaciones en prácticamente cualquier esfera de la actividad humana. Los modernos lenguajes de programación procuran dejar intacta la vía para la aplicación de este importante principio y visto desde este ángulo es indudable que Logo ocupa un lugar prominente.

¿Persigue Logo enseñar a programar?

Hoy día parece existir concenso en que enseñar a programar no es ni la única ni la más importante razón para introducir computadoras en el aula. Pero si entendemos la palabra programación' en sentido amplio, es bien claro que el contacto con la tecnología del siglo veinte exige del individuo un mínimo de familiaridad con "formas débiles" de programación (por ejemplo, el empleo de un procesador de palabras). Aunque se hacen esfuerzos por hacer los procesos automatizados los más "amigables" que sea posible, para mí es claro que una sociedad que no le teme a la programación y que sabe programar tiene ventaja sobre una que resta importancia a ello. Además hay que tomar en cuenta que una vez que se conocen los principios básicos de la programación, estos son aplicables en general a cualquier lenguaje. De modo que por lo menos aceptemos el hecho de que, en el peor de los casos, aprender a programar no le hace daño a nadie. Ahora bien, regresando a la pregunta que nos ocupa: ¿persigue Logo enseñar a programar?. Yo respondería diciendo que no es demasiado importante saber si lo persigue o no, lo importante es el hecho de que a fin de cuentas lo consigue en gran medida. Y sobre todo es importante el hecho que consigue la apropiación de las ideas importantes inherentes a todo lenguaje de programación. La mayoría de estas ideas no son exclusivas de la programación sino que son ideas pertenecientes a la ciencia la matemática y la lógica o incluso podríamos decir a la cultura universal. Tomemos como ejemplos el empleo de variables, el empleo de condicionales o "branching", el concepto de procedimiento recursivo, el uso apropiado de las conectivas lógicas "y", "o"' "no" y muchas cosas más.

¿Qué hacen los niños en el laboratorio? ¿Sobre qué contenidos aprenden?

Siendo LogoWriter un ambiente que contiene elementos para el diseño, la exploración y la construcción, el mismo puede ser utilizado para desarrollar proyectos relacionados con cualquier tema del curriculum escolar. Es importante recalcar, por si esto no está claro aún, que LogoWriter no contiene datos o información sobre ningún aspecto del curriculum en alguna asignatura particular. Quien trabaja dentro del ambiente LogoWriter encuentra a su dispoción varios elementos que puede utilizar para la construcción de sus proyectos: primitivas para generación de gráficos, primitivas para tratamiento de texto, primitivas para tratamiento númerico y de listas y otras más (una primitiva es una palabra que el sistema entiende y que sirve para ejecutar una instrucción o acción. Por ejemplo el signo "+" es la primitiva para *sumar cantidades*). La conexión con temas del curriculum escolar trae como lógica consecuencia que los niños vayan en procura de los datos necesarios, *lo cual puede motivar muchas actividades* paralelas (visita a bibliotecas, realización de excursiones educativas, visitas a museos, etc).

Dentro del Programa de Informática Educativa es usual el enfoque por proyectos. Dentro de este enfoque, los niños desarrollan proyectos acerca de algún tema relacionado con el curriculum y *tienen gran libertad* de elección. Cada niño tiene oportunidad de plasmar su proyecto adecuándolo a su estilo personal, cosa para la cual hay poco espacio en *el aula tradicional*. Por eso, *quienes están* algo familiarizados con este estilo de trabajo, no se sorprenden cuando comprueban que niños tradicionalmente considerados resagados y de muy pobre rendimiento académico, muestran un rendimiento igual y en ocasiones hasta superior al de los alumnos tradicionalmente considerados como los mejores de la clase.

A LOGOWRITER MUSICAL EDITOR AND SOME OF ITS IMPLICATIONS

Francisco Quesada Ch.

Resumen.
En este artículo se describe un programa escrito en LogoWriter el cual proporciona un micro-mundo para la exploración musical. El editor permite la escritura y ejecución de melodías en el computador y está diseñado especialmente para motivar el aprendizaje de los fundamentos de la notación musical básica. También se discute acerca de cómo la introducción de modificaciones al editor es una tarea que, debido al "diseño minimal" del editor mismo, ocurrirá de modo casi necesario, abriendo así la puerta a una serie de actividades de otra índole. Estas actividades se relacionan no sólo con la música sino que invaden el terreno de la ciencias de la computación. El editor se convierte así en una herramienta para aumentar la capacidad de expresión musical de los alumnos y en un vehículo para el aprendizaje de conceptos importantes en ciencias de la computación.

INTRODUCTION

In this article we describe a micro-world for music exploration, which is embedded in the LogoWriter environment. Some of its potentialities as a learning tool are also investigated. The article is divided into three parts. In section one the musical micro-world is described and some activities for students working inside the micro-world are listed. Additional activities based in the analysis and modification of the program itself are discussed in section two. These activities pervade the area of programming and what we might call computer culture. They arise however from the context of the musical micro-world and are not completely separated from it. Moreover, these activities should serve as a complement to the musical environment. Part three contains the code of the program. (*)

(*) Due to space limitations, the code of the program is not included here.

1. THE MUSICAL ENVIRONMENT.

1.1 SOUND AND MUSIC IN LOGOWRITER.

The micro-world we are going to present provides the students with a series of tools for musical construction. We have tried to achieve a certain sense of balance regarding the quantity and quality of the tools, so that the resulting environment can still be sufficiently open for doing musical exploration, a requirement of any constructionist approach. With regard to the quantity of the tools, we would like the environment to be as small as possible, so that further extensions could be accomplished by the students themselves, opening the way for a whole new category of activities.

The generation of sound in LogoWriter is achieved through the primitive called TONE which is very simply and easily describable. TONE produces a sound whose frequency (pitch) and duration can be determined by the user. There is no other primitive available for the production of sound. From there on is a matter of ingenuity. Being compelled to make use of ingenuity is one of the key ideas in a constructionist learning environment.

Despite its apparent simplicity the primitive TONE, and its use within procedures designed by the user provides a rather powerful tool for the exploration of the properties of sound and for the achievement of interesting sound effects. If however, the interest is focused in exploring musical phenomena which are based on the notes of the western scale, the construction of some set of LogoWriter interface procedures becomes almost a necessity. Our main goal is to construct such a musical interface within the LogoWriter environment in order to make musical exploration easier and more inviting.

1.2 THE BASIC SERIES.

Our musical interface shows two clearly distiguishable levels. There is a first level which is formed by a set of very simple and small LogoWriter procedures which make the notes of the scale across several octaves more accesible. The idea is to have the chance of calling a note by a more familiar name than TONE X Y. For example, the note C located in the "center of the piano keyboard" can be reproduced by asigning the value 262 to the first argument of TONE. Its second argument is for duration (in wait units) henceforth this note will be represented by the procedure.

```
TO C :T
TONE 262 :T
END
```

This first level provides a BASIC SERIES of notes of variable length and definite pitch which are available as "building bricks" for the construction of other structures. Exploring or building musical structures within the BASIC SERIES resembles the production of sounds with a musical instrument, where one has the limitations imposed by the range of notes of the instrument under its normal tuning conditions. Composing melodies with the aid of the procedures of the BASIC SERIES is now an affordable task, specially for students with some musical background, for they will find a sufficient number of notes which can be called in a friendly manner.

1.3 THE SMALL EDITOR OF MUSICAL NOTES.

The second level of our musical interface consists of a program or set of mutually related LogoWriter procedures which we wil call the SMALL EDITOR OF MUSICAL NOTES (SEMN) The SEMN allows the graphical representation of a restricted range of notes of the chromatic scale and at the same time it allows one to hear the score that has been written. This second level of the interface has been built over the BASIC SERIES in the sense that without the BASIC SERIES, the SEMN won't work. Our main interest will be centered around the SEMN.

The SEMN is as computer program written in LogoWriter which leave space for students to play with certain basic musical phenomena. It is interactive and makes use of standard musical notation.

There are several ways of conceiving of an editor of musical notes. The one chosen here is characterized by the fact that notes are called by their names in English, and this of course entails a secondary purpose: to help students learn not only the location of notes within the pentagram but to relate them to their names.

1.4 WHAT THE SEMN DOES.

THE SEMN is an editor of small dimensions in the sense that it allows musical exploration within a restricted range of possibilities. Before we discuss its limitations, we would like to list some of the possible activites that students can undertake with it.

1. Exploring the relationship between the name of a note, its position in the pentagram and its sound.

2. Exploring the duration of notes.

3. Construction of small melodic and rythmic units.

4. Copying simple musical melodies or parts of a given musical score.

5. Construction of music pieces for exportation to other pages of LogoWriter.

6. Glueing together small musical phrases into a larger melody or song.

There is still a variety of other sort of projects which we shall treat in part two.

All the activities listed above are permeated by the constructionist nature of the top level environment (LogoWriter). The students will find a certain amount of room to make their work match their particular learning style. The fact that notes can be displayed graphically on the screen makes working within the editor more attractive.

1.5 THE TWO BASIC MODES OF EDITING.

The editor offers two basic modes of entering note data. The one which we consider the most important is called the "note mode" When inside this mode, notes are entered one at a time. After a note has been entered (by its name), it is placed in the pentagram:

the editor is then ready to accept more notes or play those notes already entered.

Once a note has been written and placed in the pentagram, the screen displays the following choices:

ENTER A NOTE **PLAY** **DELETE**

At this moment students can choose among the displayed activities. When the option PLAY is selected, the music can be heard as many times as desired, before writing more notes. In order to be able to continue editing, without loosing the score already written, the editor is entered through another procedure called CONTINUE. The possibility of achieving a certain goal is strongly enhanced by the feedback mechanism supplied by the PLAY option and the fact that it can be repeatedly activated before entering more notes. This whole mechanism however, would not be complete if students could not have the chance of making corrections to the score, in case something went wrong.

The other mode of entering notes into the SEMN is called the "list" mode. When inside this option, a student will enter at once the list of notes he/she wants. Graphical representation and playing will take place after the student finishes entering the list and hits RETURN.

This modality of editing can be appropiate for those students with a higher musical background, or those who seek for a bigger challenge. It can also help to enter previously composed melodies into the editor. Moreover, the editor offers the possibility of saving composed melodies as text which can be brought into it at any given time. This is an example of an operation that is "hidden" Students will have to discover it by themselves, and in doing so, they will have to learn about the structure of the program and about lists which are stored as variables. They will also have to discover how to load a list which is written as text into a variable. The editor provides an opportunity to get in touch with some important concepts of computer science.

1.6 RANGE AND LIMITATIONS OF THE SEMN

The SEMN is a small scale notes and melodies editor and as we already mentioned, among its goals are he learning of some basics fo musical notation.

The range of notes accepted by the SEMN is restricted to the G clef only, and the notes available range from C under the first line to G above the fifth line of the pentagram. The length of the notes is absolute and not variable, for example a quarter note will always be represented by a value of 8 en the second argument of the primitive TONE. The editor offers whole notes, half notes, quarter notes and so on until thirty second notes. A dot can be applied to all these types of notes with the exception of the thirty second note. (Which is a WAIT unit of 1).

The above mentioned range of notes and figures provides resources for a reasonable quantity of musical projects. Expanding the capabilities of the editor in several directions is always possible. Part two discusses some ways to expand the editor. Within the SEMN other musical symbols are available:

rest symbols for all type of notes

sharp and flat symbols

Neither key nor time signature is declared at the begining of the musical score, so the sharp and flat symbols must be applied individually to each note. There is no "natural" symbol available. No separating lines between bars are inserted, although students could place them directly ofter the score has been written, as an extension activity.

1.7 SPECIAL NOTATIONAL CONVENTIONS.

The editor has been built around the idea of entering the notes by their names in the English language. In this regard, there is one problem. There is no standard way to refer to notes separated by one or more octaves. We have designed our own notation for this purpose, keeping in mind that it should be natural and easy to use all througout the BASIC SERIES.

Our convention consists of denoting A, B, C, etc. the notes on a well determined octave. For example, C will always mean a value of 262 for the first argument of TONE. Notes in other octaves are referred to by using the "shiffting" operators "+" and "-". As an example, C+ wil stand for a note an octave higher than C and C++ is an octave higher than C+ or equivalently, three octaves higher tan C-. The following example shows a list of notes and the resulting screen display.

DELETING NOTES IN THE SEMN

As we pointed out before, without a certain mechanism for the deletion of notes, this musical micro-world would be too narrow. Keeping in mind our principle of supplying a moderate quantity of tools, the deleting mechanism available in the editor is very simple. The procedure DELETE actually deletes the last note entered in the pentagram. Obviously this operation suffices to eliminate any "tail" of the melody by iteration. Recall that such a simple observation might not be obvious for children who will have to discover it for themselves.

After the DELETE procedure is triggered, the whole screen dissapears and the new list of notes is automatically installed in a new pentagram and played. To continue writing notes the student has to exit the PLAY option and re-enter the editor through the procedure CONTINUE.

We can think of the procedures PLAY, CONTINUE, and DELETE as being satellite procedures with respect to the editor's central task. These three procedures play an important role in providing feedback and facilitating the achievement of goals. They also make exploration more accesible for students.

2.
2.1 LEARNING PROGRAMMING SKILLS AND BEYOND.

In this section we discuss the **possibilites** of the SEMN as an object which can engender activities **which** are not merely musical in nature but belong to the field of computer programming and computer science in general. The SEMN is just an example of a type of object through which students can get involved in analyzing, extending and modifying a computer's program.

Technology and specially computers have brought a set of concepts that are becoming more and more, part of the standard "folklore" of modern society. Many of this concepts are beyong what is commonly understood by programming in a given programming language. Teachers and students that have access to the LogoWriter environment must encounter many of these aspects in their daily work. Some of these activities have to do with important general principles of computer science and technology and even share a common basis with phenomena in other sciences. Yet, most of the times these things are learned by necessity along the way, by means of accumulating receipes with no underlying general principles upon which to organize them. As an example let's think of the teacher that knows how to perform certain operations on LogoWriter pages and has learned (probably by memory) to perform certain similar operations on files using DOS commands, without being able to recognize that both types of operations are similar, sometimes even identical in nature and only different in their external appearence.

We think that having to deal with different aspects of a well chosen computer program (even a short LogoWriter program) can provide a good reference frame for learning not only about programming but also about other topics of computer science. One of the aims of this article is to show how computer programs can be used as "objects to think and work with" in pretty much the same manner a radio or motor can be used to learn about electricity or electronics or even more, about general principles of science and technology.

In our case, we have a LogoWriter program which has been designed to produce a micro-world for musical activities. This means that at a first stage no special attention is placed on the program structure or details of its code. The first level of activities derived from the existence of the program are those that are accomplished within the micro-world provided by the program and these are activities of a purely musical nature.

The desire of improving the efficiency and range of the first level of activities can easily lead to a second level of activities in which focusing the attention in the structure of the program and some of its details becomes a necessity. The teacher might take advantage of this opportunity for using the musical context as a frame for other types of tasks, mainly those connected with programming and other general ideas of computer science.

In order to ilustrate what we are intending to say, let's make a list with some of the problems that might arise as a result of being involved in "first level" musical activities.

1) A student has succeeded in composing a melody within the editor. The student now wants to carry this melody to a new LogoWriter page to put it in a project. How can she/he do that?

2) A student is using the editor in the list-mode. He/she notices that when loading a list through the ordinary list-mode, any typing mistake will produce an error message and a rejection of the entire list. The student would like to avoid having to type the entire list again, especially when it is long. A natural idea that might come to his/her mind is to ask whether it is possible to edit the list with the word processor, where mistakes are easily corrected, and then push this list into the editor. Is it possible to do that?

3) Another student enjoys writing melodies with the editor and has written many of them. One thing that bothers the student is that she/he would like to store all the melodies composed. Right now, every time she/he turns the computer off, the melodies are lost because they are stored as variables in the computer's memory Is there a way of storing them as text? This is the same type of problem as #2 yet it has risen from a different angle.

4) A student wants to add new notes to the editor. Which procedures should he modify and which new procedures should he add?

5) A student wants to have the duration of the notes not to be absolute but variable. She/he wants to introduce a new variable "tempo" whose value is chosen by the user at the beginning of the program and which determines the duration of the whole note. The duration of all other figures should vary accordingly.

6) A student wants to be able to choose another clef when entering the editor. Right now, the only clef a available is the G clef.

7) A student has noticed that when dealing directly with the primitive TONE or when using the procedures of the BASIC SERIES, two consecutive notes of equal *frecuency* will be bounded. For example, the two notes given by TONE X Y TONE X Z will sound the same as TONE X Y+Z (something that shoul better be interpreted as a "bug" of the LogoWriter version 2.01). Why can the two notes be heard separately within the editor.

We do not want to make any assertions concerning the ages at which certain types of activities might seem appropiate or inappropiate. Of the latter list of activities, some of them might seem a little advanced for young students and perhaps this is right. Our interest is not in classifying activities according to ages but rather to show how a whole set of new activities related to the editor arise as students "navigate" within it. We also want to stress the fact that there are enough activities to cover all the spectrum of ages and we want to place a special emphasis on the activities that could fit well among secondary school students. There isn't much work done which focuses in the way that secondary school students could use Logo. Our opinion is that Logo can provide secondary school students with a powerful environment, not only as a learning tool but also as the language for learning higher programming techniques, as well as a vehicle for the acquisition of general computer science concepts. The second part of this article tries to give a hint in this latter direction, by using the idea of a contextualized approach to programming and computer culture.

2.2 AN EXAMPLE.

As an example of the wide range of ideas that in one way or another could be connected with the editor, we will analyze problem 1) of the list above. In having to consider the possibility of exporting a melody, to other LogoWriter pages, we will be lead to discuss the type of objects that represent a melody within the editor. If there are such objects, we also will have to deal with the problem of finding out if they are exportable to other LogoWriter pages and if so, under what conditions are these objects able to perform as we expect, that is to reproduce the melody they represent. As we can see, one simple concern can be broken into several issues, each one of them important enough to be treated separately.

Let's start by considering the melody shown in the pentagram below.

This pentagram is the result of having entered the following sequence of notes:

C quarter C quarter G quarter G quarter A quarter A quarter G half

We can immediately notice that this is a list of notes which actually represents the melody. We do not know yet if this list actually exists as a "real" LogoWriter list (remember that "lists" are LogoWriter basic data structures). We also do not know yet if there is any other type of objetc which represents the above melody inside the editor. The answer to both questions is yes. The above list has been stored inside the editor as the variable whose name is MAINLIST. Even if the user has employed the note-mode, the list MAINLIST will be created by the editor. But there is another list that is created by the editor and which also represents the melody. The latter, which we have named COMPILEDLIST has the following content:

COMPILEDLIST = [C 8 CUT C 8 G 8 CUT G 8 A 8 CUT A 8 G 16]

Both lists metioned exist as global variables, so it is possible for students to operate on them after the editor has been run. From the point of view of exporting them to other LogoWriter pages, both lists can be placed at different hierarchies. The list MAINLIST cannot be "executed" outisde the editor. The instruction RUN: MAINLIST will not produce the melody to be played since the elements which form this list are not the names of LogoWriter procedures (or primitives). On the other hand, the instruction RUN: COMPILEDLIST will produce the melody to be played if this is done "in presence" of the BASIC SERIES.

It won't be meaningless to say that the MAINLIST is of a higher level than COMPILEDLIST. In order to be able to play MAINLIST in another LogoWriter page, one should also carry a great deal of the whole editor with it. As far as COMPILEDLIST is concerned, it will only require that the BASIC SERIES be carried with it to the new page.

At this point a natural question would be to ask if there is a list representing the melody (the sound only, not the graphics) that could be exported to other LogoWriter pages, without having to carry any other procedures with it. Clearly this list should be composed of LogoWriter primitives, and it is easily obtainable form COMPILEDLIST after looking at the values of the parameters in the BASIC SERIES. Producing it "by hand" should be an easy task. For the melody in our example, this "low level" unconditionally-exportable list which we will call PRIMITIVELIST has the form:

PRIMITIVELIST = [TONE 262 8 TONE 1 1 TONE 262 8 TONE 392 8 TONE 1 1 TONE 392 8 TONE 440 8 TONE 1 1 TONE 440 8 TONE 392 16]

Discussing these representations and looking at them in a hierarchical order can open the way to further desiderata. What are these lists? Are they data structures or could we consider them programs in some sense? Is it meaningful to apply the word "executable" to either of them? One offen hears computer cultivated people speak of files that are executable and files that are not. What does this mean?

The consideration of the above three different lists associated with the melody can be used to show the relativity of words like "program" "data structure" or "executable". Teachers and students offen ask questions that have very close connection with facts like the ones discussed here. Just to mention an example, think of the student that wants to know why trying to look at a text file which has been produced with a word processor generally doesn't work if this is done outside the word processor. Or think how close concepts like "machine language" or "compiler" are from the discussion about the hierachies of the above three lists.

We finish the discussion based on problem 1) by giving its natural outcome in the form of a project: to design a program that takes

COMPILEDLIST as its input and produces PRIMITIVELIST as its output. This procedure should make the exportation of melodies a straightforward matter.

2.3 BLACK BOX THINKING

Some new trends in the way science and technology should be taught are beginning to be noticeable in the horizon. A healthy tendency to separate what is substantial from what is not, might be the result of several driving forces in modern society, and its implications can be felt in education, especially at higher levels. In later years, great importance has been given to such things like System Theory and several serious attempts to bring these trends into education have been made in different parts of the world. Computer science and technology play an important role in this scenario. Dealing with a computer program in the manner we have been describing shows the importance of learning to recognize what should be focused on and what should be isolated at a given moment. Let's use the SEMN once more to illustrate the point. As a collection of several LogoWriter procedures, the relation among them plays a more important role than the individual details within any given procedure. When students try to modify or add a part to the program, it should be useful for them to learn to think in terms of "black boxes". Of course, "black box thinking" is just an expression to refer to an attitude or perhaps a method for approaching things. It has to do with the ability to break a problem into the "right" parts (parts that perform somehow independent tasks) and to isolate unsubstantial details from the analysis at a certain moment, when those details play no important role (a good example of the power of "black box thinking" is given by Thevenin's Theorem for electrical networks). Of course, "black box thinking" can only be applied successfully to a program if the program under consideration is well structured. If students are given good computer programs to think and work with, they will be more likely to become better program analysts and also better program designers.

HACIENDO MATEMATICA CON LOGO

Carlos Alberto Salas Arias
Departamento de Química
Universidad Nacional, Heredia

RESUMEN

Esta es la descripción de una experiencia sobre una forma particular de la utilización del lenguaje Logo, que va más alla del aprendizaje tradicional de los comandos de la tortuga y el uso de procedimientos para dibujar gráficos.

Muestra un enfoque diferente: la creación de un ambiente con Logo para desarrollar habilidades en la resolución de problemas por medio de un trabajo de investigación.

Un experiencia que permite al educando utilizar el lenguaje Logo para "***Hacer matemática***".

INTRODUCCION

Hoy, todos quieren computadoras en las escuelas. Computadoras son un símbolo de estatus, un indicador de que estamos en primera línea en el mundo de la educación. Inclusive, los países en vía de desarrollo están tratando de adquirir la tecnología, a pesar de sus economías. Además del problema de adquirir los equipos, esta el otro: ¿Qué hacer con ellas?

Muchos piensan que la microcomputadora es una herramienta que les asegurará a los estudiantes un lugar en el mercado de trabajo. Otros la ven como un instrumento de mejoramiento, un tercer grupo se pronuncia en favor de una posición más general: usar la computadora para aprender como pensar y resolver problemas, y el deseo de aprender más. Sin embargo, ¿cómo pueden las computadoras promover niveles más altos de pensamiento y de descubrimiento intelectual? ¿Cómo se puede lograr esto? Hay un lenguaje de computación que refleja las teoría de aprendizaje e investigación de Jean Piaget, Seymour Papert, e inteligencia artificial: **Logo**. Logo hace una buena conección entre los comandos iniciales y primitivas como: DERECHA, IZQUIERDA, ADELANTE, y ATRAS y los movimientos familiares del cuerpo, dándonos una "tortuga" en la pantalla para ser movida. Estos comandos familiares le permiten al usuario un control casi inmediato y fácil. La tortuga es también interactiva, responde con mensajes muy descriptivos sobre errores siendo muy amigable y suministrando estructura y claridad al proceso de programación y resolución de problemas.

El gobierno de Costa Rica, por medio de la Fundación Omar Dengo, ha puesto mucho esfuerzo y dinero para adquirir computadoras, a pesar de los problemas económicos que tiene el país. Con la llegada de las computadoras se ha hecho claro que el problema real es que hacer con ellas. IBM ha vendido en los últimos dos años varios miles de computadoras, como parte de esta venta, esta compañía capacitó un grupo de doce maestros en el uso del lenguaje Logo.

Estos maestros fueron capacitados en M.I.T. por el equipo conducido por Seymour Papert. De regreso a Costa Rica estos educadores han suministrado un capacitación similar a otros maestros, quienes están usando Logo con los niños. Este entrenamiento es muy necesario pero no suficiente para usar Logo adecuadamente. La mayoría de los educadores necesitan, además de conocer el lenguaje, aprender como implementar la versatilidad de Logo para definir ideas y teorías. Las primitivas en Logo pueden ser usadas para definir ideas y teorías que pueden ser probadas, estas primitivas pueden ser usadas para definir formas geométricas como cuadrados, triángulos, círculos, etc., y en un estado más avanzado, esto puede ser usado para demostrar la trayectoria de una partícula, y ser usada para simular una teoría.

La pregunta más importante es como desarrollar niveles altos de pensamiento. Reuven Feuerstein hizo un estudio que involucró niños judios. El encontró que muchos de estos niños carecen de herramientas específicas necesarias para resolver problemas, como (1) orientación de ellos con relación a otros objetos, (2) identificación de problemas, (3) ver relaciones, (4) hacer comparaciones, y/o (5) planear y organizar (Chance, 1981). De acuerdo a Dale (1984), Logo puede ser usado como una ayuda para desarrollar todas estas cinco habilidades por ejemplo, la orientación espacial comienza al mover la tortuga en la pantalla. Encontrando errores en un programa de Logo nos da suficiente práctica en la identificación de problemas. Además, la interactividad de Logo y su estructura de procedimientos hace el proceso sistemático y de ésta forma más fácil de entender. Usando procedimientos para escribir y seguir programas también ayuda al desarrollo de la habilidad de ver relaciones. Además, Logo nos permite el examen de figuras, lenguaje, y programas para desarrollar el vocabulario y las herramientas para hacer comparaciones. Finalmente Logo apoya ambos métodos de pensamiento, el inductivo y deductivo en la solución de problemas de cualquier complejidad.

EL ESTUDIO

Trabajando en un proyecto en la Universidad Estatal de California en Chico con el Dr. William Fisher en 1989, exploramos nuevas formas de usar Logo en la clase, más allá del aprendizaje tradicional de los comandos de la Tortuga y el uso de procedimientos para dibujar gráficos y tocar música. Este fue un enfoque diferente, fue la idea de crear un ambiente con Logo para desarrollar la habilidad de resolver problemas por medio de la investigación.

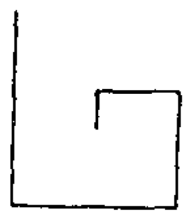
Se utilizó el tópico de *espirolaterales* los cuales son un buen ejemplo de como la computadora, y Logo en particular, puede mejorar el estudio de una idea matemática. Permitáme utilizar la explicación que Fisher y Campbell utilizan para explicar esta idea en su artículo "Investigating spirolaterals Through Logo":

El estudio de espirolaterales es rico y excitante para la investigación de los estudiantes, comienza normalmente con figuras generadas de una secuencia de distancias, cada una seguida por un giro en ángulo recto. Consideremos, por ejemplo, el incremento de distancias [1 2 3 4 5], el usuario es instruído para trazar una ruta generada cuando se mueve de acuerdo a las siguientes instrucciones:

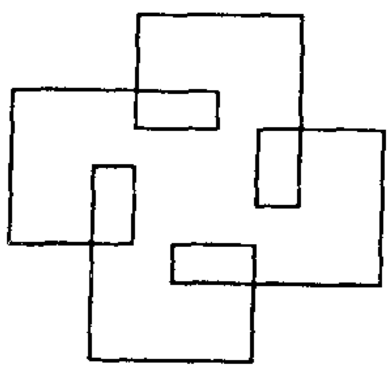
Muévase	Adelante 1 unidad
Gire	Derecha 90 grados.
Muévase	Adelante 2 unidades
Gire	Derecha 90 grados.
Muévase	Adelante 3 unidades
Gire	Derecha 90 grados.
Muévase	Adelante 4 unidades
Gire	Derecha 90 grados.

Muévase	Adelante 5 unidades
Gire	Derecha 90 grados.

Este conjunto de instrucciones se llama a veces el "ciclo básico" y, después de implementado (generalmente por medio de su dibujo en papel cuadriculado), se obtiene lo siguiente:

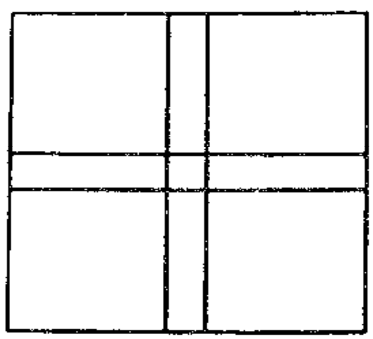


¿Qué pasa si repetimos el ciclo básico una y otra vez? En el ejemplo anterior, cuatro repeticiones del ciclo básico forma la siguiente figura.

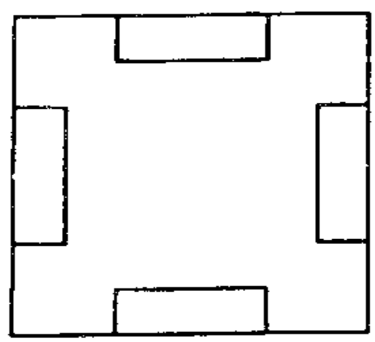


(1 2 3 4 5)

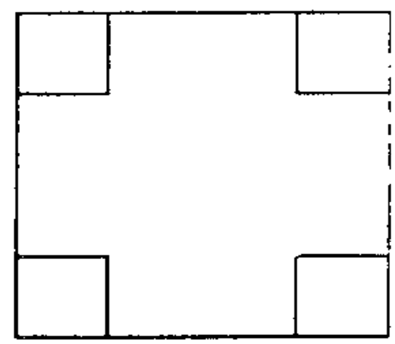
Si dibujamos repetidamente el ciclo básico obtenemos una figura llamada espirolateral, la cual es una ruta poligonal con giros constantes (orientada por los vértices de los ángulos externos), si las longitudes se incrementan sistemáticamente, esta es una figura espiral; de ahí su nombre espirolateral. El proceso simple de creación de una espirolateral nos lleva a muchas e interesantes observaciones. Por ejemplo, si quitamos las restricciones y dejamos que cada estudiante escoja cualesquiera cinco enteros positivos, entonces aunque las figuras luzcan un poco diferente, observamos que todas las figuras cierran después de 4 repeticiones del ciclo básico.



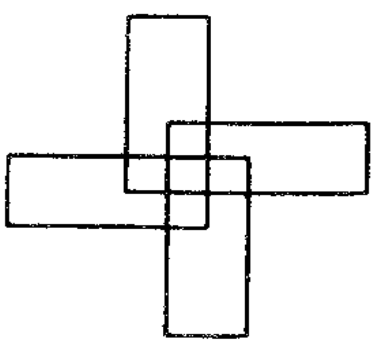
[5 4 1 4 5]



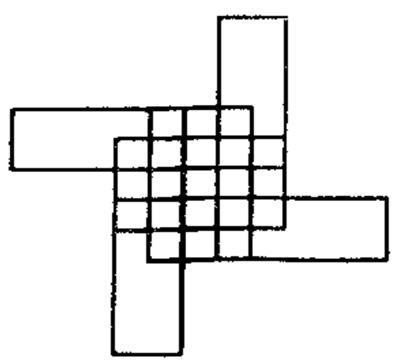
[1 5 5 1 3]



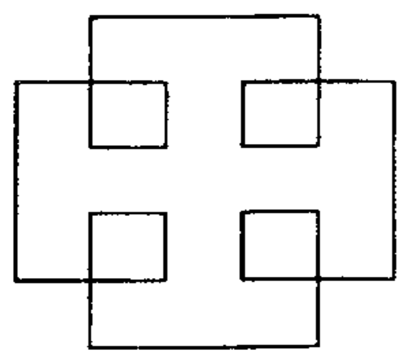
[1 4 1 1 1]



[1 5 2 4 1]



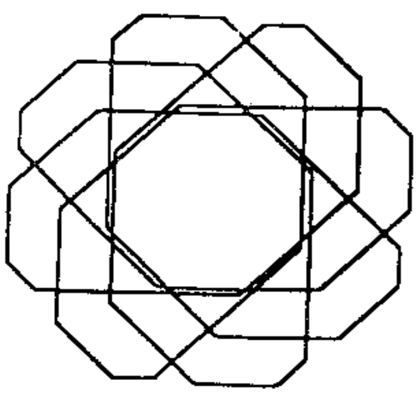
[1 8 2 7 5]



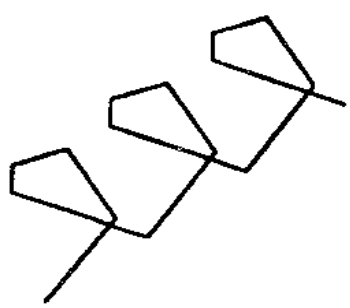
[1 2 3 2 1]

Esto lleva a varias preguntas lógicas: si removemos el cinco de lista, ¿cerrarán todas las figuras después de 4 repeticiones del ciclo básico? ¿Qué pasará con esta lista [1 4 3 8 1 2 3 10]? y ¿qué hay de especial acerca del giro de 90 grados?; y ¿por qué no 60, 45, o 63? Mientras investigamos, ¿qué pasará con el uso de números negativos para las distancias (así viajamos para atrás) o distancias de 0? Estas ideas son todas fáciles de entender, pero si la lista es más larga o si el giro no es un ángulo "bonito" (90 funciona bien en papel cuadriculado y 60 es fácil en papel con puntos), la implementación a mano se hace difícil. Sin embargo, la tortuga de Logo disfruta siguiendo tales comandos! Un procedimiento simple de Logo, SPIRO, ha sido escrito para crear diferentes figuras espirolaterales. El procedimiento toma tres entradas: el primero es un factor escalar constante para multiplicar las pequeñas distancias de la tortuga como 1,2,3, haciendo éstas más fáciles de ver; la segunda entrada es una el ángulo de giro constante; y la tercera entrada es una lista (entre paréntesis) de las distancias que debe seguir el ciclo básico. Al correr SPIRO, la tortuga viaja hasta que completa la figura; si esta no regresa a la posición original, la tortuga viajará sin fin y el procedimiento se debe abortar.

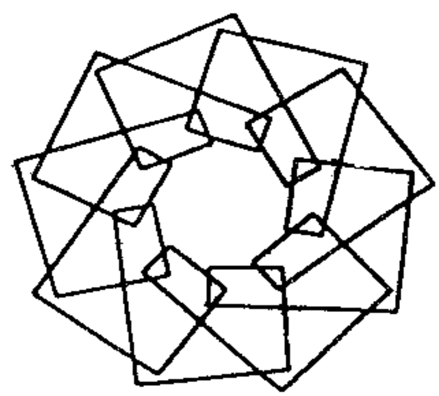
Antes de continuar con la discusión de la aplicación de SPIRO, veamos la belleza y diversidad de figuras dibujadas con SPIRO:



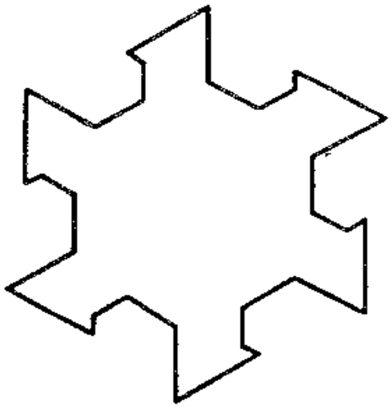
SPIRO 10 45 [1 2 3 4 5]



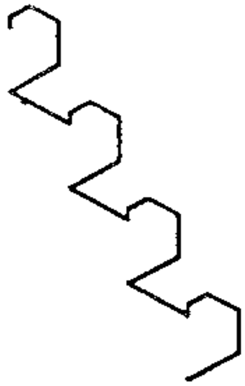
SPIRO 10 72 [1 2 3 4 5]



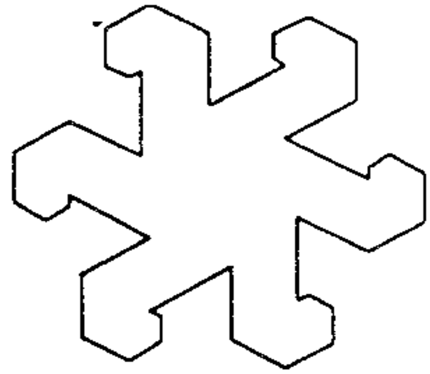
SPIRO 10 98 [1 2 3 4 5]



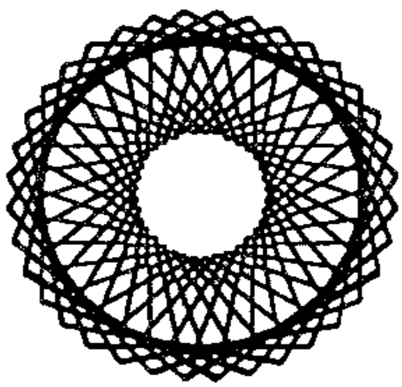
SPIRO 10 60 [1 2 3 4 -5]



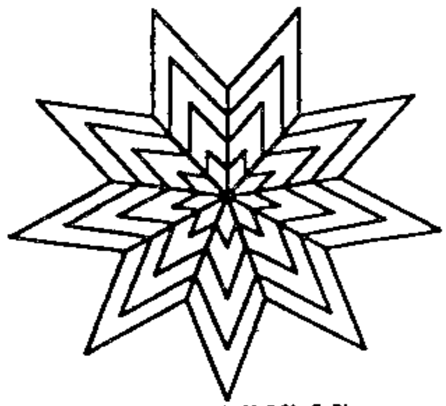
SPIRO 10 60 [1 2 3 4 5 -6]



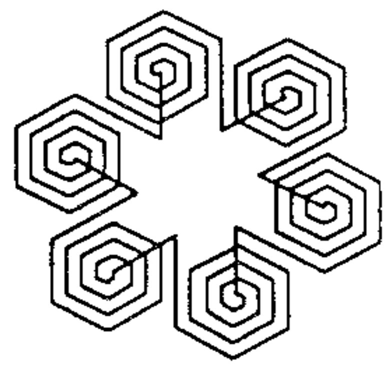
SPIRO 10 60 [1 2 3 4 5 6 -7]



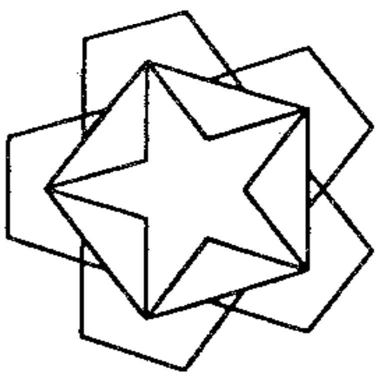
SPIRO 10 70 [1 2 3 6 5 2 1]



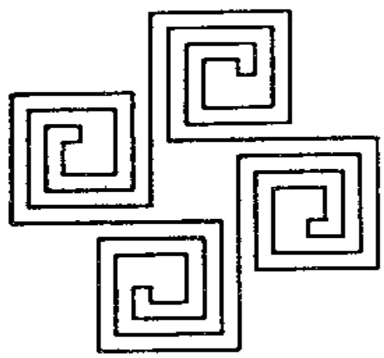
SPIRO 10 40 [1 1L -1 -1L 2 2L -2 -2L
3 3L -3 -3L 4 4L -4 -4L 0]



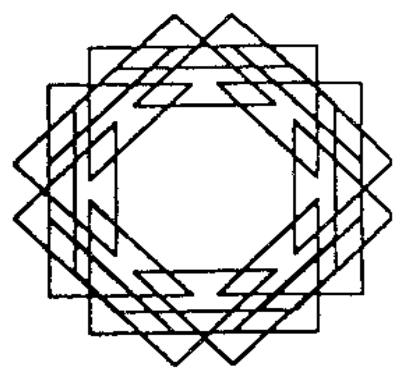
SPIRO 10 60 [1 2 3 4 ... 24 -25]



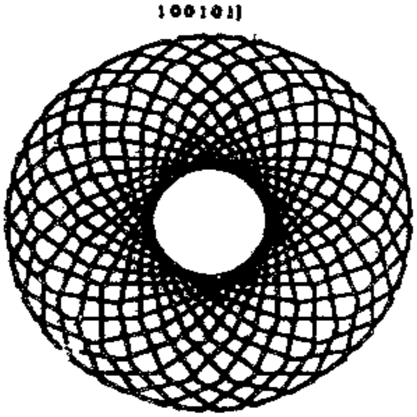
SPIRO 10 72 [1 1 0 1 0 0 1 0 0 0
1 0 0 1 0 1]



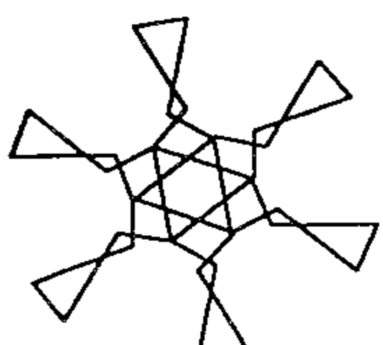
SPIRO 10 90 [7 6 5 4 3 2 1 0L 0L 1L 2L
4L 5L 6L 7L 8L 12]



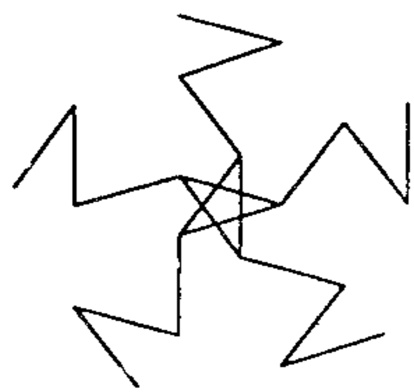
SPIRO 10 45 [1 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0
1 0 0 1 0 1 1]



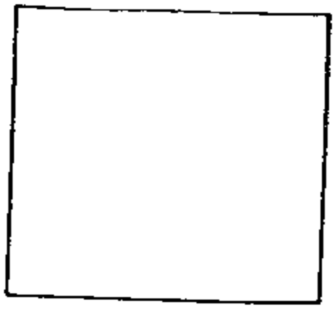
SPIRO 10 11.25 [1 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0
1 0 0 1 0 1 1]



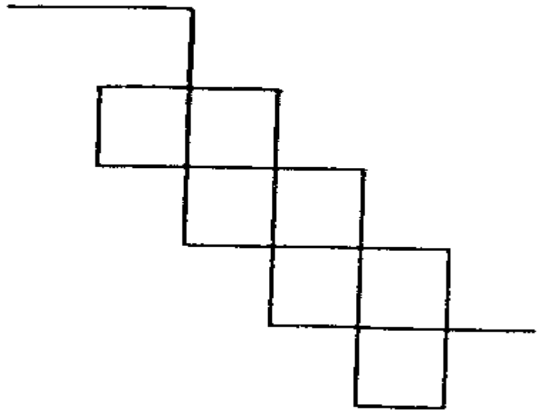
SPIRO 10 35 [1 0 2 0 -1 0 2 0 1 0 -2 0]



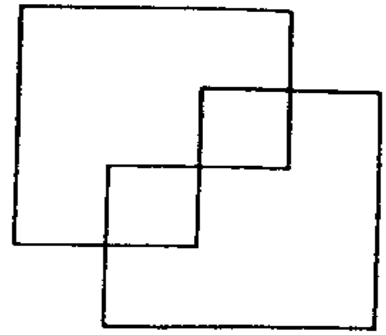
SPIRO 10 36 [1 1L 0L 1 0 0 1L 0L 0L 0L
1 0 0 0 0 1L 0L 0L 0L 0L 0L
1 0 0 0 0 0 0]



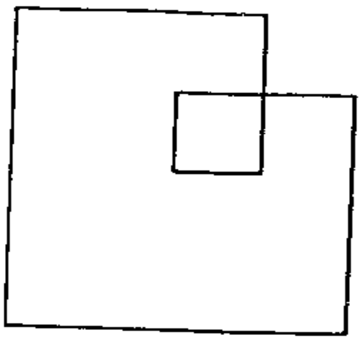
SPIRO 10 90 [1 1]



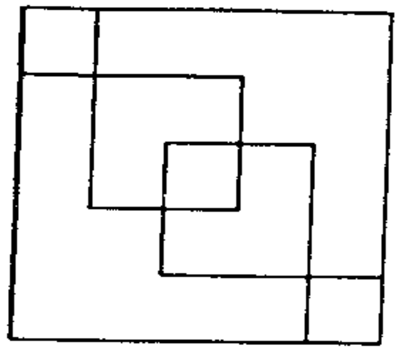
SPIRO 10 90 [1 2 2 1]



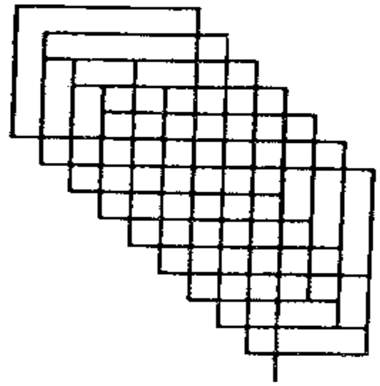
SPIRO 10 90 [1 2 3 3 2 1]



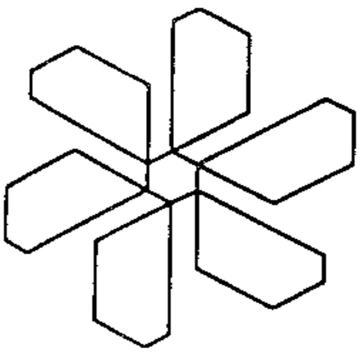
SPIRO 10 90 [1 2 3 4 4 3 2 1]



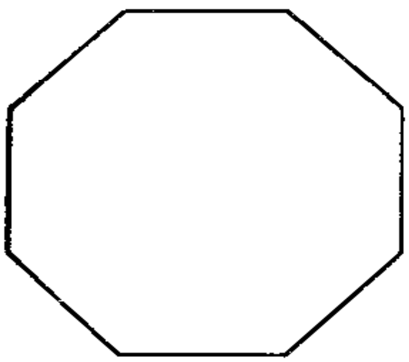
SPIRO 10 90 [1 2 3 4 5 5 4 3 2 1]



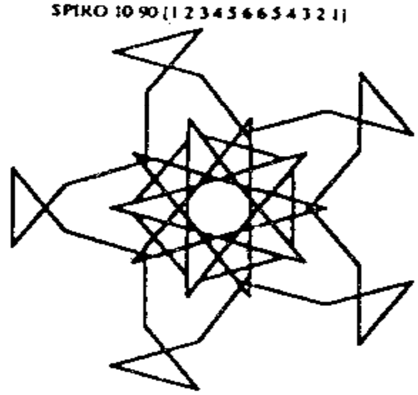
SPIRO 10 90 [1 2 3 4 5 6 6 5 4 3 2 1]



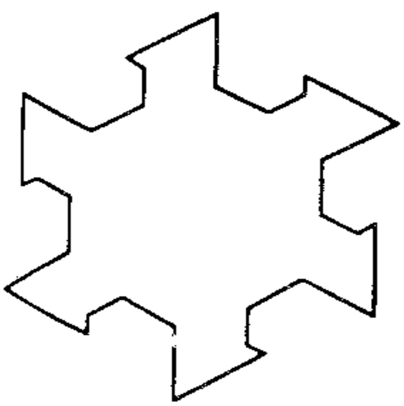
SPIRO 10 60 [1 2 3 4 5]



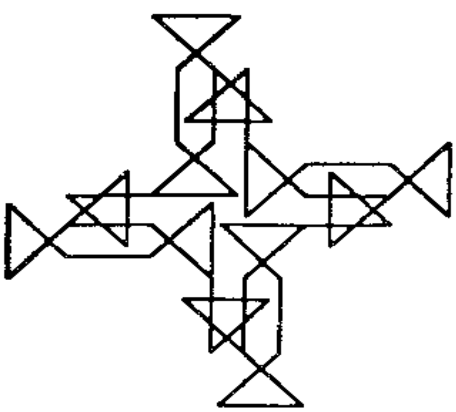
SPIRO 10 45 [1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]



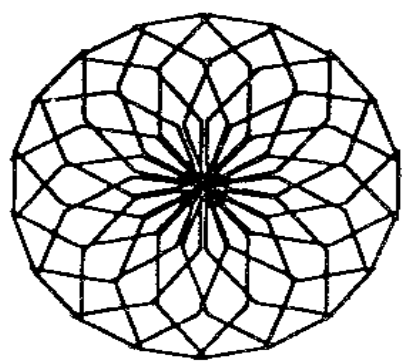
SPIRO 10 36 [1 -1 1 1 -1 1 1 1 -1 1 1 1 1 1 -1]



SPIRO 10 60 [1 2 3 4 -5]



SPIRO 10 45 [1 -1 1 1 -1 1 1 1 -1 1 1 1 1 1 -1]



SPIRO 10 140 [1 1 1 -1 1 1 -1]

La idea detrás de SPIRO, o sea comenzar con un conjunto simple de instrucciones y experimentar con él, fue la base del estudio diseñado, en parte la idea utilizada por el profesor Fisher fue para involucrar a los estudiantes en un proceso de hacer matemáticas. El coleccionar datos y trabajar en pequeños grupos, no sólo fue para diseñar las preguntas de la investigación, sino que también muchas de las ideas matemáticas fueron descubiertas.

Los primeros pasos del estudio fueron la elaboración de varias preguntas relacionadas con espirolaterales y el procedimiento SPIRO y la busqueda de respuestas a estas preguntas.

Algunas de las preguntas fueron:

1.- Si mantenemos el ángulo constante, ¿cómo afectan los cambios de la [LISTA] en la el resultado de las figuras espirolaterales?

2.- Si mantenemos la [LISTA] constante, ¿cómo afecta el cambio del ángulo de entrada en el resultado de las figuras espirolaterales?

3.- ¿Cuándo las formas espirolaterales completan figuras y cuándo crean figuras que no cierran?

4.- ¿Qué impacto tienen los números negativos y el cero cuando se incluyen en las listas de valores?

5.- ¿Qué impacto tienen los giros hacia la izquierda sobre la espirolateral resultante?

6.- Espirolaterales son dibujados generalmente en el sentido de las manecillas del reloj, otras veces en el sentido contrario de las manecillas del reloj; ¿puede determinar cuándo ocurre cada una?

Se comenzó con la primera pregunta con un giro constante de 90º, aproximadamente una semana fue dedicada a experimentar con SPIRO y escribir un lista de observaciones, la mayoría fueron acerca de la idea de encontrar si la tortuga regresaría al inicio o no.

La segunda semana se trabajó con las observaciones. Después de probar algunas de las observaciones y discutir sugerencias, una nueva tarea fue diseñada para la siguiente semana: escribir conjeturas acerca de SPIRO relacionadas con las observaciones. Esto fue un trabajo interesante porque fue el inicio de la tarea de "hacer" matemáticas.

A pesar de que el segundo reporte tenía conjeturas incorrectas, fue una sensación agradable el saber que las matemáticas pueden ser agradables e interesantes. Fue interesante ver como el papel del maestro no es el de sentarse y ver como el aprendizaje se realiza, sino más bien guiar y dar sugerencias, aumentando en esta forma los límites intelectuales e imaginativos. El maestro fue un modelo de aprendizaje quien estaba dispuesto a experimentar toda la emoción, el trabajo, y el esfuerzo que acompañan un aprendizaje profundo.

Más preguntas y nuevas ideas fueron discutidas para ser trabajadas durante la siguiente semana para ayudar a darle forma y redefinir las conjeturas.

El trabajo se convirtió en un enfoque donde:

(a) había preguntas para guiar y estimular el pensamiento,
(b) discusión de maneras de usar Logo y SPIRO como un instrumento de aprendizaje,
(c) trabajo independiente para encontrar respuestas,
(d) reuniones semanales para transformar y reordenar información,
(e) nuevas preguntas y más trabajo independiente,
(f) encontrar modelos para desarrollar conjeturas,
(g) más trabajo independiente, nuevas conjeturas,
(h) uso de la teorías matemáticas apropiadas para probar o descartar las conjeturas.

Algunas horas fueron usadas interpretando las conjeturas, y dándoles significado. Fue un trabajo de decidir cuales conjeturas eran falsas para luego corregirlas. Al final del proyecto fue la primera vez que se empleó la pizarra para hablar de la matemática apropiada, algunas ideas fueron discutidas sobre teoría de números y divisores múltiples comunes, al igual que ideas sobre geometría, círculos, y ángulos inscritos.

CONCLUSIONES

Se concluye este reporte diciendo que la parte más importante de este proyecto fue encontrar como Logo puede crear un ambiente donde el aprendizaje puede llevarse a cabo, el ver como las computadoras pueden ser utilizadas como un herramienta para el descubrimiento, el tener la oportunidad de hacer matemáticas. Como Fisher y Jones (1987) dicen"...comenzar con el germen de una idea, desarrollarla, hacer definiciones y conjeturas, y finalmente decidir la validez de las ideas. Esto es lo que cada matemático hace..."

Este es un enfoque que abre nuevas puertas para países como Costa Rica, donde mucho esfuerzo y equipo es utilizado para enseñar Logo y su filosofía. Es una manera de utilizar Logo para el descubrimiento, Logo como una herramienta para resolver problemas que puede crear un ambiente de aprendizaje, más allá de la idea de utilizar Logo únicamente para aprender los comandos y escribir procedimientos para hacer diseños gráficos.

Esta experiencia es una muestra de que Logo es más que un lenguaje de computación. Es un medio para una meta educativa de aprender como pensar y resolver problemas. Esta construído sobre una filosofia educativa. Lo que Logo ofrece es una manera excitante de lograr una dificil, pero tal vez la más importante, meta educativa.

REFERENCIAS

Chance, Paul. *The Remedial Thinker.* Psychology Today. October, 1981.

Dale, E. J. *Logo Builds Thinking Skills.* Proceedings of the NECC' 84. Dayton, Ohio. June, 1984.

Fisher, W. and R. Campbell. *Investigating Spirolaterals Through Logo.* California State University, Chico.

Fisher, W. and J. Jones. *Doing Mathematics in a Logo Environment.* Academic Computing. December/January. 1988/89. 34-50.

SECCION
DE ENSEÑANZA
DE LAS MATEMATICAS

"MATEMATICA PARA LA FAMILIA", EN EL CONTEXTO DEL DESARROLLO DE LA SOCIEDAD LATINOAMERICANA

Prof. Jeannette Barrantes M
Prof. Ana Teresa Hidalgo M.
I.T.C.R

Se presenta una experiencia educativa que forma parte de una investigación orientada a la elaboración de un proyecto alternativo, basado en el programa "Matemática para la Familia" de la Universidad de Berkeley, California pero con experiencias más adecuadas y representativas del contexto nacional y regional, y en el marco de recursos de que dispone la realidad latinoamericana.

De la mano de las políticas nacionales vigentes, este proyecto pretende incidir certeramente en el desarrollo de una actitud familiar sobre el aprendizaje de las matemáticas, que redunde en beneficio de los costarricenses del año 2000 por medio de una comprensión detenida de las matemáticas en sus diferentes aspectos.

EL PROBLEMA Y SU IMPORTANCIA

La influencia que sobre la enseñanza de las matemáticas ha tenido la visión racionalista de estas, se manifiesta por la aplicación estricta, dogmática, memorística de contenidos programáticos alejados de la realidad del alumno, todo esto agravado por un simbolismo o lenguaje abstracto que a veces dificulta la comprensión. Más aún, se agrava ésto por la poca o nada consideración del desarrollo biológico y psicológico del estudiante.

Cabe resaltar como consecuencia fundamental e inmediata, el temor de la gente por las matemáticas y por todo lo que se relacione con ella.

Todo esto lleva a:

1. Una concepción de que las matemáticas no sirven para la vida.
2. Una incapacidad de la gente de interpretar el medio.
3. Bajo rendimiento en matemáticas en el colegio.
4. Mala preparación a la hora de ingresar a las instituciones de enseñanza superior.
5. Evasión a las carreras que tienen muchas matemáticas. Sobre todo este fenómeno se da en las mujeres.
6. Deserción de los estudiantes universitarios de los cursos de matemáticas y por ende de las carreras que tienen mucha matemáticas.
7. Todo esto provoca un vacío en ciertos campos del desarrollo donde son cada vez menos las personas (sobre todo mujeres) interesadas en incursionar a través de profesiones u oficios que requieren de las matemáticas.

Toda esta problemática planteada, se ha convertido en los últimos años en uno de los más serios problemas de la educación a nivel mundial.

Se hace necesario erradicar el temor a las matemáticas sustituyéndolo por un "pensamiento matemático" entendiendo éste como una actitud, sino de propensión a las matemáticas, por lo menos de no rechazo y de aceptación. Este "pensamiento matemático" es necesario para contabilizar, medir, comparar, explicar, ordenar, optimizar, deducir y organizar fenómenos de muy diversa índole que le permita al hombre interpretar, criticar y transformar el mundo que le rodea, en un mundo donde la ciencia y la tecnología avanzan a pasos agigantados.

Muchas respuestas se han dado en diferentes países a esta problemática, entre las que se encuentran congresos, cursos de capacitación, investigaciones, seminarios, abocados a analizar la situación y proponer cambios en el sistema de enseñanza aprendizaje. En Costa Rica se han dado también diversas respuestas a través de instituciones interesadas, y algunas tesis que coadyuvan a definir el problema.

Cabe citar la que diera la Comisión "Mujer y Ciencia" del Ministerio de Ciencia y Tecnología, abocada a difundir, fomentar y dismitificar, la inserción de la mujer en los diversos campos que propone el "Programa de Popularización del Plan Nacional de Ciencia y Tecnología". Esta conoció y se interesó, en traer al país tres especialistas del programa de "Matemática para la Familia" de la Universidad de Berkeley, California, quienes realizaron un primer taller en enero de 1989.

Creemos que este paso es fundamental pues abre una perspectiva de solución desde el hogar y la familia que es la base de la sociedad y permite rescatar dos aspectos fundamentales:

1. replantear una diferente relación de mutua ayuda entre padres e hijos, y
2. tener acceso a una gran parte de la población activa del país para ayudarles a interpretar a través de las matemáticas un medio nuevo y cambiante, transformándose día a día por los avances científicos-tecnológicos.

Dicho programa de Berkeley, California, se basó en la creencia de que si se puede involucrar a los padres de familia con sus hijos en actividades matemáticas divertidas y útiles, la actitud de los mismos padres hacia las matemáticas cambiaría teniendo un efecto directo y más prolongado sobre los hijos.

Después de participar en ese primer taller quedamos muy motivadas para realizar un taller semejante en Costa Rica, pero incluyendo juegos y experiencias desarrolladas y probadas en diferentes regiones de nuestro país que habían sido dirigidas a maestros para que ellos las desarrollaran en el aula con sus alumnos.

Estas actividades sabíamos que formaban parte de un programa del Trabajo Comunal Universitario de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica, dirigido por el Dr. Bernardo Montero, el cual parte de un principio básico, cual es, hacer más agradable, adecuado a las necesidades inmediatas y sobre todo a los del medio nacional. el aprendizaje de las matemáticas.

Con esto se gestó una investigación orientada a la elaboración de un proyecto alternativo, dirigido a las familias, con experiencias más adecuadas y representativas del contexto nacional y regional y en el marco de recursos de que dispone la realidad latinoamericana.

Se diseñó dentro de esto un taller con las características señaladas que se desarrolló en el ITCR como un proyecto de extensión que presentaron las autoras a través de los departamentos de Matemática y de Psicología y Orientación de dicha institución. Esto con la debida asesoría del Dr. Montero

Dicho taller se realizó durante los meses de octubre y noviembre de 1989 en la Ciudad de Cartago en las instalaciones del ITCR y con los materiales y el aporte de dicha institución.

Posteriormente realizamos otro taller en enero del presente año como parte de los cursos libres que imparte el ITCR en los meses de verano. Cabe señalar que los especialistas de Berkeley, de nuevo por la gestión de la Comisión Mujer y Ciencia, regresaron al país en febrero del presente año a realizar un segundo taller. esta vez integrando un programa de "Ciencias para la Familia". Participamos de nuevo en esta actividad y tuvimos la oportunidad de exponer nuestra experiencia. El intercambio con dichos especialistas fue y sigue siendo muy enriquecedor para el proyecto descrito.

EXPERIENCIA CONCRETA

La ejecución del proyecto consistió en la realización de dos grandes tareas: se elaboró un banco de actividades para el aprendizaje de las matemáticas considerando el aporte brindado por los profesionales de Berkeley y por el Dr. Montero. Posteriormente se realizaron los dos talleres ya mencionados.

Se invitó a participar en éstos, a las familias de los funcionarios del ITCR y se les pidió como único requisito que tuvieran hijos cursando primero, segundo o tercer grado de la Educación General Básica. Dicha invitación se hizo por medio de una circular que se incluyó en el periodico oficial del ITCR.

Para definir las actividades que se desarrollaron, se consideraron los siguientes temas: artimética, geometría, probabilidad y estadística, medición, estimación, calculadoras, razonamiento lógico, oficios y profesiones.

De acuerdo a las actividades programadas se elaboró una lista de todos los materiales que se necesitarían y se abocó a la consecución del mismo. Se trató de utilizar material de bajo costo y fácil acceso, para la ejecucion de las diferentes actividades.

Los talleres se llevaron a cabo en seis sesiones de tres horas de duración cada una,una sesión por semana. En dichas sesiones, los padres junto con sus hijos realizaban una serie de actividades que tienen como objetivo desarrollar destrezas útiles en la resolución de problemas y lograr un mayor entendimiento de las matemáticas por medio del "juego" entre padres e hijos.

Para realizar los talleres se contó con dos aulas grandes y un vestíbulo, en las instalaciones del ITCR. Dichos lugares se acondicionaban de tal manera que se percibiera un ambiente matemático, por ejemplo se pegaban cartelones con pensamientos alusivos a la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, se ponía una grabadora con cassettes que contienen canciones con temas matemáticos, como es la canción de las tablas de multiplicar. Asimismo para todas las sesiones se organizaron exposiciones que consisten en actividades cortas dispuestas alrededor del aula o vestíbulo, con instrucciones sencillas que se explican por sí solas, que brindan a la familia la oportunidad de aplicar destrezas y estrategias para la resolución de problemas en una stiuación más independiente y espontánea.

Además de esto, se trabaja con grupos de familias desarrollando una variedad de actividades de diferentes temas o bien de un solo tema. Dichas actividades se les presentaban a las familias con las respectivas instrucciones, para que seguidamente los padres y sus hijos las realizaran.

Al finalizar cada actividad se les pedía a las familias que pensaran y analizaran sobre las destrezas y estrategias que habían utilizado para resolver el problema. Se procuraba que quedara bien claro, tanto en los padres como en los niños, el concepto matemático "presente" en cada actividad.

Se planteó como meta guiarlos hacia sus propias soluciones y estrategias <u>puntualizando siempre la importancia del proceso</u> y no el simple hecho de dar una solución correcta.

Al final de cada sesión, los padres de familia, en un pequeño instrumento que se elaboró para este fin, evaluaban las actividades.

SECTOR O GRUPO QUE PARTICIPO EN LOS TALLERES

En el primer taller participaron quince funcionarios del ITCR, es decir, 15 familias de funcionarios.

De estas familias, once residen en la ciudad de Cartago y cuatro en la ciudad de San José.

El grupo total estuvo constituido por 15 adultos, y 16 niños. Por lo general se trataba del papá o la mamá y su hijo o hijos y en minoría, la familia completa, es decir papá, mamá e hijos.

De los adultos, nueve son mujeres y seis varones. Con respecto a la escolaridad, participaron adultos que tenían primaria completa hasta otros que tenían universidad completa

Dada esta escolaridad, sus ocupaciones son muy diversas. Creemos que la escolaridad de los padres, así como su ocupación, no es un requisito para participar en un taller de "Matemática para la familia".

Con respecto a los niños que participaron, ocho cursaban primer grado, cuatro segundo grado y una quinto grado. Del total de niños siete son varones y nueve son mujeres.

En el segundo taller participaron 6 familias. Se pidió como requisito que los niños estuviesen en tercer grado a fin de homogenizar el grupo respecto al conocimiento de la matemática por los niños. 5 niños asistieron con la madre y uno con un tío

Una madre era maestra, el tío estudiante universitario de Historia y el resto amas de casa.

Tampoco fué obstáculo la escolaridad y ocupación para el desarrollo del taller

RESULTADOS

Para los efectos de recolección de información se utilizaron dos encuestas y la observación del desempeño y conducta en general de las familias, en su participación en las diferentes sesiones

Una primer encuesta se aplicó a los participantes antes de iniciar el taller con el objetivo de conocer la opinión de los mismos sobre aspectos relacionados con las matemáticas y su aprendizaje, que permitiera caracterizar en parte a dicha población. Una segunda encuesta se aplicó al finalizar el taller con el objetivo de conocer la opinión hacia el taller y la influencia del mismo en su actitud hacia las matemáticas.

Principalmente, de los resultados de esta segunda encuesta aplicada a los adultos, se hará mención en este apartado así como de las observaciones recogidas en las diferentes sesiones.

La opinión sobre el taller por parte de todos los padres que participaron, fué dada en términos muy positivos. Lo consideran muy bueno y muy interesante. Manifiestan que despierta el entusiasmo y la motivación hacia las matemáticas. Consideran además que de esta manera se disfruta de las matemáticas y les permite comprender la relación que esta tiene con los problemas de la vida cotidiana.

A la mayoría de los padres les gustó todas las actividades que se realizaron en las diferentes sesiones. Algunos manifestaron su preferencia por las actividades de estimación, los tangramas, juegos de estrategias, juegos de fracciones, unidades de medida, cubos, juegos con palillos, las actividades de cálculo y la actividad de las profesiones

Los padres opinan que las actividades se ajustan al programa de las escuelas, llenan una deficiencia de la enseñanza actual y que se trabaja con un material que se puede adaptar de acuerdo a los niveles de los niños

Las actividades desarrolladas en cada sesion, fueron practicadas en la casa por la mayoria de las familias solamente dos de éstas dijeron no haberlo hecho. Algunos compartieron los juegos con otros miembros de la familia y con algunos niños de la vencindad para esto utilizaban las hojas de instrucciones que se les brindaba al final de cada sesion

Un aspecto muy importante a considerar es la necesidad de que las familias relacionen las matematicas con las experiencias de la vida cotidiana por esta razon se les pidio a los padres nombrar en la encuesta final algunas actividades de la vida familiar que tengan que ver con las matematicas

Con respecto al numero de sesiones que se desarrollaron los padres en su totalidad consideran que no fueron suficientes. Manifiestan que les hubiera gustado realizar mas actividades en mayor numero de sesiones

Un aspecto muy importante que se considera para evaluar los resultados del taller, es la actitud hacia las matematicas por parte de los niños y los adultos despues de haber participado en el mismo

Igualmente se toma en cuenta la relacion padre-hijo en este proceso. En este sentido los padres de familia opinan que, despues de haber participado en el taller han notado un cambio de actitud en el momento de ayudarle a su hijo en las tareas de matematicas. La mayoria manifiestan que se sienten más tranquilos con mayor seguridad e interes de ayudarles. Se han sentido con capacidad de "bajar al nivel de sus hijos" al resolver sus dudas. Esto ultimo lo expresan los padres que son profesionales

Se sienten mejor padres, más utiles y manifiestan ademas que las vivencias del taller les permitio mejorar la comunicacion con sus hijos. Los padres vieron con complacencia el haber podido participar junto con sus hijos de esta experiencia ya que los acercó mas, los pudieron observar en el proceso de aprendizaje y tuvieron la posibilidad de conocer aspectos de sus hijos que antes no conocian

Asimismo, manifiestan notar un cambio de actitud en sus hijos hacia las tareas y examenes de matematicas. Ya los niños, dicen, no requieren de presion para que hagan sus tareas, estudian mas tranquilos y van a los exámenes menos nerviosos

Los padres manifiestan haber experimentado un cambio de actitud hacia las matematicas, le tienen más confianza, las ven más agradables, bonitas e interesantes

Para concluir, creemos que esta es una interesante experiencia que vale la pena intentar. Los resultados son muy halagadores por lo que los instamos a intentar una experiencia parecida. Los especialistas en Berkeley tienen material a la disposicion asi como un texto en español llamado "Matematica para la Familia". Los instamos a contactarlos

Nosotros modestamente ofrecemos ayuda tambien con base en nuestra experiencia la cual seguimos desarrollando

TRABAJANDO CON EL TEOREMA DE PITAGORAS

Violeta Brenes Castro/ Norma Camacho Ramírez
Escuela de Matemáticas/ Universidad Nacional
Heredia, Costa Rica

RESUMEN

El trabajo tiene como objetivo comprobar que el teorema de Pitágoras, que tradicionalmente se demuestra basándose en áreas de cuadrados, es válido si en vez de estas áreas se utilizan áreas de polígonos regulares o de polígonos semejantes. Para esto se presentan algunas comprobaciones utilizando diversas figuras: triángulos equiláteros, rombos, rectángulos, triángulos cualesquiera, etc. Para las comprobaciones se utilizan elementos de la geometría euclídea y de trigonometría.

Creemos que es importante que nuestros alumnos adquieran, por medio de este tipo de actividades, flexibilidad en su pensamiento matemático, algo que no debe perderse de vista en nuestra labor de educadores.

La actividad estaría al alcance de alumnos de undécimo año de secundaria y del primer curso de Geometría Universitaria en adelante. Esperamos sea de interés para los profesores de secundaria, principalmente y en general para todo especialista en enseñanza de la Matemática.

El teorema de Pitágoras es uno de los descubrimientos más interesantes de la historia de la Matemática y, aunque tradicionalmente se le atribuye a Pitágoras, se sabe que los babilonios y otros pueblos de la antiguedad ya tenían conocimiento de él.

Además de tener múltiples aplicaciones se presta para ilustrar el hecho de que los teoremas de Geometría se pueden demostrar de diversas maneras y siguiendo diferentes caminos, ya que se conocen cientos de demostraciones de este teorema. Tradicionalmente se le ha demostrado, con mayor o menor grado de abstracción, basándose en el hecho de que el área del cuadrado construído sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construídos sobre los catetos del mismo. La más antigua que se conoce es la presentada por Euclídes y está basada en áreas, como lo son en general todas las pruebas de este teorema, ya que la mayoría se basan en las propiedades de las áreas y en especial en el área del cuadrado.

Veamos a continuación la demostración dada por Euclídes.

En un triángulo rectángulo ACB, rectángulo en C, se construyen cuadrados sobre cada uno de los lados del mismo, como se muestra en la figura 1.

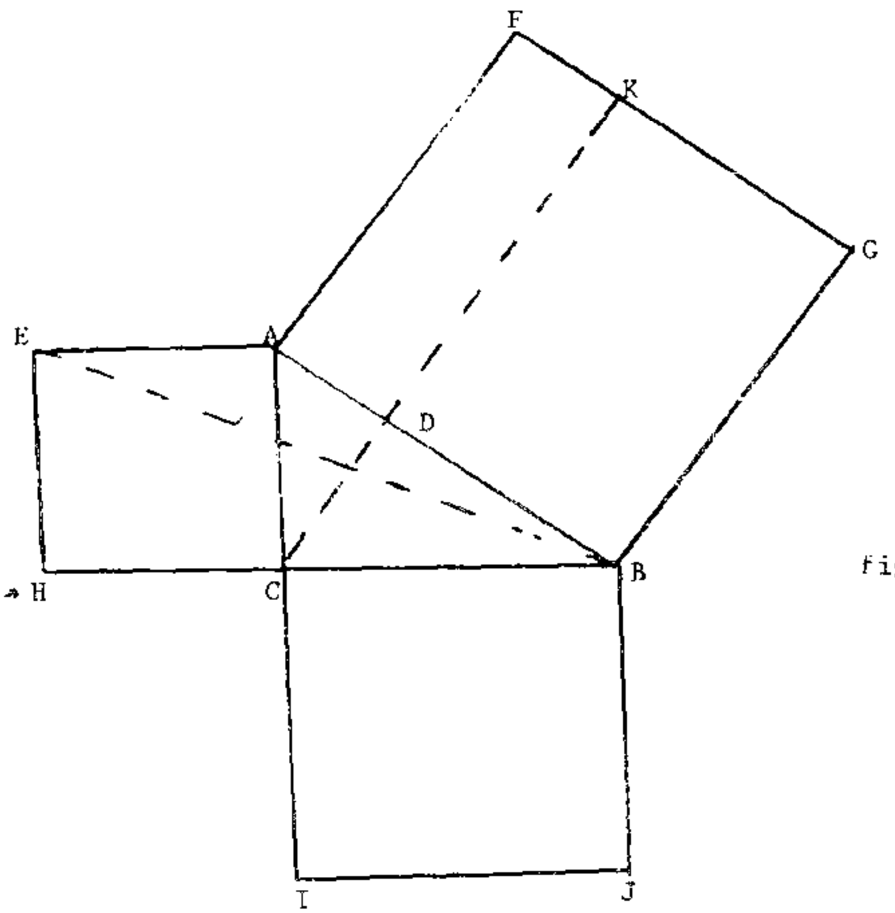


figura 1

Sea $\overline{CK} \perp \overline{AB}$. Se tiene que $A \square ADKF = 2A \triangle CAF$ pues comparten la base $\overline{AF}$ y la altura $\overline{AD}$; de igual manera $A \square EHCA = 2A \triangle EAB$.

Tenemos además:

$m \sphericalangle EAC = m \sphericalangle FAD$, ya que ambos son rectos

$m \sphericalangle CAD = m \sphericalangle CAD$ y $m \sphericalangle EAB = m \sphericalangle CAF$

(ambos son la suma de un ángulo recto y el $\sphericalangle CAD$).

Por otra parte: $EA = AC$ y $AB = AF$ ya que son lados del cuadrado EHCA y $\square$ ABFG respectivamente.

Por lo tanto $\triangle EAB \cong \triangle CAF$ por lado-ángulo-lado, entonces $A \square ADKF = A \square EHCA$ pues $A \square ADKF = 2A \triangle CAF = 2A \triangle EAB = A \square EHCA$.

Del mismo modo, usando la figura 2 se demuestra que $A \square KDBG = A \square CBIJ$

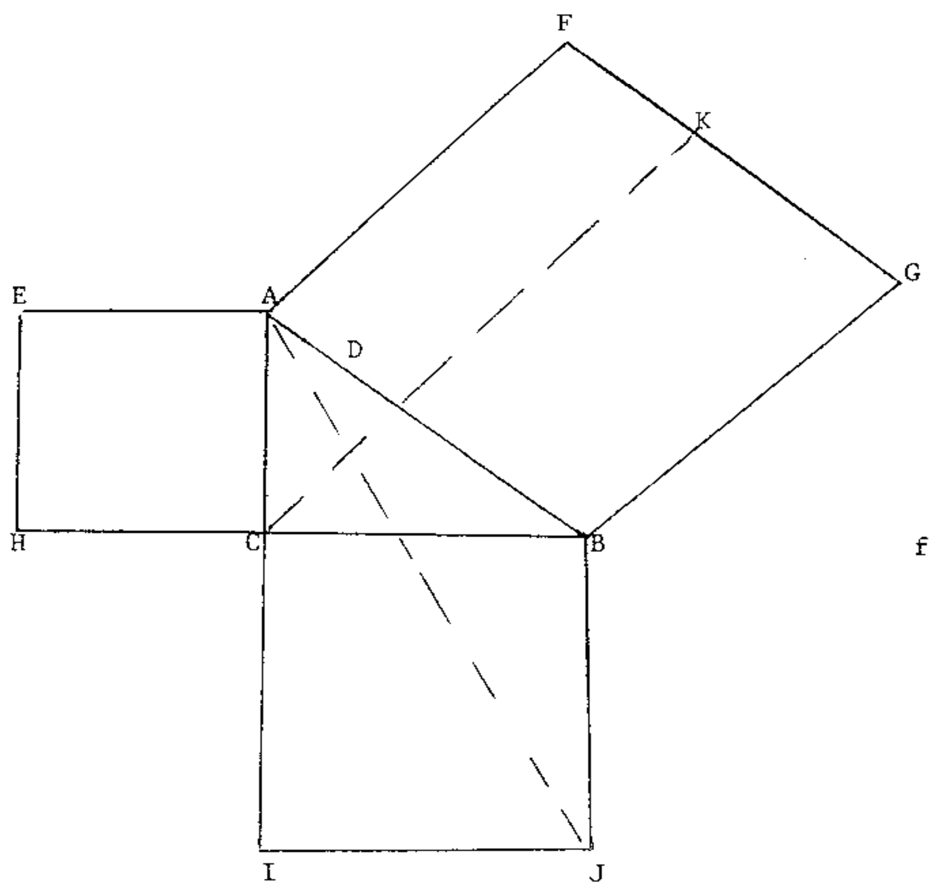


figura 2

pues $A \square$ KDBG = $2A \triangle$ CBG y $A \square$ CIJB = $2A \triangle$ AJB

entonces:

$$A \square KDBG = 2A \triangle CBG = 2A \triangle AJB = A \square CIJB.$$

Concluimos entonces que

$$A \square ABGF = A \square EAHC + A \square CIJB, \text{ es decir}$$

$$c = b^2 + a^2$$

Nos preocupamos ahora que sucedería si se hubiese trabajado con otras figuras geométricas en lugar de cuadrados.

Este trabajo tiene como objetivo presentar algunas pruebas, a nivel intuitivo y geométrico, que ponen de manifiesto que el teorema es válido si se utiliza cualquier polígono regular en lugar de cuadrados y aun más, si se utilizan polígonos semejantes. Creemos que es importante que el alumno adquiera, por medio de este tipo de actividades, esa flexibilidad en su pensamiento matemático, que no debe perderse de vista en nuestra labor de educadores.

Vamos a comenzar poniendo de manifiesto que el área del triángulo equilátero construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente a la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construídos sobre los catetos del mencionado triángulo rectángulo.

Tomaremos como un hecho, en ésta y en las comprobaciones que siguen, el hecho de que en un triángulo rectángulo cualesquiera el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos (versión del teorema con áreas de cuadrados).

Sea $\triangle$ ABC rectángulo en C y sean $A_1 = A \triangle ABM$, $A_2 = A \triangle CAL$ y $A_3 = A \triangle BCS$, las áreas de los triángulos equiláteros construídos sobre la hipotenusa y los catetos del triángulo, como se muestra en la figura 3.

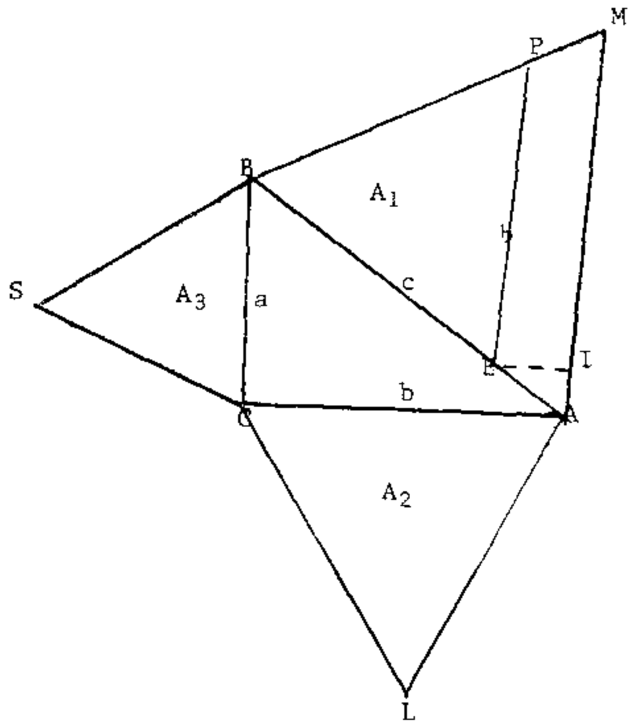


figura 3

Sobre el área A_1, dibujamos el área A_2, (área del Δ BDE) tal y como se ve en la figura. Sabemos que $A_3 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, BM = c, BD = b, DM = c - b, EA = c - b, AM = c, DE = b y que $m \measuredangle MAE = 60°$, probaremos que el área del trapecio AMDE es igual al área del triángulo equilátero de lado a, con lo cual tendríamos $A_1 = A_2 + A_3$, como queríamos poner en evidencia.

Sea EI la altura del trapecio AMDE; como este trapecio es isósceles, $AI = \dfrac{AM - DE}{2} = \dfrac{c - b}{2}$ y entonces

$$EI = \sqrt{(c-b)^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3(c-b)^2}{4}} = \frac{(c-b)\sqrt{3}}{2}$$

y el área del trapecio

$$AMDE = \frac{(c+b)\cdot\dfrac{\sqrt{3}\,(c-b)}{2}}{2} = \frac{(c^2-b^2)\sqrt{3}}{4}, \text{ pero}$$

$$c^2 - b^2 = a^2, \text{ entonces } A \,⏢\, AMDE = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = A_3$$

Para comprobar el teorema con exágonos regulares tendríamos que

$6\,A_1 = 6(A_2 + A_3)$ o sea $6\,A_1 = 6\,A_2 + 6\,A_3$, es decir que el área del exágono regular construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los exágonos regulares construído sobre los catetos del mismo.

Veamos ahora qué sucede si tomanos áreas de triángulos isósceles semejantes.

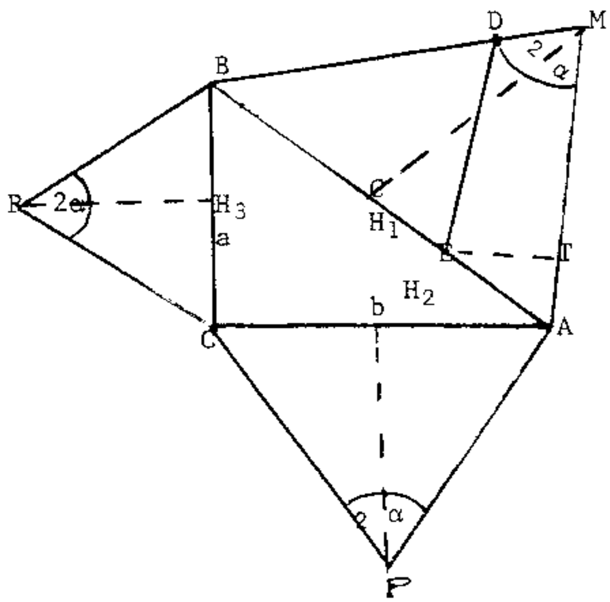


figura 4

Sean los triángulos isósceles: Δ BMA, Δ APC y Δ CRB. Como estos triángulos son semejantes, sus ángulos son respectivamente congruentes. Llamemos $m \measuredangle BMA = m \measuredangle APC = m \measuredangle CRB = 2\alpha$. Sean $\overline{MH_1}$, $\overline{PH_2}$ y $\overline{RH_3}$, las respectivas alturas de los triángulos isósceles, sobre las respectivas bases de los mismos c, b y a, como se observa en la figura 4. Estas alturas son bisectrices de los triángulos y así $m \measuredangle BMH_1 = m \measuredangle APH_2 = m \measuredangle CRH_3 = \alpha$. Construyendo el triángulo isósceles Δ APC ($\cong \Delta$ BDE) sobre el Δ ABM, tenemos que

A Δ ABM = A Δ APC + A ⏢ AMDE (o bien A Δ ABM = A Δ BDE + A ⏢ AMDE).

Si comprobamos que A ⏢ AMDE = A Δ CRB, tendríamos que el área del triángulo isósceles construído sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo es equivalente a la suma de las áreas de los triángulos isósceles construídos sobre los catetos del mismo, siempre que dichos triángulos sean semejantes.

Sabiendo que, en el triángulo isósceles la altura sobre la base es también mediana, tenemos que $AM = \dfrac{c}{2 \text{ sen } \alpha}$, $DE = AC = \dfrac{b}{2 \text{ sen}\alpha}$, $EA = c - b$

$ET = (c - b)\cos \alpha$, ya que $m \measuredangle EAT = \dfrac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$ y

$\text{sen}(90 - \alpha) = \cos \alpha$, entonces:

$$A \text{ ⏢ } AMDE = \frac{\left[\dfrac{c}{2 \text{ sen } \alpha} + \dfrac{b}{2 \text{ sen } \alpha}\right] . (c - b) \cos \alpha}{2} = \frac{(c^2 - b^2) \cot \alpha}{4}$$

pero $A \,\Delta\, RBC = \dfrac{BC \,.\, RH_3}{2}$ y $BC = a$, $RH_3 = \dfrac{a \cot \alpha}{2}$, entonces

$$a \,\Delta\, RBC = \frac{a \,.\, \dfrac{a \cot \alpha}{2}}{2} = \frac{a^2 \cot \alpha}{4}$$ y como $c^2 - b^2 = a^2$, tenemos

A ⏢ $AMDE = A \,\Delta\, RBC$, que es lo que queríamos demostrar.

Sabemos que los polígonos regulares, para $n = 3$, $n = 4$ y $n = 6$, donde n representa el número de lados, cumplen con lo que nos hemos propuesto, ¿qué decir para los polígonos regulares de $n = 5,7,8,9, ...$? cada uno de estos polígonos está formado por n triángulos isósceles congruentes entre sí y a la vez semejantes con los construídos sobre la hipotenusa y los catetos del triángulo rectángulo y así:

$n T_1 = n(T_2 + T_3) = n T_2 + n T_3$, para $n = 5,7,8,9, ...$, donde T_1, T_2 y T_3 representan áreas de triángulos isósceles semejantes de bases c, b y a respectivamente.

Si $n \to \infty$ tenemos círculos de diámetros c, b y a y por tanto la proposición también es válida para estas figuras.

¿Qué decir ahora sobre las áreas de los rectángulos semejantes construídos sobre la hipotenusa y los catetos del triángulo rectángulo?

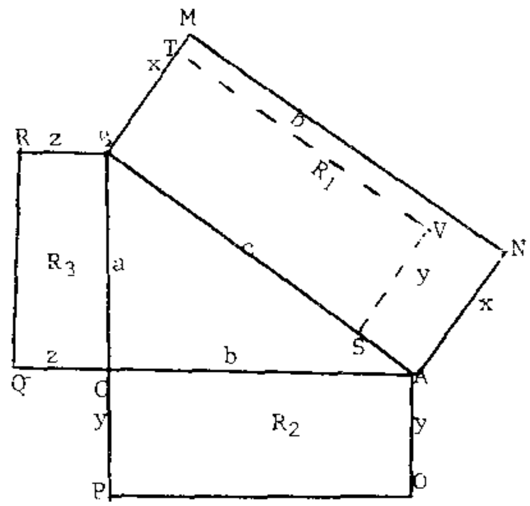


figura 5

Sea R_1 = A $\square$ ABMN, R_2 = A $\square$ ACPO y R_3 = A $\square$ CBRQ, las áreas de los rectángulos semejantes construídos sobre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo. Como los rectángulos son semejantes tenemos que $\frac{c}{b} = \frac{x}{y}$ (1). $\frac{c}{a} = \frac{x}{z}$ (2) y $\frac{b}{a} = \frac{y}{z}$ (3), donde AB = c, AC = b, CB = a, AN = x, OP = y, CQ = z, y los ángulos serán congruentes, todos ellos son ángulos rectos. Se construye sobre el rectángulo de área R_1, el rectángulo de área R_2 , como se observa en la figura 5. Verificaremos que el área restante es equivalente al área del rectángulo denominada R_3.

Como A $\square$ ACOP = A $\square$ BSVT, la figura restante sería el polígono SANMTV, cuya área de acuerdo a la figura 5, es: $(c - b)x + (x - y)b$, pero por (1) $y = \frac{bx}{c}$, entonces área polígono SANMXO = $(c - b)x + b(x - \frac{bx}{c})$ =

$cx - bx + bx - \frac{b^2x}{c} = \frac{c^2x - b^2x}{c} = (c^2 - b^2)\frac{x}{c} = \frac{a^2x}{c}$, ya que

$a^2 = c^2 - b^2$, pero $R_3 = az$ y $z = \frac{ax}{c}$ por (2), entonces

$R_3 = a \cdot \frac{ax}{c} = \frac{a^2x}{c}$, que es lo que queríamos demostrar.

Verifiquemos ahora que si construímos rombos semejantes sobre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo, el área del rombo construído sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de las áreas de los rombos construídos sobre los catetos.

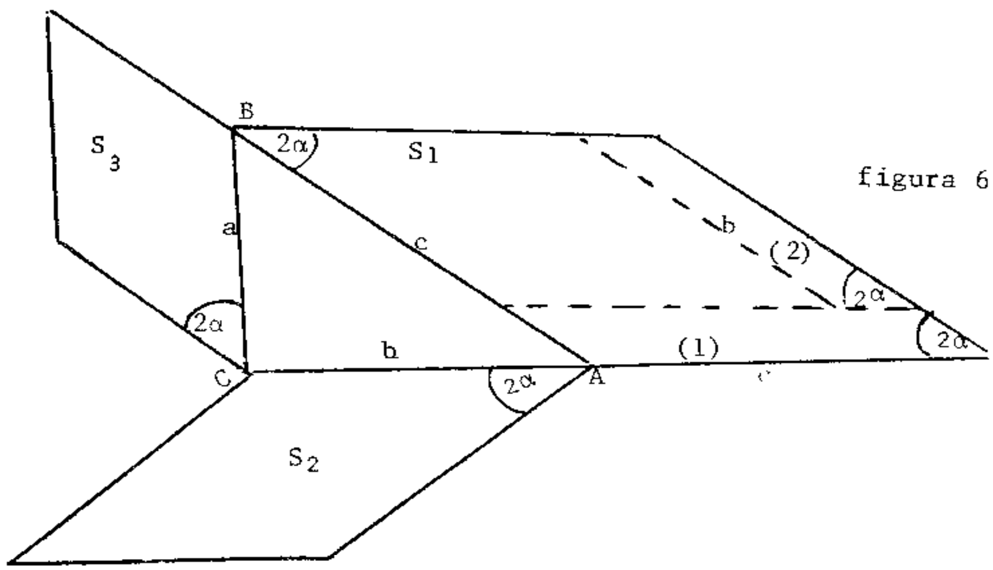


figura 6

Sean S_1, S_2 y S_3 las áreas de los rombos semejantes construídos sobre c, b y a respectivamente. Comprobaremos que $S_1 = S_2 + S_3$.

Construyendo S_2 sobre S_1, como aparece en la figura 6, comprobaremos que el área restante es equivalente al área del rombo de lado a. De acuerdo a la figura 6, el área de la sección (1) es $c(c - b)$ sen 2α y el área de la sección (2) es $b(c - b)$ sen 2α, entonces el área restante es c^2 sen 2α − bc sen 2α − b^2 sen 2α = $(c^2 - b^2)$ sen 2α = a^2 sen 2α.

Ahora bien como S_3 representa el área del rombo de lado a, será equivalente al producto de las diagonales de dicho rombo dividido por dos y por ser este rombo semejante a los otros dos, sus ángulos son respectivamente congruentes con los de estos. Tenemos así el rombo de lado a, representado en la figura 7, tiene diagonales D y d respectivamente y γ s de medida 2α tal y como se indica en la figura 7.

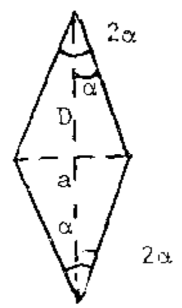


figura 7

Por propiedades del rombo sabemos que sus diagonales se bisecan ortogonalmente y son bisectrices de los ángulos del rombo, por lo tanto:

$D = 2a \cos \alpha$, $d = 2a \text{ sen } \alpha$ y $S_3 = \dfrac{2a \cos \alpha \;.\; 2a \text{ sen } \alpha}{2} = \dfrac{4a^2 \text{sen}\alpha\cos\alpha}{2} =$

$a^2 \;.\; 2 \text{ sen}\alpha \cos \alpha = a^2 \text{sen } 2\alpha$, que es lo que queríamos demostrar.

Pasemos ahora a estudiar ¿qué sucede si se construyen triángulos cualesquiera semejantes, sobre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo.

Sean A_1, A_2 y A_3 las áreas de los triángulos semejantes tal y como se indican en la figura 8. Comprobaremos que $A_1 = A_2 + A_3$.

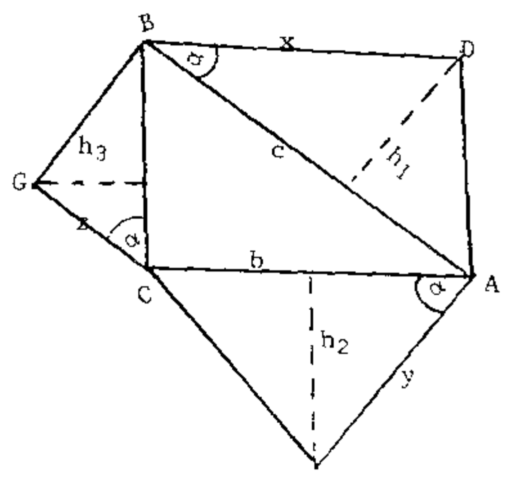


figura 8

Por ser los triángulos semejantes sabemos que:

$\frac{c}{b} = \frac{x}{y}$ y que $\frac{c}{a} = \frac{x}{z}$, de donde $y = \frac{bx}{c}$, $z = \frac{ax}{c}$ y además

$h_1 = x$ sen α, $h_2 = y$ sen $\alpha = \frac{bx}{c}$ sen α, $h_3 = z$ sen $\alpha = \frac{ax}{c}$ sen α, donde

c, b, a, x, y, z, h_1, h_2, h_3 son lados y alturas de los 3 triángulos propuestos.

Por otra parte $A_1 = \frac{cx \text{ sen } \alpha}{2}$, $A_2 = \frac{b \cdot \frac{bx}{c} \text{ sen } \alpha}{2} = \frac{b^2 x \text{ sen } \alpha}{2c}$ y

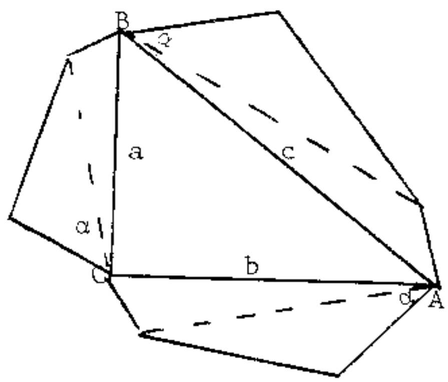
$A_1 - A_2 = \frac{cx \text{ sen } \alpha}{2} - \frac{b^2 x \text{ sen } \alpha}{2c} = \frac{(c^2 - b^2) \text{sen } \alpha}{2c}$, pero $c^2 - b^2 = a^2$,

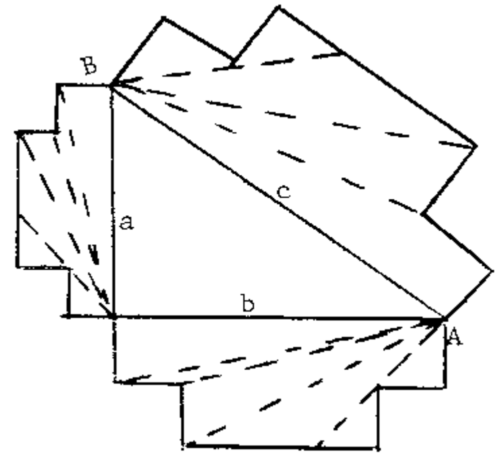
entonces $A_1 - A_2 = \frac{a^2 \text{ sen } \alpha}{2c}$.

Pero por otra parte $A_3 = \frac{a\ h_3}{2} = \frac{a \cdot \frac{ax}{c} \text{ sen } \alpha}{2} = \frac{a^2 \text{ sen } \alpha}{2c}$, es decir

$A_1 - A_2 = A_3$ lo que significa que $A_1 = A_2 + A_3$, o sea que comprobamos nuestra proposición.

Ahora bien, ya que todo polígono se puede dividir en triángulos, es decir, se puede triangular, si trabajamos con polígonos semejantes éstos se podrán triangular en triángulos respectivamente semejantes y por tanto podemos extender nuestra proposición de modo que: el área de cualquier polígono construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente a la suma de las áreas de los polígonos semejantes al primero, construídos sobre los catetos del mencionado triángulo. Esta proposición es válida aún para polígonos no convexos.





De esta manera el estudiante llega fácilmente a la generalización del teorema de Pitágoras, logrando así adquirir destreza e interés para generalizar otros teoremas de Geometría, tan importantes como el teorema estudiado.

BIBLIOGRAFIA:

1. Brenes, V. y otras. La Enseñanza de la Geometría. Memoria presentada para optar al título de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, U.C.R., San José, 1981.

2. Euclídes. Euclid's Elements. Dover Publications Inc. New York, 1956.

3. Hirsteins, James, Rachlin, Sidney. The Pythagoream Theorem on an isometric Geoboard, The Mathematics Teacher, Febrero 1980, 141 - 144.

4. Laing Robert A. Preparing for Pytagoras, The Mathematics Teacher, April 1989, 271 - 275.

5. Lenoir, T. Descartes and the Geometrization of thought, Historia Mathemática, Vol. 6, N° 74, 1979.

6. Edwin E. Moise. Elementos de Geometría Superior, CECSA, 1988.

7. Edwin E. Moise, Floyd L. Downs. Geometría Moderna, Fondo Educativo Interamericano, 1970.

8. Wiscamb Hutchinson Margaret. Geometría. Un enfoque intuitivo. Trillas, México, 1985.

Métodos Numéricos en Secundaria

Carmen Ma. González Argüello
Escuela de Matemática/ Universidad Nacional
Heredia, Costa Rica

RESUMEN

Se desea mostrar la factibilidad de incorporar ciertos métodos numéricos en los planes de estudio de III y IV Ciclo de la Educación Media, ya sea en la disciplina de Matemática o en los cursos iniciales de Computación.

Por todos es sabido la utilidad de la computación en todas la actividades de nuestro mundo actual.

La enseñanza es un área del saber que no sólo hace uso de la informática para su quehacer, si no que es la responsable que el conocimiento de la misma se dé.

En particular el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, a través de la Fundación Omar Dengo, está promoviendo programas conducentes a que estudiantes de primaria y secundaria se inicien en el campo de la computación.

Ante esta situación se hace inminente una revisión inmediata de los contenidos programáticos que en la actualidad se desarrollan en el área de matemáticas en los niveles antes señalados.

Concretamente considero que en el Plan de Estudios de III y IV Ciclo vigente,ciertos tópicos podrían desarrollarse en una forma más integral y quizá hasta más agradable si se incluyeran algunos métodos numéricos, que no sólo estuvieran al alcance de la madurez intelectual del estudiante, si no que le permitieran resolver computacionalmente problemas matemáticos sencillos a los cuales tendría que enfrentarse con bastante regularidad.

A mi juicio el alumno de este nivel estaría en capacidad de:

- Aproximar ceros de funciones reales de variable real mediante los métodos de bisección, secante y régula falsi.

- Evaluar polinomios mediante el algoritmo de Hörner.

- Resolver sistemas de ecuaciones lineales de orden no mayor que tres, por el método de eliminación gaussiana.

- Aproximar funciones mediante polinomios de grado no mayor de tres, mediante el polinomio de Newton.

Eventualmente si el alumno tiene los conocimientos previos necesarios, específicamente los relativos al cálculo diferencial e integral, estaría en capacidad de:

- Aproximar los ceros reales de una función por el algoritmo de Newton.

- Calcular la integral de funciones sencillas por los métodos del trapecio, punto medio y Simpson.

Si los tópicos anteriores no fuera posible incluirlos en los contenidos programáticos que establece el MEP para las lecciones de Matemática, bien valdría la pena tomarlos en cuenta al menos en las clases de Informática.

ADAPTACION DE ALGUNOS METODOS NUMERICOS AL NIVEL SECUNDARIO

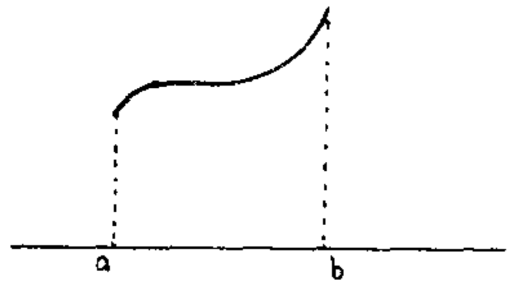
1.- Método de bisección para aproximar los ceros de una función real dada f, en donde su variable también es real.

Recuérdese que de acuerdo al teorema del valor intermedio, si f es una función definida y contínua en un intervalo dado $[a,b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ son de signo contrario, entonces existe algún punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c)=0$.

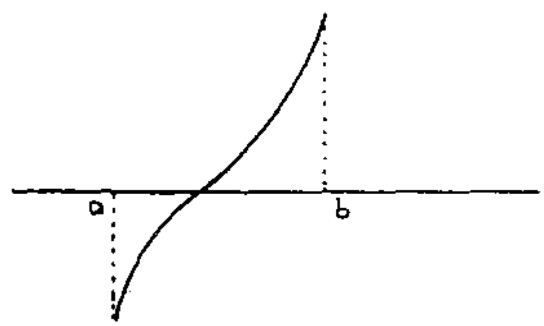
Lo anterior equivale a decir que si $f(a)\cdot f(b) \leq 0$, entonces f posee un cero entre a y b.

Interpretación geométrica.

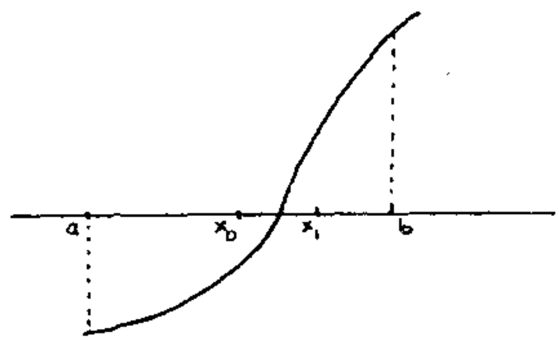
$f(a)$ y $f(b)$ tienen el mismo signo. Por lo tanto f no necesariamente tiene ceros en $[a,b]$



$f(a)<0$ y $f(b)\geq 0$. Como $f(a).f(b)\leq 0$, f tiene al menos un cero en $[a,b]$



$f(a)\cdot f(x_0) > 0$ entonces no se garantiza que exista un cero para f en $[a,x_0]$ sino en $[x_0,b]$. $f(x_1).f(x_0)\leq 0$ por tanto existe al menos un cero en $[x_0,x_1]$ y así en $[x_0,b]$. Nótese que x_0 es un punto medio de $[a,b]$ y x_1 de $[x_0,b]$.



El método consiste en:

1. Considerar el producto $f(a).f(b)$. Si $f(a)\cdot f(b) > 0$ no se garantiza que exista un cero en $[a,b]$.

   Si $f(a)\cdot f(b)\leq 0$ se toma el punto medio m del intervalo $[a,b]$. (Para obtener una primera aproximación al cero de f).

2. Si $f(a)\cdot f(m)\leq 0$ el cero se encuentra en el intervalo $[a,m]$. Se toma el punto medio de este intervalo y se repite el proceso.

   Si $f(a)\cdot f(m) > 0$ entonces $f(m)\cdot f(b)\leq 0$ y el cero se encuentra entre m y b.

Por medio de este algoritmo se puede encontrar un cero de f con una exactitud como se quiera. Aunque es muy lento respecto a los otros mencionados, es el más seguro.

ALGORITMO 1: Método de bisección para una exactitud de n cifras significativas.

Dada una función contínua en $[a_0,b_0]$ y tal que $f(a_0).f(b_0) \leq 0$
Para $m = 0,1,2...$ hasta donde $|x_m - x_{m-1}| < 10^{-n}$

$$\text{Tomar: } x_m = \frac{a_m + b_m}{2}$$

Si $f(a_m) . f(x_m) \leq 0$, tomar $a_{m+1}=a_m$, $b_{m+1}=x_m$.

Si $f(a_m) . f(x_m) > 0$, tomar $a_{m+1}=x_m$, $b_{m+1}=b_m$.

Entonces f tiene una raíz en el intervalo $[a_{m+1},b_{m+1}]$ con una exactitud de n cifras significativas.

<u>Ejemplo 1:</u>

Aproximar $\sqrt{2}$ con una exactitud de una cifra significativa.

Si $x=\sqrt{2}$ entonces $x^2=2$ y $x^2-2=0$.

Por tanto nuestro problema se reduce a resolver la ecuación $f(x)=x^2-2=0$ con una exactitud de una cifra significativa.

Observemos que:

1. f es contínua en $\mathbb{R}$.
2. En el intervalo $[1,2]$ tenemos que $f(1) \cdot f(2) \leq 0$, de ahí que exista un cero en $[1,2]$.
3. Sea $a_0=1$, $b_0=2$. Luego:

a) Para m=0

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f(a_0) \cdot f(x_0) = -1 \cdot \tfrac{1}{4} \leq 0$$

Por tanto existe una raíz en $[1,3/2]$. Sea $a_1=a_0=1$; $b_1=3/2=x_0$

b) Para m=1

$$x_1 = \frac{a_1 + b_0}{2} = \frac{1 + 3/2}{2} = \frac{5}{4}$$

Como $|x_0-x_1|=0.25>10^{-1}$ debemos continuar

$$f(1) \cdot f(5/4) = (-1) \cdot (-7/16) \geq 0$$

Por tanto existe una raíz en $[5/4,3/2]$. Sea $a_2=5/4=x_1$; $b_2=3/2=b_1$

c) Para m=2

$$x_2 = \frac{5/4 + 3/2}{2} = \frac{11}{8}$$

Como $|x_1-x_2|= 1/8 = 0.125 > 0.1$. Debemos continuar.

El proceso terminará cuando $|x_m-x_{m-1}| < 0.1$

2. Evaluación de polinomios dados. Solución de ecuaciones polinomiales.

Con mucha frecuencia se presenta la situación de tener que evaluar polinomios en puntos que son dados. El objetivo es hacer esto tan eficiente como sea posible. El método de Hörner que a continuación se explicita permite la evaluación de polinomios satisfactoriamente.

Considérese el polinomio $P(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_o$

en donde $a_n \neq 0$ y $a_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \{1,\dots,n\}$.

Deseamos hallar $P(z)$.

Si se efectúan todas las operaciones indicadas en la expresión dada para $P(x)$ al evaluar $P(z)$ sería necesario calcular los $(n+1)$ términos separadamente y luego sumar. Esto significa la operacionalización de n adiciones y $n(n+1)/2$ multiplicaciones.

En cambio si se escribe $P(x)$ por la expresión equivalente a la anterior:

$$P(x)= a_o + x(a_1+ x(a_2 + \dots + x(a_{n-1} + xa_n))\dots))$$

al hallar $P(z)$ se necesitarán únicamente n adiciones y n multiplicaciones.

El siguiente teorema justificará aún más el algoritmo en cuestión.

Teorema:

Dados $P(x) = a_o + a_1x + \dots + a_nx^n$ con $a_n \neq 0$ y el número real z entonces existe un polinomio único $Q(x)$ de grado $n-1$ tal que $P(x) = Q(x)(x-z)+b_o$ en donde $b_o \in \mathbb{R}$.

En particular $P(z) = b_o$.

Prueba:

Sea $b_n= a_n$ y para $k = n-1,\dots,0$, sea $b_k=a_k + zb_{k+1}$.

Entonces $Q(x) = b_1 + b_2x + \dots + b_nx^{n-1}$ cumple las condiciones del teorema.

En efecto

$b_o + Q(x)(x-z)$

$= b_o +(b_1 +b_2x + \dots +b_nx^{n-1})x -(b_1 +b_2x + \dots +b_nx^{n-1})z$

$= (b_o -b_1z) + (b_1 -b_2z)x + \dots + (b_{n-1} -b_nz)x^{n-1} +b_nx^n$

$= a_o +a_1x+\dots+a_{n-1}x^{n-1} +a_nx^n$

$= P(x)$

La justificación para la unicidad se da por medio del algoritmo de la división.

Obsérvese que en particular $P(z)= b_0$

ALGORITMO 2: Método de Hörner para evaluar polinomios

Dados los n+1 coeficientes $a_0,..,a_n$ del polinomio $P(x)$ y el número z.

Tomar $b_n = a_n$

Para $k=n-1,...,0$, tomar $b_k = a_k + zb_{k+1}$

Entonces b_0 es el valor de $P(x)$ en $x=z$.

El algoritmo anterior se podría entender mejor mediante el siguiente esquema:

$$
\begin{array}{lllll}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \;\ldots & a_0 & z \\
a_n & a_n z + a_{n-1} & b_{n-1} + a_{n-2} \;\ldots & a_0 + z b_1 & P(z) = b_0 \\
\| & \| & \| & \| & \\
b_n & b_{n-1} & b_{n-2} \;\ldots & b_0 &
\end{array}
$$

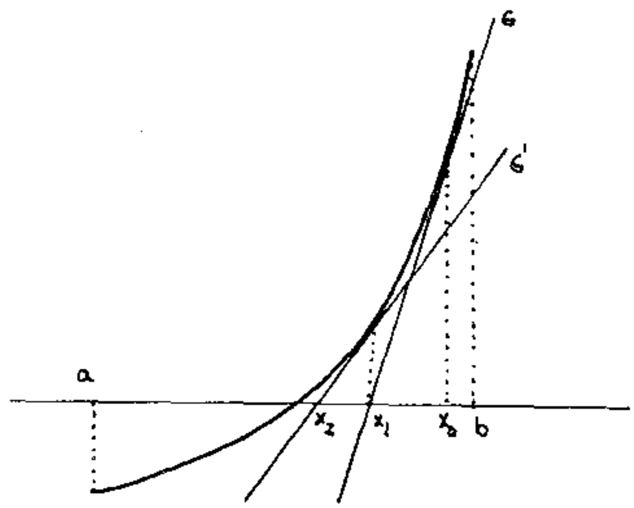
SOLUCION DE ECUACIONES POLINOMIALES

Si el algoritmo anterior se repite para los coeficientes, b_k, $k=0,...,n$ se obtiene el valor $c_1=P'(z)$

De esta manera podemos determinar aproximaciones a un cero de P mediante el método de Newton que dice que: una aproximación al cero de una función f a partir de una primera aproximación x_m a dicho cero viene dada por

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}$$

como se ilustra en la siguiente interpretación geométrica:



Sin necesidad de conocer la teoría relativa a diferenciación de funciones, el alumno de secundaria podría aproximar ceros de funciones polinomiales mediante el siguiente algoritmo:

ALGORITMO 3: Método de Newton para hallar ceros reales de polinomios.

Dados los n+1 coeficientes $a_0, \ldots a_n$ del polinomio P(x) y un punto inicial x_0.

Para m=0,1,2,... hasta donde $|x_m - x_{m+1}| < 10^{-n}$ hacer:

Tomar $z=x_m$, $b_n=a_n$, $c_n=b_n$

Para k=n-1,...,1, tomar $b_k = a_k + zb_{k+1}$

$c_k = b_k + zc_{k+1}$

Tomar: $b_0 = a_0 + zb_1$

Tomar: $x_{m+1} = x_m - b_0/c_1$

Entonces x_{m+1} es una aproximación al cero de P(x).

Esquema para el cálculo manual de los coeficientes b_n, c_n, b_0 b_k, c_k con $k \in \{1,\ldots,n-1\}$

a_n	a_{n-1} . . .	a_2	a_1	a_0	z
b_n	b_{n-1} . . .	b_2	b_1	b_0	$P(z)$
c_n	c_{n-1} . . .	c_2	c_1		$P'(z)$

donde los b_k, c_k se definen como en el algoritmo 3, $\forall\, k$, $k \in \{0,\ldots;n\}$

Consideremos ahora la siguiente situación:

Digamos que $x_{m+1} = a_1$. Si en particular se desearan hallar otros ceros reales de P se aplica el algoritmo anterior al polinomio

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x-a_1)}$$

Bajo el supuesto de que un cero de $R(x)$ es a_2, de nuevo aplicamos el algoritmo 3, en este caso a la función

$$S(x) = \frac{R(x)}{(x-a_2)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)}$$

para hallar un cero de $S(x)$ y en consecuencia de $P(x)$; y así sucesivamente.

Ejemplo: Al aplicar el algoritmo 3 a la ecuación polinómica $P(x) = x^3 + x - 3 = 0$, encontramos que una aproximación a la única raíz real de $P(x)$ es $x_3 = 1.21341$ (correcta hasta por lo menos cinco cifras significativas).

Tal como se procedió anteriormente se pueden adaptar algoritmos tanto para la solución de sistemas de orden 3 por medio del método Jordan-Gauss, como para la aproximación e interpolación de funciones por el polinomio de aproximación en su forma de Newton de grado preferiblemente no mayor que 3.

Si el alumno tiene las bases suficientes para desarrollar los temas antes expuestos y se cuenta con los recursos materiales para hacerlo, por qué negarle a este alumno la oportunidad de formarse en el apasionante mundo de los métodos numéricos.

BIBLIOGRAFIA

S. D. Conte-Carl de Boon. **Análisis Numérico**. Editorial Mc. Graw Hill, Colombia. 1974.

Burden y Faires. **Análisis Numérico**. Grupo Editorial Iberoamericano, México. 1985.

Scheid, Francis. **Análisis Numérico**. Editorial Mc. Graw Hill, México. 1972.

El Cálculo de Probabilidades en la Enseñanza Media

M.Sc. Víctor Medina Barón y Lic. Hermes Brenes Barrantes
Escuela de Matemática
Universidad Nacional

RESUMEN

Presentamos algunas ideas para desarrollar el Cálculo de Probabilidades a partir de los primeros niveles de la Educación Media, justificando su estudio a dicho nivel desde distintos aspectos. También sugerimos una metodología que, basándose en la experiencia concreta por parte del alumno, le guíe en la formación y desarrollo de su propio marco teórico-conceptual.

INTRODUCCION

El estudio de cualquier rama del saber corresponde a necesidades de tipo práctico y/o intelectual, enmarcadas dentro del ámbito socioeconómico del individuo, quien las va creando de acuerdo con su función y objetivos propios como ser social.

Un adulto puede decidir estudiar una o varias áreas del saber, ya sea porque desea mayor comprensión de algún problema concreto con el cual se enfrenta, para mejorar su estrato social, para poder participar más activamente del desarrollo de su medio ambiente u otras razones. En resumen, tal persona puede precisar con relativa facilidad sus intereses, justificarlos y en consecuencia contar con la motivación suficiente que le permita desarrollar una determinada labor intelectual.

Resulta claro que para culminar con éxito cualquier tarea, debe contarse con: un conocimiento básico mínimo, alguna experiencia previa, un marco teórico conceptual apropiado y los recursos físicos corespondientes a la naturaleza del problema en cuestión. Así, debido al rápido cambio social en todos sus aspectos, el individuo hoy en día se enfrenta a problemas cuya complejidad crece también aceleradamente. La única acción que hemos tomado para capacitar en forma adecuada a las nuevas generaciones, parece ser la de iniciar su educación formal a edades cada vez más tempranas, pero ese proceso se resiste al cambio. Es cierto que se han introducido modificaciones en algunos aspectos formales del sistema educativo, no todas afortunadas, pues la perspectiva curricular no refleja los cambios ocurridos desde el inicio de la revolución industrial hasta el presente, es más, podemos decir que éste se ha empobrecido considerablemente durante el transcurso de los últimos veinte años, sobre todo en aquellas disciplinas científico-técnicas. Como resultado, encontramos estudiantes apáticos, sin orientación y frustrados junto a educadores que no logran interesar ni a niños ni a jóvenes en el estudio de cierta disciplina, cuyos alcances e importancia, ellos mismos no logran entender.

Consideramos que estudiar el desarrollo histórico de determinado campo del conocimiento, nos proporciona lineamientos metodológicos apropiados para el problema planteado anteriormente. A partir de un marco teórico-conceptual y respondiendo a una experiencia concreta, surgen problemas para los cuales dicho marco teórico-conceptual resulta insuficiente o inapropiado, siendo necesario ampliarlo y/o modificarlo, logrando así un nuevo marco más amplio que, en general, no solo responde al problema en cuestión, sino a otras situaciones (fruto de nuevas experiencias), a otros problemas, hasta que se repita de nuevo dicho ciclo.

Podemos esquematizar este proceso evolutivo del conocimiento como sigue:

Marco teórico-conceptual — experiencia
— nuevo marco teórico-conceptual — nuevas experiencias
—ampliación y/o corrección del marco teórico-conceptual — ...

Un buen ejemplo lo encontramos en el desarrollo de la aritmética. El hombre, ante el problema de contar objetos, comienza a manipular los números naturales, conceptulizándolos y descubriendo sus propiedades aritméticas (conmutatividad de la suma, asociatividad, etc.), formando así un marco teórico que va ampliando y modificando de acuerdo con las experiencias por él vividas, así por ejemplo, al participar en actividades comerciales la suma le resultará insuficiente en problemas de trueque y eventualmente se verá en la necesidad de ampliar el "campo" numérico natural, llegando a crear los enteros y porteriomente los racionales.

Este esquema del desarrollo del conocimiento, sugiere una metodología que aún cuando se aplica en las primeras etapas de la educación formal, pronto se abandona; invirtiéndose algunas veces y no respondiendo a ningún esquema epistemlógico, la mayoría de las veces. En el caso particular de la enseñanza de la matemática, esta situación ha resultado en una "matemático-fobia" casi general.

La enseñanza de la matemática a nivel secundario hace énfasis en aspectos puramente operativos, que contribuyen poco con la formación del joven y debe tenerse presente que dado el nivel de desarrollo tecnológico actual, tales destrezas tienen poca importancia; además, las oportunidades que se le ofrecen para aplicar su propio marco teórico resultan ajenas a su experiencia cotidiana, contribuyendo poco o nada al enriquecimiento de dicho marco. No pretendemos que se abandone la operatoria, pero sí señalamos la urgencia de un cambio metodológico y curricular, donde los procesos de cálculo sean parte de un marco teórico mucho más amplio, donde no se prohiba el uso de los recursos tecnológicos existentes sino por el contrario, ellos formen parte de las herramientas del alumno, donde el aula sea un laboratorio en el cual cada estudiante pueda crecer tanto conceptual como teóricamente y donde la metodología corresponda a algún enfoque epistemológico bien definido.

CALCULO DE PROBABILIDADES

Expresiones tales como: "en la tarde va a llover", "ganaré en la lotería", "hoy va temblar", "creo que obtuve 10 en el examen" y muchas otras, afirman algo sobre la ocurrencia futura de algún evento y que aún cuando en el momento de emitidas no podemos calificarlas ni como verdaderas ni como falsas, sí las tomamos en consideración pues durante el transcurso de nuestra vida se ha creado en nosotros cierto criterio para "medir" la validez de tales afirmaciones. En resumen, la Teoría de Probabilidades no es ajena a nuestra experiencia; los pronósticos sobre el estado del tiempo, sobre los resultados del fútbol, sobre la extinción de una determinada especie, los oímos y comentamos casi diariamente, lo cual no debe sorprendernos considerando que la Teoría de Probabilidades hoy en día, constituye una parte importante de la fundamentación teórica de gran cantidad de disciplinas científicas y prácticas. Puede afirmarse que la Teoría de Probabilidades es la rama de la matemática que abarca un mayor campo de aplicación y como consecuencia de ello se desarrolla rápidamente.

No es solo por la importancia de la Teoría de Probabilidades, que proponemos su estudio a partir de la enseñanza media; también hemos considerado otros factores igualmente inportantes, a saber:

Para iniciar el estudio del Cálculo de Probabilidades, un marco teórico-conceptual básico, solo consiste en saber sumar, restar, multiplicar y dividir números racionales.

Por ser la Teoría de Probabilidades familiar a la experiencia del alumno y dada su gran variedad de aplicaciones, resulta relativamente sencillo poner en práctica una metodología participativa, haciendo del aula un laboratorio que le permita al educando ampliar día tras día su marco teórico-conceptual.

Por último, la historia sobre el desarrollo del Cálculo de Probabilidades es fácil de trazar y se ajusta perfectamente al aspecto epistemológico que según mencionamos antes, debe enmarcar a la metodología. Problemas surgidos de la experiencia relacionada con los juegos de azar señalan los inicios del Cálculo de Probabilidades. Uno de estos problemas planteado a Blaise Pascal, dió origen en 1.654 , al fructífero intercambio epistolar entre él y Pierre Fermat, en donde se establecieron los principios fundamentales de la actual Teoría de Probabilidades. Contribuyeron en sus desarrollos iniciales, entre otros, Christian Húygens, Jakob Bernoulli y Abraham de Moivre; estos dos últimos sacan a la teoría recién formada de su campo inicial de aplicación, los problemas relacionados con los juegos de azar, contribuyendo en mucho al desarrollo de la misma. En el siglo XIX, ya el marco teórico-conceptual ha crecido considerablemente y éste comienza a aplicarse a una problemática muy variada, dando origen a disciplinas nuevas como, Teoría de Errores, Matemática Actuarial y Mecánica Estadística. En nuestro siglo se destacan A. Kolmogorov, R. A. Fisher y R. von Mises.

EL CALCULO DE PROBABILIDADES EN SECUNDARIA

En éste apartado no pretendemos elaborar "el curriculum del Cálculo de Probabilidades para el nivel medio", pues éste debe surgir de la interacción educador-educando, modificándose, enriqueciéndose y adaptándose permanentemente a situaciones externas de diferente naturaleza; solo queremos establecer lineamientos generales que sirvan de guía para la estructuración de un programa sobre la enseñanza del Cálculo de Probabilidades a nivel de la educación media y que corresponda a la metodología indicada anteriormente.

En cuanto a lo metodológico, debe buscarse que el alumno, partiendo de experiencias concretas pase a la etapa de conceptualización y abstracción, la cual debe ser cuidadosamente planificada y contar con la supervisión del docente, fomentando siempre la creatividad, independencia de criterio, crítica constructiva, desarrollar la aptitud linguística del estudiante, ya sea en forma oral o escrita y finalmente buscar la integración de las diversas áreas del conocimiento que posea el educando al momento de su instrucción.

El objeto de estudio del Cálculo de Probabilidades es el fenómeno aleatorio, fenómenos que pueden experimentarse fácilmente en el aula (lanzamientos de monedas, de dados, juegos de cartas, estado futuro del tiempo, ect.), iniciándose entoces el proceso de conceptualización, cuya primera etapa debe culminar con el discernimiento entre el fenómeno en sí y el resultado del mismo, y entre aquello que es aleatorio y lo que no. Es necesario destacar la diferencia entre el logro de un concepto y la definición del mismo, correspondiendo ésta a un nivel de abstracción superior que generalmente culmina una etapa de algún proceso cognocitivo y no es determinante para avanzar dentro de dicho proceso. Podemos continuar, dentro de la misma metodología, hacia la conceptualización de espacio muestral y evento, relativos a un fenómeno aleatorio, para enfrentarlos de nuevo a experiencias que los lleven a medir en alguna forma la posible ocurrencia de dos o más eventos y así poder decidir en favor de algo establecido previamente. Ahora estaríamos a un paso del concepto correspondiente a la probabilidad de un evento, que en este nivel ya puede abstraerse como la frecuencia con que ocurre un evento determinado, relativa a las repeticiones del fenómeno aleatorio en estudio. Al término de este proceso, el estudiante puede incrementar su marco teórico-conceptual, cuestionándose acerca de qué propiedades corresponden a tales medidas de probabilidad.

Un primer curso, podría culminar calculando probabilidades en espacios de resultados igualmente probables, enfrentando problemas concretos en los que el estudiante aplicará los conocimientos adquiridos anteriormente, sobre conjuntos y operaciones con números racionales.

En un segundo curso se desarrollaría el marco conceptual y teórico correspondiente a las variables aleatorias discretas, buscando siempre la aplicación del nuevo conocimiento a la resolución de problemas concretos. Podrían, finalmente tratarse, sin mucha profundidad teórica pero con una buena conceptualización, variables aleatorias continuas y ciertas aplicaciones del Cálculo de Probabilidades a la Estadística.

Esta metodología iría clarificándose y mejorando a partir de su aplicación sistemática en el aula, puesto que estaría abierta a modificaciones que faciliten su adaptación al dinamismo del proceso educativo.

CONCLUSIONES

Mejorar la actitud de los egresados de la educación secundaria hacia la matemática, es una tarea muy importante. Actualmente el joven, al finalizar esta etapa, no logra vincular la matemática con su experiencia inmediata, fruto de una metodología que no proporciona claridad conceptual, ni la integración del conocimiento en el educando, pues su énfasis está en lo operacional y en aplicaciones triviales, ajenas a su realidad . Resulta urgente un cambio metodológico en la enseñanza de la matemática a nivel de la educación secundaria, que además de desarrollar destrezas operacionales en el educando, promueva su desarrollo intelectual, que no considere el concepto como algo acabado, sino teniendo presente que éste crece, se modifica y cambia conforme aumentan las experiencias vividas.

Es necesario clarificar los objetivos que el estudiante debe lograr al término de la secundaria, ya sea que pretenca continuar en la educación superior o incorporarse directamente al mercado de trabajo, dentro del marco de desarrollo de nuestra sociedad actual.

Creemos que los entes encargados de la educación en el país, deben buscar prontas soluciones a los problemas aquí señalados, si no queremos depender cada vez más de tecnólogos y científicos extranjeros y presenciar la rápida depreciación de nuestros productos.

La Geometría, El Cálculo de Probabilidades y la Estadística, deben ser temas de estudio en la educación media, pues dada su estrecha relación con el mundo real, permiten que el estudiante pueda resolver problemas concretos con los conocimientos adquiridos, enriqueciendo a la vez su marco teórico-conceptual y mejorando su actitud hacia las disciplinas matemáticas y científicas.

BIBLIOGRAFIA

1.- Feller, W. **Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones**. Vol.1, Limusa, México, 1975.

2.- Koopman, B.O. **The Axioms and Algebra of Intuitive Probability**. Ann. of Math. 2, vol. 41, 1940, pp.269-292.

3.- Koopman, B.O. **The Bases of Probability**. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 46, 1940, pp.763-774.

4.- Meyer, P.L. **Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas**. Fondo Educativo Interamericano, S.A., Bogotá, 1973.

5.- Várilly, Joseph C. **La Enseñanza de las Matemáticas con un Enfasis Histórico**. Rev. Fil. Universidad de Costa Rica, XXIV (59), 1986, pp.75-78.

6.- Wartofsky, Max W. **La Historia y la Filosofía de la Ciencia desde el Punto de Vista de una Epistemología Histórica**. La Filosofía y la Ciencia en Nuestros Días, Grijalbo, México, 1976.

PATRONES DE SOLUCION EN PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS: TAREAS DE COMPRA Y VENTA.

Jenny Oviedo de Valerio, Zayra Méndez
Escuela de Matemática- IIMEC
Universidad de Costa Rica

RESUMEN

Esta ponencia trata sobre algunos resultados relativos a los procedimientos que emplean niños de 7 a 12 años, al resolver problemas multiplicativos tipo "compra y venta". Es un avance de investigación de un proyecto de investigación que realizamos en conjunto un grupo de investigadores de la Universidad del Valle en Cali, del IMIPAE en Barcelona, y de la Universidad de Costa Rica. Hacemos un análisis de los procedimientos empleados por los niños al resolver tareas tipo "compra y venta", que sirve como base al diseño del programa de computadora "PROCECOMP", con el cual se podrá análizar estos procedimientos en cualquier muestra de niños.

INTRODUCCION:

El proyecto "Patrones de Solución de Problemas Multiplicativos Simples en Niños de 7 a 12 años" que realizamos en conjunto con investigadores colombianos y españoles, tiene como objetivos:

a) Profundizar en el conocimiento de la manera como los niños resuelven problemas de tipo multiplicativo.

b) Explorar en una población de 7 a 12 años una jerarquía genética en los procedimientos que el niño emplea al resolver problemas multiplicativos.

c) Determinar la relación entre los procedimientos que el niño emplea para resolver los problemas multiplicativos y los diferentes contextos experimentales.

Nos interesa profundizar en el estudio de problemas multiplicativos, es decir, aquellos en cuya solución se requiere una o varias multiplicaciones o una o varias divisiones, por considerarlos fundamentales en la matemática escolar, al ser la base de muchos otros conceptos matemáticos, como son: áreas, fracciones, potencias, etc.

Como seguidores de una pedagogía construcctivista, consideramos que el aprendizaje no debe consistir en una capacitación del individuo para hacer simples retenciones de los conocimientos, sino que se le debe proveer de situaciones y experiencias que favorezcan la construcción de estos conocimientos. Consideramos, en particular, que la enseñanza de la matemática debe centrarse en brindar al niño la posibilidad de construir patrones y relaciones y no sólo insistir en el aprendizaje de procedimientos mecánicos, memorización de teoremas y definiciones, que la mayoría de los alumnos no comprenden, con lo cual se ejercita la memoria, pero no la "abstracción reflexiva" (Piaget,1979), base de la construcción de las estructuras mentales

Investigaciones precedentes realizadas bajo una perspectiva construcctivista (Gómez Granel 1987, Moreno 1981) han demostrado que no hay una correspondencia entre las estructuras de los problemas matemáticos que se presentan a los niños y las estructuras mentales del niño. La matemática escolar tradicional ignora este hecho, pues no toma en cuenta las elaboraciones mentales del niño que imponen, según una jerarquía genética, distintos niveles de asimilación y por ende de comprensión, ante un mismo problema.

El desconocimiento de las elaboraciones mentales del niño en la pedagogía matemática tradicional, es causa de conflictos tanto para el alumno que se siente obligado a seguir el razonamiento adulto, como para el maestro que se siente impotente para motivar a sus estudiantes a aprender matematica.

Creemos que la práctica de solución de problemas, debiera tener un lugar preponderante en la matemática escolar, ya que con ello se logra alcanzar dos de los objetivos primordiales del aprendizaje de la matemática: desarrollar el razonamiento del niño y proporcionarle instrumentos intelectuales para resolver problemas.

Sin embargo, veamos lo que afirman Block, Dávila y Martinez (1990) , en su investigación sobre algunas concepciones de maestros de primaria frente a los procedimientos de sus alumnos al resolver problemas: "En general, tiende a destacarse una concepción pobre en la resolución de problemas. La sobrevaloración que los maestros hacen de la aplicación de algoritmos, les lleva a pasar por alto uno de los objetivos más importantes de los problemas en la escuela: que los alumnos aprendan a construir estrategias de resolución"

Dada la importancia de la matemática en el desarrollo científico y tecnológico de la sociedad moderna, es imprescindible romper con estos esquemas de enseñanza que por décadas han demostrado ser tan estériles. De ahí la relevancia de estudios, como el que aquí se presenta, en donde se busca conocer cómo una muestra de escolares costarricenses, colombianos y españoles de 7 a 12 años, resuelve determinados problemas multiplicativos. Creemos que los resultados de esta investigación serán un aporte a la teoría constructivista del aprendizaje y brindará información que puede ser de gran valor pedagógico

En el proyecto que estamos realizando, se analizan tareas correspondientes a los tres tipos de problemas multiplicativos, que resuelven los niños en la escuela primaria y que, según Bedoya (1989), por su estructura matemática, se pueden clasificar en: problemas tipo transformación lineal, tipo proporcionalidad y tipo producto cartesiano.

PROCEDIMIENTO Y METODOLOGIA

Se espera alcanzar los objetivos de esta investigación, analizando las conductas o producciones gestuales, verbales y si fuera necesario, escritas de los niños, ante tareas o problemas multiplicativos diseñados y seleccionados especialmente.

a) Para determinar, si existe, una relación entre el nivel de edad de los niños y la clase de patrón de solución empleado, en la muestra se incluye niños de diferentes niveles de edad.

Los problemas o tareas le serán propuestos a los niños en entrevistas individuales, las cuales serán filmadas para luego ser analizadas con todo detalle. Los niños contarán con material concreto para apoyarse en la solución de las tareas, si es que lo necesitan.

b) Para determinar si existe una relación entre el contexto experimental y la clase de procedimiento de solución, el contexto en los problemas se variará de dos maneras diferentes:

i) usando diferente contenido de las tareas:
tareas de " mezcla", "pared" y de "compra-venta"
ii) usando diferentes valores numéricos:
$k = 3, 7 \qquad v(1) = v = 3, 8$

TAREAS ANALIZADAS:

En esta ponencia trataremos sólo los problemas tipo transformación lineal cuyo enunciado, desde un punto de vista matemático, es:

"A un objeto cualquiera f se le ha asignado un valor $v = v(f)$. ¿Cuál es el valor de una colección F_k de objetos semejantes?

Los esquemas cualitativo y cuantivo de estos problemas son:

Esquema cualitativo:
$f \longrightarrow v(f)$
$F_k \longrightarrow x$

Esquema cuantitavivo:
$1 \longrightarrow v(1) = v$
$k \longrightarrow x$

Analizaremos sólo tres tareas correspondientes a este tipo de problema y cuyo contenido llamamos "compra y venta y la variación en el contexto la haremos variando los valores numéricos de las tareas ($v(1) = 3$, $v(1) = 8$, $k = 3$ y $k = 7$)

Los enunciados básicos de estas tres tareas son:

Tarea #1:

Si un confite vale 3 colones, ¿cuánto valen 3 confites?

Tarea #2:

Si un confite vale 3 colones, ¿cuánto valen 7 confites?

Tarea #3:

Si un confite vale 8 colones, ¿cuánto valen 7 confites?

Estas tareas o problemas son presentadas a los niños de la siguiente manera:

i) Se tratarán como una situación de intercambio: el entrevistador vende el niño compra. Los materiales, confites y monedas se intercambian en las manos o sobre una mesa, evitando hacer configuraciones que sugieran al niño la forma de solución. Si el niño necesita crearlas, se le permite hacerlas.

ii) Se le dará al niño la relación: 1 confite vale v(1), v(1) = v colones o pesos.

iii) No se le dará al niño el valor de k (el número de confites en la otra colección). Los confites prescritos para cada problema se pondrán sobre la mesa sin mencionar la cantidad.

iv) Se le preguntara: ¿Cuántos colones (pesos) debes pagar para comprar estos confites?

v) Cuando respondan la pregunta anterior, se les preguntará: ¿Cómo hiciste para saber que necesitas x colones para comprar los k confites?

Con base en la filmación se sacará un protocolo o registro escrito, donde se detallarán las conductas o producciones empleadas por cada niño en la solución de cada una las tareas. En el protocolo se detallará la secuencia ordenada de las actividades desplegadas por los niños y debe consignar, no sólo que hace el niño, sino también, cómo lo hace.

A partir del protocolo se elabora otro texto, donde se categorizan y se describen en lenguaje formal, todas las actividades realizadas por el niño para llegar a la solución del problema.

METODO DE ANALISIS:

Del análisis de este último texto, siguiendo el método de los colegas colombianos Orozco, Bedoya y Valencia (1989 y comunicación personal), se podrá identificar los diferentes procedimientos que emplean los niños para resolver las tareas propuestas. A este análisis lo llamamos análisis de las tareas.

Orozco (1990), dice: "Al analizar la producción del niño se pretende ubicar las acciones u operaciones o relaciones que generan los procedimientos. Cuando se trabaja con niños, ellos procesan en la "caja negra" la información que se les suministra. El investigador o el maestro no tienen acceso directo al proceso. El analisis de la producción intenta desarticular la lógica de la misma para inferir los procesos psicológicos que la posibilitan."

Para ahondar en el significado de la palabra procesos empleada en nuestra investigación, veamos lo que Pascual Leone (1988) nos dice al respecto: "Para explicar la secuencia de la computación mental y conectar los distintos pasos que de hecho produce el comportamiento humano es necesario identificar procesos, capacidades mentales que son estructurables y que constituyen síntesis dinámicas que producen comportamientos realmente nuevos en relación con el repertorio existente."

Entonces, Orozco (1990) afirma: "Al hacer análisis de tareas, el marco conceptual que se crea, permite al investigador o maestro analizar la lógica del procedimiento e inferir procesos."

Un método de análisis de los procedimientos de solución de la tarea, debe tratar de contestar a las siguientes preguntas:

1- ¿Qué hace el sujeto para resolver la tarea?
2- ¿Cómo lo hace?
3- ¿Cuándo lo hace?

El método de Orozco y otros, trata de responder a estas preguntas considerando las siguientes etapas en el procedimiento de solución:

Etapa I: Obtención de datos.
Etapa II: Conservación de datos.
Etapa III: Manejo de datos.
Etapa IV: Operatoria.

I- La obtención de datos considera dos aspectos: ¿qué datos obtiene el sujeto? y ¿cómo los obtiene?.

II- La conservación de datos toma en cuenta , también, los dos aspectos: ¿qué datos conserva? y ¿cómo los conserva?.

III- El manejo de datos toma en cuenta al tipo de manejo que le da el sujeto a los datos. El cómo maneja datos está referido a la relación o correspondencia que el niño establece entre ellos y al tipo de manejo ya sea concreto, visual o abstracto (utilizando la terminología de las categorías de Steffe (1990).

IV- La etapa operatoria, por último, analiza el tipo de operación aritmética que el niño realiza con los datos para obtener el resultado o valor de la incógnita, operación que puede consistir, en estas tareas, en una enumeración, una adición o una multiplicación).

PRESENTACION DE RESULTADOS:

Después de estudiar las producciones de los niños al resolver las Tareas 1, 2 y 3, el equipo de investigación costarricense, con la colaboración de la Dra. Orozco, hemos encontrado, que las correspondientes etapas del método de análisis, deben estar descritas de la siguiente manera:

ETAPA I: OBTENCION DE DATOS

OBTIENE DATOS	
QUE	COMO
1-Precio de un confite	1- Auditivamente
2-Precio de un confite y número de confites.	2- Señala confites, auditiv.
3-Otro tipo de datos	3- Verbal.za, auditiv.
	4- Enumera, auditiv.
	5- Contando de dos en dos, auditiv
	6- Otra manera

En la fase ¿COMO obtiene los datos? usamos términos que pasamos a definir:

Auditivamente, significa que el niño obtiene ese dato por parte del entrevistador, está en el enunciado de la tarea, por lo cual, su manera de obtención es por el sentido del oído.

Señala, se refiere a la acción del niño que consiste en tocar, mover o simplemente mirar los confites para saber cuántos cnfites hay.

Verbaliza, es la acción del niño que consiste en mirar los confites y decir hay k confites.

Enumera, se refiere a la acción del niño que consiste en tocar uno a uno a los confites y asignarles oralmente un número.

Se agrega como punto "6-Otra manera", para asignarle esta opción, al niño que emplee otra manera de contar los confites diferente a las ya contempladas.

ETAPAII: CONSERVACION DE DATOS

CONSERVA DATOS	
QUE	COMO
1- Precio de un confite	1- Correspondencia con monedas
2- precio de un confite y número de confites.	2- Correspondencia con dedos.
3- Otros datos	3- Correspond. con monedas, mentalmente
	4- Correspondencia con dedos, mentalmente
	5- Mentalmente
	6- Otra manera

En esta fase de ¿COMO conserva los datos?, empleamos algunos terminos que pasamos a aclarar:

Correspondencia con monedas. se refiere a la acción del niño que consiste en representar el precio v de un confite por medio de v monedas

Correspondencia con dedos, es la acción del niño que consiste en representar el precio de un confite con v dedos de una o las dos manos.

Mentalmente: decimos que un niño conserva un dato mentalmente, cuando lo obtiene y opera inmediatamente con él.

ETAPA III: MANEJO DE DATOS

MANEJA DATOS	
QUE	COMO
1- v monedas y confites	1- Correspondencia concreta
2- v dedos y confites	2- Corresp. concreta-visual
3- confites y v	3- Corresp. concreta-mental
4- v monedas y k	4- Corresp. visual-mental
5- v dedos y k	5- Corresp. mental
6- v y k	6- Otra manera.
7- otros datos	

En esta fase de ¿COMO maneja los datos?. decimos que la correspondencia entre las v monedas y los confites es concreta, cuando la acción realizada por el niño consiste en lo siguiente: toma un confite y le asigna v monedas, otro confite y le asigna otras v monedas y así sucesivamente hasta agotar los confites que se le dieron para calcularles el precio.

La correspondencia es concreta-visual entre los v dedos y los confites, por ejemplo, cuando el niño realiza la siguiente acción: usa los dedos de la mano para agregar el precio de un confite, mientras lleva la cuenta de los confites a los que les calcula el precio en forma visual (guiándose tal vez por el color de los confites).

La correspondencia es concreta-mental si la acción del niño consiste en conservar el precio de un confite mentalmente y tomar un confite y decir 3 u 8 (el precio de un confite), sigue tomando uno a uno los confites y adicionando cada vez el precio de un confite.

La correspondencia es mental si el niño relaciona el precio de un confite y el número de confites (los cuales conserva mentalmente) sin tener que representarse esos datos en forma concreta (con dedos o con momedas o con los mismos confites).

ETAPA IV: OPERATORIA

OPERATORIA
1- Enumera
2- Adiciona
3- Multiplica
4- Otra manera

PROGRAMA "COMPRA":

Tomando como base la categorización que hemos hecho de las diferentes etapas del procedimiento de solución para las tareas "tipo compra y venta" y el programa de computador "MULTIPATRONES", que nuestra colega colombiana María Eugenia Valencia (1989), diseñó para analizar las tareas "tipo pared", nuestro asistente en la investigación, estudiante de computación Sergio Campos, ha diseñado un programa de computadora, "PROCECOMP", que está en su fase de ajustes y verificación.

Este programa nos permitirá analizar el procedimiento de solución empleado niño por niño, comparar los procedimientos empleados por cada niño en las tres tareas y comparar estos procedimientos con los empleados por los niños de toda la muestra. Obtendremos, entonces el PATRON DE SOLUCION de cada niño ante estas tres tareas, esto es, la descripción de los procedimientos empleados por cada niño ante las tres tareas.

En la exposición oral de la ponencia mostraremos los cuadros resultantes del análisis hecho utilizando el programa.

Del análisis hecho hasta el momento, se observa una jerarquía genética en los procesos de solución que emplean los niños al resolver este tipo de problemas. Al resolver un mismo problema, los niños de mayor edad presentan conductas más complejas que los de menor edad.

También observamos, que la variación del contexto del problema, usando valores numéricos pequeños y más grandes, provoca en los niños el empleo de procesos de solución diferentes. Conforme los valores son mayores, el niño vuelve a presentar procesos de solución más elementales, que ya había superado en la solución de problemas con valores numéricos pequeños.

BIBLIOGRAFIA:

Gomez Granel,C. (1987), "El Niño y la Resolución de Problemas Multiplicativos"' Tesis de Doctorado Universidad de Barcelona

Moreno,M.(1983),"Qué es la Pedagogía Operatoria".La Pedagogía Operatoria, Editorial LAIA, Barcelona.

Orozco,M. (1989), "Método para analizar procesos de solución en niños al resolver problemas multiplicativos". Memorias de la III Reunión Centroamer. y del Caribe sobre Formac.de Prof. e Investigación en Matemática Educativa, San José, Costa Rica.

Orozco, M. (1990), "Cómo Hacer Análisis de Tareas", Continuar, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Pascual Leone,J.(1988) "Análisis Metasubjetivo de Tareas". Conferencia pronunciada en I Encuentro de Egresados, Dep. de Psicología, Universidad del Valle , Cali, Colombia.

Valencia,M.E.(1989),"Multipatrones-Un programa de Computador para analizar procesos de solución al resolver problemas multiplicativos tipo producto cartesiano". Memorias III Reunión Centroam. y del Caribe sobre Formación de Prof. e Invest. en Matemática Educativa, San José, Costa Rica.

Bedoya,E.,(1989),"Un Método de Análisis de Problemas Multiplicativos", Memorias III Reunión Centroamer. y del Caribe sobre Formac.de Prof.e Invest.en Mat. Educ.", San José, Costa Rica.

Steffe,L.,Von Glasersfeld,(1990), "Cómo Ayudar a los Niños a Comprender el Número". Traducción de Mariela Orozco en Continuar, publicación de Universidad del Valle, Cali.

Block,D., Dávila,M., Martínez,P.,(1990), Los Algoritmos en la Resolución de Problemas: Concepciones de los Maestros". Memorias IV Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formc. de Prof. e Invest. en Matemática Educativa, Acapulco, México.

Piaget,J.,(1979). "Estudios sobre la Abstraccion Reflexionante", Huemul, Buenos Aires, Argentina.

SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA *HISTORIA DE LAS MATEMATICAS*. IDEAS DE METODO

Angel Ruiz Zúñiga
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

RESUMEN

En este trabajo se busca establecer criterios de método sobre la enseñanza de la historia de las matemáticas. Para esos efectos se afirma la necesidad de conectar los estudios de la educación matemática, de la historia y filosofía de las matemáticas, y de las mismas matemáticas. El trabajo plantea la necesidad de la superación de la estructura ideológica que ha sido dominante en torno a las matemáticas.

América Latina se enfrenta en la actualidad a un importante reto. La dotación de una decisiva infraestructura científico-tecnológica capaz de fecundar el progreso de las naciones y los hombres que vivimos en este subcontinente. Se trata de la ruptura con las trabas estructurales de orígenes políticos, económicos, culturales, sociales, etc., que han determinado un reducido porcentaje de hombres de ciencia y tecnología y de recursos -en general- destinados a estas actividades. No se trata de una situación superable a partir de solamente cambios en las relaciones económicas o políticas internacionales, sino de una en la que las transformaciones culturales y las actitudes y voluntades de nuestras comunidades intelectuales pueden jugar un papel muy importante. Es en este contexto en el que debe inscribirse toda discusión sobre una estrategia de la enseñanza de la Historia de las ciencias y de las matemáticas en particular.

Es posible que el estudio (y desarrollo como disciplina) de la Historia de la Ciencia o de las Matemáticas en particular sea en sí misma una fuente especial de satisfacción intelectual. Ha sido el placer de la búsqueda del conocimiento en sí misma una característica de buena parte de nuestra historia y más que eso tal vez constituya una importante conquista y diferenciación de la condición humana, si es que podemos hablar de algo así. Sin embargo, la actualidad de la realidad de la situación que vivimos en nuestros países exige la búsqueda consciente de las dimensiones prácticas, útiles, de impacto social, en la determinación de una estrategia para la enseñanza de la Historia de la Matemática.

Se trata de encontrar la inserción de esta disciplina en los dispositivos que apunten al progreso científico-tecnológico y cultural (así como desde otro punto de vista, político e ideológico) de nuestras naciones. Aparte de la función posible en la recuperación de un patrimonio e identidades culturales, la Historia de la Matemática como disciplina debe encontrar su mejor orientación en el desarrollo de las Matemáticas y especialmente en la Enseñanza de las mismas en nuestros países. En la práctica matemática la historia es un factor esencial de comprensión de sus conceptos y métodos, de sus perspectivas, sus límites y sus posibilidades; un instrumento valioso para la determinación de estrategias colectivas de evolución consciente y adecuada a nuestras condiciones y recursos. En la Enseñanza, aparte de que esta conecta ya en sí íntima y dialécticamente con la práctica "constructiva", se vincula directa y activamente en la edificación de la infraestructura cultural matemática indispensable para un importante salto científico-tecnológico.

Pero no se trata solamente de un razonamiento localista de adecuación, rentabilización, de recursos y condiciones a objetivos de progreso. Lo cual ya es en sí un punto de partida básico. Se trata también de una orientación que posee una gran riqueza metodológica y epistemológicamente. La comprensión de la naturaleza de las matemáticas y de la historia de estas encuentra un extraordinario territorio viviente de experimentación, en el cual es posible obtener importantes indagaciones reflexivas e ideas renovadoras. Epistemológicamente: si bien la lógica psicogenética es diferente de la sociogenética, nadie puede negar el valor de las comparaciones que se pueden establecer entre ambos tipos de procesos de conocimiento-aprendizaje. La investigación epistemológica con base experimental en los procesos colectivos de la enseñanza de las matemáticas tendría un importante lugar para su desarrollo. El rol de la enseñanza de la historia puede ser en esto central. Los estudios de la pareja sociogénesis-psicogénesis ampliada -según mi opinión- más allá del marco piagetiano, pueden ser de gran trascendencia en la teoría del conocimiento y de la ciencia. Lo cual dentro de una orientación práctica retroalimentaría el sistema en desarrollo.

Ahora bien, la estrategia para una Enseñanza de la Historia de las Matemáticas no puede partir de premisas "objetivas", "neutrales", absolutas o verdaderas, susceptibles de una validación experimental. A pesar de todos aquellos elementos teóricos en los que grosso modo podemos afirmar como válidos en esto, la intersección con la interpretación y entonces, la ideología, no es vacía. Una discusión sobre la (Enseñanza de la Historia de las Matemáticas) no puede obviar el territorio de lo metodológico al menos si lo que se pretende es ir más allá de la simple actitud "anecdotaria". La Enseñanza de la Historia de la Matemática encuentra un sentido importante, como decíamos antes, en la Enseñanza, pero esta a su vez está en relación estrecha con las concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas mismas. Es decir: La Filosofía de las Matemáticas, las opiniones y los criterios metodológicos que sobre su naturaleza y evolución se tienen condicionan (han condicionado) su práctica y su enseñanza ¿Cómo no condicionarían una estrategia de la Enseñanza de la Historia de las Matemáticas?.

Aunque creo que a veces muchas discusiones sobre filosofía de las matemáticas han dado un "output" estéril, vacío, incapáz de fecundar algo. (Y, además, afirmo que no es conveniente concentrarse en este territorio) creo también que el esclarecimiento filosófico es esencial. No creo en aquella actitud de algunos historiadores de la ciencia que levantan la bandera del estudio de los casos "concretos", y condenan al ostracismo la filosofía. Afirmo radicalmente la importancia de la Filosofía de las Matemáticas en una estrategia para la Enseñanza de la Historia de las Matemáticas. Se trata, no obstante, de una dimensión integrada armonicamente en un proceso más complejo de acciones y desarrollos teóricos y prácticos.

En este terreno metodológico sugiero que una estrategia de la Enseñanza de la Historia de las Matemáticas, debe tomar como puntos de partida esclarecimiento sobre ciertas generalidades básicas sobre las matemáticas. Esto quiere decir que tanto en su concepción como en los objetivos trazados deben jugar un papel definido.

Veamos algunos de los temas que deberíamos considerar:

(a) Relación matemáticas y mundo material y social.

Yo afirmo una visión empirista de las matemáticas, pero de una manera que no asuma un empirismo radical -a lo Mill- en la comprensión de las nociones matemáticas. Se trata de entender una relación mutuamente condicionante entre los objeto y sujeto epistemológicos. Es decir una interacción de influjos recíprocos y cambiantes.

(b) Relación Matemáticas y otras Ciencias.

Se trata de entender la estrecha vinculación en la evolución teórica e histórica de bastantes partes del conocimiento científico, y donde las matemáticas, por su especificidad, han jugado papeles muy importantes.

(c) Relación Matemáticas e Historia humana.

Los vínculos comprensibles con los diferentes estratos de la historia de los hombres. Muy en particular, comprender Matemáticas y Cultura. Una actitud adecuada en este terreno permitiría comprender las matemáticas de una manera más amplia y enriquecedora, asimilando a estas resultados culturales que múchas veces por su forma han sido rechazadas o subestimadas.

(d) Relación Matemáticas y abstracción.

Se trata de comprender el papel especial que juegan las dimensiones abstractas en la evolución de las Matemáticas, y cómo en particular estas no corresponden a una naturaleza platonista de sus entidades.

Para enfrentar la discusión en estas dimensiones es necesario comprender la estructura de la ideología sobre las matemáticas que existe. O mejor dicho, de las ideologías que todavía predominan.[1]

Epistemológicamente, para el racionalismo los criterios de verdad últimos, terminan descansando en la mente. El sujeto, entonces, se convierte en un productor de verdades infalibles y absolutas. Esta mentalidad suele ir asociada, aunque no es siempre así, al platonismo. (1)

El racionalismo en parte trató de ser combatido en el siglo XIX por pensadores como Mill, con una posición inductivista. Pero esta a la larga terminaba siendo simplemente una posición simétrica; inversa pero simétrica a la del racionalismo. (2) En el empirismo inductivista de Mill la mente se reduce a una pantalla de cera donde el objeto imprime sus huellas. Este mecanicismo extremo no encontró mucho eco, incluso entre los mismo empiristas. El racionalismo ha sido una ideología sobre la naturaleza de las matemáticas dominante desde hace varios siglos.

En el siglo XX y a partir de los años 30, una nueva tendencia filosófica trató de dar una respuesta al racionalismo. El neopositivismo del círculo de Viena trató de salirse de la encrucijada. Sin embargo, afirmando una visión que le negaba contenido material, contenido fáctico a las matemáticas.(3) Las matemáticas no se referían ya al mundo sino que eran reducidas en última instancia a lenguaje y sintaxis. Se trataba sin duda de una visión convencionalista.

Tanto el racionalismo como el neopositivismo han compartido en el fondo la idea de que las matemáticas son a priori.(4) Pero hay más. A la par de la visión racionalista ha cohabitado también una visión tremendamente influyente sobre las matemáticas. Es aquella que afirma de manera especial el papel de lo axiomático, deductivo, lógico y formal en las matemáticas. Es decir, aquella que vista de manera extrema afirma un formalismo a ultranza en la concepción sobre la naturaleza de la matemática. En esta visión unilateral se ha llegado a afirmar incluso que la matemática es en realidad la teoría de los sistemas formales (Haskell Curry). (5)

En síntesis: una mezcla de racionalismo y formalismo ha estado en la base de las visiones dominantes de la matemática en nuestro siglo. Es esta combinación ideológica la que ha hecho, por ejemplo, que la matemática pura se haya convertido en la quintaescencia de lo que se supone son las matemáticas.

En lo que sigue voy a usar fragmentos de una conferencia que di en el Segundo Congreso Latinoamericano de Historia de las Ciencias y la Tecnología, Junio-Julio 1988, Sao Paulo, Brasil.

Hablemos un poco -también- de la historia de las matemáticas puras. La especialización que supuso el siglo XIX en las matemáticas fue un factor importante para crear la base humana, social, e incluso metodológica para el nacimiento de las matemáticas llamadas puras.(6) A partir del siglo XIX surge una nueva matemática contrapuesta con la de los siglos XVII y XVIII en la que se dan características de mayor abstracción, de mayor peso de la lógica. Contrastada esto, por ejemplo, con el peso de la predicción en la matemática analítica de los siglos anteriores. Esta nueva matemática, donde se pierde la referencia inmediata con la realidad empírica y natural, provoca la separación en la conciencia de los matemáticos de lo que debería ser la naturaleza de las matemáticas con relación al mundo.

La matemática abstracta del siglo XIX genera la posibilidad de especialistas trabajando en campos tremendamente abstractos de la matemática, alejados de la aplicación inmediata, alejados de una sanción veritativa, experimental, empírica. Esta situación va a reforzar una visión de la matemática que enfatiza lo abstracto y deductivo. (7) Va a enfatizar al mismo tiempo el racionalismo, pero, inversa y complementariamente, el racionalismo y el formalismo van a fortalecer en la vida y en la construcción cotidiana de las matemáticas un énfasis en los aspectos más puros y más abstractos. Las matemáticas puras refuerzan al racionalismo y viceversa. (8)

El siglo XX va a heredar esta visión de las matemáticas y los intentos neopositivistas van a ser incapaces de ofrecer una alternativa diferente a ese paradigma. Es esta situación ideológica de racionalismo, formalismo y neopositivismo sintáctico en matemáticas lo que va a estar presente, por ejemplo, en las reformas de los años 60 en la enseñanza de la matemática llamada moderna y que hoy sin duda podemos decir que vive una crisis latente.(9) El nuevo modelo de enseñanza de las matemáticas enfatizaba la teoría de conjuntos, las estructuras algebraicas, la construcción abstracta. Todo esto contrapuesto a lo intuitivo, a lo heurístico, a lo falible, a lo empírico. Este modelo hoy en día se cuestiona en el terreno de los resultados, de las bajas promociones, de la ausencia de una formación matemática necesaria en la vida científico-tecnológica de nuestros países, de la insatisfacción inexplicada de tantos maestros y profesores de matemáticas. Tampoco, hay que decirlo, el rechazo emotivo que en miles y miles de jóvenes encontramos contra las matemáticas está alejado de esta problemática.

En los 60 esta ideología penetró en América Latina a través de los textos traducidos, a través de los profesionales entrenados en el exterior en las nuevas ideas, a través de los programas de ayuda científica de las agencias regionales (OEA, UNESCO), etc.(10). Las elites de matemáticos y educadores locales en general se sometieron a las nuevas corrientes que querían modernizar la enseñanza de las matemáticas y adecuarlas a los nuevos resultados de investigación y a la revolución electrónica que se perfilaba desde entonces.

El modelo planteado en Norteamérica y algunas partes de Europa fue aceptado y, más aún, aplicado a veces de una manera extrema. Esto se daba, pero como siempre sucede sin dejar de producir serias consecuencias. El exceso de formalismo y abstracción inutil contribuyó a generar un proceso de alienación de cultura y de las posibilidades de un aprendizaje matemático basado en las condiciones culturales locales. Es este tipo de alienación el que plantea Ubiratan D'Ambrosio en su libro SOCIO-CULTURAL BASES FOR MATHEMATICS EDUCATION, y al que se refiere buena parte de la problemática que se recoge con la etno-matemática. (11)

Esta estructura ideológica ha tenido gran influencia en todo el mundo y no solo en los países periféricos. Se ha convertido en un obstáculo si se quiere general en el desarrollo positivo de las matemáticas. Pero especialmente en los países de América Latina, por la ausencia de una base autónoma de desarrollo científico-tecnológico, por ausencia de una vinculación condicionante de las matemáticas y el mundo científico-tecnológico y la industria y el desarrollo productivo, es evidente que el grado de influencia e incluso el daño ocasionado han sido mayores. Era más fácil que esta ideología pudiera integrarse, dominar e influenciar con consecuencias más difíciles de revertir en nuestros países que en los países altamente desarrollados, donde tuvo origen esta visión.

Hoy en día en cierto nivel de realidad los problemas del desarrollo de las matemáticas en nuestros países es una amalgama del carácter periférico de los mismos y todas sus consecuencias, con una presencia tremendamente enraizada y condicionante de esta estructura ideológica sobre la naturaleza de las matemáticas.

Para poder romper con este nudo de problemas es obvio entonces que al mismo tiempo existen por lo menos dos niveles de referencia.

Por un lado, todos aquellos que corresponden a la ruptura de las condiciones que provienen de nuestra historia como países periféricos. De una manera general es el territorio de la búsqueda de un orden internacional, económico, social, político, en donde las desigualdades se debiliten y sea posible mayores niveles de afirmación de cada nacionalidad, de desarrollo, progreso y satisfacción de las necesidades en el sentido más general. Esto se refiere a la creación de una base industrial, comercial y productiva más autónoma ligada a las necesidades nacionales, en condiciones más ventajosas en el mercado internacional, y con una política más favorable, positiva y colaborativa de los países altamente industrializados. Significa la construcción de una base amplia en la que todas las estructuras sociales, profesionales y culturales puedan participar de una manera más positiva y más eficaz frente a un resultado general de la vida de estos países. Esto tiene un cortejo de dimensiones económicas, sociales, políticas, culturales, etc. Implica acciones políticas y sociales.

En particular, y esto abre al mismo tiempo la segunda parte de la orientación, en la ciencia lo anterior implica la construcción de una política científica adecuada. En las matemáticas supone, en mi opinión, romper o buscar la ruptura con esa estructura ideológica de racionalismo, formalismo y convencionalismo sintáctico sobre las matemáticas. Se trata de romper con los consecuencias de esa síntesis de ideología en la enseñanza, en la construcción matemática, en la investigación, en sus relaciones con la realidad.

Sin embargo, no basta el reconocimiento o el estudio de lo que se afirma inadecuado para nuestro desarrollo. Tal vez tenga razón Hebe Vessuri cuando dice que los estudios sociales sobre la ciencia no deben identificarse con la construcción de ideologías (12), pero ya sea contenidos en estos estudios o no, no es posible para nosotros prescindir de la construcción de ideologías (entiendo este término como conjunto de ideas articuladas de alguna manera, y no como a veces se plantea como falsa conciencia). Eso sí apropiadas a nuestras necesidades.

Por eso es que yo me permito plantear, al mismo tiempo que la ruptura con un paradigma o un conjunto de ideologías sobre la matemática, la necesidad de afirmar una nueva visión sobre las matemáticas. Una visión que permita dar de manera integrada y global un marco de comprensión teórico al devenir y a la construcción de la matemática en nuestros países . Este marco de comprensión, esta nueva visión filosófica e ideológica evidentemente no puede restringirse a un marco nacional, regional o local, debe aspirar a ser una visión general, universal, sobre las matemáticas. Pero en la cual, por su naturaleza y por su nacimiento, por su origen, se debe estar altamente vinculado a las necesidades y a las condiciones de partida de estos propios países.

En este marco tal vez cabe con justeza la idea de D'Ambrosio de una compatibilización de formas culturales, integración entre dos tipos de matemática (13). Pero también, y de una manera más globalizante, se plantea aquí la indagación filosófica más general. En este territorio, quiero afirmar con toda claridad y enfáticamente, que la discusión de naturaleza filosófica, es decir, epistemológica y ontológica, aunque no sea la única que haya que hacer, juega un papel importante dentro de esta perspectiva general.

Para añadir algo que considero importante: creo que esta discusión -aunque interdisciplinaria- debe estar ligada profesionalmente a las matemáticas y a su enseñanza y a las ciencias. Cuando se deja esta tarea solo a los filosofos profesionales se pueden provocar muchos problemas. Uno de los principales defectos de los filósofos profesionales que han incursionado en la filosofía de las matemáticas siempre ha sido su desvinculación concreta con la práctica matemática. Es decir, muchos filósofos que han tenido contacto mínimo o -incluso- nulo con la matemática y la ciencia, en ocasiones se atreven a sostener sus posiciones y sus ideas como verdades y criterios cuasi-absolutos (incluso descalificando a los no filósofos profesionales que hacen filosofía). No es que los filósofos profesionales no deban participar de este proyecto, pero sus aportes deben integrarse en la elaboración intelectual que se produzca ligada a las matemáticas y su enseñanza.

Existen dos defectos simétricos en esto. El de los matemáticos que juzgan a la práctica de la filosofía de las matemáticas -y también a la historia de las matemáticas- como palabrería sin contenido y como una práctica profesional sin valor; y, por el otro lado, el de los filósofos profesionales, que piensan que solo ellos están capacitados para hacer filosofía (incluso de las matemáticas) y rapidamente descalifican los trabajos filosóficos de matemáticos, que caracterizan de falta de profundidad y erróneos, cuando no simplemente de resultados ignorancia filosófica. En Costa Rica hemos visto ambos defectos. Los matemáticos -aunque con buenas excepciones- que han negado espacio académico a la historia y la filosofía de las matemáticas; y el filósofo profesional que se siente amenazado profesionalmente cuando matemáticos invaden "su espacio" cuando hacen filosofía de las matemáticas. (Algo así se ha visto también en relación con la ciencia en general).

La realidad es que al igual que no basta hacer matemáticas para conocer la reflexión que se ha dado durante siglos sobre esta práctica del conocimiento y tener una visión amplia y profunda de las mismas, es cierto también que quien no ha hecho de la matemática su práctica no puede tener más que un acceso indirecto a la misma, con lo que sus juicios no podrían ser seriamente fundamentados. Por lo menos en el caso del matemático sin formación filosófica -aunque sus ideas puedan llegar a ser ingenuas y poco elaboradas- existe un contacto directo con las matemáticas que es esencial. Es interesante ver como tantas veces la ignorancia y los celos profesionales se tratan de cubrir con la más deplorable arrogancia intelectual.

Estos defectos solo se pueden corregir en la práctica interdisciplinaria colaborativa y respetuosa.

Para una estrategia de Enseñanza de la Historia de la Matemática que se afirma en las ideas anteriores, algunas sugerencias prácticas pueden ser muy útiles:

(a) Es importante el fortalecimiento del trabajo interdisciplinario, no solo dentro de la comunidad de científicos naturales sino también los sociales (sociólogos, antropólogos, historiadores). Es necesario impulsar la creación de centros on institutos que involucren la enseñanza, la filosofía y la historia de las matemáticas.

(b) La escogencia de los temas de trabajo deberían partir de las temáticas y los problemas medulares planteados en la enseñanza de las matemáticas, o en la práctica propiamente matemática (esto último obliga sin duda a un manejo de las matemáticas recientes muy desarrollado). Puesto en general: la base de escogencia en el presente que aparte de "iluminar" el pasado, busca ser "iluminado" por este.

(c) Las Matemáticas pre-universitarias (para no ir más lejos) llamadas "modernas", que en América Latina son producto de reformas en los años 60, corresponden a una mentalidad formalista poco intuitiva y desvinculada de la realidad material y social, y que de diferentes maneras revela una crisis. Una reforma nueva pareciera estar inscrita en el firmamento. La Historia de las Matemáticas puede jugar un papel tremendamente positivo en esa dirección, tanto como motor que empuja por la misma así como estructuradora de los nuevos resultados y orientaciones.

La Enseñanza de la Historia de las Matemáticas y de las Ciencias en general debe ocupar un papel importante en el diseño de los nuevos programas y estratégias educativas y científico-tecnológicos que requiere América Latina para su progreso.

(d) No es posible ocupar un papel importante y una dimensión edificante en la fecundación del desarrollo científico y tecnológico de nuestros países, si no existen cuerpos organizados que presionen por su auténtica materialización. En ese sentido, creo que los profesionales ligados a la historia de la matemática, a su enseñanza y desarrollo, deben crear grupos con planes de intervención práctica, de presión en las instituciones educativas locales y regionales.

Para terminar, quiero decir que ni los criterios que aquí he vertido, ni tal vez muchos otros, podrán agotar una temática que, sin pecar de "chauvinismo" gremial, creo es muy importante para el decurso positivo de la ciencia y la cultura en América Latina.

NOTAS BIBLIOGRAFICAS

1- Cfr. Lakatos,Imre en el libro MATEMATICAS, CIENCIA Y EPISTEMOLOGIA. Madrid: Alianza, 1981.

2- Cfr. Kline, Morris. MATHEMATICS: THE LOSS OF CERTAINTY. New York: Oxford University Press, 1980.

3-El texto clásico de esta visión es Ayer, A.J. LANGUAGE, TRUTH AND LOGIC. London: Penguin, 1983. Este libro fue publicado originalmente en 1936.

4- Cfr. Lakatos, I. Op. Cit.

5- Consúltese Curry, Haskell B. OUTLINES OF A FORMALIST PHILOSOPHY OF MATHEMATICS. Amsterdam: North-Holland, 1956.

6- Ideas interesantes sobre esto en Browder, Felix, "Does pure

mathematics have a relation to the sciences?" en Campbell, Douglas & Higgins, John (eds), MATHEMATICS. PEOPLE, PROBLEMS, RESULTS. California: Wadsworth International, 1984.

7- Frege es el primer pensador que aborda el caracter de las nuevas matemáticas creando una aproximación llamada logicismo. Un texto en español con estos trabajos es Frege, Gottlob. CONCEPTOGRAFIA. Trad. Hugo Padilla. Mexico: UNAM, 1972.

8- Cfr. Ruiz Zúñiga, A. "De si las matemáticas sirven para algo, o una discusión sobre las matemáticas aplicadas",Revista DESARROLLO N.5, Agosto 1987, San José, Costa Rica.

9-Cfr. OEA. LA REVOLUCION EN LAS MATEMATICAS ESCOLARES. Traducción de una publicación original del Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas de los EEUU. OEA, 1963.

10- D'Ambrosio, Ubiratan. SOCIO-CULTURAL BASES FOR MATHEMATICS EDUCATION. Campinas: Unicamp, 1985. P.68-69.

11- Cfr. Vessuri, Hebe (y otros). LA CIENCIA PERIFÉRICA. Caracas: Monte Avila Editores, 1983. P.23.

12-Cfr. D'Ambrosio. Op. Cit. P.71.

13-Sobre esto una excelente obra de Kline es WHY THE PROFESSOR CAN'T TEACH. New York: St. Martin s Press Inc., 1978.

OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMATICAS

Elaborado por:
Lic. Rosalinda Sanabria,
Instituto Tecnológico de
Costa Rica
Prof. Leslie Villalobos
Ministerio de Educación
Pública
Lic. Eduardo Díaz,
Universidad de Costa Rica

INTRODUCCION

En el desarrollo integral de cualquier sociedad, juega un papel preponderante la base científica que se haya formado en el transcurso de su historia, y el eje central de ese desarrollo lo constituye la matemática.

Es por ello, que gran número de los países desarrollados se han dado a la tarea de estimular, en los estudiantes de secundaria, el estudio y resolución de problemas matemáticos mediante competencias. Estos eventos, además de incentivar el interès
matemático, permiten detectar, en sus etapas tempranas, los estudiantes con mayores aptitudes analíticas y por ende a futuros científicos.

La primera Olimpiada Internacional se llevó a cabo en Rumanía, en la cual participaron educandos de siete países socialistas.

En los años posteriores se repitió el evento y paulatinamente se fueron agregando más naciones para lograr una meta en común.

La popularidad de las Olimpiadas creció tanto, que surgió la necesidad de ampliarlas a eventos a nivel nacional y continental con el propósito de seleccionar los participantes a nivel mundial.
Costa Rica participa por primera vez en la Olimpiada Iberoamericana, en 1988 con sede en Lima, Perú. La presencia de Costa Rica en esa competencia fue antecedida por varias a escala nacional realizadas en los Colegios. La primera ocurrió en 1982
Los mecanismos de organización y selección se han ido perfeccionando poco a poco y durante este año se está realizando la Cuarta Olimpiada Nacional con miras a participar en la Quinta Olimpiada Iberoamericana que se llevará a cabo en Valladolid, España.

SISTEMA DE TRABAJO

En julio de 1989 se reunieron los representantes de las Universidades Estatales y del Ministerio de Educación Pública con el fin de continuar con la organización de las Olimpíadas Costarricenses Matemáticas.
Una de las razones que motivaron está iniciativa es la del mal estado actual de la enseñanza de la Matemática en nuestro país. Generalmente lo que se enseña tiene poca relación con la situaciación del estudiante, por tanto la matemática se convierte en algo tedioso y difícil, cuando debería de ser una de las asignaturas que más satisfacción podría dar a los estudiantes.
Las Olimpiadas pretenden romper con esta mala concepción ya generalizada de la Matemática.
Para romper este esquema, se decidió llevar a cabo la Olimpiada Piloto de Matemática, con la participación de un número reducido de instituciones. Se Consideró de manera prioritaria, aquellas instituciones en las cuales los

profesores habían dado muestras de un interés muy especial por este tipo de actividades. Se presentaron 12 centros Educativos y cada centro podía estar representado por un máximo de cinco estudiantes de cuarto año.

Al realizar la eliminatoria se clasificó a doce estudiantes, los que se ha continuado preparando para la siguiente etapa.

Como consecuencia de las experiencias generadas en la Olimpiada Piloto de 1989, un grupo de profesores se dio a la tarea de buscar apoyo institucional permanente para este evento. Surge así una comisión integrada por personal del Ministerio de Educación Pública y las cuatro Universidades Estatales, la cual, oficialmente, tiene la responsabilidad de organizar las "Olimpiadas Costarricenses de Matemática 1990".

La Comisión elaboró el reglamento de las Olimpiadas Costarricenses, el cual vino a ser el marco legal para esta actividad en el país.

Se envió una invitación a todos los Colegios del país, y se obtuvo una inscripción de 70 Colegios de todo el territorio nacional.

La participación fue restringida a un máximo de cinco estudiantes de noveno o décimo año por Institución.

La Comisión Organizadora elaboró materiales de apoyo para los profesores y alumnos participantes, que consiste en preguntas modelo, con el propósito de orientar el trabajo en cada Institución.

En algunas Instituciones se organizan grupos de estudio bajo el modelo de clubes. Estos clubes sirven de marco para el trabajo de los estudiantes y profesores.

El 8 de junio se realizó la primera prueba eliminatoria con la participación de 253 estudiantes de 59 Instituciones de todo el país. Para la selección, en esta primera eliminatoria, se obtuvo la media aritmética de los resultados de la prueba y se clasificaron aquellos estudiantes que obtuvieron un porcentaje superior o igual a la misma. Clasificaron, en esta oportunidad 121 estudiantes.

En la primera prueba se utilizó un examen con preguntas de selección única. Para la segunda eliminatoria se utilizó una prueba con preguntas de selección y desarrollo.

Además de las actividades de esta Olimpiada Nacional, y con miras a las Olimpiadas Iberoamericanas, se trabajó con 12 estudiantes que clasificaron en la Olimpiada Piloto del año anterior. Los miembros de la Comisión Organizadora, todos los sábados atendían a los estudiantes. En estas sesiones de trabajo se desarrollaron contenidos matemáticos y resolución de problemas, divididos en cuatro áreas básicas: Teoría de Números, Funciones, Geometría y Algebra.

Posteriormente se les aplicó una prueba a estos estudiantes y se seleccionaron los cuatro mejores, quienes nos representaran en la quinta Olimpiada Iberoamericana.

En este momento, se está preparando el encuentro final de la Olimpiada Costarricense para obtener los mejores estudiantes de Matemática de 1990. La eliminatoria final está programada para el 1 y 2 de noviembre de este año.

OBJETIVOS DE LA OLIMPIADA

Objetivos Generales

1. Estimular el estudio de la matemática a nivel nacional.
2. Promover el desarrollo vocacional de jóvenes talentosos en matemática.

Objetivos Específicos

1. Estimular el estudio de la matemática en las Instituciones educativas del país.
2. Contribuir al mejoramiento cualitativo de la enseñanza de la matemática.

3. Identificar tempranamente a jóvenes con talento especial en matemática para darles orientación vocacional.
4. Fomentar el desarrollo de publicaciones sobre matemática en todos los niveles educativos.
5. Propiciar la investigación, la creatividad y la criticidad en estudiantes y profesores.
6. Fortalecer las relaciones entre estudiantes y profesores.
7. Fomentar cuadros de estudiantes y profesores capaces de participar en la Olimpiada Iberoamericana y la Internacional de Matemática.
8. Estimular el uso de nuevas metodologías en la enseñanza de la matemática y en particular en la resolución de problemas.
9. Efectuar una productiva integración de los sectores universitarios y secundarios en el área de la matemática.

CONSIDERACIONES FINALES

1. Es importante dar permanencia a la Comisión Organizadora de las Olimpiadas.
2. Dar seguimiento a los estudiantes finalistas para ver la orientación vocacional que elijan.
3. Apoyar administrativamente y técnicamente a los profesores tutores de cada Institucion.
4. Ampliar este tipo de actividades a otros niveles educativos.
5. Fomentar el trabajo de evenwtos paralelos, tales como seminarios, charlas, simposios; con el propósito de analizar y difundir los alcances de la Olimpiada .

LAS MATEMÁTICAS Y SUS APLICACIONES EN LA ENSEÑANZA MEDIA

Teodora Tsijli A.
Escuela de Matemáticas/ Universidad de Costa Rica
San José, Costa Rica

RESUMEN

La necesidad de relacionar los conceptos matemáticos que se enseñan en los distintos niveles de la educación formal con situaciónes concretas es una preocupación constante de los docentes. Trataremos de exponer algunas opiniones al respecto y ofrecer sugerencias que podrían ser de conveniencia considerar.

Uno de los aspectos que más preocupa a quienes pretenden escribir libros de texto de matemáticas es como relacionar los conceptos abstractos con problemas concretos y especialmente problemas de interés para el educando. Esta preocupación podríamos decir que emana directamente de los objetivos que en los distintos programas "oficiales" de matemáticas se plantean, tales como :

-Desarrollar en el estudiante el razonamiento lógico.

-Preparar al estudiante para que pueda enfrentar situaciones concretas. En otras palabras lo que algunos docentes acostumbran expresar como "preparar para la vida".

En este sentido se procura ofrecer problemas que no solamente muestren la aplicabilidad de las matemáticas en otras áreas de las ciencias sino también con el objetivo de mostrarle al estudiante que las matemáticas le son necesarias para su desenvolvimiento futuro como ciudadano o como profesional. Es así que se espera motivarlo, despertar su interés y disminuir la fobia hacia las matemáticas.

Utilizar en nuestra enseñanza ejemplos de aplicación podría contribuir a la disminución de esta fobia existente hacia las matemáticas. No entramos a analizar las causas o razones de la fobia hacia esta disciplina. No entramos a analizar si se debe fundamentalmente al caracter abstracto de las matemáticas como algunos afirman o razones culturales, estereotipos, etc.

Admitimos que a lo largo de muchos años se reconoce que hay problemas en la enseñanza de las matemáticas y esto se refleja de muchas y variadas maneras en el comportamiento de los estudiantes y en ese comportamineto incluimos tanto la actitud del estudiante hacia las matemáticas como el rendimiento en las pruebas respectivas.

La observación, el razonamiento inductivo y deductivo, el conocimiento histórico, las aplicaciones, dan la oportunidad al educando de seguir paso a paso el camino muchas veces dificil y tortuoso de un descubrimiento y su desarrollo así como las experiencias de quienes contribuyeron a este desarrollo y su consolidación como concepto o teoría y sus alcances a través de las aplicaciones.

Y cuando hablamos de desarrollo histórico y aplicaciones incluimos la historia de los matemáticos inmersa en el contexto más amplio del desarrollo histórico de las ciencias y las aplicaciones concretas ligadas con situaciones de la vida cotidiana y también aplicaciones en otras ciencias como física y química. En ningun momento la matemática se ha desligado del contexto social y científico de la época.

La reforma impulsada o impuesta en los años sesenta promueve la enseñanza de una matemática eminentemente abstracta. Se ha dicho y escrito mucho al respecto y no es nuestro interés hacer un análisis de los programas, el enfoque y la filosofía de esta reforma.

Solamente señalamos el hecho de que la evaluación de los logros de esta reforma no fue tan positiva y es así que se promueve un giro hacia las matemáticas más ligadas con la realidad, menos abstractas y más aplicadas.

Pensamos que el peligro está en caer al otro extremo. Ver las aplicaciones, los problemas concretos como medio y fin de la enseñaza de la matemáticas y dejar de lado esta su faceta de ciencia abstracta.

Es importante subrayar que el paso de la teoría a las aplicaciones concretas así como el paso desde la matematización de unas situaciones concretas hacia el desarrollo de una teoría y vuelta de nuevo a la aplicación de la teoría, podrían permitir al estudiante conocer y reconocer por un lado la naturaleza misma de las matemáticas y por otro su utilidad, su valor como herramienta para la resolución de los más diversos problemas.

Lo que se necesita es lograr el equilibrio entre la teoría matemática abstracta y los porblemas de aplicación a través de los cuales se logra distinguir los origenes, desarrollo de la teoría y también sus áreas de aplicación.

En los distintos foros como congresos, seminarios, etc se reconoce que el conocimiento del desarrollo histórico de las matemáticas como ciencia juega un papel fundamental para relacionar la ciencia matemática abstracta con el mundo que nos rodea. Que no se piense que hablamos aquí de la mensión de los matemáticos, sus descubrimientos y situaciones anegdóticas de sus vidas a la par de las fechas de nacimiento y muerte. Estamos hablando del desarrollo histórico de las ideas matemáticas, los métodos que se siguieron y sus aplicaciones a lo largo del tiempo.

No siempre se puede ofrecer problemas que sean del interés del estudiante. Tal vez a nadie le interese "encontrar dos números impares consecutivos cuya suma es igual a 3076" sin embargo el profesor presenta este tipo de problemas con el fin de que el estudiante vaya aprendiendo a "formar modelos matemáticos".

Lo que considero preocupante es que muchas veces se presentan problemas interesantes, de gran riqueza educativa y sin embargo no se explotan adecuadamente. Ejemplo de esto es el siguiente problema:

Se estima que la población de la tierra aumenta en un 2% anualmente. En cuanto tiempo se duplicará la población de la tierra?

Solución que usualmente se da:

Si la población de A_o personas aumenta en r por ciento anualmente en t años hay $A=A_o(1+r)^t$ personas. Usando los datos del problema tenemos:

$$A = 2A_o$$
$$r = 2\% = 0.02$$
$$t=?$$

Sustituyendo en ~~la fórmula que~~ da la población en función del tiempo se obtiene:

$$2A_o = A_o(1+0.02)^t$$

Resolvemos respecto a t (usando logaritmos) y tenemos:

$$t = \frac{\log 2}{\log 1.02} \simeq 35$$

Solución que considero más adecuada:

El problema se presta para "razonar" y obtener la fórmula

$$A(t)=A_o(1+r)^t$$

Población inicial A_o.

Si el aumento porcentual de la población existente por año es r.

1)Después de 1 año la población será

$$A_o+ A_o r = A_o(1+r)$$

2)Después de 2 años la población será

$$A_o(1+r) + [A_o(1+r)]r = A_o(1+r)^2$$

3)Después de 3 años la población será

$$A_o(1+r)^2+ [A_o(1+r)^2]r = A_o(1+r)^3$$

(La guía del profesor conduce al estudiante a descubrir la población en 1, 2, 3,..., t años.)

En t años la población será

$$A(t)=A_o(1+r)^t$$

Se continúa como en la solución usual.

No dudo de la importancia de los problemas y su solución en la enseñanza de las matemáticas y en todos los niveles educativos. Pero sí creo que debemos reflexionar más sobre los problemas a escoger y cómo resolverlos para que se logre un aprendizaje mejor (cualitativa y cuantitativamente hablando).

BIBLIOGRAFIA

Barahona, Manuel. Matemática Elemental. Edit. U.C.R., San José, Costa Rica, 1987.

Polya, G. Cómo Plantear y Resolver Problemas. Edit. Trillas, México, 1976.

Brenes, Violeta y Díaz, Antonieta. Respuestas Interesantes a Preguntas Interesantes. Revista Las Matemáticas y su Enseñanza, #1 vol.1, Julio 1989.

SECCION DE HISTORIA DE LAS MATEMATICAS

MATEMATICAS E HISTORIA DE LAS MATEMATICAS : EL NUMERO π, SIETE MIL AÑOS DE MISTERIO.

Manuel Barahona Droguett
Escuela de Matemáticas/ Universidad de Costa Rica
San José, Costa Rica

RESUMEN

Se intenta dar una visión del itinerario histórico del número π ; desde su nacimiento, 5000 años antes de Cristo, hasta el descubrimiento de su verdadera naturaleza en el año 1882.

LA PREHISTORIA DEL NUMERO π
(5000 hasta 200 a. C)

La noción de círculo es quizás uno de los pocos conceptos que el hombre adquirió desde los mas remotos dias de su aparición en la tierra. Este concepto se anidó en la mente del hombre, probablemente, mucho tiempo antes que el concepto de número. El sol y la luna han estado allí desde el principio de los tiempos, millones de años antes que los primeros hombres tomaran conciencia de su existencia : el sol y la luna fueron quizás los primeros dioses de la humanidad. Desde esos remotos tiempos hasta hoy se han destruido y construido miles de ciudades, se han cavado miles de tumbas sobre otras tumbas, se han formado imperios sobre otros imperios pero el cielo sigue mostrando la misma luna y el mismo sol.

Cuando un hombre anónimo fue capáz de reproducir en la tierra el círculo que veía en la bóveda celeste se inició una aventura cuyo epílogo sería escrito una fría mañana del día 26 de noviembre de 1882 por FERDINAND VON LINDEMANN un joven profesor de la Universidad de Friburg.

Desde la aparición del HOMBRE DE NEANDERTAL hasta 10.000 años antes de Cristo poco o nada podemos decir acerca del circulo que no sea en relación con la naturaleza divina del sol y de la luna. Pero, a partir de esta fecha, salido de la larga noche de los tiempos, emigró a la Baja Mesopotamia, desde lo que es hoy la Meseta de Irán, un pueblo de agricultures que ya tenía conocimiento de los metales. Entre las grandes ciudades fundadas por estos emigrantes se hallan Sumer, Akkad, uruk, Eridu y Babilonia. En estos pueblos se inventó la escritura, floreció el arte, la literatura, la astronomía, la astrología y todas las manifestaciones culturales del hombre. Las millares de tablillas de arcilla cocida escritas con caracteres cuneiformes y el gran número de cilindros del mismo material que presentan en relieves escenas de su vida diaria nos dan testimonio de su avanzada cultura.

Esta comunidades no solamente llegaron a dominar el arte de la metalurgia sino que inventaron la RUEDA del alfarero y al mismo tiempo resolvieron el problema de transporte por medio de la carreta y de animales de carga.

En algun momento de la historia, probablemente alrededor de 5000 a 6000 años antes de Cristo alguno de estos hombres tuvo la necesidad, ó la curiosidad, de medir el diámetro de la rueda y ver cuantas veces cabia éste en su perimetro. Cuando la unidad de medida era el codo, el pie ó la palma de la mano, este sapiens se dio cuenta, ¡ Oh maravilla¡, que no importaba cuan pequeña o cuan grande fuese dicha rueda, hallaba repetidamente que el perimetro era igual a tres veces su diámetro.

El primer registro escrito que muestra que el hombre se dio cuenta de la existencia de ESTA CONSTANTE está en la civiliación sumeria. Entre los cientos de millares de tablillas de arcilla cocida que se han hallado que contienen los mitos, himnos, epopeyas, lamentaciones, colecciones de proverbios, fábulas, ensayos, complicadas especulaciones teológicas, cuentas comerciales, cartas, la historia detallada de cada una de las dinastias, codigos, etc, existe una que dice :

" Si 60 es el largo del circulo su tercera parte es 20,

ese es su diámetro "

Como era de esperar, otras culturas, antes, después o paralelamente a la de los sumerios, hicieron el mismo descubrimiento: en particular la cultura egipcia. Se considera que la civilización egipcia es tan antigua como la mesopotámica y alrededor de 5000 años antes de cristo se advierte un avance considerable de su cultura. Junto con el uso de los metales aparece lo que podria ser el preludio de la escritura. A diferencia de los mesopotámicos que escribieron en tablillas y cilindros de arcilla cocida, los egipcios descubrieron el papiro un excelente material para escribir y asi a partir del año 3500 a 3000 antes de Cristo éstos empiezan a dejar testimonio escrito de su civilización.

En esta época la matemática y la astronomia reciben un gran impulso especialmente por motivos prácticos y religiosos. Aparece la rueda del alfarero, el transporte de carreta e inician sus grandes obras de arquitectura. Hacen su aparición las escuelas de escribas que jugarian un importante rol en la mantención y trasmisión del conocimiento en las letras, las artes, las matemáticas, la astronomia, la medicina, la teologia y otras disciplinas. De los conocimientos matemáticos egipcios de esta época nos informan el PAPIRO DE RHIND, DE LONDRES y DE MOSCU. El primero es un libro escolar de cálculo que nos muestra no sólo el arte de calcular sino además sus logros en el cálculo de áreas de figuras planas y en particular el descubrimiento de nuestra constante a la cual le asignaron el valor de 3,16. Los otros dos papiros revelan conocimientos mucho mas sofisticados. Así, por ejemplo, llegaron a calcular el volumen de un tronco de pirámide de base cuadrada.

Los egipcios hallaron al principio, al igual que los babilonios, que la relación entre la longitud del círculo y su diámetro era igual a tres. Sin embargo pronto se dieron cuenta que este número resultaba también de dividir el perímetro del exágono regular inscrito entre el diámetro de la circunferencia. Ellos sabían que el perímetro del exágono regular inscrito era igual a 6 radios y como el diámetro era igual a 2 radios el valor de π era claramente 3. Esta observación les convenció que el valor de π era igual a 3 y "un poquito mas". Los papiros de Rhind y de Moscú nos muestran que los egipcios se enfrentaron al problema de determinar " la misteriosa constante " no ya calculando directamente el cociente entre el perímetro del círculo y su diámetro sino calculando el área de dicho círculo. En la búsqueda de la solución llegaron a plantear el famoso problema número 48 del papiro de Rhind :

" comparar el área del círculo y del cuadrado circunscrito ".

La solución - que hallaron mediante un método realmente asombroso - les permitió descubrir que "el poquito mas" era igual a 0,16. Esta diferencia la calcularon tratando de aproximar el área del círculo mediante un cuadrado que tuviera la misma área que dicho círculo. Y cuando el conocimiento de los pueblos del Antiguo Oriente pasó a manos de LOS GRIEGOS el problema de calcular el número π les llegó en la forma de la solución propuesta para el problema número 48 del papiro de Rhind.

El llamado MILAGRO GRIEGO, que no es mas que la continuación de los asombrosos descubrimientos de los pueblos del Antiguo Oriente, le dió al problema de CUADRAR EL CIRCULO un caracter mucho mas universal que el que le habían impreso los egipcios. El notable empujón que los griegos dieron al conocimiento en todas las esferas del saber humano, en particular en la matemática, condujo al problema DE LA CUADRATURA DEL CIRCULO a una monumental discusión que duraría, a partir de los griegos, mas de 2500 años. Aunque los griegos no inventaron la filosofía, si inventaron al filosofo y a la vida filosófica. La aparición, en la escena del saber de la humanidad, del MATERIALISMO y del IDEALISMO trajo como consecuencia que los filósofos tratataran de explicarse, para siempre, todos los problemas de su universo, en particular los problemas de la matemática, siguiendo estas dos grandes corrientes de pensamiento. En esta monumental pugna, que abarcó a todo el conocimiento de la época, el problema de la cuadratura del círculo estuvo en el centro de la tormenta. Los matemáticos y filósofos de orientación IDEALISTA trataban de hacer de la matemática un reducto del espiritu y pretendían que la geometría no debía tener nada que ver con la realidad llegando a rechazar las mediciones y los cálculos numéricos en su investigación.

Para estos filósofos y matemáticos griegos la verdadera geometría era aquella hecha solamente CON LA REGLA Y EL COMPAS. El problema de la cuadratura del círculo se transformó, de esta manera, en HALLAR UN CUADRADO DE LA MISMA AREA QUE UN CIRCULO DADO utilizando solamente la regla y el compás.

El problema de la cuadratura del círculo terminó por presentarse bajo dos aspectos diferentes. EL PRIMERO POSIBLE : Calcular el área aproximada del círculo ; problema en el cual está implícito el cálculo aproximado del número π. EL SEGUNDO IMPOSIBLE : Construir con solamente regla y compás, con un número finito de pasos, un cuadrado de área exactamente igual a un círculo dado.

Durante los diez siglos en que el conocimiento griego iluminó a la humanidad la búsqueda de la solución de la cuadratura con regla y compás produjo un notable avance de la geometría : Los Elementos de Euclides son un buen ejemplo de este aserto. Euclides uno de los geómetras idealistas mas notables de su época no realizó ni un solo cálculo numérico en toda su obra. Los esfuerzos realizados bajo el esquema de los filósofos y matemáticos idealistas, que dominaban la escena de la filosofía, no condujeron al problema a un final feliz.

LA HISTORIA DEL NUMERO π

ARQUIMEDES (287-212 a.C)

Fue Arquímedes - el primer hombre moderno de la antiguedad - quien abrió un nuevo camino en la búsqueda de la solución adoptando nuevos métodos que contradecían a la opinión pública de su época. Arquímides tuvo el coraje no solo de utilizar otros instrumentos mecánicos, aparte de la regla y el compas, sino además de realizar cálculos y aproximaciones en un tiempo en que éstos no podian hacerse en la geometría. El método que Arquímides utilizó para calcular el número π y que estaría vigente por casi 2000 años consistió fundamentalmente en considerar un círculo, de radio igual a la unidad, inscrito ó circunscrito a un polígono• y calcular los perimetros de dichos polígonos. A medida que aumenta el número de lados del polígono el perimetro de éste se acerca mas y mas al perimetro del círculo. De tal forma que el problema de calcular el valor de π se traducía finalmente en hallar solamente los semiperimetros de los polígonos. Utilizando la simbologia moderna la idea de Arquimides puede expresarse en la forma siguiente :

largo del circulo = $2\pi r$, si $r = 1$, entonces,

largo del circulo = 2π , despejando π resulta,

$$\pi = \text{largo del circulo}/2$$

Si el polígono es inscrito al circulo a medida que aumentan los lados de dicho poligono se obtiene una sucesión, convergente a π, de valores menores que π. Y si el poligono es circunscrito al circulo a medida que aumentan los lados del polígono se obtiene una sucesión convergente a π, de valores mayores que π. Con este método Arquímides estableció la siguiente desigualdad:

$$3{,}140 < \pi < 3{,}142$$

La decadencia de la Cultura griega se inició, practicamente, al mismo tiempo que se convertia en colonia romana y, después de Arquimedes, en occidente, hasta 1500 años después, nada mas se haria por desentrañar el problema de la cuadratura del circulo y de mejorar los decimales del π.

HINDUES, CHINOS Y ARABES.

(1000 a.C hasta 1500 d.C)

Los escritos hindues de caracter científico datan aproximadamente desde 1000 años antes de cristo y desde esa época se conoce el libro SURYA SADDHARTA, escrito en verso, en el cual se le atribuye a π el valor de 3,08. En el siglo V, cuando en occidente nadie sabia cual era el significado de este número, ARYABHATA, uno de los mas grandes pensadores y astrónomos de la India había logrado calcular con una precisión digna de admiración que π era igual a 3,1416. Debido a que al principio sus conocimientos los trasmitian por via oral los hindúes concluyeron que la mejor forma de memorizarlos era en verso y mantuvieron esta costumbre hasta muy avanzada su civilización.

Los versos referidos a este resultado dicen lo siguiente :

" SUMA 4 A 100,

MULTIPLICA CON 8 Y SUMA TODO CON 62.000,

LO QUE HALLAMOS ES EL LARGO DEL CIRCULO

SI SU DIAMETRO ES 20.000 "

Al parecer este pueblo no se planteó el problema de la cuadratura del circulo tal como lo hicieron los egipcios y posteriormente los griegos sin embargo llegaron a calcular π con una precisión asombrosa, precisión que seria igualada solamente en el siglo XVII.

Otra de las fuentes mas antiguas del saber hindú lo constituye un texto en Sanscrito llamado TANTRASANGRAHA, que significa colección científica, del gran sabio NIKALAKANTA. Este llegó a establecer que el valor de π podia expresarse mediante la fracción $^{104348}/_{3321}{}^{5}$ cuya expresión decimal es 3,141592639 con todos sus decimales exactos.

Sobre la matemática CHINA se tiene información escrita a partir del siglo II antes de Cristo en el periodo de la dinastia HAN. El primer gran tratado importante de matemática que ha llegado hasta nuestras dias se llama MATEMATICA DE LOS NUEVE LIBROS de TZIU CIJAN SUAN SU en el cual se hallan un conjunto de conocimientos que caracterizan la matemática desde aproximadamente 1000 años antes de Cristo. Es poco probable que los chinos se ocuparan del problema de la cuadratura del circulo sin embargo en LOS NUEVE LIBROS está enunciado la siguiente proposición:

" El área del circulo es equivalente con

$^{3}/_{4}$ del área del cuadrado circunscrito "

Esta proposición está muy lejos de llegar a plantear el problema de la cuadratura correctamente. Sin embargo por métodos que se desconocen los chinos lograron calcular el valor de π con una exactitud digna de admiración. Así el astronónomo y filósofo CIJAN-HEN en base a consideraciones desconocidas halló que π = /10 = 3,162. El erudito y jefe militar VAN FAN cuya muerte ocurrió en el año 267, halló, mediante procedimientos desconocidos, que π era igual a la fracción $^{142}/_{45}$ = 3,155. LIU

HUEI cuyas fechas de nacimiento y muerte se desconoce, utilizando el mismo método de Arquímides, aproximó el área del circulo mediante un polígono de 3.702 lados llegando a establecer que $\pi = 3{,}14159$. El eminente Astrónomo matemático e ingeniero TZU CIUN CIJI (430-501 d.C) encontró, mediante métodos desconocidos, que π satisface la desigualdad :

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$$

En el siglo VIII funcionaba en BAGDAD una gran institución cientifica llamada BEIT AL-HIMKA que se traduce como CASA DE LA SABIDURIA. Aqui investigaban y trabajaban las mentes mas brillantes del mundo árabe que tenían la misión de traducir y estudiar las obras científicas y filosóficas mas importantes conocidas hasta entonces. Después de la caida del IMPERIO ROMANO la cultura cristiana empezó a regir los destinos de Europa y la nueva era, la era de la fe, sustituiría en ocidente a la era de la razón. Mientras la Europa cristiana se hundía en la noche mas larga de todos los tiempos, noche que terminaría solamente con el Renacimiento en el siglo XVI, los árabes se encargarian de guardar y traducir al árabe la memoria de la humanidad. La mayoria de los escritos griegos, persas, hindúes, chinos y de otros pueblos, fueron objeto de estudio y de traducción a la lengua del imperio que duraría desde el siglo VIII hasta el siglo XIV. Los árabes no crearon matemática excepto en casos aislados, sin embargo se destacaron notablemente en el estudio de la astronomía y lograron avanzar en la creación del álgebra.

Muchos matemáticos y astrónomos árabes dedicaron ingentes esfuerzos al cálculo de decimales del número π y el mas destacado de todos, que logró calcular 17 decimales exactos, fue DJEMSID IBNMASU AL-KASI, quien halló que $\pi = 3{,}14159226535897932$.

Mientras tanto en Europa casi todo el conocimiento anterior a la caida del Imperio Romano se había olvidado. En la era de la fe el objetivo mas importante de los seres humanos consistía en salvar el alma y volar directamenente al cielo. Los escritos y descubrimientos de los egipcios, babilonios, griegos y de otros pueblos fueron absolutamente olvidados. Nadie sabia que era el número π y no le interesaba. Ocasionalmente en algún monasterio, alrededor del año 1000, algun paciente monje al transcribir algun manuscrito, se encontraba con palabras tales como "ángulos","triángulos", etc, palabras que no tenian ningún significado para él. Con seguridad alguno de estos monjes se encontró, en los escritos de Aristóteles y otros filósofos, la frase "cuadratura del circulo" pero, este problema, que había atormentado a cientos de matemáticos siglos atrás, no estaba en el nuevo plan de Dios.

Los árabes dominaron .España casi inmediatamente después de transformarse en un imperio y su floreciente cultura empezó a dejar caer, gota a gota, en la Europa cristiana, a partir del siglo XII, el conocimiento del antiguo pueblo griego. Cuando los europeos empezaron a retomar el conocimiento que les estuvo prohibido durante mas de 1000 años, empezaron a destruir metodicamente el feudalismo como sistema social y a cuestionar a la fe como el principio mas relevante de la sociedad : Se iniciaba de esta forma EL RENACIMIENTO.

La explosión intelectual producida por este nuevo orden abarcó casi todas las esferas del saber humano y entre éstas hizo su aparición, con toda majestad, el problema de la cuadratura del circulo.

LA PERSECUCION DE DECIMALES EXACTOS DE π

(1500 hasta 1800 d.C)

Durante el Renacimiento el problema se siguió estudiando desde los puntos de vista : PRIMERO POSIBLE y el SEGUNDO IMPOSIBLE. Por un lado muchos se dedicaban, utilizando el mismo procedimiento ideado por Arquímides, a calcular cada vez mas decimales exactos del número π y otros a desarrollar nuevos aspectos de la geometría para poder demostrar que la cuadratura del circulo se podía efectuar utilizando solamente la regla y el compás. EL PRIMERO POSIBLE produjo una pleyade de calculadores de primera categoría - que seguían usando el método de Arquímides - y que se dedicaban durante años de años a calcular el perímetro de polígonos de cientos, miles y hasta millones de lados para determinar el número π con la mayor cantidad de decimales exactos que se pudiera. Una pequeñísima lista de los mas conocidos que incluye a algunos desde antes del Renacimiento es la siguiente:

Fibonacci	(1170-1250)	3,1418
Dominicus Parisienses	(1333-1361)	$\bar{2}$ 4
Simon Van Der Eicken	(1520-1596)	3,1425
Adrien Anthonizsoon	(1527-1607)	3,1415926
Francois Viette	(1540-1604)	3,1415926535
Ludolph Von Ceulen	(1450-1620)	3,1415926535897 932384626433
Adrian Von Romen	(1561-1615)	3,1415926535897

En el SEGUNDO IMPOSIBLE están incluidos no solo aquellos que se dedicaban de corazón al estudio de la geometría sino, además, los aficionados de siempre que hacían que la solución de la cuadratura se convirtiera para muchos en una verdadera epopeya. Una lista incompleta de éstos es la siguiente:

Campanus de Novara	(1220-1273)	matemático
Jordanus Memorarius	(1316-1390)	matematico
Dominicus Parisiensis	(1333-1361)	geómetra
Nicolas de Cusa	(1401-1464)	erudito
Regiomontano	(1436-1476)	matemático
Leonardo de Vinci	(1452-1519)	artista universal
Charles de Bovelle	(1480-1530)	filósofo
Iriontus Fineus	(1505-1560)	aficionado
Pedro Nonius	(1492-1577)	aficionado
Joseph Scaliger	(1561-1599)	filólogo y poeta
Jaime Falcon	(1540-1596)	poeta
Caballero de Causanus	(siglo XVII)	aficionado
Gregory Saint Vincent	(1584-1667)	geómetra

Cada vez que un cuadraturista daba a conocer la solución del problema le salían al paso diez o mas anticuadraturistas de tal modo que durante muchos años las reyertas colectivas entre aquellos que creían haber resuelto el problema para siempre y los que creían que no tenia solución pasaron a formar parte del folcklor de la matemàtica. En realidad los cuadraturistas a través de la historia suman, probablemente, varios miles y cuando la Academia de Ciencia de París, resolvió en el año 1775 no aceptar mas trabajos de los que decian haber probado la cuadratura del círculo, estaban haciendo fila, en ese momento para su estudio, mas de 700 manuscritos.

En el siglo XVII con la invención de la geometría analítica se pudo explicar y al mismo tiempo establecer cual era la naturaleza de los problemas que permitian la construcción con regla y compás. Ahora no es un secreto que toda construcción con regla y compás se reduce en geometría analítica a la resolución de una sucesión finita de ecuaciones de primer grado y segundo grado con coeficientes racionales. Sabemos, por ejemplo, que la duplicación del cuadrado es posible de realizar con regla y compás, no así la duplicación del cubo que conduce a una ecuación de tercer grado.

LA VERDADERA NATURALEZA DE π.

Euler y sus contemporaneos no sospechaban que pudieran existir otros números racionales aparte de los formados por radicales : estaban convencidos que toda ecuación algebraica se podía resolver mediante radicales. Y cuando NIELS ABEL probó que las ecuaciones de grado mayor o igual que cinco no pueden resolverse mediante radicales se pudo concluir que los números irracionales no son todos de la misma naturaleza.

De los trabajos de GALOIS, JACOBI, HERMITE, DEDEKIND y otros se dedujo que al lado de una infinidad de números irracionales que se expresan mediante un número finito de radicales existe otra infinidad de números irracionales que no se pueden expresar en la misma forma. Estos representan las raices reales de todos los polinomios de la forma:

$$(1) \quad a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0 \quad (n \geq 5)$$

en el cual los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números enteros cualesquiera. Si estas raices $x_1, x_2, \ldots x_n$ no verifican ninguna otra ecuación de la forma (1) y tampoco de una de un grado menor que "n", entonces ellas se llaman números algebraicos de grado "n".

A la luz de estos descubrimientos era natural sospechar la existencia de otros números de naturaleza diferente : que, en efecto, fueron hallados por JOSEPH LIOUVILLE (1809-1882). En 1844 Liouville estableció la existencia de una clase muy grande de números que no son ni racionales ni se pueden reducir a irracionales algebraicos y que no verifican una ecuación algebraica de la forma de (1) y halló, al mismo tiempo, un método con el cual se puede determinar una categoría de tales números a los cuales llamó TRASCENDENTES.

En 1873 HERMITE demostró que el número "e" no puede ser raíz de una ecuación algebraica de la forma :

$$a_o e^n + a_1 e^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

con coeficientes enteros racionales y en consecuencia probó que el número "e" es trascendente. El próximo paso lo daría el profesor FERDINAND LINDEMANN en 1882 quien basado en la demostración de Hermite y además sobre la fórmula descubierta años antes por Euler :

$$e^{i\pi} = -1$$

demostró, primero, que una relación de la forma :

$$a_o e^{b_n} + a_1 e^{b_{n-1}} + \ldots + a_{n-1} e^{b_1} + a_n = 0$$

es imposible si los coeficientes y exponentes son números racionales algebraicos. Después aplicó este resultado a la ecuación de Euler $e^{i\pi} + e^{o} = 0$, ecuación en la cual uno de los exponentes es un número algebraico.

Del hecho que la relación exista y uno de los exponentes sea un número algebraico se sigue que los otros exponentes (π) no puede ser algebraico, sino trascendente.

Establecida la trascendencia del nùmero π el problema de la cuadratura del círculo quedaba definitivamente sanjado y, demostrado para siempre, que la solución con solamente la regla y el compás era absolutamente imposible.

MODULOS : LA EVOLUCION DE UN CONCEPTO

Juan Boza Cordero

RESUMEN

En este trabajo se hace un recuento de las diversas maneras de considerar lo que es un módulo, las cuales obedecen a las particularidades del campo de aplicación de que se trate. Al final se hace una mención de la moderna teoría de represen - taciones de álgebras, donde se ha reinterpretado el concep - to de módulo.

1. INTRODUCCION

El concepto de módulo suele introducirse como una generalización de la noción de espacio vectorial, con la diferencia de que, al hablar de módulos, los escalares se toman en un anillo, y no necesariamente en un campo. Desde este punto de vista formal, el precio de la generalización se evidencia al tratar de conseguir bases en los módulos, como se hace en los espacios vectoriales gracias a la existencia de inversos multiplicativos en el campo.

Si bien un enfoque como el esbozado posee cierto valor didáctico, un punto de vista que tome en cuenta el desarrollo histórico del concepto de módulo, permite apreciarlo como una serie de propuestas para entender más claramente ciertas cuestiones de la teoría algebraica de números y del álgebra misma.

En este artículo se presentan diversas definiciones del concepto de módulo, surgidas en distintos momentos, y que son equivalentes entre sí.

El plan es el siguiente: En el N° 2 se discute la equivalencia entre los módulos y las representaciones del anillo de base, así como su relación con las representaciones de lo grupos. En el N° 3 se examinan aspectos históricos, y en el N° 4 se introduce el concepto a la manera de la moderna teoría de representaciones de álgebras.

2. DIVERSAS DEFINICIONES DE MODULO

2.1 Módulos y acciones. De acuerdo con la definición usual, un módulo M sobre un anillo A está dado por una acción de A sobre un grupo aditivo $(M,+)$, sujeta a ciertas condiciones. Para mayor precisión, sea A un anillo asociativo con unidad; un A-módulo izquierdo es un grupo aditivo $(M,+)$, provisto de una aplicación (o acción) $A \times M \longrightarrow M$, denotada por $(a, m) \longmapsto am$, para $a \in A$, $m \in M$, y que verifica las condiciones siguientes:

distributividades : $a(m + m') = am + am'$,
$(a + a')m = am + a'm$;

asociatividad : $a(a'm) = (aa')m$;

unitariedad : $1m = m$,

para cualesquiera $a, a' \in A$; $m, m' \in M$; y $1 \in A$.

Si M es un A-módulo, $\mathrm{End}(M)$ denota el anillo de los endomorfismos del grupo $(M,+)$, en donde la suma de dos endomorfismos f, g está dada por $(f + g)(m) := f(m) + g(m)$, y se toma la composición como producto, es decir, $(fg)(m) := f(g(m))$, para todo $m \in M$.

Si se tiene un A-módulo M, cada escalar $a \in A$ determina un endomorfismo F_a en $\mathrm{End}(M)$, mediante : $F_a(m) := am$, para $m \in M$. La aplicación

$$\begin{aligned} F : A &\longrightarrow \mathrm{End}(M) \\ a &\longmapsto F_a \end{aligned} ,$$

es un homomorfismo de anillos, es decir verifica lo siguiente :

$$F_{a+a'} = F_a + F_{a'} ,$$

$$F_{aa'} = F_a \circ F_{a'} ,$$

$$F_1 = \mathrm{id}_M ,$$

para $a,a' \in A$, $1 \in A$.

Lo anterior significa que todo A-módulo determina una representación del anillo A , en el sentido de la próxima definición.

Definición 1 . Se llama representación de un anillo A sobre un grupo aditivo V , a todo homomorfismo de anillos $A \longrightarrow \mathrm{End}(V)$.

Lo interesante es que también vale la afirmación recíproca, pues toda representación origina un módulo. En efecto, si se parte de una representación $S : A \longrightarrow End(M)$, $a \longmapsto S_a$, del anillo A sobre el grupo aditivo M, se obtiene una acción de A sobre M al definir $A \times M \longrightarrow M$, por $(a,m) \longmapsto S_a(m)$. Fácilmente se demuestra que esta acción hace de M un A-módulo.

Se ha probado entonces el siguiente teorema.

Teorema 1. Sea A un anillo asociativo con unidad. Existe una correspondencia biunívoca entre la familia de los A-módulos izquierdos y el conjunto de las representaciones de A.

La consideración de las representaciones como módulos se debe a la matemática alemana Emmy Noether, quien expuso sus ideas al respecto hacia 1929. Por esos años se disponía ya de un desarrollo considerable de la teoría de los módulos, que fue aprovechado para notables avances en el campo de las representaciones lineales de los grupos.(Cfr.[N],[Gu]).

2.2. Representaciones de grupos. Un automorfismo de un espacio vectorial V es una transformación lineal biyectiva $f : V \longrightarrow V$. El conjunto de todos los automorfismos de V es un grupo bajo la composición de aplicaciones, denotado por GL(V), el grupo lineal de V.

Definición 2. Una representación de un grupo G sobre un espacio vectorial V es un homomorfismo de grupos $R : G \longrightarrow GL(V)$.

Por tradición, se escribe : $R_g = R(g)$, para $g \in G$; y entonces el hecho de que R es una representación significa que :

$$R_{gh} = R_g \circ R_h \quad ,$$

para $g,h \in G$.

Para apreciar la conexión con los módulos, es necesario introducir el concepto de álgebra de grupo.

De manera general, si R es un anillo asociativo con 1, una R-álgebra A es un R-módulo que también es un anillo asociativo con 1, tal que :

$$r(aa') = (ra)a' \quad ,$$

para $a,a' \in A$, $r \in R$.

Sea ahora G un grupo finito (la finitud de G no es indispensable, pero sí facilita la notación). Por comodidad, se denotan los elementos de G por

$G = \{ e_g : g \in G \}$. Si k es un campo arbitrario, se denota por $k[G]$ el espacio que posee los elementos e_g, $g \in G$, como base. Cualquier elemento u de $k[G]$ se escribe como combinación lineal formal de elementos de G, con coeficientes en k :

$$u = \sum_{s \in G} a_s e_s \qquad (a_s \in k).$$

El producto en $k[G]$ es el definido por las relaciones $e_s . e_t = e_{st}$, para elementos de la base, y extendido luego por linealidad. (Cfr.[P]).

$k[G]$ resulta ser un anillo asociativo con 1, y aún más, una k-álgebra.

El próximo teorema es el puente para ir de la representaciones de grupos al terreno de los módulos.

<u>Teorema</u> 2. Sea G un grupo finito. Existe una correspondencia biunívoca entre la familia de las k-representaciones del grupo G y la familia de las representaciones del álgebra de grupo $k[G]$.

Para la demostración, observe que si se tiene una representación $R : G \longrightarrow GL(V)$ del grupo G, se define de manera canónica una representación $R' : k[G] \longrightarrow GL(V)$, mediante la fórmula :

$$R'(\sum_s a_s e_s) := \sum_s a_s R_s$$

Recíprocamente, si se parte de una representación $R : k[G] \longrightarrow End(V)$ de $k[G]$, dado que G está contenido en $k[G]$, las transformaciones $R_g : V \longrightarrow V$ son invertibles, para todo $g \in G$. Es claro que la restricción de R a G , es un morfismo de grupos :

$$R_{|G} : G \longrightarrow GL(V) \quad .$$

Los resultados de esta sección permiten hacer traducciones en ambas direcciones entre las k-representaciones de un grupo G y los $k[G]$-módulos.Así, por ejemplo, a la suma S + T de dos representaciones de G , $S : G \longrightarrow GL(V)$, $R : G \longrightarrow GL(W)$, le corresponde el $k[G]$ -módulo con espacio subyacente $V \oplus W$, y sobre el cual el grupo G actúa de la manera siguiente :

$$g(v, w) := (S_g(v), R_g(w)) \quad , \qquad g \in G .$$

La interacción que estamos señalando es bastante más profunda.Por ejemplo, la noción de carácter de una representación de un grupo, introducida por Frobenius a finales del siglo pasado, recibió un fuerte impulso cuando se la interpretó, unos treinta años más tarde, con ayuda del álgebra de grupo. Por otra parte, es importante señalar que las correspondencias de los Teoremas 1 y 2 no son simples biyecciones, sino equivalencias de categorías.

3. EL ORIGEN DEL CONCEPTO DE MODULO

De acuerdo con N. Jacobson ([J] ,p. 162), "el concepto de módulo había hecho su aparición en la teoría de números algebraicos", antes de que Emmy Noether avizorara su relación con las representaciones. En esta teoría, como es de esperar, la noción de módulo no apareció de manera repentina y acabada. De hecho, aún por los años veinte de este siglo, se utilizaba el término módulo de modo restringido, para designar, básicamente, los ideales del anillo de los números enteros, como procede,por ejemplo, Hecke ([He], p. 3).

Nos interesa presentar, aunque de manera suscinta, la situación como se presentaba en la teoría de los números algebraicos. Ya en las primeras décadas del presente siglo, se disponía de una teoría de ideales de los llamados anillos noetherianos, que son los anillos conmutativos en los cuales toda cadena ascendente de ideales :

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_k \subseteq I_{k+1} \subseteq \dots$$

es estacionaria, es decir, existe un n tal que, $I_n = I_{n+1} = \dots$

Se habían logrado para tales anillos una serie de teoremas de descomposición de ideales en ideales primarios ([W] p. 115 y ss., vol. 2), a los cuales se había llegado para satisfacer demandas de la geometría algebraica.

La discusión podemos plantearla en los siguientes términos : sea R un anillo de integridad, el cual se supone noetheriano, y sea P su campo cociente. Considere un campo T, extensión finita conmutativa de P, y sea S el anillo de los elementos de T que son integrales sobre R. Se tiene así :

$$\begin{array}{ccc} R & \subseteq & S \\ \cap\!| & & \cap\!| \\ P & \subseteq & T \end{array}$$

Lo que se pretende es trasladar de alguna manera la teoría de los ideales de R a su anillo de extensión S. La solución vino a través de la observación de que S es un R-módulo finitamente generado, a partir de lacual, aplicando un razonamiento semejante al del teorema de Hilbert de la base, se concluye que S también es noetheriano.([W],vol.2,p.170).

Haremos a continuación un esbozo de la prueba de la mencionada observación, utilizando las notaciones anteriores, y las siguientes hipótesis: R es integralmente cerrado en su campo cociente, es decir, todo elemento de P integral sobre R, pertenece a R; T es una extensión separable de P, lo cual nos lleva a que T es una extensión simple de P, $T = P(\sigma)$, por un elemento primitivo σ. Existe un elemento s en S, tal que todo $t \in T$ se expresa como

$$t = \sum_{k=0}^{n-1} r_k s^k$$

para ciertos $r_k \in P$.

Se prueba que existe un $V \in S$, tal que $V^2 \in P$, para el cual los $V^2 r_k \in P$. Como también se tiene que estos $V^2 r_k$ son integrales sobre R, ellos están en R mismo, puesto que R es integralmente cerrado. Si ahora se define

$$u_k = V^2 r_k \qquad ,$$

los u_k están en R. De $r_k = u_k V^{-2}$, se sigue :

$$t = \sum_k u_k V^{-2} s^k \qquad ,$$

para todo $t \in S$. El teorema que se demuestra es el siguiente :

<u>Teorema.</u> Todo elemento de S es una combinación lineal de los $V^{-2}s^k$,con coeficientes en R.($k = 0,1,\ldots,n-1$).

Expresado en el lenguaje de los módulos, el teorema anterior establece que el anillo S de los elementos de T que son integrales sobre R, es precisamente el R-módulo finitamente generado por los elementos $V^{-2}s^k$ de S.

La demostración del anterior teorema se encuentra in extenso en (W, v.2).

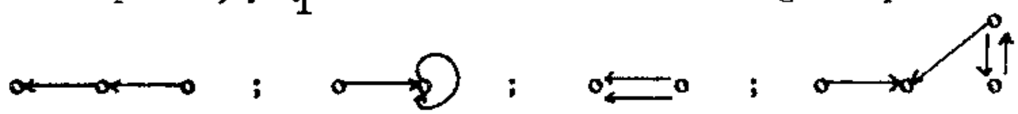
Aprovechamos la ocasión para señalarque la solución al problema examinado posee un valor metodológico digno de mención, con lo cual nos referimos a que ideas similares fueron utilizadas por la misma Emmy Noether para aplicar su Teorema de normalización y su criterio de finitud, con el fin de "convertir" un anillo en un módulo finitamente generado sobre un anillo adecuado, y trasladar propiedades de finitud del segundo al primero.(Cfr. [Sa]).

5. UNA VISION MODERNA DE LOS MODULOS

La teoría de representaciones de álgebras se ha desarrollado vogerosamente a partir de la década de los 70, con la introducción de los llamados métodos diagramáticos,y otros enfoques como el de Auslander y Reiten. Se han solucionado en estos años algunos problemas clásicos, como las conjeturas de Brauer y Thrall; y se ha logrado avanzar en otros, como es el amplio campo de laclasificación de álgebras de dimensión finita.

Subyacente a estas nuevas ideas, se encuentra una nueva versión de lo que es un módulo, y con ella, una reinterpretación de las representaciones de un álgebra. En esta sección vamos a introducir las definiciones mínimas para apreciar algunos resgos de los métodos señalados.

Se entiende por carcaj un par $Q = (Q_o, Q_1)$, en donde Q_o es un conjunto finito de puntos, y Q_1 consta de flechas entre algunos puntos. Ejemplos :



Si k es un campo, una k-representación de Q se obtiene al asignar a cada punto i de Q_o un k-espacio vectorial V_i , y a cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$ en Q_1, una transformación lineal $f_\alpha : V_i \longrightarrow V_j$. Esta representación se denota resumidamente por $V = (V_i, f_\alpha)$.

Se entiende por morfismo entre representaciones, $\varphi : (V_i, f_\alpha) \longrightarrow (W_i, g_\alpha)$ una familia $\varphi = (\varphi_i)$ de transformaciones lineales $\varphi_i : V_i \longrightarrow W_i$, $i \in Q_o$ tales que, para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$, se tiene un diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & V_j \arrow[d, "\varphi_j"] \\ W_i \arrow[r, "g_\alpha"'] & W_j \end{tikzcd}$$

La composición de morfismos entre representaciones $U \longrightarrow V \longrightarrow W$, se define de la manera obvia. La familia de las k-representaciones de Q constituye una categoría con los datos anteriores, y se denota por mod(kQ).

Toda representación de Q sobre k puede interpretarse como un módulo sobre cierta k-álgebra, el álgebra de caminos de Q. He aquí su construcción.

Un camino en un carcaj Q es una sucesión de puntos de Q_o, unidos por flechas en una misma dirección. Se conviene en denotar el camino

$$\underset{i}{\circ} \xrightarrow{\alpha_1} \circ \cdots \circ \xrightarrow{\alpha_r} \underset{j}{\circ}$$

por $(i/\alpha_1, \ldots, \alpha_r/j)$. A cada punto i se le asocia un camino de longitud cero : $(i//i)$.

Se define el producto de dos caminos de longitud positiva por yuxtaposición, es decir,

$$(i/\alpha_1,\ldots,\alpha_r/j) \cdot (k/\beta_1,\ldots,\beta_t/l) = \begin{cases} (i/\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_t/l) & \text{si } j = k \ ; \\ 0 & \text{si } j \neq k \ . \end{cases}$$

Por definición, los caminos $(i//i)$ actúan como unidades.

El álgebra de caminos A_Q del carcaj Q, sobre un campo k , tiene, por definición , como espacio subyacente, al k-espacio cuya base es el conjunto de los caminos de Q. A este espacio se lo dota de una estructura de k-álgebra, al extender por linealidad el producto de caminos. Se puede comprobar que A_Q es efectivamente un álgebra, asociativa con 1 y de dimensión finita, si el carcaj Q no posee ciclos orientados.

Por una necesidad técnica, introducimos el carcaj opuesto Q' de $Q = (Q_o, Q_1)$, el cual posee los mismos puntos de Q_o, y una flecha $\alpha':i \longrightarrow j$, por cada flecha $\alpha : j \longrightarrow i$ en Q_1.

<u>Teorema</u>. Existe una biyección entre la familia de las k-representaciones del carcaj Q' y la familia de los A_Q -módulos de dimensión finita.

Ofrecemos un esbozo de la demostración.

Si se tiene una representación $V = (V_i, f_\alpha)$ de Q, se define M_V como el k-espacio suma directa de los V_i, es decir, $M_V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ (se ha supuesto que los puntos de Q_o son 1, 2,..., n.). El álgebra A_Q actúa sobre M así: $(j//j)v := v_j$, para $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $j \in Q_o$; para toda flecha $\alpha : i \longrightarrow j$, $\alpha . v = f_\alpha(v_j) \in V_i$, lo cual tiene sentido puesto que se tiene $\alpha' : j \longrightarrow i$ y $f_{\alpha'} : V_j \longrightarrow V_i$. Esta acción se extiende de la manera obvia a caminos de longitud mayor que 1 y después, por linealidad, a todo A_Q. Se muestra que M_V es un A_Q -módulo.

Si ahora se parte de un A_Q -módulo M, se obtiene una representación de Q' así : para cada punto i, se pone $V_i := (i//i)M$, el cual es un k-espacio.

Para toda flecha $\alpha' : i \longrightarrow j$ en Q', se pone $f_{\alpha'} : V_i \longrightarrow V_j$, dada por $(i//i)m \longmapsto (j//j)\alpha m$. Se comprueba que $R_M := (V_i, f_\alpha)$ es una representación.

La correspondencia biunívoca del teorema anterior es, en realidad, una equivalencia de categorías.

Las álgebras decaminos no agotan el contexto de las álgebras de dimensión finita. Es posible, sin embargo, demostrar que toda k-álgebra de dimensión finita, básica e indescomponible, es isomorfa al cociente de un álgebra de caminos por algún ideal admisible, si el campo k se supone algebraicamente cerrado. Esto es el Teorema de Gabriel (Cfr. [Ga] , [Ci])

Agradezco la colaboración de los Profesores Angel Ruiz Z. y César Solano, quienes gentilmente leyeron una primera versión de este trabajo, haciéndome valiosas sugerencias para mejorarlo.

Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica.

REFERENCIAS

[Ci] C. Cibils et al.: "Métodos diagramáticos en teoría de representaciones", UNAM, México. 1982.

[Ga] P. Gabriel : " Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras", Springer Lecture Notes N° 831. 1980.

[Gu] W. H. Gustafson : "The history of algebras and their representations" Springer Lecture Notes N° 944, 1-27.

[He] E. Hecke : "Vorlesungen ueber die Theorie der algebraischen Zahlen", Chelsea, 1970 (Original : Leipzig, 1923)

[J] N. Jacobson:"Lectures in abstract algebra I".D. van Nostrand, 1965.

[N] E. Noether:" Hypercomplexe Groessen und Darstellungstheorie", Math. Z. 30 (1929), 641-692.

[Sa] J. D. Sally :" Noether normalization", en "Emmy Noether in Bryn Mawr", Springer Verlag, 1983, 41-45.

[W] B. L. van der Waerden :"Algebra I", "Algebra II", F. Ungar, 1970.

BIBLIOGRAFIA

[P] R. S. Pierce : "Associative algebras", Springer Verlag, 1981.

[Re] I. Reiten :"An introduction to the representation theory of Artin algebras", Bull. London Math. Soc. 17 (1985), 209-233.

[Ri] C. M. Ringel:" Report on the Brauer-Thrall conjectures",
" Tame algebras", ambos en: Proc. ICRA II, Carleton Univ., 1979.

Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica.

PROBLEMAS MATEMATICOS CELEBRES II

LA DUPLICACION DEL CUBO Y LA RAIZ CUBICA

Edwin Castro Fernández
Escuela de Matemáticas / Universidad de Costa Rica
San josé, Costa Rica

RESUMEN

Se presenta una síntesis histórica del problema de la duplicación del cubo y se discute la constructibilidad del número $\sqrt[3]{2}$, al mismo tiempo se presentan algunas soluciones aproximadas del problema, entre ellas una dada por Descartes.

El trabajo se sitúa dentro del área de la Enseñanza de la Matemática y es adecuado para estudiantes y profesores de secundaria.

§1. Introducción ([1], [2], [4])

El problema de la duplicación del cubo se conoce como "Problema de Delos" y aparece citado por primera vez en el libro III de "Collectiones Mathematicae" de Pappus de Alejandría que vivió a finales del siglo III y principios del siglo IV después de Cristo y con más detalle en las obras de Eutoquio de Ascalón (Siglo IV después de Cristo). Eutoquio relata que el geómetra griego Eratóstenes (276 - 195 a. de c) le mandó una carta al rey egipcio Ptolomeo III (246 - 222 a. de c.) en la cual le contaba como se conoció por primera vez el problema de la duplicación del cubo; el autor dice que Minos estaba preparando un sarcófago para el entierro de Glaucón de forma cúbica y con lados iguales a 100 pies cada uno; sin embargo el sarcófago le pareció demasiado pequeño para un rey y por recomendación decidió construirlo de tal forma que tuviera un volumen igual al doble del anterior; Minos al aumentar al doble cada lado del cubo se dio cuenta de que el volumen aumentó 8 veces y no como lo necesitaba.

Existe otra leyenda que nos cuenta Filopón la que relata que en Atenas en los años 430 a. de c.,en los tiempos de Platón, sobrevino una peste que diezmaba la población; los habitantes preocupados por tal calamidad preguntaron al Oráculo de la Isla de Delos qué debían hacer para terminar con la terrible epidemia, la respuesta fue la siguiente : "Construyan un altar que tenga el doble del volumen del actual". En principio la realización de este proyecto les pareció muy simple y construyeron un nuevo altar dándole a cada lado el doble de la medida del antiguo altar; sin embargo la epidemia no acabó sino que sobrevino con más intensidad; así los atenienses se dieron cuenta que no habían realizado el proyecto que Delos pedía.

Algunos geómetras griegos trataron de resolver el problema y entre ellos tenemos a Arquitas de Tarento (cerca del año 380 a.de c.), Eudoxo de Cnido (408 - 355 a. de c.), otros intentaron dar construcciones aproximadas y entre ellos tenemos a Menechmus (375 - 325 a. de c.), Apolonio de Pérgamo (260 - 170 a. de c.), Filón de Bizancio (Siglo III a. de c.), Nicodemes (Siglo II a. de c.) y Herón de Alejandría (110 - 160 d. de c.).

§2. Enunciado del problema ([2], [3], [4], [6], [7])

El problema de Delos se enuncia de la forma siguiente: "Dado un cubo de lado k se pide construir con regla y compás otro cubo que tenga el doble de volumen que el cubo inicial".

La solución algebraica del problema es sencilla: si k es el lado del cubo inicial y x el lado del cubo que se va a construir entonces se pide que :

$$x^3 = 2k^3$$

O sea:

$$x = \sqrt[3]{2}k$$

Por consiguiente el lado del nuevo cubo debe tener una longitud igual a $k\sqrt[3]{2}$, o más general, aún si en lugar de pedir que el nuevo cubo tenga un volumen igual a $2k^3$ se pide que sea igual a γ tenenmos que:

$$x = \sqrt[3]{\gamma}$$

§3. El problema de la extraccion de la raíz cúbica ([2], [3], [4], [8], [9])

Los griegos no sabían extraer la raíz cúbica de los números que no eran cubos perfectos y de aquí que el problema como fue propuesto resultó ser complicado para ellos.

El problema de la duplicación del cubo se reduce pues a la constructibilidad con regla y compás del número $\sqrt[3]{2}$.

El lector conoce seguramente un método para construir $\sqrt{n}$ donde n es un número natural. En el caso del problema de la raíz cuadrada tenemos entonces una respuesta positiva al problema de la constructibilidad.

Observemos también que el número $\sqrt[3]{2}$ es un número algebraico por cuanto satisface la ecuación:

$$x^3 - 2 = 0$$

Entonces tenemos propuesto el problema de si un número algebraico, en este caso $\sqrt[3]{2}$, es constructible.

Con respecto al problema de la extracción de la raíz cúbica no fue sino hasta el siglo V d. de c.cuando los indúes utilizaron la fórmula :

$$\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \frac{b}{3a^2}$$

para extraer la raíz cúbica de números. En tal fórmula a^3 es el mayor cubo perfecto contenido en $a^3 + b$, así por ejemplo:

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{2^3 + 1} \approx 2 + \frac{1}{3.4} = 2.083$$

Este valor es bastante aproximado al valor real que es 2.0801... . Leonardo de Pisa (conocido también como Fibonacci) (1180 - 1250) dio otra aproximación para extraer la raíz cúbica:

$$\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \frac{b}{3a^2 + 3a + 1}$$

Nicolo Tartaglia (1499 - 1577) utilizó para extraer la raíz cúbica la fórmula:

$$\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \frac{b}{3a^2 + 3a}$$

El método que se popularizó más para la extracción de la raíz cúbica fue dado por Jean Trenchant en 1557 y era el más importante antes de la aparición de las calculadoras de mano.

Los griegos intentaron resolver el problema de Delos pero no extrayendo la raíz cúbica en forma aproximada, sino más bien por medio de construcciones geométricas aproximadas.

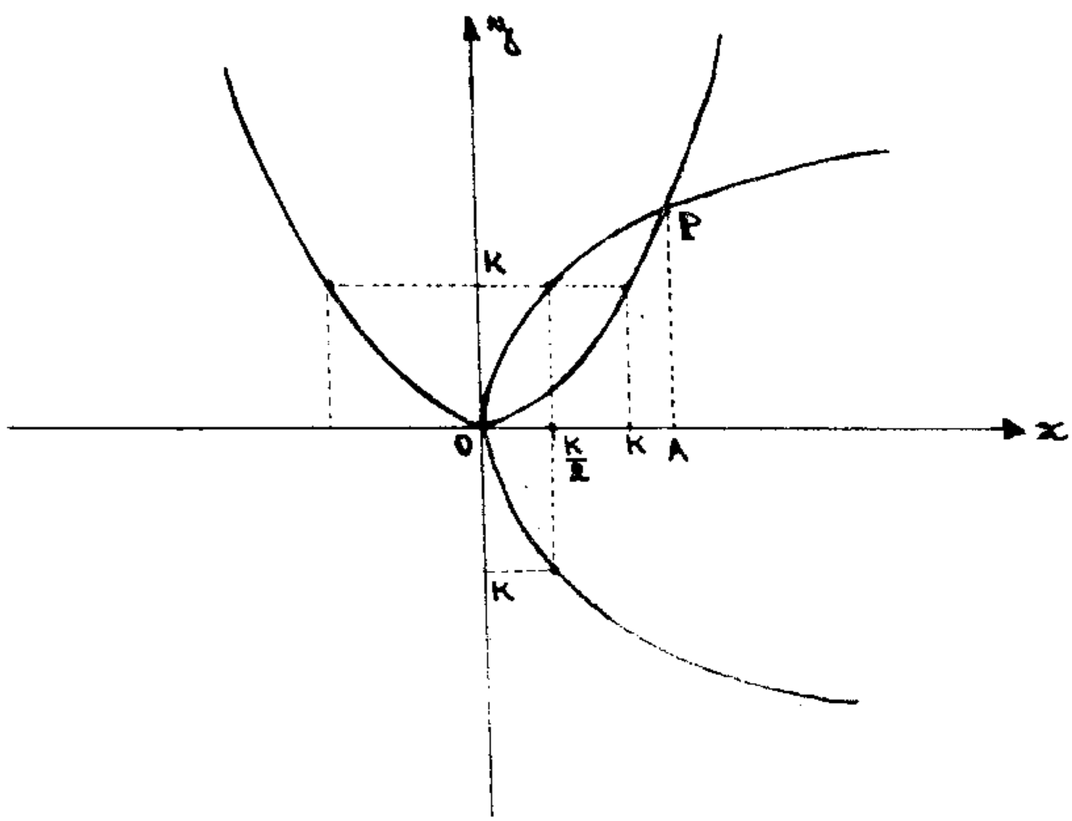
§4. Algunas soluciones geométricas aproximadas ([4], [5])

Como mencionamos anteriormente Menechmus fue uno de los primeros en dar una solución aproximada del problema de Delos. Nosotros presentaremos la solución de Menechmus pero con notación moderna. Consideremos las dos parábolas:

$$x^2 = ky$$

$$x^2 = 2kx$$

cuya representación gráfica es la siguiente:



El punto P de intersección de las dos parábolas es, como se calcula fácilmente, ($k\sqrt[3]{2}$, $k\sqrt[3]{4}$), es decir, el punto de intersección de las dos parábolas que no es el origen tiene como abcisa el número buscado, es decir $\overline{OA}$ es el segmento buscado.

Concluímos entonces que construyendo las dos parábolas (aunque sea aproximadamente) podemos encontrar la solución (aproximada). El estudiante seguramente ya conoce la manera de construir parábolas conociendo pocos puntos de ellas, en cualquier caso se puede recurrir a puntos racionales y con ello se tiene una buena aproximación de las parábolas.

Manechmus realizó también otra construcción geométrica aproximada observando que el número buscado es la intersección de :

$$x^2 = ky$$

$$xy = 2k^2,$$

o también de :

$$y^2 = 2kx$$

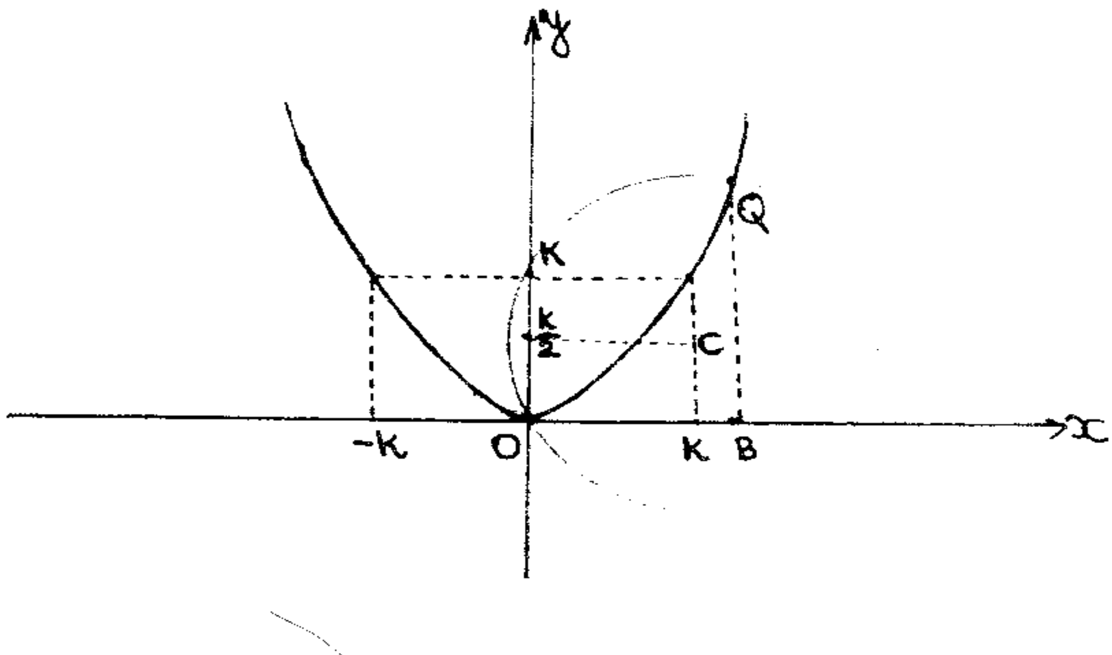
$$xy = 2k^2$$

La curva $xy = 2k^2$ representa una hipérbola, concluímos que el punto buscado es la intersección de una parábola y una hipérbola.

Descartes (1596 – 1650) realizó también otra construcción interesante, él utilizó cualquiera de las parábolas $x^2 = ky$ ó $y^2 = 2kx$ y el círculo : $x^2 + y^2 = ky + 2kx$. En la figura que sigue representamos las curvas :

$$x^2 = ky$$

$$x^2 + y^2 = ky + 2kx$$



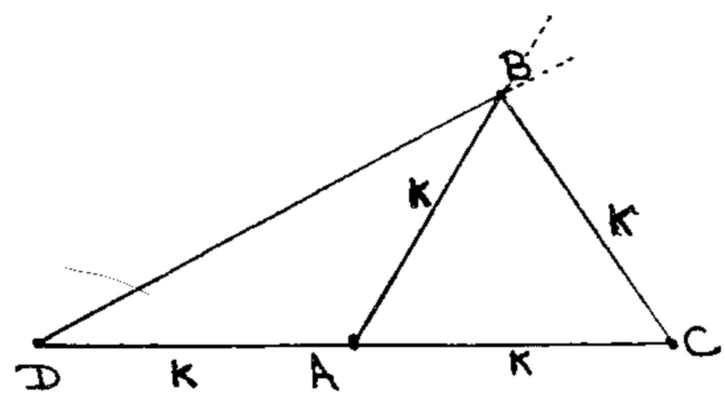
El punto Q tiene como abcisa $k\sqrt[3]{2}$, es decir, el segmento $\overline{OB}$ es el buscado.

Se concluye también que el círculo pasa por la intersección de las parábolas $x^2 = ky$, $y^2 = 2kx$ y entonces construyendo el círculo y una de las parábolas se obtiene también la solución.

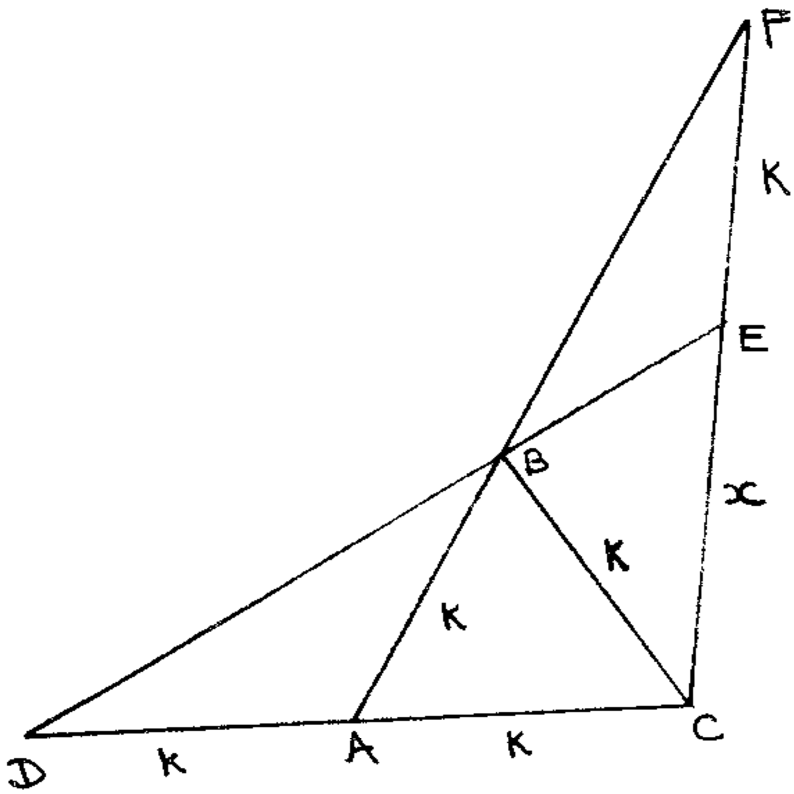
§5. Una solución exacta ([4], [5])

La más simple e interesante solución del problema de Delos es aquella en la cual se utiliza una regla marcada.

Comencemos por dibujar un triángulo equilátero de lado k, el triángulo debe estar bien centrado en una hoja de papel para que deje suficiente espacio para realizar la construcción auxiliar, luego se prolonga el lado $\overline{CA}$ hasta un punto D de tal forma que $\overline{AD}$ = k y luego unimos D y B. Hasta el momento tenemos la construcción siguiente :



Tomamos una regla y marcamos en ella una longitud igual a k. Prolongamos $\overline{AB}$ y $\overline{DB}$ y colocando la regla en C de tal forma que la parte marcada esté sobre la prolongación de $\overline{DB}$ y $\overline{AB}$ observamos la construcción que sigue :



El segmento $\overline{CE}$ de la figura es el segmento buscado y su longitud es igual a $k\sqrt[3]{2}$.

§6. La imposibilidad de doblar el cubo ([2], [3], [4])

Aunque las construcciones anteriores satisfacen nuestro espiritu, ellas de ninguna manera satisfacen el limitado espíritu griego por cuanto ellas se han hecho utilizando o bien curvas diferentes de rectas y círculos o bien instrumentos diferentes de una regla (sin marcas) y un compás.

En 1837 Pierre Laurent Wantzel (1814 - 1848) demostró que el problema de Delos no se podía resolver con regla y compás en un número finito de pasos; la demostración se publicó en "Journal de Mathématiques" de Lioville Vol.III. La demostración de Wantzel fue simplificada por Edmund Landau (1877 - 1938).

Con ésto se cierra otro capítulo importante en la historia de las matemáticas.

BIBLIOGRAFIA

1. Boll, Marcel ; Historia de las Matemáticas . Editorial Diana S.A. México, 1986.

2. Collette, Jean Paul ; Historia de las Matemáticas. Vol.1. Editorial Siglo XXI. España, 1986.

3. Courant - Robbins ; Qué es la Matemática?. Colección Ciencia y Técnica. Editorial Aguilar. Madrid, 1979.

4. Eves, Howard ; Estudio de las Geometrías. Vol.1. U.T.H.E.A. México, 1969.

5. Hudson, H. O ; Ruler and Compasses. Chelsea, 1953.

6. Klein, F ; Famous Problems of Elementary Geometry. Dover, New York, 1956.

7. Moise, Edwin E ; Elementary Geometry from an advanced Stand Point. Addison Wesley Reading, Massachusetts.

8. Niven, I ; Numbers Rational and Irrational. The L. W. Singer Company. Random House, 1961.

9. Ribnikov, K ; Historia de las Matemáticas. Editorial Mir, Moscú, 1987.

COMENTARIOS SOBRE LA TRADUCCION CASTELLANA DE LAS *DISQUISITIONES ARITHMETICAE*

MICHAEL JOSEPHY*
ESCUELA DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
SAN JOSE, COSTA RICA

RESUMEN

La obra *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) de C.F. Gauss se considera como uno de las más trascendentes de la historia de las matemáticas. Constituyó la base para la teoría de números moderna. Gauss mostró su genio al desarrollar temas como congruencias, reciprocidad cuadrática, formas cuadráticas y ciclotomía.

Gauss escribió su obra en latín. En 1985 un grupo de investigadores de la Universidad de Costa Rica decidimos emprender una traducción al castellano (ahora completa salvo por una última revisión). La presente ponencia discutirá el significado de la obra de Gauss, la historia de nuestro proyecto, el uso de TEX para el texto matemático y las dificultades que encontramos.

LA VIDA DE GAUSS

Se considera que Carl Friedrich Gauss era uno de los matemáticos más importantes de la historia —comparable sólo con Arquímedes y Newton. Además realizó contribuciones en varias áreas afines a la matemática, tales como la física, la astronomía y la geodesia.

Nació en Braunschweig, Alemania el 30 de abril de 1777. Mostró su genio desde niño y en 1791 obtuvo el patrocinio del Gran Duque Wilhelm Ferdinand. En 1795 fue a estudiar en la Universidad de Göttingen. Allá trabajó independientemente, aun cuando estableció relaciones con ciertos profesores y alumnos. Se ha concluido que Gauss formuló las ideas básicas de sus descubrimientos matemáticos durante estos años, aunque no publicó muchos hasta años después. En 1796 mostró la construcción con regla y compás del 17-gono regular, algo que le convenció dedicarse a las matemáticas. En el año siguiente logró la primera prueba del Teorema Fundamental del Algebra. Por razones desconocidas en 1798 volvió de Göttingen a Braunschweig sin haber obtenido su título. Finalmente en 1799 obtuvo su doctorado de otra universidad —la de Helmstedt— sin asistir y sin cumplir los requisitos formales usuales. En Braunschweig acabó las *Disquisitiones Arithmeticae*, su mayor obra matemática, se casó por primera vez e hizo ciertos descubrimientos significativos en astronomía. A partir de 1802 su interés en astronomía y matemática aplicada superó aquél en matemática pura. (Usamos los términos pura y aplicada en el sentido entendido hoy; Gauss no hacía tal distinción.)

En 1805 obtuvo su nombramiento como profesor y director del observatorio astronómico en Göttingen. Se trasladó allá en 1807 y se quedó el resto de su vida. Después de la muerte de su primera esposa, se casó una segunda vez en 1810. Su obra en Göttingen incluyó investigaciones en astronomía teórica (*Theoria Motus* ...), formas modulares, geodesia (agrimensura del reinado de Hanover), matemática aplicada (por ejemplo, el método

* Apoyado por proyecto 114-85-049 de la Vicerrectoría de Investigación de la Universidad de Costa Rica.

de cuadrados mínimos y análisis númerico) y física matemática (dióptrica y magnetismo terrestre, culminando en el atlas de 1840). Gauss pasó sus últimos años inmerso en sus múltiples intereses, pero no hizo más trabajo inspirado. Murió en 1855 a los 77 años.

LAS *DISQUISITIONES ARITHMETICAE*

La obra principal de Gauss era las *Disquisitiones Arithmeticae*, publicada originalmente en latín en el año 1801. Hoy en día se encuentra como volumen I de sus *Obras Completas* [3]. Es el libro de más significado de toda la historia de la teoría algebraica de los números. Una gran parte de la teoría actual debe su origen a esta obra.

Consiste de siete capítulos (que Gauss llamó secciones). Veamos brevemente el contenido de cada uno. El primero "Congruencia de Números en General" es el más corto. Trata de la construcción y de las propiedades básicas de $\mathbf{Z}_n$, los enteros módulo n. El segundo, "Congruencias de Primer Grado", estudia la resolución de ecuaciones lineales en $\mathbf{Z}_n$. El trabajo de fondo comienza en el capítulo tres, "Residuos de Potencias". En lenguaje moderno considera la estructura del grupo multiplicativo de los elementos invertibles de $\mathbf{Z}_n$ [4]. Obtiene unos resultados clásicos, por ejemplo el Teorema de Wilson, como consecuencia de la teoría general. Capítulo IV, "Congruencias de Segundo Grado", trata de residuos cuadráticos. Es histórico porque contiene la primera prueba legítima del Teorema de Reciprocidad Cuadrática, que Gauss llama el "Teorema Fundamental". Es un análisis detallado y sistemático, aunque sea poco elegante, de los varios casos que surgen. Gauss no se contentó con esto, y posteriormente encontró varias otras pruebas.

Capítulo V, "Formas y Ecuaciones Indeterminadas de Segundo Grado", fundamenta la teoría de formas cuadráticas binarias $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Gauss lo consideró como la parte más valiosa; así este capítulo ocupa más de la mitad del libro completo. Trata de varias relaciones entre formas y las dividen en "órdenes", "géneros" y "clases". En lenguaje de hoy, Gauss ve la correspondencia con el grupo de clases del campo cuadrático de números [1]. En este contexto logra hacer varios cálculos numérico-teóricos sobre la representación de enteros como combinaciones de otros enteros, probando teoremas de Fermat y Legendre. Capítulo VI, "Varias Aplicaciones de las Investigaciones Anteriores", es un pequeño epílogo a la parte anterior. Aplica la teoría general a unos problemas concretos de la teoría elemental de números. Finalmente, capítulo VII, "Ecuaciones que Definen Secciones de un Círculo", trata de la construcción del polígono regular de n lados. Gauss efectivamente determina cuando esto es posible con regla y compás. Sus cálculos anticipan las técnicas generales de la teoría de Galois, descubiertos 30 años después [5].

Gauss dividió los siete capítulos en 366 artículos, los cuales varían en longitud desde unas líneas hasta unas páginas. La numeración de los artículos sirve para localizar resultados específicos, aunque Gauss no hizo una tabla de contenidos completa.

La cronología de los descubrimientos de Gauss y su publicación posterior resulta interesante. Con respecto a las *Disquisitiones Arithmeticae*, las fuentes secundarias mejores son el artículo clásico de Bachmann, *Über Gauss' Zahlentheoretische Arbeiten* [3, vol. X], y la biografía reciente de Bühler [2]. Muchos de los descubrimientos de Gauss pueden ubicarse exactamente por fecha mediante su diario [3, vol. X]. Así por su primera entrada se sabe que Gauss logró la construcción del 17-gono el día 30 de mayo de 1796. Finalmente hay que mencionar las investigaciones de Merzbach [6] respecto a los primeros manuscritos de las *Disquisitiones Arithmeticae*.

Se sabe que Gauss escribió gran parte de la obra durante su primera estadía en Göttingen (1795-1798). En 1797 mandó un resumen detallado a su consejero Zimmermann. El levantamiento del libro comenzó en el taller de Kircher en 1797. Debido a los múltiples atrasos en el trabajo editorial, Gauss pudo seguir introduciendo materia nueva al quinto capítulo durante 1798-1800, lo que explica parcialmente su longitud desproporcionada. Este crecimiento aparentemente causó la eliminación de un propuesto octavo capítulo. El libro como tal finalmente salió a la luz pública en Leipzig (centro del negocio editorial alemán en aquel entonces) en el verano de 1801.

La práctica de escribir textos eruditos en lengua latina era anticuada aún en 1800. No obstante publicar en latín era consistente con el estilo lógico y directo de Gauss. Posteriormente publicó ciertas obras en el idioma vernacular, pero siempre reservó el latín para sus obras más trascendentes. Gauss escribió su propio latín ya que había disfrutado una buena educación clásica. Pero en el caso de las *Disquisitiones Arithmeticae* su estilo literario fue revisado por el filólogo Meyerhoff, quien le sugerió varias mejoras [6].

TRADUCCIONES EXISTENTES

Por su importancia, *Disquisitiones Arithmeticae* ha sido traducido en diversos idiomas. La versión francesa *Recherches Arithmétiques* (trad.: A.-C.-M. Poullet-Delisle, 1807) apareció poco después de la original. Las demás no salieron hasta después de la muerte de Gauss— en alemán *Untersuchungen über höhere Arithmetik* (trad.: H. Maser, 1889), en ruso *Trudy po Teorii Cisel* (ed.: I.M. Vinogradov, 1959) y en inglés *Disquisitiones Arithmeticae* (trad.: A.A. Clarke, 1966). Hay también una edición corregida de la traducción inglesa (rev.: W.C. Waterhouse, 1986). Cabe notar que la alemana y la rusa contienen material adicional de la obra de Gauss. Ninguna traducción castellana ha sido publicada— un intento organizado por el Prof. Víctor Albis de Colombia no prosperó.

LA TRADUCCION CASTELLANA

En 1985 el Prof. Mark Villarino discutió con el Prof. Angel Ruiz y con el Prof. Michael Josephy la posibilidad de emprender una traducción castellana de las *Disquisitiones Arithmeticae* [8]. Notó la inexistencia de obras de Gauss en español y la disponibilidad de los recursos humanos necesarios en la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica. Por esto, en mayo de ese año se formuló una propuesta a la Vicerrectoría de Investigación la Universidad de Costa Rica para que apoyaran el proyecto de la traducción.

Debido a su gran envergadura, el proyecto se planteó como tarea que duraría varios años. En mayo de 1986 se aprobó por un período inicial de un año. El año 1986 se dedicó a la organización del trabajo y a la obtención de los recursos bibliográficos. Una pequeña parte de la traducción se realizó de manera experimental.

El proyecto progresó lentamente durante la primera mitad de 1987 debido a problemas de índole administrativa. Fue hasta agosto de ese año que el proyecto se aprobó por un nuevo período de un año. No obstante estas dificultades, en el transcurso del año se logró la traducción de la tercera parte de la obra. En principio el sistema seguido era que el Prof. Villarino redactaba un primer borrador que el Prof. Josephy revisaba en su contenido matemático y el Prof. Ruiz en su estilo castellano.

Después de esta primera etapa del proyecto el Prof. Villarino tuvo que retirarse, y el Prof. Hugo Barrantes ofreció participar como refuerzo a partir de entonces. Entre todos se logró terminar una primera traducción de la obra completa en el transcurso del año 1988.

El año 1989 se dedicó al levantamiento y corrección del texto. El Prof. Ruiz se ausentó un semestre con una licencia sabática. A comienzos de 1990 pudo salir una edición preliminar del texto levantado, lista para su última revisión. La Universidad de Costa Rica aprobó su apoyo al proyecto hasta finales de 1990, momento en que la obra definitiva estará disponible para la consideración de editoriales.

Como apoyo al proyecto la Biblioteca de la Universidad de Costa Rica ha conseguido muchos libros sobre el tema, poseyendo actualmente lo que debe ser la mejor colección de Latinoamérica. Incluye las obras completas de Gauss (en doce volúmenes), los "Reviews in Number Theory" (dos partes de seis volúmenes cada una), biografías y bibliografías de Gauss y numerosas referencias secundarias.

LA COMPOSICION DEL TEXTO

Desde casi el comienzo los investigadores decidieron usar el sistema TeX (versión Macintosh) para el levantamiento del libro. TeX es un editor computarizado para componer texto. Fue concebido por el matemático Donald Knuth y divulgado por Michael Spivak, entre otros. Es el sistema óptimo para procesar literatura matemática, particularmente cuando trae una multitud de símbolos inusuales, mucha notación complicada y ecuaciones desplegadas. Para arrancar contamos con la asistencia inestimable del TeXperto Alan Dixon, quien diseñó la mayoría de los macros en primera instancia.

Nuestra meta era hacer una traducción lo más fiel posible al latín original. Para esto nos ayudó la similitud lingüística entre el castellano y el latín. Por otro lado, el uso de TeX nos permitió hacer una representación igualmente fiel de la presentación tipográfica de 1801. La composición original de la obra duró varios años (1797–1801) en un taller con la tecnología de aquella época. Actualmente una microcomputadora puede duplicar esta hazaña en minutos. TeX nos permite seguir el formato y la notación del original, modernizándolos sólo cuando es estrictamente necesario por claridad. Se pudo ajustar los parámetros técnicos de la edición de modo que la paginación de la traducción corresponda casi exactamente a aquélla del original. En fin esperamos que la traducción nuestra sea más cercana al original que todas las hoy existentes.

TeX nos permitió levantar nuevamente ciertas tablas de Gauss que otras traducciones habían reproducido fotográficamente. Ciertas expresiones pudieron imprimirse mejor que antes. Considere, por ejemplo

$$\Omega = \quad (16,1)\begin{cases} (8,1)\begin{cases} (4,\ 1)\begin{cases} (2,\ 1) & \ldots\ [1],\ [16] \\ (2,13) & \ldots\ [4],\ [13] \end{cases} \\ (4,\ 9)\begin{cases} (2,\ 9) & \ldots\ [8],\ [9] \\ (2,15) & \ldots\ [2],\ [15] \end{cases} \end{cases} \\ (8,3)\begin{cases} (4,\ 3)\begin{cases} (2,\ 3) & \ldots\ [3],\ [14] \\ (2,\ 5) & \ldots\ [5],\ [12] \end{cases} \\ (4,10)\begin{cases} (2,10) & \ldots\ [7],\ [10] \\ (2,11) & \ldots\ [6],\ [11] \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

que Gauss incluye en §354. (Relaciona la construcción del 17-gono con un grupo de 16 elementos.)

ASPECTOS FILOLOGICOS

Surgieron tres clases de dificultades en la tarea nuestra. En el primer nivel, la semántica, se buscó hacer una traducción correcta palabra por palabra. Usualmente la palabra latina corresponde a una única palabra castellana y sólo en unos casos era necesario modificarla. Por ejemplo, el latín "complexus" se traduce como "conjunto" y no como "complejo" aunque el inglés dice "complex".

El análisis de la sintaxis era más problemático. No obstante que la estructura latina tiene cierta similitud con la castellana, frecuentemente fue necesario reordenar las frases para obtener una expresión más castiza. Muchas oraciones latinas eran excesivamente largas y se dividieron en la traducción. Ciertas construcciones compactas latinas, como el ablativo absoluto, debían expandirse. Generalmente las cláusulas pasivas se tradujeron con la construcción española reflexiva, por ejemplo "se puede hacer" y se evitó el uso de la primera persona "podemos hacer".

Finalmente, en el nivel más global, quisimos mantener una consistencia del estilo de la traducción a lo largo de sus siete capítulos. Como varias personas intervinieron en las etapas de la traducción, era necesario homogenizar el texto en su última revisión para evitar incongruencias y dejarlo lo más uniforme posible.

La traducción de las *Disquisitiones Arithmeticae* fue una obra enorme que pudo realizarse sólo con la participación de muchas personas. Hubo cuatro investigadores principales: MSc Michael Josephy, MSc Angel Ruiz, Lic. Mark Villarino (al comienzo) y Lic. Hugo Barrantes (posteriormente). El entonces estudiante de postgrado Alan Dixon ayudó con la implementación del sistema TEX. En la redacción nos ayudaron los asistentes Adrián González, Luis Gustavo Hernández, Jesús Peraza y Martín du Saire. En la mecanografía computarizada participaron los asistentes Gastón Guerra, Milton Madríz y Julian Trejos.

BIBLIOGRAFIA

1. D.A. Buell, *Binary Quadratic Forms: Classical Theory and Modern Computations*, Springer-Verlag, 1989.
2. W.K. Bühler, *Gauss: A Biographical Study*, Springer-Verlag, 1981.
3. C.F. Gauss, *Werke*, vol. I–XII, Georg Olms Verlag, 1973.
4. M. Josephy, "Una Perspectiva Histórica de un Teorema de Gauss" en ***Historia de la Ciencia y la Tecnología***, Editorial Tecnológica de Costa Rica, 1989.
5. M. Josephy, "Cyclotomy in the *Disquisitiones Arithmeticae*" por publicarse.
6. U.C. Merzbach, "An Early Version of Gauss's *Disquisitiones Arithmeticae*", en *Mathematical Perspectives*, Academic Press, 1981.
7. U.C. Merzbach, *Carl Friedrich Gauss, A Bibliography*, Scholarly Resources Inc., 1984.
8. M. Villarino, M. Josephy, and A. Ruiz-Zúñiga, "A Spanish Edition of *Disquisitiones Arithmeticae*", *Historia Math.* **14** (1987), 195.

Elementos de
Aritmética Maya

Prof. Mario Murillo
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

La cultura Maya. Su ubicación histórica y geográfica. Su influencia en el tiempo. Elementos culturales contemporáneos.

Elementos de la aritmética Maya, una interpretación. La simbología de los números. La base del sistema de numeración. Un sistema realmente posicional. El cero en este sistema. Simplicidad del sistema. "Conversión" de números: del sistema indoarábigo al Maya y viceversa. Operaciones elementales: los "mecanismos" de la suma, resta y multiplicación.

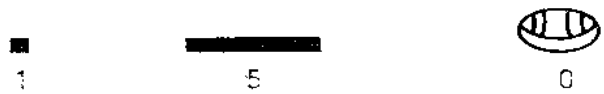
Cuando oimos hablar de los mayas, lo usual es que pensemos de ellos como un lejano imperio perdido en el tiempo y en el espacio, como algo remoto que pasó y de lo cual en el presente solo queda como recuerdo unas cuantas edificaciones y algunos logros no muy bien comprendidos. La verdad es que en nuestro medio mucho se ignora acerca de la realidad maya y de la influencia que ha tenido en el desarrollo de la cultura centroamericana.

Parte de esta realidad es que los mayas son una cultura viviente, aún cuando hayan sufrido una mezcla de costumbres "occidentales". Asímismo, por "occidental" que parezca nuestra sociedad, está cargada de elementos culturales de origen maya y de otros pueblos que tuvieron contacto con ellos, desde la antigua cultura Teotihuacana hasta la más reciente Azteca. En particular a Costa Rica, sobre todo al área de Guanacaste, se le considera la frontera sur de Mesoamérica. Ligados a este pasado hay mucho de lo que comemos, de nuestras costumbres, de los objetos, frutos y animales de nuestro medio, de nuestra idiosincracia.

La civilización maya tuvo un desarrollo a lo largo de unos dos mil años, desde aproximadamente el siglo IV a. de C. hasta finales del s. XVII d. de C. Algunos autores le dan una extensión en el tiempo de unos 3.700 años. Abarcó inmensos territorios: Yucatán, Quintana Roo, Campeche, Chiapas, Tabasco, parte de los estados de Oaxaca y Veracrüz en México; Belice, Guatemala y Occidente de Honduras y El Salvador. La población entre los años

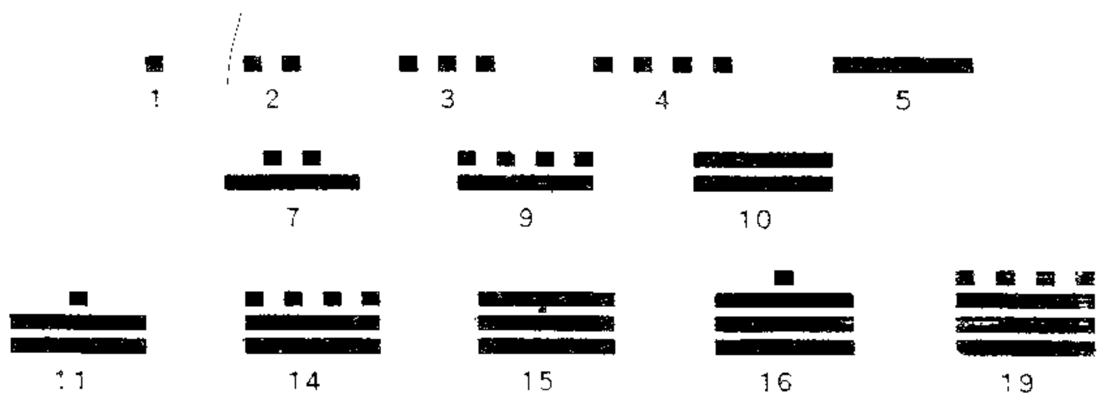
Algunos de los elementos culturales más destacados en la sociedad maya lo constituyen la escritura, las matemáticas, la medición del tiempo y la astronomía, además de la organización social, el panteón de los dioses, la agricultura y la arquitectura. Podríamos comentar mucho acerca de todos y cada uno de estos campos, pero eso nos conduciría al empleo de mucho tiempo, lo que a la vez nos desvía del objetivo de la presente exposición.

Lo que me ha conducido a' presente trabajo, ha sido sobre todo mi admiración por el sistema de numeración que ellos desarrollaron. Mejor dicho, los sistemas de numeración. Porque ellos usaron básicamente dos sistemas: uno usando dibujos que semejaban cabezas, y otro usando solamente tres símbolos con los cuales se podía representar cualquier cantidad, un punto para el 1, una barra para el 5 y un caracol (u ojo cerrado) para el 0:



Mientras que en la India inventaron un sistema de numeración sobre la base de la posición de las cifras o símbolos usados, que luego los árabes introdujeron en Europa, los mayas ya hacía tiempo habían desarrollado el propio en ese sentido, en el cual, cuando menos por 300 años, se habían adelantado en el invento y uso del cero (siglo VII d. de C., aunque hay quienes lo sitúan aún más antes, en el siglo II d. de C.)

El sistema de numeración maya es de base 20. Esto significa que la forma de contar era haciendo grupos de 20, 20 grupos de grupos de 20 (= 400), 20 grupos de éstos últimos, etc. Combinaron apropiadamente las barras y los puntos para formar las cifras del 1 al 19, y del 20 en adelante se formaba mediante combinaciones de estas cifras. Algunas de las cifras son:



700 y 800 d. de C. se ha estimado en tres millones. Un autor señala que su población fue superior a los trece millones.

Al hablar de los mayas, no se debe hacer como un imperio, sino como una cultura: no se puede afirmar que hubiese existido un gobierno central administrador de poder instalado en una capital. Existieron ciudades-estado las cuales a veces luchaban entre sí. Algunas de estas ciudades fueron Palenque, Tikal, Bonampak, Uxmal, Mayapán, Coba, Copán, Izamal, Xicalango, Chichen Itzá, etc.

Algunos autores dividen la historia maya en tres períodos:

1) Pre-maya, desde antes de Cristo hasta el 300 d. de C.

2) El *Viejo Imperio* que concluye alrededor del 987 d. de C. Al final de este período hay una decadencia y un abandono de ciudades y centros ceremoniales.

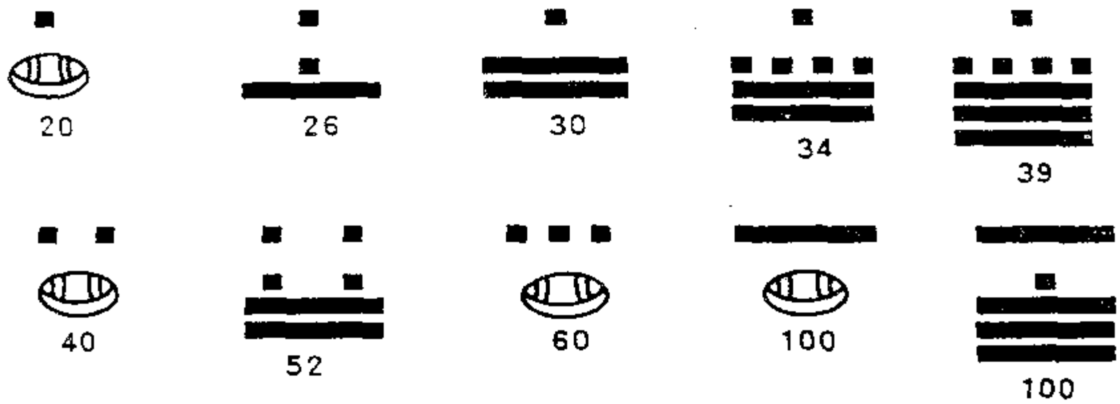
3) El *Nuevo Imperio*, en el que se da un renacer de la cultura maya y concluye con el genocidio y conquista hispánico. Este período finaliza con el sometimiento de la última tribu maya que luchó por su libertad: los Itzaes, en 1.697.

Como se señaló, los mayas no fueron un imperio o una tribu, sino *una* cultura compuesta por muchas tribus. En la actualidad, descendientes de los mayas están, por ejemplo, en México los Lacandones, *una* de las tribus que viven en estado más primitivo: en Guatemala, los Quichés, Cakchiqueles, Kekchíes, Mames, etc. Las lenguas actualmente habladas se *denominan* por el nombre de la tribu donde se usa. Tienen su raíz, probablemente, en alguna lengua ancestral común.

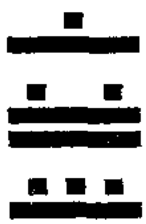
El mismo nombre de *Maya* no es el que corresponde al de esta cultura. Como señala un autor, nadie sabe cómo se denominaban a sí mismos ni cuál era la lengua que hablaban. Tampoco hay mucha certeza con qué nombres designaron a sus ciudades. La voz *maya* probablemente tenga origen náhuatl.

El nombre de Guatemala viene de la voz náhuatl *Quautlemallan*, y significa "Tierra de muchos árboles". Se describía con este nombre al país montañoso y fértil que se extendía al sur de México. El náhuatl era, a la sazón, la lengua de los aztecas, de algunas tribus del valle de Anáhuac, todavía hoy hablada en algunos lugares de México.

Las cantidades mayores de 20 se representan de forma vertical, ocupando las unidades el primer lugar de abajo hacia arriba. Así, algunas cantidades de "dos cifras" son:



Cada nueva posición valdrá 20 veces la anterior. Entonces, para "traducir" del sistema maya al decimal haríamos:



$= 6 \times 20 \times 20 = 2400$

$= 12 \times 20 = 240$

$= 8 \times 1 = 8$

2648

Lo cual también se puede dar como potencias de 20:

$= 7 \times 20^3 = 56000$

$= 14 \times 20^2 = 5600$

$= 4 \times 20^1 = 80$

$= 6 \times 20^0 = 6$

61686

Para "traducir" del sistema decimal al sistema maya, en uno de los métodos se divide sucesivamente por 20 hasta que el último cociente sea menor que 20, de forma análoga como se hace con otros sistemas. Por ejemplo, escribamos 15.853 en el sistema de numeración maya. Empezamos dividiendo por 20:

```
15853  |_20_        792  |_20_        39  |_20_
 185                 192                19
  053    792          12    39               1
   13
```

El último cociente será la cifra de mayor valor. Luego, los residuos constituirán, empezando por el último, el resto de las cifras. Entonces, 15.853 queda representado en sistema de numeración maya así:

Este sistema de numeración se adaptaba muy bien a la medida del tiempo, al dársele a la tercera posición un factor multiplicativo de 18, con lo cual se tiene: 1 x 20 x 18 = 360. Los mayas tenían 18 meses de 20 días cada uno con lo que se tenía 360 días, más un mes adicional de 5 días con lo cual se completaba el año maya compuesto de 365 días. En este sentido, uno de los usos (¿el principal, tal vez?) de este sistema de numeración era el calendárico. Según algunos autores el año maya era, con reajustes a lo largo del tiempo, de 365,2420 días, mientras que la estimación actual del año es de 365,2422 días.

Dejemos de lado el uso calendárico del sistema de numeración para entrar en otros asuntos.

OPERACIONES

De poca utilidad le sería a una cultura haber llegado a una representación posicional de las cantidades para solamente quedarse con eso, oon la representación de cantidades. Podemos suponer que con este sistema de numeración los mayas realizaban las cuatro operaciones fundamentales para llevar a cabo sus cálculos en las distintas ramas del saber en que se destacaron. Probablemente les fue de mucha utilidad en la descripción que hicieron del movimiento de venus, en la construcción de pirámides, templos y ciudades, o en el mismo cálculo cronológico.

No tenemos certeza acerca de los mecanismos usados por ellos para realizar las operaciones. Ningún libro de los consultados da refererencia al respecto. Esto aunado a la quema de bibliotecas mayas llevada a cabo por los españoles, quienes no reconocieron los logros alcanzados por las personas de este continente, lo que deja un gran vacío acerca de lo que podríamos saber de ellos y de este asunto particular. Apenas sí hay una revista en inglés que habla del asunto. Por esto, me he interesado en dejar por escrito un posible "mecanismo" para tres de las operaciones.

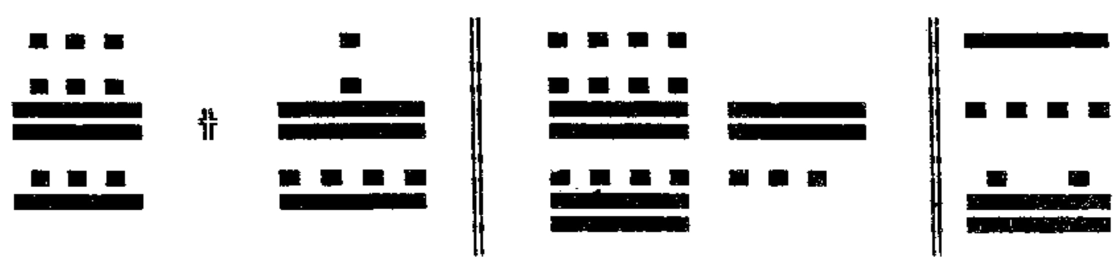
SUMA EN EL SISTEMA DE NUMERACION MAYA

Para la suma -al igual que en el proceso de formación de los números- nada más hay que recordar las siguientes "reglas":

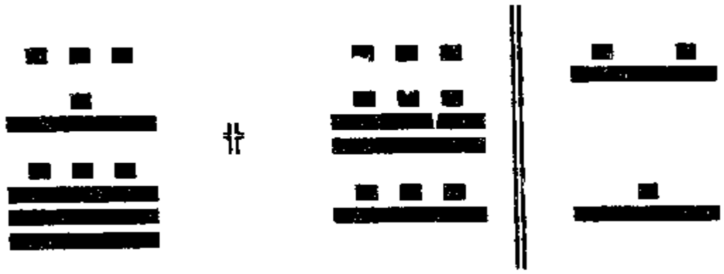
1) Cinco puntos valen igual a y se intercambian por una barra.

2) Dada la base vigesimal del sistema, si en una posición se acumula un valor mayor o igual a 20, en ella se escribe cero o lo que exceda a veinte, y la siguiente posición se incrementa su valor en una unidad.

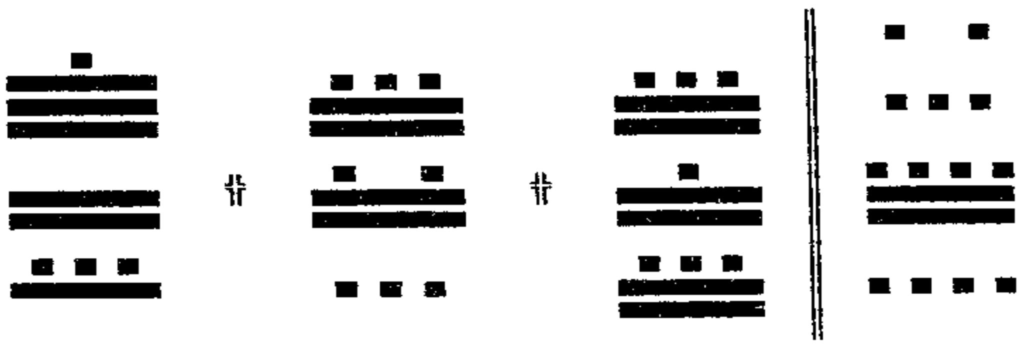
Esta segunda regla significa que, por ejemplo, si en una posición se acumula un valor de 47, aplicándola recursivamente, en esa posición se escribe 7 y la siguiente posición incrementa su valor en 2. En lo que sigue, usamos los símbolos conocidos de las operaciones. La línea de suma (y de las otras operaciones) será vertical y a la derecha. Al igual que en el sistema decimal, la suma se inicia con las unidades, luego veintenas, etc. Ejemplo:



O bien, simplificando de una vez:

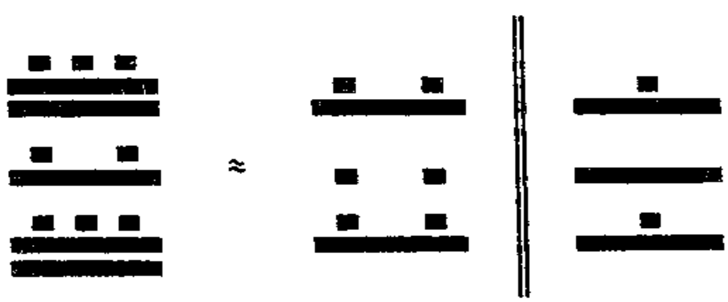


O bien, sumando tres números:

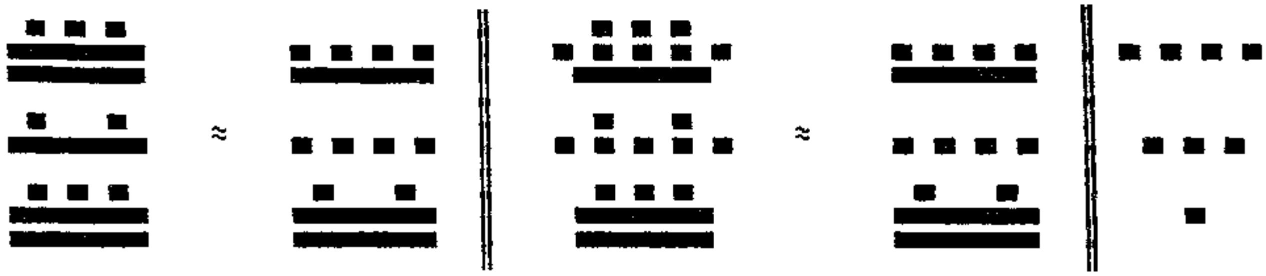


RESTA

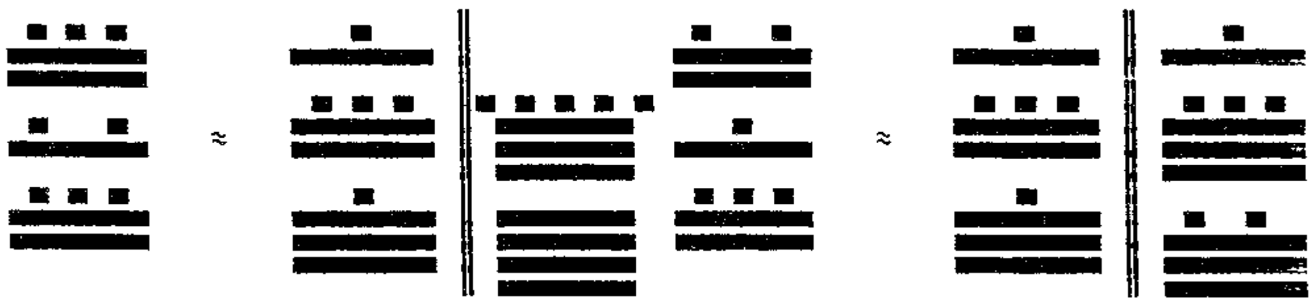
Para restar, solamente hay que asegurarse que el sustraendo sea menor que el minuendo. Más fácil no puede ser, pues como un mecanismo al minuendo se le restan los símbolos en cada posición según sea el sustraendo, y nada más. Usamos el símbolo ≈ para la resta:



Si faltan puntos, se transforma una barra en puntos:



Si en una posición no hay suficientes barras, se "toma un punto prestado" de la posición superior en valor, lo que equivaldrá a cuatro barras:



Sin embargo, al igual que en la suma, este proceso se puede simplificar.

MULTIPLICACION

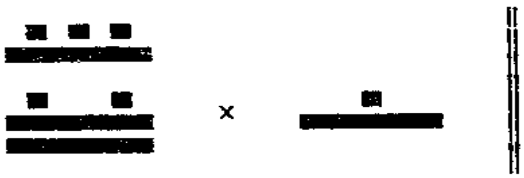
Esta operación es realmente simple, aunque en cierta medida algo laboriosa. En un extremo de simplicidad, solamente hay que recordar tres productos:

1 x 1 = 1 1 x 5 = 5 5 x 5 = 25

Además de esto, al igual que la realización de este procedimiento en el sistema de numeración decimal, hay que tener presente que:

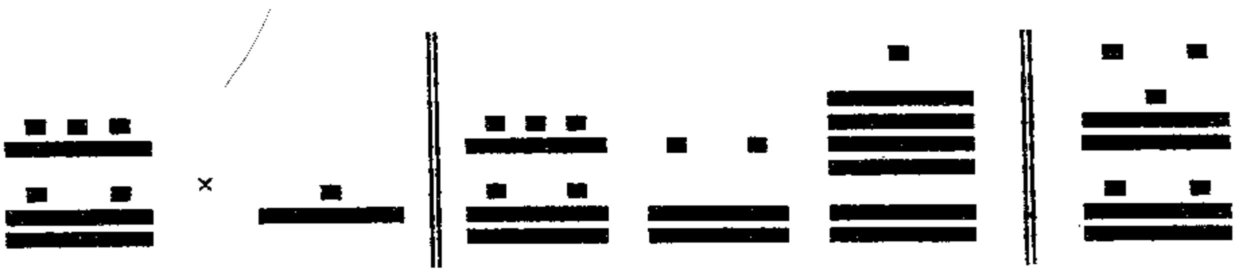
unidades por unidades da unidades
unidades por veintenas da veintenas
veintenas por veintenas da "cuatrocientos",
etc., etc.

lo cual es importante para la colocación de los resultados parciales. Finalmente, otra acotación es que para multiplicar según la tabla señalada, hay que ser exhaustivo: se debe multiplicar todos y cada uno de los símbolos de un número por todos y cada uno de los símbolos del otro número. Por ejemplo, colocando a la derecha el multiplicador:



"Multiplicamos" primero el punto:

Luego, "multiplicamos" la barra y sumamos



La práctica hace que se encuentren abreviaciones que disminuyan la cantidad de símbolos y el tiempo en la ejecución.

Salvo la posición y el hecho de ser un sistema de base veinte, los mecanismos generales para las operaciones son análogos a los de las operaciones en el sistema de numeración decimal. De ahí que dejo en manos de ustedes la división.

Una característica general de este sistema de numeración y de las operaciones es que por su conformación se siente la fuerza de la representación de las cantidades y del por qué de los mecanismos. Es algo así como "palpar" los números y la razón de los resultados de las operaciones.

BIBLIOGRAFIA

Anderson, W. French. *Aithmetic in Maya Numerals*. En "American Antiquity", Vol. 36, No. 1, 1971.

Anónimo. *El Popol Vuh, Las antiguas Historias del Quiché*. San José, Costa Rica. Educa, 1984.

León Portilla, Miguel. *El Reverso de la Conquista*. México, D. F. Editorial Joaquín Mortiz. 1964.

Morley, Sylvanus G. *La Civilización Maya*. México, D. F. Fondo de Cultura Económico. 1946.

Pacheco, Luis. *Religiosidad Maya-Kekchí Alrededor del Maíz*. San José, Costa Rica. Editorial Escuela Para Todos, 1985.

Von Hagen, Víctor. *Los Mayas*. México, D. F. Editorial Joaquín Mortiz. 1966.

SOBRE LA REVOLUCION CIENTIFICA Y MATEMATICA DEL SIGLO XVII

Angel Ruiz Zúñiga
Escuela de Matemática
UCR

RESUMEN

El siglo XVII transformó el pensamiento científico, o más aún, creó el modelo moderno de la ciencia occidental. En efecto, el siglo XVII fue testigo de grandes figuras intelectuales como Galileo, Harvey, Descartes, Fermat, Newton. La llamada Revolución Científica represento una ruptura cualitativa con el pensamiento anterior (griego y medieval), y la apertura de una nueva época. En este trabajo de lo que se trata es de hacer un recuento global de ese proceso así como de vertir elementos interpretativos sobre el mismo.

Para algunos, como Butterfield, la Revolución Científica del siglo XVII "...se debería colocar -junto con el éxodo de los antiguos o la conquista de los grandes Imperios de Alejandro Magno y de la Antigua Roma- entre las aventuras épicas que han hecho de la raza humana lo que es hoy"(1). En efecto, *se trató de un episodio único que sólo pudo desarrollarse en la conjunción de condiciones especiales que vivió Europa entonces.*

La Revolución Científica del siglo XVII debe entenderse en realidad como parte de la *Revolución Intelectual* que arrancó en el Renacimiento y la Reforma y que constituyó la base a partir de la cual se configura la nueva sociedad. Es decir, *las actitudes e ideas cognitivas, políticas y morales que se fueron generando desde el siglo XV, al mismo tiempo que expresaban la realidad de ciertas condiciones (intereses y voluntades) políticas y económicas (en ciertas partes de Europa), fueron factor activo (y en gran medida determinante) de la edificación de un nuevo orden social.*

Para entender mejor su decurso conviene recordar la evolución europea previa. Después de la caída definitiva de Roma en el siglo V d.c. se engendró una extraordinaria dispersión social y política, en Europa Occidental (2). La estructura económico-política pasó a ser agraria, con la intervención multifacética de bandas armadas, y con la Iglesia Católica como albacea y guardián religioso de las ideas, la educación y la moral. Todo dentro de un contexto de decadencia con relación a la sociedad mediterránea que había florecido siglos atrás bajo el influjo cultural y político griego. Hasta el siglo XII la sociedad europea había logrado construir una colección de jerarquías y reglas sociales diversas, asociadas a veces bajo el término "feudalismo", o simplemente en otras ocasiones de "Edad Media" (hasta el siglo XV). *De hecho, se trataba más bien de una colección de realidades sociales no idénticas.* Las ciudades y regiones pegadas al Mediterráneo, con altas y bajas, lograron mantener ciertos contactos comerciales y culturales en medio de un mar controlado política, económica, militar y culturalmente por el Imperio Islámico, que desde los siglos VII y VIII había iniciado su expansión. No sucedía así con el resto de Europa. Incluso, las reglas sociales en los pocos centros urbanos no correspondían desde un principio a las predominantes en el campo. Culturalmente en toda la época no existió relación con el pensamiento clásico griego, distanciamiento que de hecho se había desarrollado desde el mismo Imperio Romano. *La diversidad social, económica, técnica y política de la Europa medieval era un factor que sin duda jugaría su papel en la evolución histórica siguiente.*

Los dirigentes espirituales cristianos europeos tomaron de las fuentes clásicas especialmente algunas secciones del pensamiento de Aristóteles: su Lógica, Metafísica y partes de su Física, y buscaron una asimilación del cristianismo con las mismas (o viceversa). En un proceso de 3 siglos (XII-XV) se construyó y asentó una visión del mundo, la sociedad del hombre y la cultura, partiendo de la filosofía aristotélica y recreando la doctrina cristiana en una nueva dimensión. La configuración de los nuevos contenidos teóricos así como la forma de su explicación y defensa se llamó Escolástica. Tomás de Aquino fue la figura más relevante en la constitución teórica de esta fundición del dogma revelado con la filosofía pagana.

La doctrina cristiana se convirtió en el cemento ideológico de las instituciones políticas y culturales de la época. El cuestionamiento de sus "verdades" no era inocuo, representaba o podía representar grietas en el edificio socio-político y afectar la estabilidad política o social. La Inquisición, encargada de velar por la defensa del dogma, velaba de hecho por la preservación del ordenamiento político. Se trataba entonces de una red social caracterizada por el autoritarismo y la represión del pensamiento libre; una jerarquización y rigidez en el devenir social, político e ideològico. Sin embargo, no todo era homogéneo. Se sucedieron voces discordantes y grupos y (luego) órdenes religiosas que criticaban la administración de la Iglesia (aunque hasta el siglo XV si no fueron "integradas" fueron reprimidas). Las pestes del siglo XIV y las guerras provocaron un debilitamiento de la red europea controlada por la Iglesia y abriría las posibilidades para importantes transformaciones políticas, ideológicas y sociales.

Desde el punto de vista de la evolución técnica es necesario señalar que hubo un mejoramiento de las técnicas durante la última parte del medievo: algunas "máquinas" se construyeron, técnicas agrícolas mejoraron y el uso de otras se extendió. Sin embargo, en esta época Europa estaba francamente retrasada en sus técnicas con respecto por ejemplo a las civilizaciones orientales como China (con un régimen estable dirigido por una casta no hereditaria, una filosofía de "acomodación práctica" y en donde también la innovación técnica era controlada y, suprimida si amenazaba la estabilidad política o social). Algunos de los inventos chinos serían transmitidos a Europa: la imprenta, la pólvora y la brújula magnética. Sin embargo, su introducción se haría en condiciones socio-políticas diferentes a las chinas o a las predominantes en la Europa medieval, *jugando un papel muy diferente.*

Se suele señalar una diferenciación entre los tipos de resultados técnicos medievales: mientras en la región italiana estaban más vinculadas al comercio, en el Norte y el Nor-Este lo estaban a la agricultura. En ese sentido las condiciones económicas más dinámicas jugarían un papel más activo en la evolución técnica.

El Renacimiento arrancó primeramente en la misma Italia, donde las ciudades más grandes como Venecia, Génova, Florencia y Milán se hicieron independientes política y económicamente, y se llegó a un "equilibrio" político y militar con Roma. Cuando el Renacimiento se extendió por Europa las cosas no fueron tan apacibles. En Alemania y otros países se buscó la independencia religiosa y nacional, sustrato de la Reforma Luterana; así como se sucedieron importantes luchas sociales: la Guerra de los Campesinos de 1525 a 1526 y la rebelión de los anabaptistas de Münster, de 1533 a 1535. La Reforma se propagó a Gran Bretaña, los Países Bajos y Francia, donde adoptó la forma del calvinismo. *En todos los casos el control y autoridad de la Iglesia se debilitó estableciendo cambios en la estructura de los bloques sociales de poder y generando una dinámica política especialmente fructífera para la innovación cultural.*

El Renacimiento y la Reforma fueron aspectos de un mismo movimiento, y sin duda en ellos jugaron un papel importante la extensión del comercio y ciertos excedentes económicos obtenidos productos de mejoras técnicas, pero no es posible afirmar que ambos aspectos estaban determinados por o tenían como única finalidad el establecimiento de la economía mercantil. En ocasiones cierto determinismo economicista (caracteríctico del marxismo, por ejemplo) simplifica artificialmente la realidad de los procesos históricos, enajenandose de una comprensión más totalizante de los mismos. Aunque existían voluntades e intereses económicos de por medio, que terminaron siendo afectados, el Renacimiento y la Reforma fueron movimientos esencialmente *políticos, ideológicos y culturales.*

El Renacimiento significa un reencuentro con la Antigüedad Clásica, pero no con la lógica formal y la especulación abstracta que encontraron los escolásticos en Aristóteles, sino en *la vinculación y preocupación por la naturaleza, en su vitalismo, en su humanismo.* Todo lo anterior fue cuestionado abriendo un período extraordinario en la producción intelectual:

a) Las artes técnicas se colocaron en una posición especial (debilitándose, en cierta medida, la separación abismal en el medievo de la tradición erudita y la artesanal).

b) Las artes plásticas adquirieron una relevancia importante que contribuiría a una indagación y a importantes conocimientos sobre la naturaleza y el hombre (los estudios de perspectiva anatómicos, la descripción realista de la naturaleza, etc). En esta época los artistas son patrocinados y respetados.

c) Las matemáticas son desarrolladas sutilmente producto del "input" ofrecido por la transmisión árabe y los requerimientos de las técnicas, las artes plásticas, y de las guerras.

d) En la filosofía se generó un extraordinario cambio de actitud frente a la Escolástica y el pensamiento "organicista" aristotélico. Por ejemplo, la teleología de las "causas finales" va a ser sustituida por un énfasis en la búsqueda de las causas "eficiente" y "material", es decir, por los agentes del "cómo" y no del "para qué" (Telesio 1509-1588).

Con el Renacimiento italiano (y su proyección posteriormente a otras regiones) se inició una auténtica revolución cultural y una nueva actitud ante la sociedad, el hombre y la naturaleza; se inició una auténtica revolución cultural y una nueva actitud ante la sociedad, el hombre y la naturaleza; se inició la *Revolución científica y la Revolución Intelectual moderna (3).*

Vayamos a las principales ideas. La teoría heliocéntrica de Copérnico (que aunque era polaco había estudiado en el principal centro intelectual italiano, la Universidad de Padua) se rebeló contra la cosmología aristotélica y ptolomáica, debidamente cristianizada por los escolásticos. Retomó la idea antigua (pitagóricos VI ac. Aristarco III a.c.) de que los planetas giran alrededor del sol, (4) y escribió su DE REBOLUTIONIVUS ORBIUM COELESTIUM que salió a la luz el año de su misma muerte, 1543. Aunque desde joven se inclinaba por el heliocentrismo, no se atrevió a hacer una defensa muy fuerte de sus ideas. El libro salió a la luz incluso, gracias a los oficios de Ossiander, con un prólogo que decía que las ideas vertidas eran meras hipótesis matemáticas y no verdaderas posiciones de Copérnico. En el mismo año Vesalio publicaba su DE HUMANI CORPORIS FABRICA, la primera descripción anatómica completa del cuerpo humano. En 1537 Vesalio fundó la Escuela de Medicina de la Universidad de Padua, cuya tradición empataría directamente años después con el mismo William Harvey.

Muchas importantes obras más fueron publicadas: la PYROTECHNICA de Biriguccio (1480-1539), DE RE METALLICA de Agrícola (1490-1555), o más tarde libros como los de Gesner (1516-1565), Rondelet (1507-1566) y Belón (1517-1564). *La proyección de las ideas y actitudes nuevas fue multiplicada por el uso de la imprenta.*

Con relación a la técnica renacentista: muchos avances se dieron en el terreno de la minería, la química, y la metalurgia, pero conviene señalar la extraordinaria importancia de aquellas técnicas relacionadas con la navegación. Con el descubrimiento de América y nuevas rutas comerciales al Asia (lo que benefició inicialmente a España y Portugal) la navegación ocuparía un lugar decisivo en toda esta época. No es totalmente extraño que fuese en la Astronomía donde se abrieran los primeros fuegos por la nueva ciencia. Es precisamente en torno a la navegación que se puede decir se dió la primera aplicación de la ciencia.

Se podría intentar explicar este Renacimiento a partir del florecimiento económico de las ciudades italianas, y este a su vez por el avance de una nueva organización productiva, e incluso a partir de mejores técnicas. Este "motor" económico empujaría hacia condiciones políticas para su mejor desarrollo, y las nuevas ideas de la época serían "reflejo" de los procesos de esa base económica, en busca de su evolución progresiva. Sin embargo, el asunto parece más complejo.

Sin duda intervino la existencia de factores económicos, pero también los contactos culturales con otras civilizaciones y recursos, el debilitamiento de la autoridad y poder de la Iglesia después del XIV, la voluntad política y la actitud de los bloques sociales de poder (vgr. el patrocinio de las artes plásticas no era reflejo de las necesidades económicas). También, lo que fue un factor decisivo: *la competencia abierta entre individuos, ciudades y naciones*. Por encima de las interrelaciones de todos estos elementos, sin ciertas condiciones de libertad para la crítica y para la innovación en las ideas y en las técnicas, no se puede entender bien el Renacimiento. Es cierto que no se pasó del régimen jerarquizado, autoritario y doctrinario medieval a la democracia (más bien se pasó en el XVI y XVII a las monarquías absolutas), pero, con altibajos y con asedio permanente por las fuerzas del viejo orden, nuevas condiciones políticas se crearon que permitieron la empresa, la competencia y la libertad individuales. El caso de ciudades como Padua es muy significativo: se le suele considerar un modelo de la ciudad renacentista en su independencia y libertades, en el espíritu humanístico y promotor de la cultura.

El principal "vicio" del sistema escolástico era intelectualmente el mismo que había tenido en los siglos anteriores el pensamiento cristiano. *Las "verdades" eran obtenidas por la revelación divina y no por el ejercicio de la experiencia o de la razón (métodos que se habían planteado contrapuestamente en la Antigüedad Clásica)*. Con la integración escolástica de partes del pensamiento aristotélico a la "revelación" se le sumó la "razón", en una metodología abstracta que poco permitía la indagación empírica sobre el mundo. Antes del Renacimiento los pocos intentos de acudir a la experiencia como fuente de conocimiento (Roger Bacon, etc) no contaron con mucho éxito y proyección.

Galileo asumió la defensa de las ideas de Copérnico, integrando en sus trabajos los resultados fácticos obtenidos por Tycho Brahe y J. Kepler (quien había concluido que las órbitas de los planetas era elípticas y no circulares, figuras tradicionalmente aceptadas como perfectas y descriptivas de la realidad desde Pitágoras). Para sus resultados Galileo (al igual que Kepler) usó como base los avances hechos por los matemáticos renacentistas (Cardano,, Tartaglia, etc), pero su principal instrumento de batalla fue el telescopio (producto de la tradición artesanal). A través del telescopio pudo descubrir importantes hechos que desestimaban el geocentrismo y favorecían la interpretación copernicana: que la Luna tenía mares y montañas, que Venus muestra fases como la Luna, que Saturno parece estar dividido en 3 partes, y que en torno a Júpiter giran tres estrellas o lunas.

En 1610 publicó su MENSAJERO DE LAS ESTRELLAS, condensando sus observaciones revolucionarias. Es, sin embargo, 22 años después en su DIALOGO CONCERNIENTE A LOS DOS SISTEMAS DEL MUNDO: EL PTOLOMEICO Y EL COPERNICANO (dedicado al Papa) que se dirigió frontalmente contra la cosmología aceptada y la filosofía aristotélica. El DIALOGO fue escrito en italiano para buscar una mayor audiencia para sus ideas.

Galileo fue procesado (por segunda vez, en 1618 ya había sido "amonestado" por sus ideas) y condenado a arresto domiciliario durante el resto de su vida (sin duda mejor suerte que la de

Campanella y Giordano Bruno, que pasaron por la hoguera). El proceso inquisitorial contra Galileo hacía recordar que a pesar del Renacimiento, y del debilitamiento del poder terrenal de la Iglesia, todavía existía el oscurantismo medieval y la represión contra el pensamiento libre. *El DIALOGO era una auténtica "provocación" de Galileo.* Tal vez consideró que ya viejo no importaba su audacia, o tal vez pensó que por su prestigio y por su amistad con el Papa, tenía asegurado el camino. Sea como sea su proceso significó de hecho una proyección mayor de las ideas copernicanas.

El trabajo fundamental de Galileo no fue, sin embargo, en la Astronomía. Fue el estudio de la mecánica y la descripción matemática del movimiento. *La cuantificación matemática de las proposiciones sobre la naturaleza representaron una ruptura epistemológica con relación al modelo cualitativo, rígido y abstracto medieval y aristotélico.* Pero además lo esencial fue la metodología que empleó en el proceso: *la realización de experimentos controlados para demostrar sus teorías, o modificarlas. El método experimental integrado a la descripción matemática estableció el mecanismo motor de la ciencia moderna.* De hecho, en la Antigüedad (se afirma que desde Hipócrates, y con más seguridad con los discípulos del Liceo del período alejandrino) se habían realizado, pero no en las extraordinarias condiciones y en relación con la cuatificación matemática, del siglo XVII. El método experimental representaba, bien entendido, *un peligro contra el orden intelectual aristotélico y tomista tal vez más peligroso que el heliocentrismo.* Galileo fue un auténtico profeta de la nueva ciencia.

Contemporáneo a Galileo fue Harvey (1578-1657) que intentó una explicación mecánica de la circulación de la sangre. En 1628 publicaba EXENCITATIO ANATOMICA DE_MOTU CORDIS ET SANGUINIS IN ANIMALIBUS que representaba (aunque en la tradición de Vesalio) una nueva anatomía y fisiología. El descubrimiento de la circulación de la sangre fue realizado en el marco de la metodología experimental y la visión mecanicista del mundo. Otros importantes profetas de la nueva ciencia fueron Francis Bacon (1561-1626) y René Descartes (1596-1650). Bacón fue un filósofo más que un científico. Fue Lord Canciller de Inglaterra bajo Jaime I. Fue de los primeros en tomar conciencia del significado de la nueva ciencia y se dedicó a la promoción del método experimental y a la búsqueda de instrumentos institucionales que fomentarán la ciencia. En 1605 publicó EL AVANCE DEL SABER_ y en 1920 (parcialmente) LA GRAN "INSTAURACION DEL PODER, en la que se establece un análisis "del método científico. Bacon no quizo constituir un sistema filosófico. Asumió las tradiciones de Roger Bacon y otros primeros empiristas. Y empujó cierto sentido utilitario en la nueva ciencia. De hecho, se esforzó por unificar las tradiciones eruditas y artesanales. Por otra parte, su empirismo no incluía privilegiadamente a las matemáticas y a la lógica deductiva. Esto último era una importante debilidad de su aproximación.

Descartes promovió más bien el método deductivo y el poder de la razón. Como matemático estableció la geometría analítica (simultáneamente con Fermat) que sería base del cálculo infinitesimal. Lo más importante de sus ideas fue la concepción mecanicista del mundo. De hecho, reduciendo el espacio a la extensión y al movimiento establece una cosmología regulada por las leyes de la mecánica, y luego va a geometrizar esta última. Descartes ataca el modelo organicista de la Escolástica. Lo que establece es entonces una descripción mecánico-matemática del universo que va a influir notablemente en el resto del siglo XVII y en el siguiente. Descartes, a diferencia de Bacón, sí construye un sistema filosófico. *Busca crear un sistema alternativo al aristotélico-tomista de la Escolástica, que integre de alguna forma la nueva ciencia.* El sistema metafísico cartesiano resulta entonces un híbrido que no rompe totalmente con el modelo anterior. Lo cual revela, probablemente, cierto temor ante la autoridad de la Iglesia, que todavía era capaz de mandar a la hoguera.

El caso es que a partir de las ideas de Bacón y Descartes se generaron dos tradiciones en la filosofía (la metodología) de la ciencia moderna: el empirismo y el racionalismo, enfatizando en la primera la experiencia sensorial como fuente de verdad, y la razón en la segunda. En la práctica la tradición racionalista ha ido cediendo terreno a la empirista. Sin embargo, las discusiones epistemológicas sobre este asunto todavía no han sido agotadas.

Con las ideas de Galileo, Bacón y Descartes se edificaron las bases metodológicas del camino por el que transitarían los esfuerzos científicos siguientes. La visión que ofrecían se puede resumir: *método experimental, descripción matemática y comprensión mecanicista del universo.*

En el siglo XVII las ideas científicas se abrieron con gran intensidad. Gassendi (1592-1655) introdujo de nuevo una forma de la teoría atomista de Leucipo y Demócrito. Grimaldi (1618-1663) y después Newton habían obtenido resultados en la óptica y en el esclarecimiento de la naturaleza de la luz. Huygens hizo una descripción matemática de un funcionamiento ondulatorio de la luz. Torricelli (1608-1647), discípulo de Galileo, inventó el barómetro descubriendo la presión atmosférica y también el "vacío" (con lo que asestaba un nuevo golpe a las ideas de Aristóteles). Es el siglo de Boyle con sus resultados sobre el vacío y la teoría de gases; también de Hooke, a quien se le atribuye haber sido el principal físico experimental antes de Faraday.

Los resultados y las figuras científicas del XVII pueden seguir enumerándose, pero, sin duda, es la obra de Newton la que culmina esta llamada Revolución Científica.

Isaac Newton nació en 1642 (el año de la muerte de Galileo) en Lincolnshire. Con la creación del *cálculo infinitesimal* va a completar los trabajos matemáticos que desde Eudoxo y Arquímedes en la antigüedad hasta Kepler, Fermat y Descartes (entre muchos otros en la nueva época) se venían dando en busca de un método para abordar el "continuo". Sin duda el cálculo infinitesimal (cuya notación más apropiada fue creada por Leibniz) representó el resultado matemático más decisivo del siglo XVII, que generaría un extenso territorio intelectual para los siglos siguientes no solo en las matemáticas sino en la ciencia en general.

Ya solo esto hubiera sido suficiente para inmortalizar a Newton, pero realizó otra hazaña intelectual: *la mecánica celeste*. Es decir, la descripción del movimiento de los astros a partir de las leyes de la mecánica terrestre. Fue la fundición teórica de los resultados de Copérnico y Kepler con los de Galileo. No se trataba de un sistema filosófico, sino de una descripción matemática.

La teoría newtoniana de la gravitación universal completó la destrucción del modelo aristotélico-tomista de la cosmología. El espacio para la intervención divina quedaba muy reducido, lo que suscitó no pocos "lamentos" en una intelectualidad que en general todavía no había roto definitivamente con el pensamiento y el lenguaje medievales (la famosa disputa entre Clarke y Leibniz giró precisamente en torno al papel de la Providencia divina en el marco del mecanicismo). De hecho, se terminó estableciendo una "transacción" práctica que urgía delindar ciencia y religión, un acuerdo de no intromisión en las esferas de cada una.

Con Newton, efectivamente, puede considerarse que una fase intelectual fue completada. En las etapas históricas siguientes nuevos saltos cualitativos hacia adelante en la ciencia van a demandar más condiciones económicas, técnicas, políticas y sociales.

Vamos a hacer unos últimos comentarios en relación a las matemáticas:

1- Es interesante señalar que siempre existió una relación importante, relación entre navegación y astronomía y matemáticas. En los resultados de los sumerios, babilonios y egipciós es posible detectar esa estrecha relación de influencias recíprocas. Sin duda, el desarrollo del comercio y la navegación que se abriría con los nuevos descubrimientos geográficos fueron muy importantes en el desarrollo de la Astronomía y las matemáticas asociadas. En esta ocasión, además, gracias a los resultados de la cultura Antigua, se contaba con una buena colección de teorías e hipótesis (bastante elaboradas) y especialmente un conjunto muy grande de observaciones y datos astronómicos. Esta relación (así como la captación vía islámica de matemáticas hindúes y chinas) fue esencial en la configuración de la revolución matemática y científica del siglo XVII.

2- Hay que comprender aquí que no se trató solamente de oponer la experimentación a la especulación. Dentro de la visión aristotélica (que cristianizada sustentaba el orden intelectual anterior) cabía lugar para la experiencia. El mismo Galileo en su Diálogo coloca el personaje defensor de sus ideas frente a la experiencia. Galileo no deja de afirmar la experimentación, pero introduce una condición precisa; la relación con las matemáticas. Lo que aparece como esencial, es, entonces, la descripción matemática de los procesos físicos. Es una visión intelectual de la Física (y la ciencia) diferente a la aristotélica (Aristóteles no introdujo en su física y cosmología la intervención matemática); una visión cuantitativa. Es ésta visión la que asumirán Newton y los principales científicos de los siglos siguientes.

Bacon hizo de la experiencia el punto medular de la nueva ciencia pero, descuidó en cierta medida, el papel jugado por las matemáticas. Descartes afirmó una visión matemática y un carácter mecanicista de la realidad, pero eliminó prácticamente las referencias a la experiencia.

Las visiones metodológicas de Bacon y Descartes encontraban (desde un punto de vista técnico) convergencia y complementariedad en la actitud metodológica de Galileo. En la historia concreta de la ciencia, sin embargo, los énfasis metodológicos unilaterales, constantemente han generado bastantes obstáculos para su decurso positivo. No obstante, la afirmación de la experiencia era la base de partida necesaria.

3- Debe señalarse que en la Revolución Científica del XVII la revolución en las matemáticas fue un componente central. En un tiempo relativamente corto, se crearon buena parte de los rudimentos de la matemática moderna; desde la Geometría Analítica, pasando por la teoría de Números y las probabilidades, hasta el Cálculo. Los nuevos métodos y resultados tendrían una repercusión inmediata en astronomía y mecánica, pero (después) en el resto de las ciencias.

Las matemáticas de las que se habla aquí no con las definidas por sus aspectos deductivo-axiomáticos y formales, abstractas y separadas del mundo físico. Se trata de matemáticas integradas estrechamente a la intuición y la experiencia de las ciencias y las técnicas. Los criterios del desarrollo matemático del siglo XVIII (por ejemplo) se establecieron en términos de la predicción y la descripción material y no de consistencia lógica. Desde el XIX, sin embargo, empezó a ocupar una posición privilegiada en el pensamiento occidental, la opinión de que la naturaleza de las matemáticas está ligada esencialmente a la lógica, a la axiomática y a los formalismos, más que a las realidades empíricas y las ciencias (usualmente llamadas) naturales.

NOTAS

1 Butterfield, Herbert. Los orígenes de la ciencia moderna Trad. L. Castro. Madrid, Taurus Ed. 1971. Pág. 248.

2 Para algunas interpretaciones de corte marxista el paso de la sociedad greco-romana al "feudalismo" fue parte de una transición progresiva. La historia (en general) es vista como una sucesión de modos de producción y una línea inevitable de "progreso" Aquí se parte de la existencia de cierta "necesidad" histórica y, entonces, de leyes objetivas que determinan el curso de las sociedades. En ésta visión, al igual que de las entrañas del feudalismo salió (progresivamente) el capitalismo (y de éste el socialismo), del esclavismo salió el feudalismo. Se trata de un determinismo; más aún, de un analisis teleológico poco dinámico y profundo que no permite en particular comprender el carácter histórico de la Edad Media ni los orígenes de la sociedad moderna.

3 El reencuentro con la Antigüedad Clásica significó el contacto con los resultados teóricos gigantescos de ese crisol del conocimiento que fue Grecia. Se tuvo acceso a los descubrimientos y observaciones apuntadas como a las teorías e

hipótesis afirmadas, entonces, si bien no es posible exagerar el papel de estos resultados en la conformación intelectual y autonomía en los desarrollo del XVII), es importante colocarlos en su verdadera y decisiva dimensión. Sin este influjo intelectual la historia europea moderna, habría sido de seguro muy diferente. La nueva cultura y civilización que se creó pudo perfectamente no haberse generado. Este influjo fue una condición necesaria para desencadenar la revolución intelectual moderna, pero no era (por otro lado) suficiente. De hecho, estamos haciendo referencia a un proceso en el que se combinaron factores como la cultura clásica antigua, como las influencias árabes y chinas, y una larga serie de condiciones históricas particulares de Europa. Estas últimas fueron decisivas. Los árabes, en posesión de la mayoría de los resultados griegos, no pudieron hacer el salto que sí daría Europa Occidental.

4 En realidad, los pitagóricos afirmaban que los planetas (incluyendo el sol) se movían alrededor de un gran fuego central. Afirmaban el movimiento circular de los cuerpos celestes y su forma esférica.

BIBLIOGRAFIA

1.- Butterfield, H. *Los orígenes de la Ciencia Moderna*. Trad. L. Castro , Madrid: Taurus Ed. 1971.

2.- Bernal, John D. *La Ciencia en la Historia* T. Elí de Gortari México: UNAM y Nueva Imágen, 1981.

3.- Crombie, Alistair C. *Historia de la ciencia. De San Agustín a Galileo*. Trad. José Bernia. Madrid: Alianza, 1983.

4.- Mason, Stephen. *Historia de las ciencias*. Trad. Carlo Solís. Madrid: Alianza, 1985.

5.- Holton, Gerald. *Thematics origins of scientific thought*. Cambridge: Harvard Univ. Press, 1988.

6.- Needham, Joseph. *La gran titulacion. Ciencia y sociedad en Oriente y Occidente*. Madrid: Alianza, 1977.

SOFÍA KOVALEVSKAIA

Cien años de su muerte

Tsijli Theodora.
Universidad de Costa Rica.

Resumen.

Al cumplirse proximamente cien años de la muerte de Sofía Kovalevskaia, se rinde homenaje a la primera mujer doctorada en matemáticas; luchadora de los derechos de la mujer. Se incluye un breve esbozo de la lucha por la participación de la mujer en la ciencia y situación actual a nivel de Costa Rica.

Introducción.

Al cumplirse en los próximos meses cien años de la muerte de Sofía Kovalevskaia quiero aprovechar la ocasión que presenta este Congreso para hablar un poco de su persona , su vida, sus luchas, sus logros.

La historia de las Matemáticas al igual que las de otras ciencias habla de los aportes de los matemáticos varones.

Casi no hay mujeres matemáticas, casi no hay mujeres científicas.

En la actualidad vemos con naturalidad mujeres ocupando posiciones de alto rango en la vida política, social, económica, intelectual del mundo entero. Pero, ¿cuál es la participación de la mujer en las ciencias?

¿Cómo se logró esta su participación?.

La Mujer en las Ciencias: situación actual.

Si bien no nos vamos a referir al papel que históricamente se le ha dado a la mujer, si tenemos que mencionar el hecho de que a lo largo de siglos se ha considerado que la mujer es menos capaz que el hombre para las ciencias. Lamentablemente esta creencia persiste en amplios sectores pese a que estudios recientes indican que las diferencias existentes obedecen a factores fundamentalmente socio-culturales y no biológicos.

Estudios hechos a nivel mundial y en particular en Costa Rica revelan que las mujeres en el día de hoy optan por las áreas sociales y raramente por el área de ciencias básicas.

De acuerdo a una investigación que realizaron Silvia Chavarría y Margarita Brenes en la Universidad de Costa Rica la escogencia de carrera de las mujeres estudiantes de esta casa de estudios varía en forma inversamente proporcional al número de cursos de matemática que contienen los planes de estudio.

Para carreras con cero, uno, dos, tres, cuatro o más cursos de matemática, los porcentajes de mujeres graduadas en esta Universidad van disminuyendo progresivamente (El estudio incluye los años 81 al 85).

Remitimos a los lectores a la inverstigación " Análisis Cuantitativo y Cualitativo de la proyección de la Mujer en la Universidad de Costa Rica " realizada por las Doctoras

Zinnia Méndez y Ligia Delgadillo. En esta inverstigación se contemplan las distintas poblaciones de la Universidad. Docentes, Funcionarios Administrativos y Estudiantes. Se presentan análisis detallados considerando distintas subpoblaciones dentro de cada uno de los grupos citados. Por ejemplo, los Docentes se analizan por Unidad Académica, según grado académico, según categoría en Régimen Académico, etc.

Reproducimos el cuadro # 1:

Docentes según sexo 1982-1987

	Total		Mujeres		Hombres	
Año	Abs.	%	Abs.	%	Abs.	%
1982	2810	100.0	795	28.3	2015	71.7
1983	2984	100.0	855	28.7	2129	71.3
1984	3382	100.0	1045	30.9	2337	69.1
1985	3388	100.0	1032	30.5	2356	69.5
1986	4727	100.0	1631	34.5	3096	65.5
1987	3283	100.0	1069	32.6	2214	67.4

Fuente : Oficina de Personal.
Centro de Evaluación Académica.
Oficina de Planificación Universitaria.

En el cuadro # 2 presentamos algunos datos extraidos de a misma inverstigación

Año → Facultad ↓	1982	1983	1984	1985	1986	1987
Letras	50.3	52.8	57.0	57.2	58.7	57.1
Ciencias Básicas	18.8	31.2	23.8	24.3	23.3	22.7
Ciencias Económicas	8.7	9.8	15.7	14.5	19.7	20.0
Educación	56.4	57.6	58.4	58.5	66.4	60.7
Ingeniería	6.9	8.1	8.0	8.2	13.6	11.8
Medicina	20.2	20.2	22.1	22.3	26.6	23.2

Los datos expuestos representan, según el año indicado, el porcentaje de mujeres docentes en la Facultad correspondiente.

¿Cómo se fue incorporando la mujer en la ciencia?

Contrario a las creencias existentes ni las oportunidades educacionales y científicas de la mujer tuvieron un proceso paulatino¿progresivo, ni su incorporación a la ciencia y su aceptación como científica y profesional.

En los Estados Unidos y en la segunda mitad del siglo XIX se abrieron las puertas de muchas escuelas médicas a mujeres y negros. Ya al inicio del siglo XX estas posibilidades se cierran. Los nivele de incorporación de la mujer en lás ciencias, en el siglo XX, son comparables a los de la 2a. mitad del siglo pasado, llegando a la década de los 70. Por aproximadamente cien años hubo retroceso.

En Europa y específicamente Italia las mujeres son admitidas en áreas como Física, Matemática, Anatomía Fisiológica en el siglo XVIII. Sin embargo a finales de este mismo siglo no solamente se cierran las puertas a las mujeres sino que son eliminadas del registro histórico.

Otro empuje a la participación de la mujer en las ciencias se da en Rusia entre 1860 y 1870. Los nihilistas, quienes cuestionan la sociedad Zarista autocrática y patriarcal consideran las ciencias naturales y la educación los medios de desarrollo y cambio social, creen en la igualdad de la mujer y crearon condiciones para alertar a las mujeres a desarrollar su talento en el estudio de las ciencias naturales y la medicina.

Al no tener respuesta gubernamental salieron hacia las universidades de la Europa Occidental muchas mujeres rusas.

De esas mujeres rusas a pesar del triunfo logrado en graduarse en Europa Occidental centro indiscutible de investigación científica, no todas lograron desarrollarse como tales por obstáculos opuestos a su incorporación a la enseñanza superior y la investigación.

Sofía Kovalevskaia.

Nacida en Moscú en 1850 es una muestra típica de la aristocracia de su tiempo. Educada bajo el cuidado de institutrices, domina el inglés y francés perfectamente y aspira a un futuro estable a base de matrimonio.

La pasión de su padre hacia las ciencias y las matemáticas le indujeron proporcionar a su hija tutores que le dieron una excelente preparación matemática.

Conoce a muy temprana edad la filosofía nihilista que responde a sus propios intereses hacia las matemáticas y la emancipación de la mujer. De hecho a lo largo de su vida siempre se identificó como miembro de este movimiento.

A los dieciocho años contrae matrimonio con Vladimir Kovalevskii, matrimonio ficticio que le permitía estudiar en una Universidad. Al no permitir las universidades rusas el acceso a mujeres en áreas científicas, varias, entre ellas Sofía, se trasladaron a Europa Occidental. Sofía inicia en Heidelberg y luego a Berlín a la par de Weierstrass. Obtuvo su doctorado en la Universidad de Göttinger (1814).

Göttinger es la primera universidad que otorga el doctorado a una mujer. Aún así casi cincuenta años después se opuso a la habilitación de Emy Noether quien trabajó clandestinamente gracias a que Hilbert hizo a Emy su ayudante y le prestó su nombre para que impartiera clases.

De regreso a Rusia intento trabajar, sin embargo tanto por su condición de mujer como por sus convicciones políticas y su grado académico alemán, no tuvo posibilidades de trabajo. Vuelve a Europa Occidental y también allí se le obstaculiza el trabajo por nihilista en una Europa tradicional y por mujer.

La barrera principal sin embargo fue el hecho de ser mujer casada.

La mujer podía estudiar como satisfacción personal pero el esposo era quien mantenía el hogar.

De hecho la misma Sofía durante algunos años desatendió la actividad científica por varias razones.

La no posibilidad de trabajar en Rusia, la maternidad en 1878; en su interés literario escribió una especie de autobiografía titulada "Una mujer nihilista, su incorporación en la lucha por establecer una universidad para mujeres".

De vuelta a su pasión por las matemáticas comienza a relacionarse con matemáticos rusos, ofrece conferencias y se escribe con Weierstrass.

Se separa de Vladimir Kovalevskii en 1881 y se traslada a París. Se incorpora a la Sociedad Matemática de París, se relaciona con los matemáticos Hermite, Picard, etc., pero no tiene oficialmente trabajo.

Los intentos por conseguir una cátedra en Helsinki y Estocolmo fueron infructuosos por sus ideas políticas y situación familiar.

Después de que Vladimir Kovalevskii se suicida en 1883, en la venerable condición de viuda recibe una oferta de docente privado en la Universidad de Estocolmo, oferta que acepta. En su corta vida profesional obtuvo varios reconocimientos. Editora de Acta Mathematica en 1884.

En 1888 obtiene el premio de la Academia Francesa de Ciencias por su trabajo sobre la rotación de un cuerpo sólido alrededor de un punto fijo, premio que le dio fama en toda Europa.

En 1889 obtiene la cátedra de análisis en la Universidad de Estocolmo en forma vitalicia, primera mujer en lograr este honor, pese a la oposición inicial de sus colegas por sus convicciones políticas.

También se le otorgó el premio de la Academia Sueca de Ciencias y se le nombró miembro de la Academia Imperial Rusa de Ciencias; también correspondiéndole ser la primera mujer acreedora de tal distinción.

Murió en Febrero de 1891.

Producción Científica.

La producción científica de Sofía Kovalevskaia corresponde a dos etapas.

Sus tiempos de estudiante (71 - 74) a la par de Karl Weierstrass en Berlín, en el campo del análisis, matemática teórica.

La etapa de profesional del 81 en adelante en el campo de la mecánica y Física Matemática.

Como sus contribuciones más importantes, se consideran la prueba del teorema conocido por Teor Cauchy - Kovalevskaia, condiciones para la existencia y unicidad de solución a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y el trabajo sobre movimiento de un campo sólido alrededor de un punto fijo.

Un total de 10 trabajos publicó. Sobre reducción de una integral abeliana a una integral elíptica más simple, anillos de Saturno, la refracción de la luz en un medio de cristales.

Paralelamente escribió varias obras, novelas, ensayos, poemas y teatro de tinte político social.

Bibliografía.

Blanco,Graciela; Delgadillo,Ligia; Zinnia Méndez. Análisis Cuantitativo y Cualitativo de la participación de la Mujer en la Universidad de Costa Rica. Editado por U.C.R. Escuel de Psicología,1988.

Koblitz, Ann Hibner. A Convergence of Lives: Sofía Kovalevskaia : scientist, writer, revolutionary. Basel;Boston:Birkhäuser, 1983.

Koblitz, Ann Hibner. La Primera Generación de Mujeres Científicas Rusas. Rev. Universidades; México : Octubre a Diciembre,1984

Puga, Puga: Saavedra, Patricia. Emmy Noether, un Rostro Femenino de la Matemática. Rev. Café y Matemáticas, UNAM, México,Número 2,1986.

SECCION DE HISTORIA DE LAS MATEMATICAS Y LA FISICA EN COSTA RICA

ALGUNOS DETALLES Y HECHOS HISTORICOS DE LOS ALBORES DE LA FISICA EN COSTA RICA: PARTE I

JORGE AMADOR §
JORGE PAEZ †
FLORA SOLANO†§
Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica

RESUMEN GENERAL:

Parte I

En el período precolombino hay indicios de que hubo un desarrollo científico acorde a las necesidades de la época. Durante la Colonia los pobladores de nuestro territorio le dieron más importancia a la artesanía. Con la fundación de las primeras universidades Centroamericanas es que se da la estructura y elementos básicos para el desarrollo científico posterior.

Parte II

A mediados del siglo XVIII se tiene información documental confiable de que el costarricense Liendo y Goicoechea introdujo la Física Experimental en la Universidad de San Carlos en Guatemala. Su influencia en Costa Rica es poco conocida y merece un análisis posterior.

Parte III

A principios del siglo XIX con la fundación de la Casa de Enseñanza de Santo Tomás y la contratación del Bachiller Rafael Francisco Osejo se introdujeron las primeras nociones fundamentales de Física en Costa Rica.

A pesar de que desde la creación de la Universidad de Santo Tomás en 1844 se dictaron algunos algunos rudimentos de Física Teórica en la Cátedra de Flosofía y en 1852 se impartió en la Universidad un Curso de Física, no fue sino hasta el período entre 1861 y 1862 (no está claro en cual de estos dos años exactamente) que se establece formalmente la enseñansa de la Física en esa Casa de Estudios Superiores.

Desde 1849 hasta 1865 distinguidos naturalistas contribuyeron a mantener vivo el interés por las ciencias naturales lo que tal vez permitió mantener activas las ideas de la época en relación con la Ciencia Física.

Con la clausura de la Universidad de Santo Tomás se cierra en Costa Rica un período lento e incipiente en el desarrollo de la Física en Costa Rica.

§ Centro de Investigaciones Geofísicas
† Grupo de Astrofísica Teórica

1 Introducción

La historia del hombre y el desarrollo social alcanzado, han estado íntimamente ligados a la historia y desarrollo de las Ciencias, en especial las Naturales. En Costa Rica, se han dado históricamente elementos que confirman la proposición anterior y que de manera especial se conjugan para explicar porqué el desarrollo en algunas de estas ciencias ha sido en muchos casos lento y científicamente poco productivo.

Debido a lo anterior, es importante entender como han evolucionado las diferentes disciplinas científicas en nuestro medio y cual ha sido la influencia de elementos locales y externos en el desarrollo y estado actual de nuestra sociedad.

Es claro que, siendo tan amplio el espectro de disciplinas científicas, el trabajo de entender su papel en las sociedad actual es sencillamente monumental. Es necesario entonces, acotar por simples razones de comprensión y tiempo, tanto la disciplina de estudio como el período de análisis histórico a que ésta se refiere.

En el presente trabajo, se ha elegido la Física como elemento de estudio, no sólo porque no se conocen trabajos anteriores al respecto en Costa Rica, sino porque es indudable que como disciplina científica, su aporte al desarrollo de la humanidad es impresionante, aún cuando en nuestro país el papel que ha desempeñado ha sido poco comprendido o tal vez en la mayor parte de las situaciones ha sido ignorado.

A pesar que la documentación que se posee es escasa, al tratar de entender el desarrollo de una ciencia como la Física a partir de ideas o nociones primitivas, es necesario remontarse hasta las culturas indígenas que habitaron el país en la época precolombina. En este primer trabajo, se presenta la información encontrada para la época precolombina, pasando por el período colonial, la posterior creación de la Casa de Enseñanza y la Universidad de Santo Tomás hasta el cierre de esta última en 1888.

2 Período Precolombino

Buscar los inicios de algo que podamos designar como Ciencia en nuestros antepasados, resulta en éste momento una tarea más que imposible (que habría que acometer con entusiasmo algún día). Ello se debe principalmente a que en nuestro territorio no se ha encontrado un legado claro y legible de su conocimiento científico,v.g., códigos sobre ciencia. Sin embargo puede ser válida la premisa, de suponer que debe haber habido un intercambio cultural y de conocimientos técnicos básicos y de ingeniería (tal vez, Ciencia ?) con las culturas más avanzadas, tanto tecnológicamente como " científicamente", del norte y del sur de nuestro territorio. Una prueba de ello se ha encontrado en Guayabo de Turrialba, en donde definitivamente floreció un pueblo con ese conocimiento básico. Se puede inferir que ese pueblo ó desarrolló ese conocimiento o tuvo ayuda "experta " de personas educadas en la construcción de acueductos (*ingenieros hidráulicos ?*), puesto que la evidencia se encuentra allí. Inclusive podemos ir un paso más allá en nuestras suposiciones; si hubo *ingenieros*, habrá existido alguien con un conocimiento científico básico, y que posiblemente estuvo a cargo de la recopilación y transmisión de esa muestras de conocimiento científico autóctono. Un petrogrifo de Guayabo ha sido interpretado por el Profesor Retirado de la Escuela de Física Ing. Eliot Coen, como una piedra en la que se ha dejado una nuestra de su conocimiento, tal vez entendimiento, sobre la regularidad de la venida de la lluvia (el petrogrifo también es llamado la *Piedra de la Lluvia*) en la región de Guayabo de Turrialba. También se puede especular que las alas de la figura que allí aparece, puedan ser utilizadas, por una persona que posea un conocimiento básico, para ubicar las estrellas más visibles de la esfera celeste. ¿ Habrá sido uno de nuestros antepasados un astrónomo o simplemente sabía utilizar ciertas posiciones de estrellas para orientarse ? Si es así, entonces sería allí en Guayabo de Turrialba donde vivieron nuestros primeros científicos. Lo anterior no deja de ser una especulación razonable, y nos gustaría que así hubiese sido. Todo lo expuesto simplemente nos indica lo dificultoso que resultaría el poder confirmar la existencia o no de conocimiento básico científico en nuestros antepasados.

La poca documentación que se posee relativa a los conocimientos o creencias de nuestros grupos indígenas, sobre las leyes que rigen la naturaleza, podría explicarse parcialmente, por el plan de dominación que ejercieron los españoles, a partir del descubrimiento de América. De acuerdo a Paulino Gonzáles, desde finales del siglo XVI hasta principios del siglo XIX funcionó un plan dirigido a destruir, en todos sus aspectos, las culturas autóctonas, lo que hace aún más difícil, el poder tener un cuadro mínimo de los que sucedio durante éste período.

3 Período Colonial

Durante la Conquista de Costa Rica, poco conocimiento científico fue traído por los conquistadores, quienes al parecer pudieron haber tenido otro intereses. Sin embargo, se sabe del impulso que le dieron a la artesanía, por ser ello lo que le permitiría resolver los problemas inmediatos de las necesidades de los pueblos y ciudades que empezaban a surgir en el territorio de la Provincia de Costa Rica. Además de la artesanía[13], de seguro trajeron conocimientos sobre como cultivar la tierra y algunas artes del quehacer cotidiano. Pero nuevamente, no hay manuscritos sobre algo que podamos llamar Ciencia. Posiblemente se puede asociar un conocimiento básico científico a esos colonizadores, pero ese conocimiento debe de haberse transmitido en forma oral principalmente.

Durante los primeros años de la época colonial (mediados del siglo XVI) la educación formal en sus aspectos de contenido y extensión fue escasa y estuvo concentrada en o cerca de los núcleos poblacionales. Esta instrucción fue dirigida en especial a los hijos de los colonos. La educación en general la realizaban los curas encargados de enseñar la doctrina cristiana a los niños en las parroquias. Además de lo anterior, los curas dedicaban tiempo a la enseñanza de las lectura, la escritura y la cuenta.

En lo que se refiere a la educación informal (intercambio de ideas e instrucción entre amigos y familiares) existen limitaciones documentales que impiden comprender el conocimiento que se tenía de la Física en esa época.

En términos generales, la situación educativa no varió mucho sino hasta principios del siglo XIX, por lo que no hay evidencia de que de alguna manera se introdujeran las ideas que en ese momento se habían desarrollado en Europa (........). De acuerdo a Paulino Gonzáles (1).

> *no es sino hasta 1814 cuando efectivamente cobran importancia social los cursos avanzados, al hacerse realidad la apertura de una casa de estudios (secundarios) en la ciudad de San José.*

Recordemos que lo importante durante toda la época colonial, era de que los jóvenes aprendieran a sumar, con alguna otra pericia que les servía de inmediato para su labor cotidiana. Esa forma de enseñanza se extendió hasta principios del siglo XIX. Sin embargo, hay un indicio claro de al menos una persona que si fue capaz de formarse con estudios universitarios, y sobre todo que transimtió sus conocimientos a otras personas y que dejó un legado escrito que podemos seguir, y que nos permite asegurarle un puesto de significancia en la historia de la Ciencia , no sólo para Costa Rica, sino y también para Centro América. Nos referimos al cartaginés José Antonio de Liendo y Goicoechea(ver, parte II de ésta serie de artículos.

4 Las Universidades Centroamericanas

A finales del siglo XVIII las ideas de la Ilustración se habían infiltrado en España y sus colonias. Centroamérica vivía una gran declinación económica y los conflictos e insatisfacciones encuentran su expresión ideológica en el Iluminismo. Esta nueva corriente de pensamiento envuelve a la Universidad de San Carlos en Guatemala, que sufre en su estructura académica la más profunda reforma universitaria de la época.

Desde su nacimiento en 1676, la Universidad de San Carlos definió su carácter centroamericano como estipula los documentos legales de su erección:

> *se concede el privilegio universitario a todas estas provincias, para que todas reciban y tengan el consuelo y el alivio que de la fundación de esta Universidad se ha de seguir a sus vecinos y naturales*[10].

Durante la época colonial este centro de pensamiento dictó las cátedras de Derecho, Teología, Medicina, Filosofía y Lenguas Indígenas y otorgó los grados de Bachiller, Licenciado, Maestro y Doctor; y durante más de un siglo fue la única institución de educación superior que tuvo Centroamérica.

Concretamente y hacia el encuentro de los orígenes de la Física en Centroamérica se desprende que con la reforma universitaria promovida por Liendo y Goicoechea, de la introducción de la Física experimental y cierto tipo de difusión científica realizada en esta época, se abre una página de la historia de la ciencia en esta zona[10].

Existía también en Nicaragua, el Seminario Conciliar de San Ramón, creado el 15 de diciembre de 1680 por Mons. Andrés de las Navas y Quevedo, bajo el patrocinio de San Ramón Nonato, que luego se transformó en la Universidad de León.

> *Los estudios eran desde luego muy elementales, a saber, la lengua latina, y la teología, y algunas otras nociones de otros ramos de las ciencias eclesiásticas.*
>
> *Con el advenimiento al solio episcopal de León de Mons. Tristán, la organización escolar recibió un nuevo impulso. Desde 1783 se establecieron progresivamente otras asignaturas, además de las de moral y latín. En 1789 se fundaron las cátedras de Filosofía, Artimética, Algebra, Geometría y Física*[17].

Bajo el Pbro. Tomás Ruiz, el seminario logra que el espíritu de la Ilustración navegue en su recinto universitario y bañe a sus discípulos de las corrientes científicas europeas de aquel entonces. Uno de sus alumnos, Rafael Francisco Osejo recibió gran influencia de esta enseñanza que luego transmitiría en las aulas de la Casa de Estudios en San José.

El seminario a pesar del florecimiento que vivía solo tenía potestad de otorgar grados menores, no fue sino hasta 1812 que se le otorga la potestad de erijirse en Universidad con las mismas facultades que las demás de América, pero no es sino hasta 1816 en que se da la instalación oficial.

En síntesis es importante señalar que la educación universitaria colonial se caracterizó por una tendencia clasista ya que se orientaba a los sectores más prominentes de la población ejerciendo la iglesia un papel monopolista, barrera infranqueable para el desarrollo ideal de la investigación científica en este período.

A pesar de estas limitaciones nuestra provincia se benefició aún en menor grado de la influencia española que a través de la Universidad de San Carlos y del Seminario Conciliar de León recibieron algunos jóvenes de nuestra sociedad que realizaron estudios en uno de estos centros de pensamiento. Ese despertar liberal de algunos costarricenses fue la semilla para que empezara a brotar en la ciudad de San José la necesidad de una Casa de Estudios.

5 Conclusiones

Aún cuando en los períodos precolombino y colonial se dieron indicios de un conocimiento práctico - teórico, no hay documentación fidedigna que permita construir un panorama del avance científico en estos períodos. Se hacen necesarios estudios arqueológicos que complementen los hallazgos de Guayabo de Turrialba y que permitan mayor información referente al estado de desarrollo cultural y científico de nuestros pueblos aborígenes. La documentación y la evidencia de los hallazgos arqueológicos sobre estos períodos permanece dispersa y es incompleta por lo que se recomienda una sistematización del proceso de documentación, clasificación y estudio de los aspectos científicos de esos pueblos.

En relación con el establecimiento de los centros de educación superior en Centroamérica e impulsado por la reforma de la Universidad de San Carlos de Guatemala en la segunda mitad del siglo XVIII, se da por primera ves una estructura formal que permite el desarrollo de las ideas científicas en la región.

Bibliografía

[1] Documento, Revista de los Archivos Nacionales, 17,1953. ***Memoria de los principales trabajos de la Universidad de Santo Tomás en el año literario de 1865***, leída por el secretario de la misma en la Junta General celebrada el día primero de enero de 1866.

[2] Facio, Rodrigo Segreda, ***La Universidad de Santo Tomás de Costa Rica, Pensamiento Universitario Centroamericano***, San José, Costa Rica, Editorial Educa, 1980, p. 58 - 84.

[3] Gonzales Flores, Luis Felipe, ***La Casa de Enseñanza de Santo Tomás. Apuntes y desarrollo hasta la erección en Universidad***, Imprenta Nacional, San José, Costa Rica.

[4] Gonzales, Luis Felipe, ***Historia de la Influencia Extranjera en el Desenvolvimiento Educacional y Científico de Costa Rica***, Editorial Costa Rica, 1976, p. 1 - 296.

[5] Gonzales Villalobos, Paulino, ***La Universidad de Santo Tomás.*** Editorial de la Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.

[6] Gonzales Villalobos, Paulino, ***Desarrollo Institucional de Costa Rica.*** (1523 - 1914) Primera edición, SECASA, San José, Costa Rica.

[7] Hoffmann, Carl, ***Viajes por Costa Rica***, Editorial Ministerio de Cultura Juventud y Deportes, Costa Rica, 1976.

[8] Liendo y Goicoechea, ***Gazeta de Guatemala***, TOMO 7.

[9] Monge Alfaro, Carlos, ***Universidad e Historia.*** Ministerio de Cultura, Juventud y Deportes, San José, Costa Rica, 1978.

[10] Tunnerman, Carlos, ***Pensamiento Universitario Centroamericano***, Primera edición, EDUCA, p. 9 - 58, San José, Costa Rica, 1980.

[11] Zelaya, Chester, ***El Bachiller Osejo***, Editorial Costa Rica, San José, Costa Rica. Tomo I y II, 1971.

[12] Zelaya, Chester, ***El Bachiller Osejo y la introducción de las ideas ilustradas en Costa Rica.*** Ciudad Universitaria "Rodrigo Facio".

[13] Payne ,Elizet, ***Costa Rica Colonial***, Editorial Guayacán, Publicación de la Comisión costarricense V Centenario del Descubrimiento de América, 1989.

[14] Láscaris, Constantino, ***Historia de la Ideas en Centroamérica***, Editorial Universitaria Centroamericana, 1970.

[15] Valle, José Cecilio del, ***Elogio Fúnebre*** del 7 de agosto de 1814 con motivo de la muerte de don José Antonio de Liendo y Goicoechea.

[16] Sears y Semansky, ***Física General***, Editorial Aguilar, 1957.

[17] Sanabria,V., ***Reseña Historica de la Iglesia en Costa Rica***, Editorial Edi, 1984. 1982.

ALGUNOS DETALLES Y HECHOS HISTORICOS DE LOS ALBORES DE LA FISICA EN COSTA RICA: PARTE II

JORGE PAEZ †
FLORA SOLANO†§
JORGE AMADOR §
Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica

RESUMEN GENERAL:

Parte I

En el período precolombino hay indicios de que hubo un desarrollo científico acorde a las necesidades de la época. Durante la Colonia los pobladores de nuestro territorio le dieron más importancia a la artesanía. Con la fundación de las primeras universidades Centroamericanas es que se da la estructura y elementos básicos para el desarrollo científico posterior.

Parte II

A mediados del siglo XVIII se tiene información documental confiable de que el costarricense Liendo y Goicoechea introdujo la Física Experimental en la Universidad de San Carlos en Guatemala. Su influencia en Costa Rica es poco conocida y merece un análisis posterior.

Parte III

A principios del siglo XIX con la fundación de la Casa de Enseñanza de Santo Tomás y la contratación del Bachiller Rafael Francisco Osejo se introdujeron las primeras nociones fundamentales de Física en Costa Rica.

A pesar de que desde la creación de la Universidad de Santo Tomás en 1844 se dictaron algunos algunos rudimentos de Física Teórica en la Cátedra de Flosofía y en 1852 se impartió en la Universidad un Curso de Física, no fue sino hasta el período entre 1861 y 1862 (no está claro en cual de estos dos años exactamente) que se establece formalmente la enseñanza de la Física en esa Casa de Estudios Superiores.

Desde 1849 hasta 1865 distinguidos naturalistas contribuyeron a mantener vivo el interés por las ciencias naturales lo que tal vez permitió mantener activas las ideas de la época en relación con la Ciencia Física.

Con la clausura de la Universidad de Santo Tomás se cierra en Costa Rica un período lento e incipiente en el desarrollo de la Física en Costa Rica.

---

† GRUPO DE ASTROFÍSICA TEÓRICA
§ CENTRO DE INVESTIGACIONES GEOFÍSICAS

1 José Antonio de Liendo y Goicoechea

En nuestra búsqueda sobre los orígenes de la Física en Costa Rica, nos encontramos con la historia del padre José Antonio de Liendo y Goicoechea, nacido en Ujarrás de Cartago en el año de 1735. Huérfano de padre quien a los doce años entró en la Orden de los Franciscanos. Se doctoró en Cánones en la Universidad de San Carlos de Guatemala. De 1765 a 1767 permaneció en España. A su regreso a Guatemala, explicó Filosofía, Física y Matemática en el Convento de su Orden. Murió en 1814[14].

Con la llegada del padre José Antonio de Liendo y Goicoechea como catedrático de la Universidad de San Carlos de Guatemala en el año de 1767, se marca una nueva etapa en la vida espiritual e intelectual en la capital del Reino. El padre Goicoechea se hará cargo de las cátedras que estaban encomendadas a los Jesuitas, a quienes en ese año Carlos III expulsa de sus vastos dominios.

Al abandonar los Jesuitas la Universidad de San Carlos se llevan con ellos su sistema ecolástico y su intransigencia secular. Por un lado se van los Jesuitas y por el otro llega el padre José Antonio de Liendo y Goicoiechea, con sus nuevas ideas, que impregnarán las aulas universitarias de la Universidad de San Carlos, y en general de Centro América, durante medio siglo. Es por ello, que queremos resaltar con el Anexo.1, el plan de trabajo del Liendo y Goicoechea, copiado textualmente y, que nos ilustra su llegada a las aulas universitarias, trayendo consigo su "nueva filosofía", y al mismo tiempo, convirtiéndose, con certeza, en el primer científico de Centro América. Con su plan de trabajo podemos afirmar que se afinca la Ciencia en éstas tierras centroamericanas.

En el Anexo.3 presentamos también las cátedras existentes y plan de estudios de la Universidad de San Carlos de Guatemala que Fray José Antonio de Liendo y Goicoechea envió al Rey de España en 1782.

Un aspecto importante que nos interesa rescatar de don José Antonio, es su formación como físico. Sabemos que durante su estadía en España, visitó en Madrid escuelas, museos y conoció los hombres eminentes que operaban por este tiempo el renacimiento de las letras españolas en el benéfico reinado de Carlos III.

> *a su vuelta trajo máquinas y aparatos de física experimen tal, libros,....*[15]

> *Además, de lo todo indicado; el sabio fraile se hizo de globos geográficos, esferas armilares, sistema planetario, mapa, cartas hidrográficas, tablas de longitudes y latitudes y una meridiana que tenía colocada en el centro de un jardincito que cultivaba con sus manos*[15]

Con respecto a los instrumento que se trajó consigo de España, existe un óleo heróico que se encuentra en la Catedral Metropolitana de San José; en donde se pueden ver los instrumentos con los que contaba, y que de seguro le sirvieron para impartir la enseñanza en Física. Un segundo óleo heróico de Liendo y Goicoechea se encuentra en la Biblioteca Carlos Monge Alfaro de la Universidad de Costa Rica. Ambos óleos fueron donados a la Costa Rica, por la Universidad de San Carlos de Guatemala.

Interesa su conocimiento como físico, puesto que antes de él, la información sobre personas que se hayan relacionado con ésta Ciencia, o no hubo, o fueron incapaces de transmitir el conocimiento, de forma adecuada, tal que pudiera considerarseles como los precursores de la Física en Centro América. El padre José Antonio de Liendo y Goicoechea imparte las primeras lecciones de Física en la Universidad de San Carlos de Guatemala, y de la cual hay testimonio escrito, y se le puede por esto considerar como el primer físico de Centroamérica y por ende de Costa Rica. Tal afirmación se sustenta en el análisis sobre algunas de las tésis que el defiende en el Acto público de 1769 (ver Anexo.2). Asimismo, en el informe que le envía al Rey Carlos III de España, donde le expone cual es su plan de trabajo (léase la transcripción hecha en el Anexo.1).

2 Algunas Tésis sobre Física de Liendo y Goicoechea

Hemos también transcrito en el Anexo.2 las opiniones relevantes de don Liendo y Goicoechea, y de la cual tomamos las tésis que analizaremos en éste párrafo.

Algunas de las opiniones de Goicoechea concernientes a temas relacionados con la Física, son los siguientes:

> **Tésis 1:** *La perfecta dureza de un cuerpo consiste en el enlace de sus partes trabadas y encadenadas, de suerte que no dejen ningún vacío.*

Resulta interesante notar la asociación de dureza, con la idea de enlace entre los constituyentes de un cuerpo. Ambos son tema de la rama de la Física que denominamos como Física del Estado Sólido. El piensa en un ordenamiento de las partes (red cristalina ?), de tal manera que no haya espacio libre entre ellos. Hoy se sabe que existen ordenamiento cristalinos, que permiten una clasificación en mayor o menor dureza del material (el diamante es el cuerpo de mayor dureza que hay en la Naturaleza)

La aparición de la palabra vacío se debe a la gran influencia que tuvo el experimento de Otto von Guericke, quien había sido el inventor de la máquina neumática. Su experimento con los hemisferios de Magdburgo causaron furor en Europa. Consistía este experimento en sacar el aire a dos hemisferios unidos metálicos que luego eran tirados en direcciones opuestas por caballos; no pudiendo estos animales aún con su fuerza, separar los hemisferios. La idea del vacío (Horror vacui) como una fuerza que pueda mantener unido al todo, parecer ser el pensamiento que don José Antonio podría haber tenido en ésta tésis primera. Como sintésis, se puede decir que la idea de que un cuerpo entre más ordenado tiene una mayor mayor dureza, podrá ser rebatible, pero se necesitó de muchos años de esfuerzo de los físicos para poder brindar un cuadro consistente sobre este tema.

Tésis 2 :*La fluidez no es otra cosa que la unión leve de las partecillas que a se tocan.*

Esta tésis la podemos contrastar con la definición de fluído que aparece en un libro clásico, usado por décadas en la enseñanza de la Física, como es: Física General de Sears y Zemansky (edición de 1957)[16].

Con respecto a lo que es un fluído nos dice :

Un fluído es una sustancia que puede fluir. Por consiguiente, la denominación de fluídos incluye tanto a líquidos como los gases.

Tanto los líquidos como los gases están evidentemente constituidos por moléculas("partecillas ") y dependiendo de la atracción eléctrica entre ellas y hay una mayor o menor interaccón (ello implica que tanto se "tocarán" las mismas) y consecuentemente, habrá una mayor o menor fluidez. Es notable la seguridad que tiene al incluir líquidos y gases dentro de la denominación de fluídos. En esa época las experiencias con gases eran escasas y sus propiedades era más difíciles de medir que la de los fluídos. No se indica nada sobre la causa de esa propiedad de fluidez de las sustancias y parece más bien ser otra propiedad intrínseca del fluído.

Aunque el aspecto molecular de los fluídos surge mucho después, pareciera entreverse un atomismo primitivo, en esas ideas sobre la fluidez de don Liendo y Goicoechea. Sabemos además, que éste fraile jugó con ciertas ideas alquimistas (Quimica ?). Tal vez, podría ser la influencia de un científico prestigioso, como lo fue I. Newton, quien en sus últimos años de vida, se puede decir que se dedicó a la Alquimia.

Tésis 3:*El olor es aquella sensación que causan los efluvios que exhalan sustancias sulfúreas; y el sabor es producido por las partículas que obran órgano del gusto.*

Es rescatable de esta tésis la palabra *partículas*; que a nuestro entender, tiene involucrado el concepto de molécula. Ya en la tésis 2.,él habla de "partecillas". Ambas las podemos interpretar como moléculas (átomos ?).

Tésis 4 :*El sonido es el movimiento vibratorio de las partes minustisma del cuerpo comunicado al aire que circunda a éste y llevado al órgano del oído.*

Según, Sears y Zemansky:" La recepción de una onda sonora por el oído, engendra una vibración de la partículas del aire situadas delante del tímpano,..".

Se puede ir un paso más allá y pensar que ésta es una idea newtoniana que se expandió en Europa y, que don Liendo captó perfectamente durante su visita a España. En el vacío no se propaga el sonido, para ello se requiere de un medio de transmisión como lo es el aire.

Tésis 6 :*Del número de vibraciones, mayor o menor, en igual espacio de tiempo, resulta el sonido agudo o grave .*

El número de vibraciones por unidad de tiempo en la Física actual lo denominamos frecuencia y lo indicamos con la letra griega ν. Surge de la tésis 5. que si la frecuencia es alta (mayor) lo que tenemos es un sonido agudo y si la frecuencia es baja un sonido grave, es decir:

Si

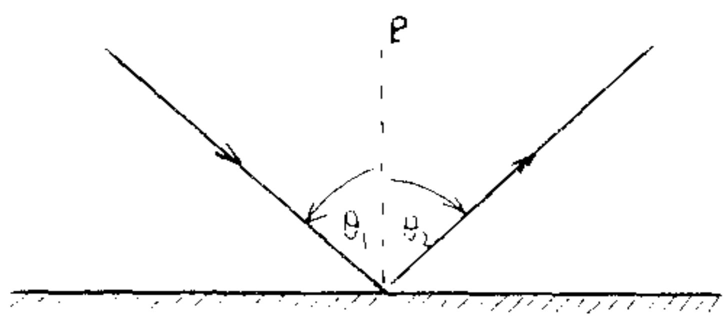
$$\nu_1 > \nu_2$$

(léase: si ν_1 es mayor que ν_2)

en cualquier ámbito de frecuencia ν_1 siempre será más agudo que ν_2. Afirmación correcta de la tésis 6.

Tésis 7 :*El eco no es más que el sonido reflejado, formando un ángulo igual al que hizo en su incidencia.*

Es clara la aseveración de que el eco es el sonido reflejado. La segunda parte de la oración, nos indica un conocimiento básico de la óptica. Un rayo de luz que incide sobre un espejo formando un cierto ángulo con respecto a la normal (perpendicular a la superficie reflectora), se reflejará formando un ángulo igual con la normal.



Reconocer que el sonido también se comporta como la luz, es algo que permite intuir una abstracción del fenómeno ondulatorio como tal;

y que la reflección no es más que un comportamiento intrínseco al movimiento ondulatorio (oscilatorio, vibratorio,etc.).

Tésis 8 :*A esta nueva ley obedece la luz cayendo en un plano, pero cuando de un medio raro a otro denso, se quiebra, acercándose a la perpendicular apartándose de ésta en el caso contrario* .

Parece interesante la afirmación de que también la luz se ve sometido al comportamiento ondulatorio. Creemos que don Liendo estaba consciente que tanto la luz como el sonido eran movimientos ondulatorios (Huygens habiía insistido en ello, contra la opinión de Newton). De ahí que, un hecho como el descrito en la tésis 7. es entendible en la medida que la luz y el sonido son movimientos ondulatorios. El fenómeno descrito en esta tésis se denomina hoy en día refracción de la luz.

Estas dos últimas tésis estudiadas, muestran también un conocimiento apropiada de las leyes de la óptica geométrica, como son la reflección y refracción de la luz. Esta última gobernada por la ley de Snell, $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$, donde n_1 y n_2 son los índices de refración de los medio "raro" y "denso"; además, los ángulos θ_1 y θ_2 se miden con respecto a la normal o "perpendicular". En la relación anterior está implícita la descripción dada por el padre Liendo.

Por la importancia que el padre Liendo le da a los temas de Pneumática, Optica, dióptrica y catóptrica.Se ofrece las siguientes definiciones, tal y como el Padre Liendo y Goicoechea las entendía:

Pneumática: es aquella parte de la Física que trata de las propiedades mecánicas de los gases.

Dióptrica : es la parte de la óptica que estudia la propagación de la luz por refracción. Debió conocer la Dióptica de Descartes. Al menos los fenómenos de refracción le eran familiares.

Catóptrica : es la parte de la óptica que estudia la reflección de la luz.

Tésis 9:*Ni el sistema de Galileo, ni el de Descartes, ni el de Newton explican el prodigioso fenomeno del fluxo y refluxo del mar*...

La tésis enunciada anteriormente es válida con respecto a la Ciencia de Galileo y Descartes. Pero con lo que respecta a Newton no tiene razón. Precisamente es la ley de Gravitación Universal de Newton la que es capaz de explicar los fenómenos de las mareas como una consecuencia de la atracción entre laTierra y la Luna principalmente.

En las tésis expuestas anteriormente hay un buen dominio sobre los tópicos importantes de la Optica en general.

El uso del termómetro y el barómetro nos hacen presumir su predilección por la Física experimental. Ambos son instrumentos de uso sencillo pero de gran contenido físico, dado que permiten conocer nuestro entorno y su relación con el estado del tiempo meteorológico. El conocimiento de las leyes de los gases se hace necesario para ello.

Analizando los aspectos relevantes de su trabajo se puede considerar al padre Liendo como un físico en el sentido actual del mismo. Queda aún un matiz que queremos dejarlo en claro. Se trata de lo siguiente: ¿ Podemos considerarlo como el primer físico de Costa Rica ?. Para ello hay que situarse en la época correspondiente. Costa Rica era una provincia que formaba parte de un territorio más extenso que era el Reino de Guatemala. Aunque nacido en Cartago su labor en aulas universitarias las llevó a cabo en la Capital del Reino. Sin embargo, no hubo una persona que se interesara más por la Ciencia Física en todo el Reino durante la segunda mitad del siglo XVIII. De ahí que se le puede considerar sin dudas del primer físico de Costa Rica.

3 Conclusiones

Con base en el estudio de documentos de la época, así como del anaálisis de las principales tésis inferimos que el Padre Liendo y Goicoechea se puede considerar como el primer científico costarricense y de Centroamérica. Debe destacarse la profundidad de su pensamiento cientíifco a pesar de las limitaciones de la época en relación con equipo e instrumental. En su formación como físico se percibe la influencia de las ideas científicas europeas, sin embargo en sus tésis se palpan sus propios aporte a la Ciencias. El Padre Liendo y Goicoechea representa el ápice en el desarrollo de la Ciencia en general de la época y se abre la primera página de la Historia de la Ciencia.

Queremos dejar constancia de nuestro agradecimiento a don Carlos Meléndez por la colaboración aportada con la copia que nos cedió del Acto Público de don Liendo y Goicoechea, en 1769 en Guatemala.

ANEXO.1 Informe sobre la Universidad de San Carlos

> *Cuando nuestro Soberano catholico Monarcha Carlos III (Que Dios guarde) hizo salir de esta ciudad, y Reyno a los PP que se llamaban de la Compañia de Jesus, a nombre del mismo Rey ntro Sor se me intimo orden,y mandato por el M.Yltre Sor Vice Patron y Presidente, que entonces era Don Pedro Salazar, para que pasara a la Rl Universidad a enseñar Philosophia*

a los Estudiantes, que cursaban antes con los referidos jesuitas. Dexe al momento la cathedra de theología, que regentaba en mi convento, y pase a esta Universidad a doctrinarlos.

Con esta ocasion introduxe en la Universidad, y enseñe a setenta y cuatro Estudiantes la physica experimental, que les dicte por el Abad Nollet, Fortunato de Brixia, Jacquier, Marino Boloniense y Consini; les enseñe de paso los principios de Geometria, Optica, Geographya y Astronomia, como consta a toda esta Universidad, y puede V.S. inferir de uno de los exemplares de las tarjas impresas, que defendi en muchos actos, y que acompaño para que conste, y sirva de comprobante. Para promover en esta Universidad esta nueva Philosophia, me funde primeramente en su utilidad, considerando, que era la unica que podia instruir en la verdadera physica. En segundo lugar, el General de toda mi orden Fr. Pascual de Baricio en una carta, despachada de oficio, en que da algunas reglas sobre el methodo de los Estudios regulares, encomienda mucho el curso incomparable de physica experimental, que dictó Fr. Fortunato de Brixia. En tercer lugar tuve presente la aprobación, que el Rey Nro. Señor ha dado en esta nueva physica en todas las Universidades de España; y aun el Rmo. mi General de Yndias aprobó mi curso, y methodo después de habersele escrito contra mi, de que tengo en mi poder instrumento constante.

A mas de lo dicho, una de las constituciones de esta Universidad ordena, que se lean en ella alternativamente doctrinas contrarias, para que el zelo de la disputa sirva al adelantamiento de la Juventud: y efectivamente esta Real Universidad jamas hubiera permitido, que intrudugese en ella esta dha physica experimental, si sus sabios individuos no hubieran presentido, y conocido con antelación los frutos, y evidentes argumentos de luces, que se estan experimentando en estos estudios. Por esta razón despúes de haber concluido yo mi carrera, ha permitido este sabio Claustro, que mis discipulos repitan las lecciones de mi curso en las aulas de esta Universidad y en estos últimos años ha sido admirable la destreza con que los Niños mas nobles de esta Ciudad han explicado en actos públicos los mas delicados phenomenos de physica, y elevados *principios de methaphysica. Y aunque no deseo, ni pretendo premio alguno por las tareas, desvelos, trabajos y contradicciones del peripatetismo, que sufri por introducir este nuevo métodc de Filosofía; quiero sin embargo tener la satisfacción, y gozo de S. Mgd.(que Dios gue) y honra con que me esforsé a servirlo en la ocasión mas oportuna.*

Acompaño a V.S. Ms. As. Convento de mi P. Sn. Franco de la Nva Guatemala 18 de Noviembre de 1782 - B.L.M. de V.S. Su mas atento Siervo y Capn- Fr. José Anto. Goicoechea.

ANEXO.2 Extracto de unas Conclusiones de don Liendo y Goicoechea

Para completar nuestro análisis sobre el trabajo de físico de don José Antonio de Liendo y Goicoechea, presentamos un extracto de las conclusiones dadas a luz y defendidas en la Real Universidad de San Carlos de Guatemala†.

N.297, lun 28 de marzo,803. Aurora de la filosofía en Guatemala. Extracto de unas conclusiones dadas a luz y defendidas en esta Real Universidad el año del Señor de *mil setecientos sesenta y nueve.* Fue cuando se concibió en España cierto plan de estudios, que sin embargo de haber merecido la aprobación del Supremo Consejo de Castilla, no llegó a ponerse en egecucion...

El autor de éstas conclusiones fue el R.P.Mtro Dr. Fr. José Antonio Goycoechea, Lector de Filosofía, hoy catedratico jubilado de prima de Teología, y actual Provincial del orden de S. Francisco de ésta provincia de Guatemala.

-La Lógica, la Física y la Metafísica son los tres ramos que abraza. Algunas de sus proposiciones son dignas de la generacion presente: en otras se conoce que él fue quien dio los primeros pasos; sea que el hombre que abre una nueva senda no pueda de un salto llegar al termino propuesto: sea que de intento quisiese pres - f.66: - tarse en algunas cosas al genio de aquel tiempo, para introducir otras con mayor facilidad. El

† Este extracto lo podemos presentar en éste artículo, gracias a la colaboración que don Carlos Meléndez nos brindó, al obsequiarnos una copia que él personalmente hiso del Acto Público de don Liendo y Goicoechea del año de 1769, publicado en la Gaseta de Guatemala, tomo VII

espíritu como el cuerpo tienen modos de obrar, siempre lentos y graduales. Querer precipitar sus pasos es viloentarle: es disgustarle en medio de la carrera.

De Logica sienta, entre otras, éstas proposiciones. En la simple percepcion de un objeto no cabe falsedad. Los juicios, o aquellos actos con que el espíritu percibe las relaciones de dos ó mas ideas, siempre son afirmativos.

Trata la Física con mas extension. Los seres sensibles, objeto exclusivo de esta ciencia, son unos compuestos, que se presentan a los sentidos variados con diferentes formas: éstos duros, aquellos fluidos: unos densos, otros raros, sonoros, luminosos &c. Explicar éstas propiedades, y los elementos que componen los cuerpos, y concluido esto hablar de aquellos seres que como la tierra, el agua, el ayre &c. llaman la atencion del filósofo con preferencia a otros objetos, és el orden con que se trata de la ciencia de la naturaleza.

Ni el agua, dice, como creia Thales, ni la tierra, como parecia a Pherecides, ni el ayre, como juzgaba Anaximenes, ni el fuego, segun la opinion de Hypase, ni todos estos cuerpos juntos son los elementos de los seres físicos. Todos los compuestos sensibles se resuelven en agua, tierra, sal aceyte, y mercurio. Estos son los simples elementales cuerpos. Los seres físicos obran en el organo sensitivo: el movimiento se propaga por las fibras nerviosas que le componen: á éste movimiento sigue la percepción del alma: he aqui la sensasion. El objeto que se nos presenta en ésta no es la misma cosa sensible, sino el movimiento de los nervios sensitivos. Luego ningun accidente es sensible por sí mismo, ni necesario para que los cuerpos sean sensibles. Y por consiguiente las propiedades sensibles son accidentes absolutos.

La perfecta dureza de un cuerpo consiste en el enlace de sus partículas trabadas y encadenadas, de suerte que no dejen ningun vacio. No se encuentra en los cuerpos ésta concatenacion perfecta. Todos son porosos. La fluidez no es otra cosa que la union leve de las partecillas que apenas se tocan en un punto. El movimiento trémulo y acelerado de las partecillas sulfureas produce calor; la carencia de fuego, y cierta *impenetrabilidad de las partículas salinas, constituyen el frio.*

El olor es aquella sensasion que causan los efluvios que ehalan las sustancias (f.67:) sulfureas; y el sabor es producido por las particulas salinas que obran en el organo del gusto.... El sonido no es otra cosa que el movimiento vibratorio de las paredes minustisimas de un cuerpo, comunicado al ayre que circunda á éste, y llevado en linea recta al organo del oido. Del numero de vibraciones mayor ó menor en igual espacio de tiempo resulta el sonido agudo o grave. De la correspondencia de las vibraciones que comienzan y acaban en un mismo tiempo nace la consonancia. Y el eco no es mas que la reflexion del sonido, que siempre retrocede formando un angulo igual al que hizo en su incidencia. Esta misma ley obedece la luz reflexa, cayendo en un plano; pero quando pasa de un medio raro á otro denso, se quiebra acercandose á la perpendicular, y apartandose de ésta en el caso contrario. La luz reflexa de distinto modo segun la escabrosidad, porosidad &c. de las superficies. Y en esta reflexion consiste el color.

La tierra se presenta redonda a los sentidos; pero aun no se ha descubierto si tiene la figura de una esfera elevada en el equador, y aplanada en los polos. Tocante á la formacion de los montes, unos se formaron quando Dios mandó que las aguas se reuniesen en un lugar,y otros despues del diluvio. La inflamacion de las materias vituminosas y sulfureas es la causa de los temblores.... El agua es del todo incomprensible. Las lluvias y no el mar dan nacimiento á las fuentes. Ni el sistema de Galileo, ni el de Descartes, ni el de Newton explican el prodigioso fenomeno del fluxo y refluxo del mar.... El ayre es un fluido elastico, compresible, grave, que con su peso eleva las exalaciones de los cuerpos; proposicion muy sabida en estos tiempos, pero cuyo descubrimiento costó mil penas á Galileo, Torriceli y Pascal en sus celebres experiencias sobre el Pui de Dome . A este proposito se promete dar una explicacion precisa de todos los meteoros variados, que espantan á la pleba, y hacia temblar á nuestros mayores.- Y luego pasando á tratar del alma sensitiva: en todos los animales, dice, se encuentra una sustancia fluida y sutil, que se forma en el celebro de *la sangre que circula por las arterias, y que propagada por los nervios que traen su origen del celebro; y los necesarios por medio de aquellos que nacen del cerebelo.*

En el cuerpo humano solo los nervios son capaces de sentimiento. f.68: Subscribiendo al sistema de Descartes asienta que el alma de los brutos es corpórea. Refuta la opinion de los, Escolasticos, que por un delirio propio de hombres que abandonan la naturaleza por perderse en abstracciones inutiles, creen que la podredumbre la es madre de los insectos. Concluye la Física, y entra en la Metafísica.

Descartes decia que Dios, el alma, y los principios generales de las ciencias, debian ser los objetos de esta parte de la filosofía, la obra mas sublime de aquellos espiritus extensos, que abrazan todo el sistema de la sabiduria, y descubren relaciones que se escapan al vulgo de la sociedad de las letras. No se trata de éste ultimo punto; pero se habla del alma racional y sus potencias, asentando que es un ser indivisible, espiritual, inmortal, y refutando los sistemas antiguos. Se exponen algunas proposiciones sobre la causa y el ente en general, y se concluye con otras aserciones sobre la existencia y atributos de Dios.

CATHEDRAS, Y PLAN DE ESTUDIOS

1a Canones con Salario
2a Leyes con Salario
3a Theologia de Prima con Salario
4a Theologia Moral con Salario
5a Medicina con Salario
6a Instituta con Salario
7a Theologia de Escoto sin Salario
8a Philosophia de Escoto sin Salario
9a Philosophia Thomista sin Salario
10a Otra de Philosophia con Salario
11a La de Lengua suspensa por ahora con Salario

	AUTORES	MATERIAS ADJUNTAS QUE LEEN DICHAS CATHEDRAS
1a Rectorica	Cicerón, Quintillano, Boscio, Cavalcanti, Cecenas, Platina,...	Principios de Poesía
2a De Logica y Metaphisica	Brixis, Wolcio, Leibnisio, Corcini, Jacquier, Duhamel.	Philosophia Moral
3a Mathematica necesara pa Fisica	Wolcio, Dechales, Cerant, Pluche, Tosca, Nolet, Brixia,	Geometria, Optica, Machineria, Astronomia, Esphera
4a Phisica experimental	Nolet, Brixia, Pluche, Boyle, Francisco Boyle	Y enseñará el uso del Barómetro, termómetro y machinas Pneumática, eléctrica y las de Optica Dioptica y Catoptica con las demás.
5a Anathomia	Heister, Winslow, Kulmo	Enseñará practicamente la disección de las partes en un cadáver humano, y en otros cuerpos animales
6a Medicina	Boerabe, Wansvieten, Sawriges, Hoffman, Sindentan	Chimica, Patología, Semeiótica, Terapéutica, Practica y Dieta.
7a Theologia Moral	Berri, Tovenelli, Henno, Concina, Colet	Derecho Natural y de las gentes
8a Derecho Canónico	Berardi, Gisbert, Van Spen, Gonzales, Fagnano	Instituciones Canónicas y la historia de concilios grales y Provinciales
9a Instituciones y Leyes	Grocio, Heinnecio, Bucahrdo, Cabarrus, Arprecto, Lietneo	La historia civil y de los Romanos y origen de las Leyes.
10a Escritura Sagrada	Lami, Calmet, Cronologia y doctrina ioprum de Peravio	Historia del Viejo testamento y del nuevo hasta la Asención.
11a Theologia Dogmatica	Peravio, Tomasini, Berri, Cotti, Henno, Scherminier	Historia Eclesiastica desde la Asención hasta nuestros tiempos.
12a Lenguas de Yndias y Arte de Flores	Diccionario razonado de Coto	Gramatica Española por la Academia y las historias de Yndias.

RESUMEN

Son por todas las cathedras que tiene esta Universidad once, ocho con salario y tres sin él.

Resultan doce cathedras que me parecen bien se pida para ellas una dotación competente, prefiriendo las más nobles con mas crecida renta.

Los Autores sobredichos se deberán leer con prelación a las demás: debiendo abrirse cada clase con lección de las cartas de Barbadiño, de Rolin y Mavillón, conforme fuere la clase. Vg. para la Cathedra de Rectorica, y Poesia las cartas de Rethorica y Poesia de los dichos. Los lugares Theologicos deberán explicarlos al abrir la clase el Catedrático de Dogma

Por razón de ser once las cathedras y parece competente este número se añaden estas materias para que no haia alguna cuia lectura se extrañe en esta Universidad; y para que los jovenes puedan idea o instruirse en la facultad q que se inclinen.

Bibliografía

[1] Documento, Revista de los Archivos Nacionales, 17,1953. *Memoria de los principales trabajos de la Universidad de Santo Tomás en el año literario de 1865*, leída por el secretario de la misma en la Junta General celebrada el día primero de enero de 1866.

[2] Facio, Rodrigo Segreda, *La Universidad de Santo Tomás de Costa Rica, Pensamiento Universitario Centroamericano*, San José, Costa Rica, Editorial Educa, 1980, p. 58 - 84.

[3] Gonsales Flores, Luis Felipe, *La Casa de Enseñanza de Santo Tomás. Apuntes y desarrollo hasta la erección en Universidad*, Imprenta Nacional, San José, Costa Rica.

[4] Gonsales, Luis Felipe, *Historia de la Influencia Extranjera en el Desenvolvimiento Educacional y Científico de Costa Rica*, Editorial Costa Rica, 1976, p. 1 - 296.

[5] Gonsales Villalobos, Paulino, *La Universidad de Santo Tomás*. Editorial de la Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.

[6] Gonsales Villalobos, Paulino, *Desarrollo Institucional de Costa Rica*. (1523 - 1914) Primera edición, SECASA, San José, Costa Rica.

[7] Hoffmann, Carl, *Viajes por Costa Rica*, Editorial Ministerio de Cultura Juventud y Deportes, Costa Rica, 1976.

[8] Liendo y Goicoechea, *Gazeta de Guatemala*, TOMO 7.

[9] Monge Alfaro, Carlos, *Universidad e Historia*. Ministerio de Cultura, Juventud y Deportes, San José, Costa Rica, 1978.

[10] Tunnerman, Carlos, *Pensamiento Universitario Centroamericano*, Primera edición, EDUCA, p. 9 - 58, San José, Costa Rica, 1980.

[11] Zelaya, Chester, *El Bachiller Osejo*, Editorial Costa Rica, San José, Costa Rica. Tomo I y II, 1971.

[12] Zelaya, Chester, *El Bachiller Osejo y la introducción de las ideas ilustradas en Costa Rica*. Ciudad Universitaria "Rodrigo Facio".

[13] Payne ,Eliset, *Costa Rica Colonial*, Editorial Guayacán, Publicación de la Comisión costarricense V Centenario del Descubrimiento de América, 1989.

[14] Láscaris, Constantino, *Historia de la Ideas en Centroamérica*, Editorial Universitaria Centroamericana, 1970.

[15] Valle, José Cecilio del, *Elogio Fúnebre* del 7 de agosto de 1814 con motivo de la muerte de don José Antonio de Liendo y Goicoechea.

[16] Sears y Semansky, *Física General*, Editorial Aguilar, 1957.

ALGUNOS DETALLES Y HECHOS HISTORICOS DE LOS ALBORES DE LA FISICA EN COSTA RICA: PARTE III

FLORA SOLANO†§
JORGE AMADOR §
JORGE PAEZ †
Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica

RESUMEN GENERAL:

Parte I

En el período precolombino hay indicios de que hubo un desarrollo científico acorde a las necesidades de la época. Durante la Colonia los pobladores de nuestro territorio le dieron más importancia a la artesanía. Con la fundación de las primeras universidades Centroamericanas es que se da la estructura y elementos básicos para el desarrollo científico posterior.

Parte II

A mediados del siglo XVIII se tiene información documental confiable de que el costarricense Liendo y Goicoechea introdujo la Física Experimental en la Universidad de San Carlos en Guatemala. Su influencia en Costa Rica es poco conocida y merece un análisis posterior.

Parte III

A principios del siglo XIX con la fundación de la Casa de Enseñanza de Santo Tomás y la contratación del Bachiller Rafael Francisco Osejo se introdujeron las primeras nociones fundamentales de Física en Costa Rica.

A pesar de que desde la creación de la Universidad de Santo Tomás en 1844 se dictaron algunos algunos rudimentos de Física Teórica en la Cátedra de Flosofía y en 1852 se impartió en la Universidad un Curso de Física, no fue sino hasta el período entre 1861 y 1862 (no está claro en cual de estos dos años exactamente) que se establece formalmente la enseñanza de la Física en esa Casa de Estudios Superiores.

Desde 1849 hasta 1865 distinguidos naturalistas contribuyeron a mantener vivo el interés por las ciencias naturales lo que tal ves permitió mantener activas las ideas de la época en relación con la Ciencia Física.

Con la clausura de la Universidad de Santo Tomás se cierra en Costa Rica un período lento e incipiente en el desarrollo de la Física en Costa Rica.

§ Centro de Investigaciones Geofísicas
† Grupo de Astrofísica Teórica

1 La Casa de Enseñanza de Santo Tomás

El desarrollo de la educación en Costa Rica no sufrió grandes cambios en el período colonial, no fue sino hasta principios del siglo XIX que efectivamente cobran importancia social los cursos avanzados al abrirse en San Jośe la Casa de Santo Tomás.

Costa Rica durante la colonia fue una provincia aislada, con un desarrollo político-social muy débil donde el predominio del clero en la enseñanza marcaba el carácter eclesiástico restringido de la vida cultural de la zona.

La mayoría de sus habitantes no sabían ni leer, ni escribir y la enseñanza era impartida por las personas más cultas: los frailes y los sacerdotes. Cargo que desempeñaron hasta fines de la colonia y enseñanza que realizaron en las iglesias, sacristías y conventos.

Don Luis Felipe Gonzáles Flores reafirma esta aseveración diciendo:

> *Había en la época colonial excesivo de sacerdotes, faltando en cambio otros profesionales necesarios, particularmente médicos*[3].

En este marco colonial en que se desarrolló la educación costarricense, la escasez de escuelas de primeras letras donde únicamente se enseñaba la escritura, lectura, numeración y doctrina cristiana, la inestabilidad de su funcionamiento, la carencia de personal idóneo, el predominio del castigo y autoridad excesiva, y los pocos recursos económicos limitaron la ausencia del pensamiento científico y filosófico de Europa y por ende de un desenvolvimiento aún muy rudimentario de una ciencia como la Física en nuestro país.

Hacia el año de 1814 y según Paulino Gonzáles, la ciudad de San José manifestaba un liderazgo político- ideológico, de tipo educativo que se desarrolló gracias a nuevas condiciones socieconómicas basadas en la producción de tabaco y caña de azúcar permitiendo el desarrollo de un comercio exterior. Gama de elementos que fueron la cuna para que en esta ciudad y no en Cartago, la capital, se levantara la primera institución de estudios superiores de la provincia.(3)

La Casa de Estudios se creó bajo la dependencia del Ayuntamiento de San José, cuya máxima autoridad la ejercía el Rector. Este centro estaba estructurado en dos secciones:

A) La superior; donde se impartían las cátedras de Gramática, Sagrados Cánones, Filosofía y Teología Moral.

B) La de primeras letras; que incluía lectura,escritura y la cuenta.

La necesidad de dotar a esta institución del personal más capacitado y diligente en las labores docentes de la Casa de Estudios condujeron a la contratación del Bachiller Rafael Francisco Osejo, oriundo de Nicaragua por un salario de $ 300 pesos anuales.

En el momento de su apertura, en los almacenes de la Factoría de Tabaco (actual edificio de la Pagaduría Nacional) fungía como Rector y profesor de la cátedra de Filosofía, el Bachiller Osejo y profesor de Gramática, Pbro. José Arguedas, además de dos maestros dedicados a la enseñanza de la lectura.

La mentalidad de Osejo incisiva, impregnada de las ideas de grandes pensadores de la Ilustración como Rousseau, Montesquieu, etc. permitió que en nuestro país, se introdujeran las primeras nociones de Física. El historiador Chester Zelaya manifiesta:

> *las lecciones que impartió Osejo en Costa Rica, tenían posiblemente el mismo contenido que las que él recibiera del Dr. Tomás Ruiz en el Seminario Conciliar de León. Es decir incluía Lógica, Metafísica, Aritmética, Algebra y Física*[13].

> *cuando se le contrató en 1817 para impartir lecciones en Cartago, se le pidió que agregara a las materias anteriores, dos ramas de mecánica o de Física especial*"[13].

Osejo no tuvo la misma trayectoria de un científico como el Dr. Antonio Liendo y Goicoechea, pero sí fue un promotor incansable de la educación en nuestra provincia, sobre todo en momentos económicamente difíciles y donde la ausencia de comprensión intelectual por parte del pueblo era la nota predominante. El párrafo siguiente es testigo de estos sentimientos:

> *Como educador, no se limitó Osejo a dar a sus alumnos un cúmulo de conocimientos, sino también a desarrollar en ellos una serie de inquietudes, ideas y propósitos... Osejo formó una verdadera generación de hombres...*"[13]

El escaso presupuesto de que disponía la Casa de Enseñanza de Santo Tomás, no permitió a Osejo contar con los medios e instrumentos didácticos necesarios para sus lecciones, sobre todo de Física y Geometría, y decía en 1831.

> *He agotado los últimos recursos q han estado a mi alcance a fin de q. no se paralice la enseñanza, en cuyo obsequio hé mendingado (por decirlo así) autores e instrumentos valiéndome por último aún del penoso trabajo de dibujar las figuras en la pizarra, p.a.q. pudieren aprender los cursantes* [11].

Amante de su vocación de maestro sacrificó su salud en pro de la enseñanza. Enfermó por la humedad de los Almacenes donde se instaló la Casa de Estudios. Sus constantes quejas por las pésimas condiciones del edificio, su afán de brindar ayuda a los indígenas le hicieron escribir el documento *Proyecto de mejoras a la Casa de Enseñanza Pública de Santo Tomás*, y un Informe dirigido al Rector de la Casa de Santo Tomás, sobre *el fatal estado en que se halla la Instrucción de la Juventud.* Los oídos sordos a estas súplicas y la constante desaplicación de los alumnos por el estudio, la inasistencia a clases lo hicieron presentar su renuncia a la cátedra de Filosofía.

El Bachiller Osejo en procura de brindar alimento intelectual a algunos alumnos y en vista de que la situación académica no mejoraba ofreció clases privadas de Matemática pura y mixta, y Filosofía.

Lo sustituye en su cargo en la cátedra de Filosofía el nicaragüense Toribio Argüello y según parece compañero de Osejo en el Seminario de León, el cual había llegado a Costa Rica en 1828 en calidad de emigrado político.

Dentro del legado escrito de Osejo aparecen *Las Breves Lecciones de Aritmética*, primer libro de texto que se publicó en nuestro país, no fue un tratado de Aritmética, sino unas notas explicativas. Redactado en forma de catecismo, es decir, por medio de preguntas y respuestas. **Las Lecciones de Geografía** es un texto adicional a la obra de R. Ackerman, que también está escrita en forma de catecismo y se le ha considerado como el primer estudio de esta naturaleza hecho en Costa Rica.

2 Comentarios sobre Las Lecciones de Geografía de Osejo

Llama la atención en los comentarios del Dr. Osejo, el énfasis que él pone en la aparente relación entre los *temblores más o menos fuertes y frecuentes* ocurridos en relación con erupciones del Volcán Yrasú y

> *una densa tiniebla que duró por espacio de tres días y que hacia demasiado ....*

Los comentarios anteriores suguieren un intento interesante del Dr. Osejo por integrar conceptualmente la Física de los fenómenos de Tierra Sólida con los fenómenos Atmosféricos. Es posible que esta idea haya contribuído en parte (por provenir precisamente de un erudito de la época) a reafirmar la creencia del pueblo costarricense en la estrecha relación que se atribuye a los movimientos sísmicos y a los cambios en el estado tiempo meteorógico.

Al analizar las inundaciones quê en el Valle de Matina, se indica que estas suceden en los meses de diciembre y enero, aunque algunos años en noviembre, febrero y aún marzo. La causa de este fenómeno, se atribuye a:

> *una aparece en quanto al tiempo y otra en orden al entumecimiento...*

La explicación ofrecidad , aunque en algunos aspectos es confusa, es también notable pues relaciona en forma general fenómenos meteorológicos de muy diversas escalas temporales y espaciales (interacción considerada actualmente como un mecanismo muy activo en la producción de lluvias) como el invierno del Hemisferio Norte, masas de aire frío asociadas con vientos recios y lluvias más o menos fuertes y frecuentes. Lo descrito parece estar asociado a lo que modernamente se conoce como *frente frío*, fenómeno que afecta Costa Rica generalmente en los meses nombreados y que como teoría no fue descrita formalmente sino hasta muchas décadas después por la Escuela noruega de Meteorología.

En relación con este mismo fenómeno de las inundaciones, se ofrece una descripción detallada de: *como conocer si está próximo a ocurrir una inundación*. Sin duda alguna, el Br. Osejo intentó (tal vez por vez primera en Costa Rica) proponer una metodología simple para conocer y prevenir las consecuencias de este fenómeno. En este sentido, el Br. Osejo se constituye muy probablemente en el primer pronosticados meteorológico en Costa Rica.

En la descripción del Clima de Costa Rica hay varios aspectos que comentar. La descripción del campo de temperatura en Costa Rica da una idea bastante clara y correcta de su variación espacial . La variación vertical atribuida a la temperatura (aunque no se contaba con instrumental y métodos de observación adecuada) no parece ser exagerada y aunque no se conoce de la caída de nieve en regiones altas cercanas a Cartago, se ha verificado que la temperatura en algunos puntos desciende por debajo del punto de congelación, en especial en las noches y durante la propagación de fenómenos como los frentes fríos.

3 Otros Aspectos sobre la Casa de Enseñanza de Santo Tomás

La Casa de Enseñanza desde su fundación hasta su transformación en la Universidad de Santo Tomás sufrió varios cambios: entre ellos la reorganización ejercida por el Obispo nicaragüense que puso a la Casa de Estudios bajo la advocación de Santo Tomás de Aquino, a partir de 1815 se le conoce como CASA DE ENSEÑANZA DE SANTO TOMAS. El fortalecimiento en este período de la enseñanza clerical impedía el desarrollo de las ideas liberales de la época.

Hacia el año de 1822, la reforma realizada en los estatutos de esta casa de estudios permite la consolidación de las ideas liberales en la educación. Paulino Gonzáles señala:

> *se empezaba a romper con la estructura confesional y se abría una brecha para la laicización de la Casa.*[5]

Otro aspecto importante es que amparada a los cánones de la Ilustración, la Casa de Enseñanza de Santo Tomás esparcía su área de influencia hacia otras zonas de la provincia. Los estudiantes estaban obligados a asistir a conferencias sobre diversos temas dos veces al año, además se anexan algunos cursos especiales.

Hacia el año de 1824 y con un financiamiento más estable, la institución adquiere el carácter pre- universitario. El establecimiento del título de Bachiller y la creación de cursos optativos: latín, inglés y francés amplían el panorama intelectual del alumnado.

Desde su fundación, la Casa de Enseñanza de Santo Tomás lucho contra la estreches económica que la envolvía. Hacia 1836 tuvo la capacidad de organizar un curso de filosofía más estable que los anteriores. Continuabán usandóse los textos escritos por Osejo para la aritmética y la geografía.

En 1839 se realiza la primera graduación, el señor Vicente Herrera presenta sus exámenes para la obtención del título de Bachiller en Filosofía. Algunos de los temas a discutir fueron:

HISTORIA UNIVERSAL

Sucesos mas notables acaecidos en la época de Moisés, ó la la lei escrita

HISTORIA DE LA FILOSOFIA

Noticias generales sobre la secta megarica.

LOGICA

El origen de nuestros conocimientos, atención, habito, y ventajas que resultan de su unión

METAFISICA

Espondré las razones principales que prueban la ecsitencia de un estado futuro i las obligaciones del hombre para con Dios

FISICA

El luminico, la propagación i densidad de la luz, la diafanidad, opacidad, colores de los cuerpos,i anillos colorados de Newton

HISTORIA NATURAL

La primera clase de los animales vertebrados, caracteres que los distinguen de los demas animales

GEOMETRIA

Diversas especies de líneas, ángulos i metodo de medirlos en general

ASTRONOMIA

El equilibrio del universo; el número i nombres de los planetas primarios, el tiempo de sus revoluciones, causa de los eclipses, i divición del globo terrestre en climas i sonas.

El acto fue presidido por el Catedrático Licenciado C. Nasario de Toledo, siendo rector el Doctor C. Presbítero de los Santos Madrid.(10 a.m. del 4 de enero de 1839).

En síntesis durante la colonia, el clero ejerció la mayor influencia en las diferentes actividades literarias y artísticas.

La falta de imprenta no ofrecía oportunidad para la publicación de producciones intelectuales.

En los albores de la independencia, la Instrucción Pública estaba limitada a las escuelas de Primeras Letras y a la Casa de Enseñansa de Santo Tomás.

La instrucción en la Casa de Enseñansa de Santo Tomás continuó funcionando con cierta irregularidad debido a la estreches presupuestaria, los problemas de disciplina,la escases de personal.

Ya para el año de 1843, desempeñando el Ministerio General, el Dr. José María Castro Madriz se erigió en Universidad la Casa de Enseñanza de Santo Tomás, y el 1 de setiembre de este mismo año se dictaron los Estatutos de la Universidad. (6) Gonzáles, Paulino. La Universidad de Santo Tomás. Editorial de la Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica, pág. 37,1989.

4 La Universidad de Santo Tomás

Durante el período 1844 - 1849, no hay indicación de que se haya impartido formalmente curso alguno de Física. Según Paulino Gonzáles , sólo se impartieron con regularidad los estudios menores y los profesionales en Derecho.

A partir de 1849 y según el Ordenamiento Establecido por la Reforma a los Estatutos de 1849, teóricamente se organizaron entre otras, la Facultad de Ciencias y la de Matemáticas y Física. De 1849 a 1874 (considerado un segundo período en la vida de la Universidad), el estudio de la Física no muestra mayor estabilidad aunque, hay algunos períodos en los que florece de manera m s clara y fuerte (1862-1874).

En lo que se refiere a los Estudios Menores, el Rector de la Universidad, Don Nasario Toledo, en su discurso en 1853, propone que se reorienten los estudios y que se aumenten las materias con un curso de Física Experimental. De acuerdo a Paulino Gonzáles, lo anterior:

> *parece haber sido llevado a la práctica pues hemos encontrado documentos de la cátedra departamental de esta especialidad de Heredia, en la cual se indica que ahí se enseñaba Física con el libro del Dr. Garret.*

En relación con los estudios profesionales, en la carrera de Ingeniería dirigida por el Ing. Angel Miguel Velásquez, se ofrecieron a partir de 1865 cursos de Física dentro de los planes de estudio. En la enseñanza de la Geografía e Historia, en el segundo año se ofrecían conocimientos rudimentarios de Astronomía, aunque no hay detalles de cuando comenzaron, que temas o libros de texto se usaban.

En referencia con Ciencias Básicas y según Paulino Gonzáles, al principio de éste período se dictaron rudimentos de Física Teórica en la cátedra de Filosofía y, a partir de 1852 se impartió con éxito un curso de Física Experimental. Un poco más formalmente, no fué sino a partir de 1861 que se establece la enseñanza de la Física. Hecho que condujo a que en 1866, el Profesor de Química y Física, Don Luciano Platt se hiciera cargo de la Cátedra Especial de Ciencias Físicas, para lo cual se solicitó a Europa, instrumental completo de laboratorio para impartir el curso. De acuerdo a las Memorias de 1865, Revista de los Archivos Nacionales *año 17, 1953* , la separación de las disciplinas de Filosofía, Moral y Física fue establecida hasta 1862. No está claro cuál de estas fechas es la correcta en cuanto a la apertura formal de los cursos de Física.

En el período de decadencia de la Universidad (1875 - 1888), el estudio de la Física parece haber estado restringido a los cursos ofrecidos en Ingeniería y en Medicina (Física Médica) y no se posee mayor información sobre los temas o libros de texto usados.

Además de Don Luciano Platt, se conoce que Don Benito Serrano fué Profesor de Física (Paulino Gonsález) durante el período 1874 - 1875. Anteriormente y con motivo de la reorganización de la Universidad en 1850, se habían designado para la Facultad de Ciencias, Matemáticas y Físicas, a los señores Licenciados Felipe Molina, Adriano Rojas y Baltazar Salazar y a los Bachilleres Pío Alvarado, Juan Rafael Mata y Napoleón Escalante. No hay detalle cual de estos profesores impartió (si en realidad se hizo en ese momento) algún curso de Física.

5 Otras Casas de Estudios

ESCUELAS PRIVADAS:

Durante los dos primeros tercios del siglo XIX surgieron las llamadas ESCUELAS PRIVADAS. Nacieron como una alternativa al deterioro que sufría la enseñanza oficial.

Fueron muchas las personas que asistieron a estas escuelas privadas, sobre todo mujeres, ya que la enseñanza oficial estaba destinada a los varones.

De la documentación estudiada sobre estas casas de estudio se desprende que dentro de sus programas aparecen incorporados temas de Física, Astronomía, matemática, geografía. Aspecto que nos permite inferir que durante la permanecia de estas instituciones se mantuvo latente un conocimiento científico un tanto rudimentario.

COLEGIOS PRIMARIO-SECUNDARIOS:

Los colegios primario-secundarios creados en San José sientan las bases de la segunda enseñanza en nuestro país.

Y al igual que centros de estudios incluían dentro de sus lecciones materias de: física, astronomía, geogafía, aritmética, química.

COLEGIOS, LICEOS E INSTITUTOS DE SEGUNDA ENSEÑANZA:

La enseñanza secundaria formó parte de los estudios universitarios de la Casa de Enseñanza y de la Universidad de Santo Tomás.

Los planteles creados bajo esta modalidad entre ellos: el Colegio San Luis Gonzaga de Cartago, el Instituto de Alajuela, el Instituto Universitario de San José también impartían dentro de sus programas de estudio conocimientos básicos de física, astronomía, matemática, química, geografía.

En síntesis hasta mediados del siglo pasado, la enseñanza de ciertas nociones física y de otras ciencias se efectuaba en forma teórica dado que el énfasis del aprendizaje se orientaba a la lectura, escritura, saber contar y rezar. Don Luis Felipe Gonsález Flores, menciona que estas escuelas no hacían uso de ningún material científico ni requerían de laboratorios, colecciones de minerales, ni de museos escolares. No fue sino hasta el año de 1856 en que surgen nuevas necesidades educacionales a raíz de la intensificación del comercio internacional estimulado por la producción cafetalera, y se empieza a hacer uso de mapas, esferas celestes, etc.

5 Conclusiones

Al establecerse por primera vez en Costa Rica una casa de ense nanza de estudios superiores y la contratación del nicaragüense Br. Rafael Francisco Osejo, se logra la introducción formal de las primeras nociones de Física en el país. Un aporte importante del Br. Osejo en el campo científico son sus comentarios sobre el Clima y otros aspectos geofísicos de Costa Rica. Se constituye con sus aportes en el primer pronosticador meteorológico de nuestro país.

Gracias al impulso que imparte el Br. Osejo en el campo científico, hace que este espíritu innovador se mantenga latente en la Ciencia hasta la institucionalización de la Universidad de Santo Tomás, sentando así las bases para un desarrollo posterior más sistemático de la Física.

En relación con la Universidad de Santo Tomás, hay dos puntos importantes que resaltar. El primero es la separación formal de la Física como Ciencia, de la Filosofía. La segunda es la contratación de un profesor con formación física, don Luciano Platt, para que se haga cargo de los cursos de Física y de Química en la Universidad.

La enseñanza de la Física se mantuvo también viva en las Escuelas Privadas, Colegios e Institutos como parte fundamental de la formación de los educandos, obligando a la contratación de personal docente europeo, incidiendo en la consolidación de la Física en Costa Rica.

Anexo 1: Biografía del Bachiller Rafael Francisco Osejo

Rafael Francisco Osejo nacién Nicaragua aproximádamente en 1790. Juega un papel muy importante en los acontecimientos políticos, educativos de la historia de Costa Rica hacia los años de 1814 en adelante y después de la independencia.

Realizó su estudios en el Seminario Conciliar de León y obtuvo el título de Bachiller en Artes y tenía estudios avanzados en Derecho Civil y Canónico. Conoció profundamente las doctrinas de Locke, Montesquieu, Rousseau que influyeron en su pensamiento.

En el año de 1814 fue contratado para hacerse cargo de la cátedra de Filosofía y Rectoría de la Casa de Santo Tomás, recien fundada en San José. También impartió lecciones en Cartago. Sus múltiples actividades políticas no opacaron su tarea de educador, creía firmemente en que la educación era el principal medio para que un pueblo pudiera lograr su felicidad.

Osejo, mestizo de carácter recio, difundió sus conocimientos como Rector y profesor en diferentes disciplinas: Derecho, Matemática, Física, Filosofía.

Su vasta cultura humanística le permitieron desempeñar muchos cargos de gran relevancia : Magistrado, escritor, profesor. Sus incursiones en diversos campos crearon sentimientos de rivalidad en otros ciudadanos.

Fundó en la ciudad de Cartago una Tertulia Patriótica que tenía por objeto instruir al pueblo en sus deberes y derechos.

Desarrolló habilidad como gran orador fue promotor de las ideas republicanas.

En 1824 viaja a Nicaragua y pocos días después regresa a Costa Rica. En 1831 emprende viaje hacia Londres, Inglaterra permaneciendo en esta ciudad por un año y medio. Aprovechó su estadía para relacionarse con altos personeros del gobierno. Visitó la sala de lectura del Museo Británico.

En 1834 abandona nuestro país después de vivir aquí por más de 20 años. Viajó por varios países de Centroamérica donde en algunos de ellos desempeñó puestos importantes.

En 1843 con motivo de la apertura de la Universidad de Santo Tomás se le hace una oferta como educador, trámite que no fructificó. Murió alrededor de 1848.

Su legado escrito es extenso y se halla muy disperso, algunos documentos fueron publicados en su época, pero otros aparecen inéditos. Entre estos últimos se hallan: El Proyecto de las Pavas, Nulidad de los derechos de Méjico sobre Costa Rica, El Zapatero Santiago.

Después de la introducción de la imprenta en Costa Rica (1830). Osejo es prácticamente la primera persona que difunde sus ideas a través de informes, libros de texto, notas etc. Escribe las Breves Lecciones de Arismetica, con una edición de 300 ejemplares (valor $ 7 pesos). De este documento existe una copia original en el Banco Central de Costa Rica.

En cuanto al libro Lecciones de Geografía, es una adición a la reimpresión de la obra de R. Ackermann. Actualmente existen dos copias originales, una en la Biblioteca Nacional y otra copia en la Biblioteca del Banco Central.

También presenta varios informes, notas, uno de estos últimos de gran interés económico fue el *Informe Sobre el Valle de Matina.*

Osejo poseía una extensa Biblioteca con obras de clásicos como Séneca, Ovidio, Horacio, títulos de libros de Química, Física, Matemática, Filosofía, Historia, etc.

Anexo 2: Influencia de Otros Científicos

Aunque su influencia no tuvo nada que ver con la enseñansa propiamente dicha de las Ciencias o la Física, en particular, si resulta interesante el notar los nombres de los naturalistas Alexander von Frantzius y de Carl Hoffman. Ambos nativos de Alemania y quienes llegaron a Costa Rica en enero de 1854. Venian abalados con una recomendación del gran naturalista Alexander vonHumboldt. En su carta de recomendación dirigida a don Juan Rafael Mora dice:

" Vuestra Excelencia se designará permitir que un viejo, cuyos trabajos científicos han tenido desde hace mucho tiempo por objeto los paises del Nuevo Continente de Vuestra Excelencia, solicite protección para los viajeros naturalistas Doctores Frantzius y Hoffmann que viajan para conocer mejor esos bellísimos paises. Estos señores son dos cientifícos muy distinguidos y además hombres muy morales, hijos de familias respetables de nuestro país .

De ambos podemos decir que, llevaron a cabo una labor más profesional que docente-científica; pero si mantuvieron vivas esas ansias de cultivar una Ciencia Natural con características propias, por la utilisación de instrumentos científicos y la sistemática recopilación de flora y fauna de Costa Rica.

De von Frantzius cuenta don Luis Felipe Gonasáles lo siguiente :

Ejercía su profesión (médico) en Alajuela, después de haberse incorporado en 1854. En aquella ciudad hizo observaciones meteorológicas y se dedicó a recoger ejemplares de pájaros y mamíferos,...

El Dr. Hoffman, en su libro **Viajes por Costa Rica**, narra lo siguiente:

El Irazú, también llamado volcán de Cartago, ha sido trigonométricamente medido por Galindo y hallándose que su altura es exactamente 12000 pies españoles. Una medida barométrica que yo sepa, no sido hecha. El excelente barómetro aneroide de mi venerado amigo George Greiner, que fue llevado por el Dr. von Frantzius para sus observaciones generales, me faltaban igualmente por desgracia, por lo que era imposible determinar la situación.

El Dr Hoffmann fue el autor de varios estudios sobre los volcanes de Costa Rica y Cirujano del ejército expedicionario costarricense en 1856 en Rivas de Nicaragua. No tenemos noticias de que haya efectuado medidas físicas; aunque sabemos que si tenía la formación científica para ello.

Otros Profesores que contribuyeron al Desarrollo de la Física en Costa Rica

Haremos una lista, que no pretende ser completa, pero que nos da una idea de la influencia que pudieron haber tenido tanto profesores como profesionales contratados por el Gobierno de Costa Rica, durante el siglo pasado y principios de éste, en el cultivo de la Ciencia Física[4].

- *El 22 de abril de 1840 llegó en compañía de los partidarios de Morazán, el guatemalteco don Felipe Molina. Se le acredita su actuación de profesor de inglés y miembro de la Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad de Santo Tomás.*
- *En febrero de 1862 llegó a Costa Rica el señor Federico Maison. En nuestro país se dedicó a hacer observaciones meteorológicas.*
- *El 4 de setiembre de 1874 fue contratado el Dr. Helmuth Polakowsky para servir clases de Química, Física, Bótanica, Mineralogía y Zoología del Instituto Nacional.*
- *En agosto de 1894 llegó a Costa Rica, el químico Carlos Beutel. El señor Beutel figuró como examinador de Ciencias Físicas en el Liceo de Costa Rica. Durante los años entre 1897-1899 desempeñó en la Escuela de Farmacia las cátedras de Física y Química.*
- *En 1901 el Dr. Ernesto Heinrici abrió en San José clases de Matemáticas y Geodesia. Fue alumno de Helmholtz.*

- Don José Manuel LLeras, colombiano fue profesor de literatura, filosofía y Matemáticas. Dió clases en 1873.

- Padre Páramo llegó de Bogota el 30 de julio de 1876. En Cartago dejó gratísimos recuerdos como profesor de Ciencias Físicas , Química, Matemáticas, pintura y dibujo. Se dedicó también a fabricar aparatos para el gabinete de Física del Colegio San Luis Gonzaga.

- José Fidel Tristán. profesor de Ciencias Físicas y Naturales. El gobierno de Costa Rica aceptó el ofrecimiento del de Chile y por disposición del 6 de marzo de 1897 se adjudicaron 6 becas a jóvenes costarricenses, entre ellos estaba don José Fidel Tristán. Se graduó del Instituto Pedagógico de Santiago. Enseñó en el Liceo de Costa Rica.

- En 1901 otro grupo de estudiantes costarricense se fue a estudiar al Instituto Pedagógico de Santiago, entre ellos estaban :

- Nicolás Montero quien estudió Matemáticas.

- Emel Jiménez y Alberto Rudín hicieron su especialidad en Ciencias Físicas y Naturales.

- Enrique Villavicencio, originario de Málaga. Fundó en 1878 el Colegio Costarricense. El ilustre doctor Ferraz llama a Villavicencio el " matemático, al que considera muy capaz en su ramo ".

- José Torres Bonet originario de Cataluña, vivió en Costa Rica en 1880. En la revista " El Instituto Nacional " se encuentran sus programas de Matemáticas.

- Manuel Montorio, natural de Pamplona. Se graduó en Ciencias en la Facultad de esa ciudad. Se doctoró en Ciencias Físico- Químicas en Madrid. A fines de 1891 formuló el plan de estudios para el Liceo de Costa Rica bajo el sistema de enseñanza bifurcada.

- Gustavo Luis Michaud, suizo. Fue profesor de Ciencias Físicas y de Educación Física en la Escuela Normal de Costa Rica desde 1915 a 1918. Ahí instaló el gabinete experimental de Ciencias Físicas y una estación inalámbrica.

- Ing. Arthur Powell Davis publicó un interesante estudio sobre: " General Phisical characteristics of Central American temperatur and rainfall data from Costa Rica. Ingerniero consultor del Canal de Pnaná.

- Mr. J.J.Peatfield, bachiller de la Universidad de Cambridge. Dió clases de Matemática e Idiomas en la Capital a mediados del siglo XIX.

- El célebre descubridor inglés Jorge Vancouver estuvo en la Isla del Coco en 1795. Allí permaneció 5 días con su flotilla en la Bahía de Chatham, bautizada así de uno de sus buques. Mandó hacer el primer levantamiento de las costa de la isla.

- *Ricardo Trevithick, ingeniero inglés, llegó a*
Costa Rica en 1822. Se dedicó a la minería.

- John Galindo, irlandes. En 1836 escribió: " On Central America (containing a general description of the country and an account of Costa Rica). Aparentemente midió la altura del Irasú por medios trigonométricos.

- Ing. Edward Belcher. Estuvo en la Isla del Coco, de la cual levantó un plano de la costa, e hiso la primera medida de la declinación magnética.

- Rodolfo Bertoglio llegó a Costa Rica en 1875. Natural de Milán. Obtuvo el diploma de Bachiller en Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Pisa. Fue profesor del Instituto Nacional. Director y fundador de la efímera Escuela de Ingeniería. Dejó importantes estudios inéditos sobre las propiedades de los números, sobre los logartimos, sobre varios asuntos de geometría, y su notable " Espiral de Bertoglio". Don Mauro Fernándes en uno de sus escritos se expresa así: " El representante asiduo y propagador en nuestro país de los métodos modernos de la enseñansa de la Matemáticas de 1876 a 1886 ha sido el ingeniero don Rodolfo Bertoglio".

- Enrique Pittier llegó a Costa Rica el 27 de noviembre de 1887 a Costa Rica. En 1888 fue nombrado director del Instituto Físico y Geográfico, desde cuyo centro hiso una meritoria labor en nuestro país relacionada con el desenvolvimiento científico. Requiere por si solo de un análisis exhaustivo por la importancia y repercución que ha tenido en el desarrollo posterior de la Meteorología.

- Gustavo Michaud nació en Ginebra. Fue Bachiller en Ciencias Físicas y Naturales en 1884. En 1889 sustituyó a don Mauro Fernándes como ministro de Instrucción Pública en tiempos de don Ricardo Jiménes. Se dedicó a la enseñansa de las Ciencias en el Liceo de CostaRica.

- Juan Rdín llegó de Suisa el 27 de noviembre de 1889. Estudió Matemática, Física, Geología y Astronomía. Dirigió el Colegio San Luis Gonsaga. Fue profesor de Pedagogía, Pr'actica Escolar, Física y Cosmografía en el Colegio de Señoritas (1895 - 1904).
Es autor de los ensayos:

El dibujo Cartográfico en la Escuela

La Luna

El Cometa Halley

Bibliografía

[1] Documento, Revista de los Archivos Nacionales, 17,1953. *Memoria de los principales trabajos de la Universidad de Santo Tomás en el año literario de 1865*, leída por el secretario de la misma en la Junta General celebrada el día primero de enero de 1866.

[2] Facio, Rodrigo Segreda, *La Universidad de Santo Tomás de Costa Rica, Pensamiento Universitario Centroamericano*, San José, Costa Rica, Editorial Educa, 1980, p. 58 - 84.

[3] Gonsales Flores, Luis Felipe, *La Casa de Enseñanza de Santo Tomás. Apuntes y desarrollo hasta la erección en Universidad*, Imprenta Nacional, San José, Costa Rica.

[4] Gonsales, Luis Felipe, *Historia de la Influencia Extranjera en el Desenvolvimiento Educacional y Científico de Costa Rica*, Editorial Costa Rica, 1976, p. 1 - 296.

[5] Gonsales Villalobos, Paulino, *La Universidad de Santo Tomás*. Editorial de la Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.

[6] Gonsales Villalobos, Paulino, *Desarrollo Institucional de Costa Rica*. (1523 - 1914) Primera edición, SECASA, San José, Costa Rica.

[7] Hoffmann, Carl, *Viajes por Costa Rica*, Editorial Ministerio de Cultura Juventud y Deportes, Costa Rica, 1976.

[8] Liendo y Goicoechea, *Gazeta de Guatemala*, TOMO 7.

[9] Monge Alfaro, Carlos, *Universidad e Historia*. Ministerio de Cultura, Juventud y Deportes, San José, Costa Rica, 1978.

[10] Tunnerman, Carlos, *Pensamiento Universitario Centroamericano*, Primera edición, EDUCA, p. 9 - 58, San José, Costa Rica, 1980.

[11] Zelaya, Chester, *El Bachiller Osejo*, Editorial Costa Rica, San José, Costa Rica. Tomo I y II, 1971.

[12] Zelaya, Chester, *El Bachiller Osejo y la introducción de las ideas ilustradas en Costa Rica*. Ciudad Universitaria "Rodrigo Facio".

[13] Payne ,Elizet, *Costa Rica Colonial*, Editorial Guayacán, Publicación de la Comisión costarricense V Centenario del Descubrimiento de América, 1989.

[14] Láscaris, Constantino, *Historia de la Ideas en Centroamérica*, Editorial Universitaria Centroamericana, 1970.

[15] Valle, José Cecilio del, *Elogio Fúnebre* del 7 de agosto de 1814 con motivo de la muerte de don José Antonio de Liendo y Goicoechea.

[16] Sears y Semansky, *Física General*, Editorial Aguilar, 1957.

EVOLUCION DE LOS PROGRAMAS DE MATEMATICAS PARA LA ENSEÑANZA MEDIA EN COSTA RICA

Hugo Barrantes Campos
Angel Ruiz Zúñiga
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

RESUMEN

En este trabajo se hace un bosquejo sobre la evolucion histórica de los programas de matemática para la enseñanza media costarricense del siglo XX. Se proponen dos periodos separados por los programas anteriores a la *reforma educativa* de 1964 y los posteriores a ella. El análisis sirve para mostrar la importancia de la reforma programática de 1964, y cómo esta obedeció a un cambio gradual con base en los requerimientos locales.

Uno de los aspectos más importantes del proceso educativo de una sociedad es mantener una actualización constante sus programas de estudio, adaptándolos en cada época a las necesidades y desarrollo del momento, tanto de cada disciplina en particular, como en su relación con los restantes campos del conocimiento. Para esto, se hace entonces necesario una revisión continua de dichos programas, con el objeto de determinar que contenidos se hacen obsoletos, cuáles es necesario mantener y cuáles se deben agregar. Sin embargo, esta revisión debe hacerse con espíritu crítico, teniendo en mente la realidad del país y no adoptando a ciegas corrientes novedosas que provienen de otras latitudes y responden a otras realidades.

Algunas veces esas corrientes contienen ideas fundamentales para el desarrollo de la disciplina correspondiente y deben ser tenidas en cuenta a la hora de elaborar los programas pero deben adaptarse y se debe conocer el momento oportuno para ser puestas en marcha.

Lo anterior vale para cualquiera de las asignaturas que se pretenda enseñar y a cualquier nivel educativo, en particular se aplica a las matemáticas en la enseñanza media.

El ente encargado de planificar y administrar la enseñanza media* en Costa Rica, el Ministerio de Educación Pública, elabora cada cierto tiempo nuevos programas de estudio de las materias que se imparten en secundaria. No conocemos a cabalidad el procedimiento utilizado para seleccionar los temas y las técnicas y métodos de enseñanza, sino únicamente lo que queda plasmado en el papel, que es a final de cuenta lo que los encargados de enseñar conocen y es lo que los guía para impartir sus lecciones. Por este motivo consideramos que los programas deben ser lo más explícitos posible.

Sobre este punto, revisando diferentes programas de matemáticas que se han publicado a través del presente siglo, notamos que hay bastante variación, pues en algunos de ellos se dan algunas sugerencias metodológicas, se exponen suficientemente las ideas que los sustentan, etc., pero en otros el programa se reduce a dar una lista de contenidos que en muchos casos no da una idea de la profundidad de tratamiento de los temas o de su verdadera orientación.

Sin embargo, ateniéndonos a los contenidos programáticos podemos separar los programas de matemáticas del presente siglo en dos etapas:

1. De comienzos de siglo hasta antes de 1964.
2. De 1964 hasta el presente.

Por qué 1964?. En este año se comienza a poner en práctica un programa de matemáticas aprobado en diciembre de 1963 que contiene por primera vez en los programas de matemáticas de segunda enseñanza de nuestro país, elementos de matemática moderna, producto de la influencia de la corriente que en ese sentido se había venido dando en Europa y Estados Unidos[1]. Así pues, los programas de matemática anteriores a 1964 son de corte "clásico" y los posteriores a esa fecha son de corte "modernista". Veremos en qué radica esa diferencia y cuales podrían ser las ventajas y desventajas de uno y otro.

PROGRAMAS DE MATEMATICAS ANTERIORES A 1964.

El primer programa del presente siglo que tenemos a mano data de 1904. Contiene una pequeña introducción en la que trata de justificar el porqué la enseñanza de las matemáticas en los liceos y su idea fundamental es que: "Más que el fin utilitario, importa el fin formal en la enseñanza de este ramo en los liceos: adquirir potencia y destreza intelectuales"[2]. En cuanto a sus contenidos programáticos, el programa establece los siguientes:
Para primer año

1. Arimética: operaciones con números enteros, operaciones con fracciones, regla de tres simple, tanto por ciento y algunos elementos de teoría de números. 2. Algunos elementos de geometría plana, como rectas y polígonos.

---

[1] Para más detalle ver Barrantes, H. y Ruiz, A.. La reforma de la enseñanza de la matemática en Costa Rica. Memorias de la Tercera Reunión Centoramericana y del Caribe de formación de profesores e investigadores en matemática educatica, San José, 1989

[2] Programa de matemáticas de 1924.

Para segundo año:

1. Aritmética: Repaso y profundización de la materia de primer año. 2. Algebra: Polinomios, Fracciones. 3. Planimetría: Polígonos, circulos.

Para tercer año:

1. Aritmética: Regla de tres compuesta, aplicaciones al comercio. 2. Algebra: Proporciones, potencias, raíces, ecuaciones de primer grado con una incógnita. 3. Planimetria.

Para cuarto año:

1. Algebra: Logaritmos, sistemas de ecuaciones, ecuaciones de segundo grado. 2. Planimetría. 3. Trigonometría.

Quinto año: 1. Algebra. 2. Estereometría.

Sexto Año: Geometría.

Como se puede notar, los temas de estudio durante los seis años son estrictamente de las matemáticas de tipo "clásico"; a saber, aritmética, álgebra, geometría, vistas como campos separados. De hecho, en el mismo programa se establece cierto número de horas semanales a cada uno de los temas, por ejemplo, para tercer año dice, Aritmética (1 hora semanal), Algebra (1 hora semanal), Planimetría (2 horas semanales).

En 1921 se da otro programa, con los siguientes contenidos.
Para primer año: Aritmética, Algebra, Planimetría.

Para Segundo Año: Aritmética, Algebra, Planimetría (Profundización de los mismos temas dados en primer año)

Tercer Año: Algebra, Planimetría, Estereometría y Trigonometría.

Cuarto Año: Algebra, Trigonometría esférica.

Quinto Año: Algebra, Geometría Analitica.

En este programa hay cambios menores con respecto al de 1904, que se pueden ver en el detalle de los contenidos. Por ejemplo, se introduce el álgebra en primer año, mientras que el otro lo hacía en el segundo año. Sin embargo, vistos en forma global, los programas son prácticamente idénticos, solo hay una novedad en el de 1921, que es la introducción en el quinto año de algunos elementos de geometría analítica (lo que se sale un poco de lo puramente "clásico"). Este programa no presenta ningún tipo de explicaciones adicionales a los contenidos.

El programa de 1929 es más minucioso que el de 1921 en cuanto a los subtemas a desarrollar, pero es también idéntico a los anteriores.

Primer año: Aritmética, Algebra, Geometría
Segundo Año: Aritmética, Algebra, Geometría

Tercer año: Algebra y Geometría

Cuarto Año: Algebra, Geometría y Tiogonometría

Quinto Año: Algebra, Geometría del espacio, Trigonometría.

En este programa desaparece el tema de geometría analitica propuesto en el de 1921. Otra véz, aparte de cambios menores, que en general más bien se refieren a la posición de los subtemas, este programa es el mismo que el de 1904.

El programa de matemáticas de 1939 trae una introducción en la que se establecen algunas pautas a seguir por parte del profesor al enseñar la materia, da algunas ideas sobre lo que debe ser la enseñanza de la matemáticas y con respecto a esa idea se nota un cambio en relación con el programa de 1904. En este nuevo programa se establece la necesidad de que el profesor demuestre los teoremas en clase, pero:

"conocido el teorema, demostrada la verdad que encierra, inducida la fórmula aplicable no ha de exigir al alumno que recuerde esa demostración o esa investigación, pues así no se forman espíritus matemáticos: se general inconsistentes repetidores de verdades y procesos enunciados y seguidos por otros investigadores"[3]

Establece también como punto medular en la enseñanza de las matemáticas que los problemas deben ser el núcleo de la enseñanza a través de los cinco años y la necesidad de que estos respondan a situaciones reales. Este aspecto nos parece sumamente importante puesto que permite que el estudiante asimile mejor los conceptos y encuentre una motivación para el aprendizaje de las matemáticas. En cuanto a sus contenidos programáticos se establece:

Primer año: Aritmética, Algebra, Geometría

Segundo Año: Aritmética, Geometría

Tercer Año: Algebra, Geometría

Cuarto Año: Algebra, Geometría y Trigonometria

Quinto Año: Algebra, Geometría y Trigonometría.

Otra vez exactamente los mismos temas que en los anteriores.

---

[3] Programa de matemáticas de 1939.

El programa de matemáticas de 1951 es muy minucioso en cuanto a las indicaciones que hace sobre la forma en que debe enseñarse la materia. Trae una introducción bastante larga en la expone los propósitos de la materia y las ideas centrales que debe seguir el profesor a la hora de enseñarla. Nuevamente aquí se le da gran énfasis a los problemas relacionados con situaciones reales, al respecto dice:

"Los problemas de esta materia deben buscarse en la vida del comercio, la industria, la agricultura, en las funciones de comunicaciones aérea, marítima y terrestre, en la edificación, etc."[4]

Los contenidos program,áticos son los siguientes.

Primer Año: Aritmética

Segundo Año: Algebra y Geometría plana

Tercer Año: Algebra y Geometría Plana

Cuarto Año: Algebra y Geometría Plana

Quinto Año: Trigonometría plana y Geometría del Espacio.

Este es el último programa que tenemos hasta la reforma de 1964, en el se ve otra vez los mismos contenidos de los anteriores con leves variantes.

En realidad podemos decir que los programas de matemáticas prácticamente no evolucionaron desde 1904 hasta 1964, en todos se observan los mismos contenidos, siempre enmarcados dentro de las matemáticas de corte clásico: Aritmética, Algebra, Geometría, Trigonometría. En los dos últimos, sin embargo, se observa un deseo de dejar en claro cuales son los lineamientos generales que deben seguirse en la enseñanza de la materia, cosa que consideramos como un avance.

PROGRAMAS DE MATEMATICAS A PARTIR DE 1964

Como lo dijimos anteriormente, el programa que marca un cambio sustancial en cuanto a los contenidos y su enfoque es el de 1964.[5] Este programa trae una extensa introducción justificatoria y varias recomendaciones de como afrontar la enseñanza de los

[4] Programa de matemáticas de 1951

[5] Le llamamos de 1964 porque fue cuando se introdujo la reforma, en realidad el programa completo para los cinco años de secundaria, se introdujo gradualmente, iniciandose en 1964 para primer año, en 1965 para segundo año, etc.

temas. No entraremos aquí en detalle en lo que se refiere a su parte introductoria[6], sino que haremos un breve análisis de los contenidos programaticos, que son los que siguen.

Primer año: Las matemáticas como lenguaje y como método de pensamiento, Conjuntos, Números Naturales, Geometría de Posición, Números Racionales, Razones y Mediciones, Paralelismo.

Segundo año: Conjuntos, Números Enteros, Aritmética modular, Números Racionales, Angulos, Triángulos y cuadriláteros, Algebra, La circunferencia.

Tercer Año: Nociones elementales de lógica y conjuntos, Geometría, Números reales, Algebra, Estadística y Probabilidad.

Cuarto Año: Polinomios, Ecuaciones, Inecuaciones, Funciones, Progresiones, Trigonometría, Geometría, Logaritmos.

Quinto Año: Estructuras algebraicas, Números complejos, Trigonometría.

Como vemos, este programa sí difiere sustancialmente de los anteriores. Aparece una buena cantidad de temas por primera vez, tales como: conjuntos, lógica, funciones, estadística, probabilidades, progresiones y estructuras algebraicas. Por otra parte, observando el detalle de los temas se nota un enfasis en ver los temas tradicionales vestidos con este nuevo ropaje del algebra abstracta y de la teoría de conjuntos, como medio unificador de las diferentes ramas de la matemática, todo claramente dentro del marco de la matemática moderna.

El programa de 1972 trae una breve presentación en la que se exponen algunas ideas para tener en cuenta lo que debe ser la enseñanza de la matemática. Su idea fundamental es que la matemática debe lograr que el alumno "aprenda a aprender", o sea, debe estar dirigida preferiblemente a su aspecto formativo. Dice que "tiene como finalidad básica ayudar al alumno a pensar en forma lógica y crativa, además, presenta un curriculum matemático con conjuntos, números, relaciones, operaciones y símbolos que le permiten expresar de mejor manera sus ideas matemáticas"[7]. Más adelante expone algunas ideas análogas a las del programa de 1964. A continuación presentamos en resumen de los contenidos programáticos.

Primer año: Idea de lo que es matemática, bosquejo histórico, Nociones de Conjuntos, Números Naturales, Numeros cardinales, Propiedades de los números, números racionales, razones y medi-

---

[6] Vea Barrantes, H. y Ruiz, A. Análisis Programa de Matemáticas año 1964.

[7] Programa de matemáticas de 1972

ciones, Números Enteros.

Segundo Año: Números Racionales, Algebra, Elementos de Geometría.

Tercer Año: Números reales, Elementos de Geometría, Algebra.

Cuarto Año y Quinto año: Funciones, Polinomios, Fracciones, Inecuaciones, Logaritmos,

En esta época había materias que el estudiante elegía al llegar a cuarto año, entre ellas estaba matemática, y aunque todos los alumnos debían recibir tres lecciones de matemática, algunos recibían más si escogían matemática como electiv. En general, los profesores hacían sus propios programas de matemática optativa basados en Estructuras algebraicas, Matrices, Estadistica y Probabilidades y Elementos de Calculo Infinitesimal.

Este programa sigue las características generales del de 1964; es decir, es un programa de matemática de corte modernista. Sin embargo se puede notar que hay un menor énfasis en cuanto a conjuntos, el otro programa tenia conjuntos en los tres primeros años, este lo tiene solo en el primero. Sin embargo, esto no es una consesión, lo que sucede es que a estas alturas la enseñanza de la teoria de conjuntos había llegado hasta a las escuelas primarias, así se indica en la presentación de este programa y de este modo justifica la poca presencia de los conjuntos entre los contenidos. Al respecto dice

"En los dos primeros ciclos ¡la escuela primaria¿ el Programa se ha extendido más allá de la Aritmética: obsérvense, por ejemplo los contenidos sobre Conjuntos y Geometría y el empleo de formas proposicionales desde el inicio de la escuela. Todo da una idea de la amplitud y enriquecimiento que ha tenido el mismo"[6]

El último programa que tenemos es el de 1979, este en su introducción es prácticamente lo mismo que el de 1972. Sus contenidos programáticos son:

Sétimo Año[7]: Idea de lo que es la matemática, Nociones de conjuntos, Números Naturales, Teoría de Números, Números Enteros,

Octavo año: Números Racionales, Algebra, Geometría.

Noveno año: Números reales, Potencias y radicales, Geometría, Algebra.

---

[6] Program de matemáticas, 1972

[7] En la actualidad la nomenclatura para los años de estudio cambió con respecto a la anterior, y se sigue una numeración corrida desde el inicio de la primaria hasta el final de la secundaria, así, sétimo año es lo que anteriormente se conocía como primer año de secundaria, etc.

Décimo y Undécimo año: Funciones, Logaritmos, Geometría y Trigonometría.

Este programa difiere muy poco del de 1972, excepto en la ubicación de unos pocos temas.

En síntesis los programas de 1964 en adelante mantienen su marcada orientación de corte modernista, con muy breves cambios desde esa fecha hasta ahora.

La principal desventaja de esta situación, creemos, es que el alumno aprende una gran cantidad de simbología y lenguaje sin adquirir verdaderos conocimientos, la resolución de problemas ha dejado de ser lo importante, para dejar paso al aspecto puramente formal. Los nuevos programas que se elaboren, deben contemplar esta situación y reflejarla tanto en sus contenidos, como en sus recomendaciones de tipo filosófico y didáctico.

La historia de los programas ofrece una aproximación a lo que ha sido la enseñanza de las matemáticas y su evolución. Podemos ver retratado en esos lineamientos lo que las personas involucradas en las decisiones asumieron como lo que se debía enseñar. No obstante es necesario señalar que se trata de una visión parcial, porque muchos de los puntos planteados nunca fueron enseñados o la forma en la que esto se hizo difiere a lo largo del periodo de validez del programa o en las diferentes latitudes en las que se aplicaba.

La realidad es que para tener una mejor pintura es necesario recurrir a otros elementos como son lo textos. Esto es clave. Incluso se puede pensar en relaciones distintas entre programas y textos en las diferentes ocasiones.

En este artículo, sin embargo, lo que hemos querido reseñar es la evolución de los programas en este siglo, que resulta muy interesante sobretodo en relación con la reforma de las matemáticas modernas de los años 60.

Los programas fueron esencialmente iguales hasta el año 1964. Es decir, esto muestra que no se trató en este último caso de una evolución gradual de unos contenidos a otros. Que no se trató de un cambio enraizado en las condiciones locales, sino externas, como hemos analizado en otras ocasiones.

La revolución del 64 fue realizada con base en las influencias externas y los requerimientos de otras latitudes. Nuestro país adoptó estas reformas muy rápidamente por razones circunstanciales. Pero la naturaleza del cambio evidenció la debilidad de las estructuras cúlturales y académicas nacionales, que fueron incapaces de resistir de alguna manera la presión externa. No es este el lugar donde vamos a analizar por qué esta refroma encierra muchos de los elementos básicos de la actual crisis en la enseñanza de las matemáticas. Solo hemos querido mencionar la forma en que históricamente fue realizado.

Para concluir, queremos señalar que pensamos que el actual programa de matemáticas para scundaria debe ser transformado. Pensamos que las matemáticas modernas ya jugaron su papel, psositivo y negativo, y que ahora es necesario reorientar la enseñanza de las matemáticas en otra dirección. Una dirección que vincule las matemáticas a la realidad, que abra lugar a la heurística y a la intuición. Unas matemáticas que dejen de ser un obstáculo para dotarnos de una base cientifica y tecnológica fuerte y capaz de fecundar el progreso nacional.

BIBLIOGRAFIA

-Arias. Rosario y otros. LA MATEMATICA MODERNA. UNA PROBLEMATICA. Tesis de grado. UCR. San José Costa Rica, 1979.

-Barrantes, H y Ruiz, A. LA REFORMA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS EN COSTA RICA. Memorias de la Tercera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigadores en Matemática Educativa, San José, julio 1989

-Castelnuovo, Emma. DIDACTICA DE LA MATEMATICA MODERNA. México: Trillas, 1973.

-Consejo Nacional de maestros de matemáticas de los USA. LA REVOLUCION DE LAS MATEMATICAS ESCOLARES. Washington: OEA, 1963.

-Fallas, Marlene y otros. MODERNISMO DE LA MATEMATICA EN COSTA RICA. Tesis de grado UCR, San José, Costa Rica.

-González, Fernando. EDUCACION COSTARRICENSE. San José: EUNED, 1984.

-Fehr, Camp y Kellog. LA REVOLUCION DE LAS MATEMATICAS ESCOLARES (segunda parte). Washington: OEA, 1971.

-Fehr, Howard (editor). EDUCACION MATEMATICA EN LAS AMERICAS. Informe de la Segunda Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática, Lima, Perú, 12-15 diciembre 1966. Buenos Aires: OEA, 1968.

-Kuntzmann, Jean. ¿ADONDE VA LA MATEMATICA? PROBLEMAS DE LA ENSEÑANZA Y LA INVESTIGACION. México: Edit. Siglo XXI, 1978.

-Jones, Henry & Rodriguez, Analive. HISTORIA CRITICA DE LOS DISTINTOS PROGRAMAS DE ENSEÑANZA SECUNDARIA QUE HA HABIDO EN MATEMATICAS EN EL SIGLO XX. Tesis de grado. UCR., San José, Costa Rica, 1982.

-Ministerio de Educación Pública. Programa de Matemáticas, 1964

-Ministerio de Educación Pública. Programa de Matemáticas, 1972

-Ministerio de Educación Pública. Programa de Matemáticas, 1979

-Piaget, J. y otros. LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS MODERNAS. Madrid: Alianza, 1980.

-Ruiz, Angel. "Implicaciones teórico-filosóficas del Teorema de Gödel en el paradigma racionalista sobre las Matemáticas". REVISTA DE FILOSOFIA de la Universidad de Costa Rica. Vol. XXIII, N.58, Diciembre 1985, San José, Costa Rica.

-Ruiz, Angel. "El factor paradojas y el factor Gödel en los Fundamentos de las Matemáticas". REVISTA DE CIENCIA Y TECNOLOGIA de la UCR, Vol. IX(1-2), 1985, San José, Costa Rica.

-Ruiz, A. "Fundamentos para una nueva actitud en la enseñanza moderna de las Matemáticas Elementales", BOLETIN de la Sociedade Paranaense de Matemática, Vol. VIII(1), Junio 1987, Curitiba, Brasil.

-Ruiz, A. "Epistemological Constituents of Mathematics Construction. Implications in its teaching", PROCEEDINGS of the XI International Conference on the Psichology of Mathematics Education, Julio 1987, Montreal, Canadá.

EL PROGRAMA DE MATEMATICAS DEL AÑO 1964: UN BALANCE

Hugo Barrantes/Angel Ruiz Zúñiga
Escuela de Matemáticas
Universidad de Costa Rica

RESUMEN

En este trabajo se analizan algunas de las ideas contenidas en el documento escrito por la Comisión Redactora de los programas de matemática para la enseñanza media de Costa Rica, que se comenzaron a implementar en 1964. El análisis se hace a la luz de las corrientes que proponían la implantación de las matemáticas modernas en la enseñanza, en Europa y Estados Unidos.

INTRODUCCION

Dentro de lo que se puede considerar como la evolución histórica de los programas de matemáticas para la enseñanza media en Costa Rica, uno de los hitos más importantes lo representa el programa aprobado por el Consejo Superior de Educación el 9 de diciembre de 1963 (acta N°94, artículo N°2), porque representa un cambio sustancial de orientación en cuanto al tipo de matemáticas a enseñar, tanto que se puede hablar en general de los programas anteriores a este y los posteriores al mismo como de dos etapas diferentes en cuanto a la enseñanza de la matemática de nivel medio en el país. La Comisión Redactora de dichos programas lo comprendió de esa forma y como preámbulo a la lista de contenidos escribió un ensayo, inusualmente extenso en este tipo de documentos, que consta de dos partes tituladas: "Los programas de matemáticas en una enseñanza media renovada", y "Características de un buen programa de matemáticas para la enseñanza media y consideraciones metodológicas correlativas"; en el cual se exponen y justifican algunas ideas que consideraron importantes y que sustentarían los cambios introducidos con respecto a los programas tradicionales. Nos proponemos efectuar un análisis de estas ideas.

ANTECEDENTES

Durante el siglo XIX se desarrolló una nueva forma de hacer matemáticas, en la que se desarrolla enormemente la abstracción y donde nace la matemática pura, de esta manera el mayor peso se da en los aspectos formales, estructurales y axiomáticos; ésta orientación se prolonga hasta el siglo XX.

Sin embargo la matemática que se enseñaba en la escuela primaria y secundaria seguía siendo de corte tradicional, basada en aritmética, álgebra y geometría, considerados como campos aislados..

Esta situación provoca en Europa y Estados Unidos, en la década de los 50, una corriente renovadora de los programas de matemática de la Enseñanza Media que intenta reflejar en los mismos las ideas más impórtantes de la matemática pura como lo son el estudio de la teoría de conjuntos, un lenguaje axiomático riguroso y la comprensión de la matemática como una sola disciplina teórica. A esta forma de hacer matemática se le llama matemática "moderna", en contraposición a la matemática que se hacía anteriormente, es decir, la matemática "clásica".

Vamos a citar enteramente algunos párrafos que ilustran sobre este asunto y que escribimos el año pasado.

"Así, una de las conclusiones del Congreso Internacional de matemática Edimburgo, 1958, fue la de afirmar la necesidad de una reformulación de los métodos que se empleaban en las escuelas europeas para la enseñanza de las matemáticas.

La Organización de Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE) congregó a representantes de 20 paises con el fin de hacer un estudio a fondo del programa escolar de matemáticas en Francia. La evaluación del programa indicó que este era totalmente tradicional; lo mismo se podía decir de los demas paises europeos. Como consecuencia de esta constatación se llevó a cabo el Seminario de Royaumont, noviembre de 1959, cuyas conclusiones marcaron el rumbo que sirvió de base para la creación de un programa de matemáticas escolares totalmente moderno. En las conclusiones de este Seminario se establece la necesidad de elaborar un programa que combine los contenidos de las diferentes ramas de la matemática dándole unidad a esta disciplina, utilizando como conceptos fundamentales los de conjuntos, relaciones, funciones y operaciones, las estructuras fundamentales de grupo, anillo cuerpo y espacio vectorial; establece tambien la necesidad de adoptar el simbolismo moderno, dar mayor importancia al empleo de gráficas, la eliminación de gran parte del álgebra tradicional, la modificación de la geometría euclideana tradicional, etc.

A partir de esta fecha se realizaron diferentes conferencias y reuniones en diferentes lugares, con la participación de importantes matemáticos europeos y norteamericanos en donde se discutió sobre qué tipo de geometría enseñar, qué contenidos y métodos proponer para satisfacer las demandas del seminario de Royaumont, etc.. De esta forma, los diferentes países europeos implantaron la enseñanza de la matemática moderna en sus niveles primario y secundario. Ya sea como producto de congresos, reuniones, conferencias, o la cooperacion conjunta como en el caso de Noruega, Suecia, Dinamarca y Finlandia o por el empuje de algunas personas, como el caso de Papy en Belgica, etc.

En el caso de Estados Unidos el primer grupo que se interesó por poner al día los programas de matemáticas de las escuelas secundarias fue el Comité sobre matemáticas escolares de la Universidad de Illinois (UICSM).

Uno de sus principales esfuerzos fue el relativo a la precisión del lenguaje. Posteriormente fue la Comisión sobre Matemáticas del Tribunal de exámenes de ingreso en la Universidad la que publicó un informe donde destaca por primera vez la importancia de la aplicación de conceptos unificadores de la matemática como conjuntos, funciones, variable, estructura, etc. Entre 1959 y 1962 El Grupo de estudio de las matemáticas escolares (SMSG) publica libros de texto nuevos y material educativo dirigidos a profesores de enseñanza media, todo de acuerdo con la organización tradicional pero utilizando lenguaje y símbolos modernos .

Durante la segunda mitad de 1963 se llevó a cabo la conferencia de Cambridge que publica un informe titulado Goals for Schoool Mathematics.

En este se propone que los alumnos que hayan terminado el bachillerato deben tener la preparación matemática equivalemnte a tres años de estudio del nivel univesitario de ese momento. Este informe incitó a cambios y reformas de mayor alcance que las producidas por el SMSG. Este informe complementó y puso de relieve los movimientos similares llevados a cabo en Europa.

Como se ve en este rapidisimo vistazo a estos movimientos, los países que estaban a la vanguardia del desarrollo matemático mundial habían detectado que existia un divorcio sustancial entre las matemáticas que se enseñaban en los niveles primario y secundario, con respecto a lo que se hacía en matemática en ese momento, y trataban de remediarlo reformando los programas de estudio, adaptándolo a las nuevas ideas de la matemática, fundamentalmente en lo que se refiere a la unificación de los diferentes campos de esta disciplina a través de ciertos conceptos, lenguaje y notación.

Podemos señalar la existencia de dos centros fundamentales de gestión en la reforma de la enseñanza matemática: por un lado alrededor de Marshall Stone en USA, y por el otro el grupo famoso de matemáticos franceses llamado Nicolás Bourbaki. Se trataba de figuras sumamente importantes en las matemáticas. Su prestigio como matemáticos se convirtió en una base de apoyo extraordinaria para sus ideas sobre las matemáticas y sobre cómo se debía enseñar" [1].

En 1961 se lleva a cabo en Bogotá la Primera Conferencia Interamericana sobre la Enseñanza de la Matemática, con la asistencia de delegados de numerosos países americanos y algunos matemáticos europeos, primordialmente del grupo Bourbaki, en la que se recomienda a los diferentes países llevar a cabo las acciones necesarias para efectuar el cambio de la enseñanza de la matemática en la educación media, de la matemática "clásica" a la matemática "moderna".

En esta conferencia paticipa un costarricense, el profesor Bernardo Alfaro, que trae esas ideas a nuestro país y posteriormente, cuando forma parte de la Comisión redactora de los programas de matemáticas aprobados en 1963, las plasma en dichos programas y de esta manera, en forma oficial, Costa Rica es uno de los primeros países latinoamericanos que implanta la matemática moderna en su enseñanza media.

LAS IDEAS DE LA REFORMA EN EL PROGRAMA

El documento comienza exponiendo algunas ideas generales sobre la enseñanza de la matemática en diferentes aspectos, como son el aspecto formativo, el aspecto cultural y el instrumental y práctico. En esta parte se hacen pocas referencias a la matemática moderna, especialmente en lo que se refiere al por qué de la importancia de la teoría de conjuntos, al respecto se pone como ejemplo:

> "Las instrucciones para el manejo de un instrumento que funciones con circuitos electrónicos, suelen contener referencias a sistemas binarios de numeración o conceptos de la Teoría de Conjuntos, que no solo el técnico encargado de las reparaciones sino el usuario también, pueden requerir entender. Los ejemplos concretos, por lo demás, han de constituir el método adecuado para introducir, gradualmente, los conceptos abstractos con que trabajan las Matemáticas modernas"[2]

En esta cita se observa ya la orientación que va a tener el resto

---

[1] Para un desarrollo más amplio, véase nuestro artículo "Historia de la implantación de las matemáticas modernas en la educación costarricense". MEMORIAS del Tercer Congreso Centroa,meriçano y del Caribe de Historia de la Ciencia y la Tecnología. Mayo 1989, San José, Costa Rica.

[2] Ministerio de Educación Pública. Programa de Matemáticas. San José, Costa Rica. 1964, pág. 8.

del documento y el programa propiamente dicho, es decir, basado en los conceptos de la matemática moderna.

En la segunda parte del documento se pone de manifiesto la inmensa influencia de las corrientes renovadoras de la enseñanza de la matemática a nivel mundial y el papel crucial que ellas jugaron en la redacción de los programas a que hacemos referencia.

Esta parte comienza diciendo:

> "Desde hace bastante tiempo en todas partes vienen señalándose serias deficiencias en los programas vigentes de Matemáticas para la Enseñanza Media"[3]

Poco más adelante dice:

> "Otra de las deficiencias señaladas en los programas vigentes se refiere a lo que podría llamarse un anacronismo entre la materia que se enseña y las Matemáticas que se cultivan y se aplican actualmente"[4]

En esta cita se ve con claridad que la justificación más importante que se daba a nivel mundial, para introducir la matemática moderna, a saber la no coincidencia entre la matemática que se enseñaba en secundaria y la que se hacía a nivel superior, es adoptada aquí. Sin embargo creemos que posiblemente no se tenía suficiente claridad sobre lo que esto significaba, puesto que para esa época el desarrollo de la matemática en la Universidad de Costa Rica y en el país en general era escazo.

Reafirmando la idea expuesta en la cita anterior y poniendo de manifiesto la necesidad de introducir algunos conceptos nuevos que permitan estudiar los mismos temas bajo otro punto de vista, el documento establece más adelante que:

> "Por ello es que hoy día resulta tan anacrónica como inconveniente la enseñanza de unas matemáticas que, para usar de nuevo el ejemplo anterior, presente el estudio de una Geometría como fue expuesto por Euclides, haciendo olvido de que desde hace mucho tiempo existen métodos para alcanzar algunas de sus verdades, más fácil y agradablemente y, principalmente, que esos métodos -analíticos o vectoriales- son de aplicaciones muy variadas en otros campos."[5]

---

[3] Idem. pág. 9

[4] idem. pág 9

[5] idem pág. 10

Tal como lo indicamos en los antecedentes, otra de las ideas fundamentales de las corrientes renovadoras de la enseñanza de las matemáticas era la unidad de las diferentes ramas de la matemática y la importancia de la teoría de conjuntos como lenguaje unificador. Esta otra idea queda reflejada en el documento que comentamos en el siguiente párrafo:

> "Un buen programa de Matemáticas ha de tomar en cuenta que las diversas ramas tradicionales de esta ciencia han adquirido recientemente una unidad casi insospechada antaño: que los límites que separan la Geometría del Algebra y el Análisis, son casi indistinguibles y que igualmente, la Aritmética no puede estudiarse hoy a fondo separadamente del Algebra y el Análisis; que el estudio de conjuntos aparece hoy como base común de todas las Matemáticas y que ese estudio se mezcla íntimamente con el de la lógica."[6]

El documento continúa indicando que las recomendaciones metodológicas generales para la enseñanza de la matemática deben estar basadas en las ideas expuestas y propone que se enseñe la matemática de manera que despierte el interés del estudiante, que debe hacerse ver como uno de los productos más insignes del espíritu humano, valorizando así las referencias hisstóricas y finalmente que debe insistirse en ver a la matemática como la herramienta de mayor aplicación en las ciencias.

Hacia el final de esta parte del documento se menciona el hecho de que el tipo de reforma que se pretende implantar con estos programas está basada en estudios realizados por matemáticos distinguidos del continente, que han elaborado informes y recomendaciones que avalan la enseñanza de este tipo de matemáticas:

> "Esos informes y recomendaciones fueron a su vez el fruto de varios años de estudio y consultas y, una vez publicados, han dado lugar a la preparación de textos para los estudiantes y guías para los profesores, preparados con base en dichas recomendaciones. Luego esos textos han sido usados extensamente, ... Finalmente, varios países del continente han iniciado ya las reformas de sus programas de Matemáticas en la Enseñanza Media, y han elaborado textos para los alumnos; todo con base en las ideas, hoy día muy claras, de lo que debe ser una enseñanza de las Matemáticas acorde con los adelantos de esta ciencia y con las necesidades de la época."[7]

La cita anterior aclara perfectamente qué es lo que ha servido de base para la implantación de la Matemática Moderna en los progra-

---

[6] idem pág. 11

[7] idem pág. 14

mas de Enseñanza Media del pais. Como se ve de aqui, los estudios indicados no se llevaron a cabo en Costa Rica, sino en otros países, y las recomendaciones, pensadas para otras realidades, fueron adoptadas sin un criterio critico, a pesar de lo que se dice en el último párrafo:

> "Por ello, si los nuevos programas de Matemáticas para la Enseñanza Media en Costa Rica han de tener un aspecto nuevo, ello no es debido a un prurito de reforma, sino que responde a una necesidad imperiosa: lograr una enseñanza más eficaz y útil de las Matemáticas"[@]

La influencia de la corriente modernista en las matemáticas escolares se nota fuertemente en este documento.

Es evidente que algunos de los argumentos usados para defender la reforma eran válido. Más bien sus considerandos. La enseñanza clásica de las matemáticas era inapropiada. Los aspectos más abstractos y modernos debian incluirse en una nueva educación matemática. Pero también habia que integrar unas matemáticas ligadas a la realidad y a las otras ciencias, era necesario encontrar el puente entre la abstracción y la intuición. Para eso había que asumir una visión de las matemáticas diferente. Eso no se dió ni en Costa Rica ni en el resto del mundo. Precisamente ese es uno de los grandes retos que la comunidad de matemáticos tenemos por delante.

El programa del 64 puede verse como un lugar para re-pensar nuestras ideas sobre la naturaleza de las matemáticas, y para la búsqueda de nuevos derroteros y actitudes para enfrentar los problemas. Esa ha sido nuestro propósito en la redacción de este ensayo.

BIBLIOGRAFIA

-Arias. Rosario y otros. LA MATEMATICA MODERNA. UNA PROBLEMATICA. Tesis de grado. UCR. San José Costa Rica, 1979.

-Barrantes, H y Ruiz, A. LA REFORMA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS EN COSTA RICA. Memorias de la Tercera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigadores en Matemática Educativa, San José, julio 1989

-Castelnuovo, Emma. DIDACTICA DE LA MATEMATICA MODERNA. México: Trillas, 1973.

-Consejo Nacional de maestros de matemáticas de los USA. LA REVOLUCION DE LAS MATEMATICAS ESCOLARES. Washington: OEA, 1963.

[@] idem pag. 14

-Fallas, Marlene y otros. MODERNISMO DE LA MATEMATICA EN COSTA RICA. Tesis de grado UCR, San José, Costa Rica.

-González, Fernando. EDUCACION COSTARRICENSE. San José: EUNED, 1984.

-Fehr, Camp y Kellog. LA REVOLUCION DE LAS MATEMATICAS ESCOLARES (segunda parte). Washington: OEA, 1971.

-Fehr, Howard (editor). EDUCACION MATEMATICA EN LAS AMERICAS. Informe de la Segunda Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática, Lima, Perú, 12-15 diciembre 1966. Buenos Aires: OEA, 1968.

-Kuntzmann, Jean. ¿ADONDE VA LA MATEMATICA? PROBLEMAS DE LA ENSEÑANZA Y LA INVESTIGACION. México: Edit. Siglo XXI, 1978.

-Jones, Henry & Rodriguez, Analive. HISTORIA CRITICA DE LOS DISTINTOS PROGRAMAS DE ENSEÑANZA SECUNDARIA QUE HA HABIDO EN MATEMATICAS EN EL SIGLO XX. Tesis de grado. UCR., San José, Costa Rica, 1982.

-Ministerio de Educación Pública. Programa de Matemáticas, 1964

-Piaget, J. y otros. LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS MODERNAS. Madrid: Alianza, 1980.

-Ruiz, Angel. "Implicaciones teórico-filosóficas del Teorema de Gödel en el paradigma racionalista sobre las Matemáticas". REVISTA DE FILOSOFIA de la Universidad de Costa Rica. Vol. XXIII, N.58, Diciembre 1985, San José, Costa Rica.

-Ruiz, Angel. "El factor paradojas y el factor Gödel en los Fundamentos de las Matemáticas". REVISTA DE CIENCIA Y TECNOLOGIA de la UCR, Vol. IX(1-2), 1985, San José, Costa Rica.

-Ruiz, A. "Fundamentos para una nueva actitud en la enseñanza moderna de las Matemáticas Elementales", BOLETIN de la Sociedade Paranaense de Matemática, Vol. VIII(1), Junio 1987, Curitiba, Brasil.

-Ruiz, A. "Epistemological Constituents of Mathematics Construction. Implications in its teaching", PROCEEDINGS of the XI International Conference on the Psichology of Mathematics Education, Julio 1987, Montreal, Canadá.

ELEMENTOS EN TORNO A LA REFORMA DE LAS MATEMATICAS MODERNAS EN COSTA RICA

Pedro Rodriguez
Angel Ruiz Zúñiga
Escuela de Matemática/ Universidad de Costa Rica.

RESUMEN

De lo que se trata en este trabajo es de introducir algunos elementos de análisis sobre la reforma de las matemáticas que se hizo en la década de los sesenta en Costa Rica, y que todavía tiene implicaciones en la vida de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en Costa Rica.

Tradicionalmente las matemáticas nacieron de la necesidad de entender el mundo físico circundante, y así surgieron sistemas para contar y medir (los números enteros y los números racionales) y una idealización del espacio físico (la geometría euclideana).

Ulteriores investigaciones y generalizaciones llevaron a disciplinas más abstractas denominadas álgebra y análisis. Hace más de trescientos años el desenvolvimiento gradual de estas disciplinas condujo a la organización tradicional del contenido de las matemáticas en cuatro ramas principales: aritmética, algebra, geometría y análisis, cada una de las cuales se consideraba un campo de investigación cerrado y aislado.

Fue natural que esta organización tradicional de las matemáticas se convirtiese en el modelo adoptado en el plan de estudios de las matemáticas escolares. A la vez, resulta natural que la práctica matemática avanzada haya constituido el punto de referencia esencial para diseñar los programas de enseñanza de las matemáticas en las diferentes escuelas de primaria y secundaria.

Este saber tradicional y la forma en que estaba organizado se conservaron constantes en el plan de enseñanza de todas las escuelas del mundo desde el comienzo del siglo XX.

MOVIMIENTOS HACIA LA REFORMA:

Desde finales del siglo XIX y durante nueve décadas del siglo actual, se han dado pasos gigantescos en cuanto a la manera de concebir y enseñar estas matemáticas tradicionales.

La explosión en el saber matemático, iniciada en los centros de investigación de posgrado universitario, pronto fue infiltrando los programas de licenciaturas de las universidades;

sin embargo se detuvo allí y como consecuencia se fue abriendo una brecha entre el contenido de la enseñanza universitaria y el de las escuelas secundarias.

El primer grupo americano de profesores que se percató de tal situación y trató de remediarla fue el Comité sobre Matemáticas Escolares de la Universidad de Illinois (UICSM), el que volcó su atención hacia la necesidad de poner al día los programas de matemática de segunda enseñanza, adecuándolos con las ideas contemporáneas.

Entre 1959 y 1962 como resultado de los esfuerzos del Grupo de Estudio de las Matemáticas Escolares (SMSG), se publican novedosos libros de texto y aparecen materiales didácticos para los profesores de los grados de sétimo a undécimo inclusive.

Conseguidas al parecer la reforma y puesta al día del estudio de las matemáticas, los educadores recibieron una nueva sacudida al aparecer el informe de la conferencia de Cambridge (EUA) celebrada en 1963. Este informe titulado "Metas de las matemáticas escolares" contiene un programa ideal para el futuro, excluyéndose de él a la generación venidera porque no se podía disponer en plazo tan corto de profesores calificados para enseñarlo.

Este programa aspira a que el alumno que haya terminado el bachillerato tenga la preparación matemática correspondiente a tres años de estudio en el nivel universitario.

Estas ambiciones parecieron excesivas, fuera de la realidad y sin duda resultaron incomprensibles para la mayoría de los profesores de la enseñanza secundaria; pese a ello, su mérito consistió en poner a prueba a los educadores responsables e instarlos a cambios y reformas de mayor alcance que las conseguidas por mediación del "Grupo de Estudio de las Matemáticas Escolares (SMSG)".

Mientras tanto, en Europa, el impulso inicial de reforma de la enseñanza de las matemáticas, se dió al inicio de 1958; con ocasión del Congreso Internacional de Matemáticas realizado en Edimburgo.

La necesidad de reformar los métodos empleados en las escuelas europeas, tuvo su continuidad cuando la OCDE (Organización de Cooperación y Desarrollo Económico) congregó también en 1958, representantes de veinte paises, quienes se dedicaron al estudio del programa total de matemáticas de Francia, desde la L'Ecole Maternelle (edad de 3 a 5 años) hasta L'Ecole Normal Supéreure (de formación de profesores). En conjunto, tal programa resultó ser tradicional en extremo, riguroso, selectivo e incapaz de proporcionar la cantidad de profesores con preparación adecuada en matemática, para satisfacer las necesidades económicas del país. Es más, se estuvo de acuerdo en que lo dicho respecto a Francia, era aplicable también a otros paises europeos.

Como consecuencia de esta reunión, la OCDE planeó y llevó a cabo el ya famoso Seminario de Royaumont, celebrado en noviembre de 1959. El informe de él emanado (Nuevo punto de vista sobre las Matemáticas Escolares) marcó el rumbo que, tras cinco años de refinamiento y coordinación, sirvió de base sólida para la creación de un programa de matemáticas escolares genuinamente modernos.

Con posteridad al Seminario de Royaumont, se realizaron diferentes encuentros: En mayo de 1960 se celebró en Dinamarca una conferencia auspiciada por la Comisión Internacional sobre Enseñanza de la Matemática (ICME); en 1962 en Bolonia Italia tuvo lugar otra conferencia similar patrocinada por la misma ICME; en 1960 se publica "Sinopsis sobre las matemáticas modernas en la Escuela Secundaria" resultado de un encuentro de matemáticas en Yugoslavia; también en 1960 se forma el "Comité Nórdico para la Modernización de las Matemáticas Escolares", cuyo objeto fue escribir y ensayar libros didácticos de matemáticas dirigidos a la población escolar de los paises escandinavos. Estos distintos acontecimientos tuvieron como marco común la puesta en marcha de los acuerdos emanados del Seminario de Royaumont, en partiĉular, pretendieron dar luz sobre: ¿Qué geometría debe enseñarse en la escuela secundaria? ¿Cómo unificar un plan de estudios para la enseñanza secundaria que contenga álgebra, geometría, elementos de análisis y matemáticas aplicadas, todos en íntima y fecunda relación?

La conferencia decisiva de la década 1960-1969 se celebró en Atenas en 1963 convocada por la OCDE con el objeto de reunir lo aprendido en años anteriores de experimentación. El informe de esta conferencia se titula "Matemáticas de Hoy, una Guía para Profesores" y contiene lo que debe abarcar todo plan de estudios de las escuelas secundarias y cómo este debe organizarse en una sucesión pedagógicamente articulada.

Y MIENTRAS TANTO EN COSTA RICA

La enseñanza de la matemática en el ámbito costarricense no pudo estar, ni estuvo ajena a todo este anhelo reformista.

La mayor reforma de los últimos tiempos en la enseñanza de las matemáticas en Costa Rica se dió en 1964; y sin duda alguna, tuvo la influencia del "Grupo de Estudio de las Matemáticas Escolares" (SMSG). Por primera vez en Costa Rica se introduce en la enseñanza secundaria el simbolismo moderno de conjuntos, relaciones y funciones, sistemas de numeración, etc.

La reforma de las matemáticas de los años sesenta en Costa Rica tiene varios elementos en su gestación, que aparecen entrelazados. En primer lugar, aparece la influencia externa directa por la vía de las llamadas Conferencias Interamericanas de Educación Matemática; en segundo lugar, la existencia de un cambio general en la educación costarricense que presionaba por reformas en todas sus dimensiones; la existencia de un grupo de profesores de matemática que asumieron la reforma en el país (ligados al llamado Departamento de Fisico-Matemática de la Universidad de Costa Rica). Y aparte de lo anterior, la predominancia de una visión ideológica sobre la naturaleza de las matemáticas, que enfatiza los aspectos más abstractos y puros de estas en detrimento de las partes más intuitivas y heurísticas.

La primera Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM) se dió en Bogotá, Colombia, en 1961. Y la segunda en Lima, Perú, en 1966. En ambas la consigna general era hacer un revolución radical en las matemáticas escolares, urgentemente y sin mucha discusión. Esta era una reforma que aparecía promovida por matemáticos de primera línea en el mundo y que, usando su prestigio, presionaban por un tipo específico de enseñanza. Los principales protagonistas de esto eran Marshall Stone en los Estados Unidos, y el grupo Bourbaqui en Francia y Europa.

Los representantes de los diferentes países de América Latina en las conferencias mencionadas no eran -en general- muy sólidos matemáticamente, ni estaban en condiciones para ir en contra de lo que aparecía como emanado de lo mejor del mundo matemático del planeta. Los profesores latinoamericanos de matemáticas que participaron no eran -en general- matemáticos famosos y de una gran producción teórica. Volvieron a sus paises con la línea de establecer las nuevas matemáticas rápidamente, importar textos traducidos de los usados en los Estados unidos o Europa o hacer textos similares para el país.

Es interesante señalar la influencia especial de Stone quien fuera el primer presidente del CIAEM. Así como del grupo bourbaquiano: Dieudonné tuvo una gigantesca influencia en América Latina a través de su estancia por esos tiempos en Buenos Aires en un famoso curso de matemáticas para estudiantes latinoamericanos (quienes luego ocuparían posiciones de importancia en otros países de América Latina). De hecho, la creación del Centro Latinoamericano de Matemáticas e Informática en Buenos Aires (con financiación y patrocinio de la OEA), tuvo desde sus orígenes una gran influencia de estas corrientes reformadoras en las matemáticas. Este centro, creado en la época dorada de la vida intelectual argentina, fue muy importante para el desarrollo de la matemática latinoamericana (especialmente en América del Sur).

En Costa Rica esta reforma va a estar asociada en esta primera etapa esencialmente a don Bernardo Alfaro. Este fue un gran maestro de las matemáticas, que -por diversas razones- asumió la tarea de implantar la reforma. [1]

En los años setenta, se completa este proceso cuando se hace dominante en la Escuela de Matemáticas de la Universidad de Costa Rica, la gran formadora de matemáticos y profesores de matemáticas, una tendencia intelectual congruente y defensora con el nuevo tipo de matemáticas. Esta nueva etapa es la que hace del purismo en matemáticas la quintaesencia de las mismas, y la que promueve un aislamiento de los matemáticos del resto de la comunidad intelectual y científica del país. Es la etapa en la que se hace creer a los matemáticos y a los estudiantes de matemáticas que son los mejores cerebros del país (por definición), y que el resto de profesiones son para gente de menor valía intelectual. Es la etapa en la que se propagaba que

[1]Para un desarrollo mayor de este tema, vease el ensayo de Hugo Barrantes y Angel Ruiz: "La implantación de las matemáticas modernas en la educación costarricense".

cualquier persona por el hecho de estudiar matemáticas era capaz de entender, ipso facto, cualquier otra rama del saber, aunque esto en realidad ni siquiera fuera considerado importante por los abanderados de esta ideología. Es la etapa en que se abre una gigantesca separación entre las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas. Es en esta época cuando a los estudiantes inteligentes se les indica que deben estudiar matemáticas puras, y a los no inteligentes enseñanza de las matemáticas. Esta nueva etapa fue decisiva en la formación de los profesores de matemáticas y los matemáticos del país, así como definió en lo esencial las líneas de evolución de las matemáticas y su enseñanza hasta nuestros días.

Es necesario reconocer que esta reforma pudo pasar sin problemas gracias a que la ideología dominante sobre la naturaleza de las matemáticas ha sido lo que en otra parte se ha llamado "paradigma racionalista sobre las matemáticas", que hace de estas conjuntos de resultados infalibles, de validez absoluta, y obtenidas por el decurso autónomo y etéreo de la mente sin ligamen con la realidad. Es la combinación de una sobrevaloración de la razón y de la deducción, así como de la axiomática en la consideración de la naturaleza de las matemáticas. [1]

En los años treinta se dió con los teoremas de Gödel un golpe a estas visiones racionalistas y formalistas que dominaron mucho de la famosa época de los fundamentos de las matemáticas en las primeras décadas de este siglo, pero estos importantes resultados no tuvieron una comprensión filosófica profunda. Tan es así que se dió esta reforma, así como esta visión sigue teniendo una gran cantidad de adeptos en la comunidad intelectual internacional. [2]

En Costa Rica, debemos señalar que el proceso evaluativo que debió acompañar a la mencionada reforma fue muy leve, o no existió. Como consecuencia, la sociedad costarricense presenció el trueque de la habilidad en el manejo de números y cantidades y el planteo y solución de problemas por la manipulación de definiciones y proposiciónes incomprensibles y de dudosa eficacia en el desarrollo del intelecto.

Esto por lo demás siempre ha sido característico en nuestros países: aceptar como dogma verdadero lo que nos viene de afuera. Es natural que la mayor densidad de ideas deba venir de los países que tienen un mayor desarrollo. Esto es una realidad histórica. Pero la ausencia de crítica y de adecuación de ideas a nuestra realidad ha puesto obstáculos enormes a nuestro progreso. En el caso de las ciencias y de las matemáticas en particular no se ha dado la excepción. Tal vez en esto tenga mucho que ver la profundidad de la dominación colonial ibérica, como de la debilidad civil y cultural de los gestores de la independencia latinoamericana.

Desde hace varios años se reconoce la crisis en la que vive la enseñanza de las mtemáticas modernas. Son muchos

[1] Se puede consultar el artículo de A. Ruiz "Implicaciones teórico-...", o en el libro LA FILOSOFIA DE LAS MATEMATICAS Y EL ANALISIS DE TEXTOS DE MATEMATICAS..., mencionados en la bibliografía.

[2] Idem.

los congresos, seminarios y actividades análogas, nacionales o internacionales, que han abogado por un volver al planteo y solución de problemas en matemática, por una enseñanza de la matemática más ligada al entorno social del educando, por un cambiar la excesiva abstracción por el estudio de modelos concretos de aplicación de la matemática.

No cabe duda de que es necesario méjorar la eficiencia de la enseñanza de la matemática en la escuela secundaria costarricense; debe lograrse aumentar el acervo cognoscitivo de nuestros egresados bachilleres de enseñanza media y lograr una mayor profundidad de los contenidos.

En la actualidad, salvo las honrosas excepciones, los estudiantes de secundaria son fieles repetidores de una jerga seudo-científica que opaca el real manejo que de los conceptos matemáticos deben tener.

Experiencias como MATEM, los congresos nacionales de matemáticas, las olimpiadas matemáticas, etc., conforman un cúmulo cuyo epígrafe es o debería ser: La década de los noventa, antesala del siglo XXI, debe presenciar una nueva reforma de la enseñanza de la matemática en la escuela secundaria costarricense.

Son muchos los diagnósticos que en tal sentido se han realizado. Canalizar semejante pretensión iniciando con una diagnosis más es dilatorio y contraproducente. Y esto ha sido constante por razones que no han sido esencialmente académicas, sino políticas y personalistas.

Es así como, sin embargo, puede afirmarse que los principales retos que se plantean en la enseñanza de la matemática costarricense son:

1. Qué enseñar y cómo enseñar?
2. Cuál ha de ser el desempeño docente del profesor de matemática que le permita presentar tal disciplina como un todo global y armónico?
3. Cómo instrumentalizar una enseñanza de la matemática ligada al desarrollo histórico de esta disciplina sin caer en las historiografía?
4. Cuáles son las aplicaciones de la matemática, son posibles, ligadas a los distintos contenidos de los planes de estudio de la enseñanzas media costarricense?

En las matemáticas propiamente se trata de definir las areas prioritarias a dedicar la mayor parte de esfuerzos, así como los métodos apropiados. Se trata de elevar en mucho los niveles y calidad de producción académica para poder participar en la palestra internacional.

Nada de esto es posible si no se realizan una balance lúcido y honesto y un trazado de perspectivas correspondientes.

En relación con lo anterior existe una importante discusión. Los distintos intentos de hacer presente la historia de la matemática en su enseñanza, han caído en dos posiciones extremas: la una ha sido eminentemente anecdótica, caracterizada por exaltar las fechas de nacimiento y muerte del personaje en cuestión. Esta es la vertiente historiográfica. La otra ha pretendido que los conceptos a enseñar sean vistos desde su gérmen histórico pasando por todas las peripecias que le fueron modelando hasta su forma última. No cabe duda de que esta segunda opción es de mayor alcance académico que la primera, sólo que su escasa versatilidad atenta la eficiencia que debe caracterizar la enseñanza de la matemática en un mundo como el actual, el que, sometido a un vertiginoso desarrollo científico técnico, exige un aumento cada vez mayor de acervo cognoscitivo por el educando.

Ante posiciones extremas como las descritas, la desilución no debe tener cabida; es urgente iniciar un análisis crítico de los contenidos de la enseñanza media costarricense, que dé luz sobre cómo hacer presente la historia en la enseñanza de la matemática, sin atentar la deseada eficiencia del sistema educativo y, por el contrario, logrando que esta opción despierte mayores alternativas de motivación por parte del educando hacia la disciplina, a la vez que ubicando el conocimiento científico en la categoría de causa y efecto de fenómenos anteriores. [1]

APLICACIONES DE LAS MATEMATICAS.

Si las matemáticas no fueran útiles, habría desaparecido ya el plan de estudios de los centros docentes de todas las categorías. En estos momentos es la utilidad de las matemáticas lo que les otorga preeminencia en los programas escolares. Con todo, aunque parezca extraño, muchas de las reformas recientes de los programas de matemática, tienden a la enseñanza de ésta como un cuerpo doctrinal independiente, abstracto y teórico. Se trata entonces de una situación alarmante, que exige remedio inmediato.

La frase "aplicaciones de la Matemática", tiene dos significados distintos: uno, la utilización práctica de la teoría matemática en otras áreas del saber o en la vida diaria. Y el otro, el uso de un teorema propio de una rama de la matemática para enriquecerla aún más o para aplicarlo a cualquiera otra rama de la matemática.

La primera acepción de la frase es la que interesa propugnar en su implementación en la enseñanza.

En años recientes, la enseñanza de las ciencias, en especial en Europa y los Estados Unidos, se ha hecho más matemática. Los cursos de física son más técnicos que antes y destacan conceptos y leyes en una explicación estructurada,

[1]En esto existen varias publicaciones por A. Ruiz mencionadas en el final:"Implicaciones de la filosofía y la historia...", "Filosofía, Historia y..", "Reflexiones metodològicas..."

teórica y matemática del mundo físico. Los cursos de Valencia Química requieren explicación abstracta, casi matemática del comportamiento de la materia, tanto orgánica como inorgánica. Las teorías de los proceso económicos se han imbuido de explicaciones probalísticas y en la teoría de matrices, que compiten en complejidad con las explicaciones físicas por ejemplo; y otro tanto ocurre en astrofísica, astronomía, geología, sociología y muchas otras ciencias fácticas o sociales. [1]

Por definición, al profesor de matemática incumbe enseñar matemáticas. Sin embargo a los buenos profesores también les interesa la educación integral de sus estudiantes, aquella que contribuye a la formación de hábitos y actitudes, de mucho alcance que la mera adquisición de conocimientos intuitivos que las matemáticas pueden proporcionar al estudiante en otras esferas científicas, a la vez que no desconocen la ayuda que otras materias brindan como estímulo o acicate para profundizar el estudio de las matemáticas.

Es claro que la relación entre las matemáticas y las otras ciencias es muy estrecha. Las matemáticas, desde la antiguedad, han estado en una conexión de condicionamiento recíproco con otras ciencias. Estas últimas han servido para generar conceptos y métodos matemáticos, como estas para hacer progresar las ciencias de la realidad.

Con la ideología racionalista, formalizante, axiomatista, deductivista, de las matemáticas, y con la actitud arrogante de los matemáticos puros, que no ha sido excepcional en las comunidades matemáticas, solo el aislamiento y la esterilidad intelectual son posibles. Dentro de la práctica matemática se han generado nuevos campos y disciplinas, que en muchas ocasiones simplemente han salido huyendo del gremio matemático por razones de este tipo. Los contactos entre los gremios de matemáticos puros, aplicados y de enseñanza de las matemáticas, son realmente pocos. Con ello se obstaculiza un infinito número de posibilidades de colaboraciónes, retro-alimentaciones intelectuales, y de progreso teórico y social.

Este síndrome intelectual que hemos mencionado juega todavía un papel importante (negativo) en la comunidad matemática de Costa rica. Los cuadros principales en matemáticas producidos en Costa Rica -ya lo mencionamos- han sido formados en este síndrome tan perjudicial. No es esta la única razón para el retraso de la comunidad matemática costarricense (ha habido razones políticas, personales que analizaremos en otra ocasion), pero sí uno de sus principales factores.

Está a la altura de las principales tareas de la comunidad matemática del país, romper radicalmente con ese síndrome, abrirse teórica y vitalmente hacia nuevos derroteros.

[1] Un análisis sobre las matemáticas aplicadas se da en: "De si las matemáticas sirven para algo o...

BIBLIOGRAFIA

-Barrantes, Hugo/ Ruiz. Angel. "Historia de la implantación de las matemáticas modernas en la educación costarricense". Memorias del Tercer Congreso Centroamericano y del Caribe de Historia de la Ciencia y la Tecnología. Mayo 1989, San José, Costa Rica.

-Castelnuovo, Emma. DIDACTICA DE LA MATEMATICA MODERNA. México: Trillas, 1973.

-Consejo Nacional de maestros de matemáticas de los USA. LA REVOLUCION DE LAS MATEMATICAS ESCOLARES. Washington: OEA, 1963.

-Fehr, Camp y Kellog. LA REVOLUCION DE LAS MATEMATICAS ESCOLARES (segunda parte). Washington: OEA, 1971.

-Kline, M. EL FRACASO DE LA MATEMATICA MODERNA. Madrid: Alianza.

-Kuntzmann, Jean. ¿ADONDE VA LA MATEMATICA? PROBLEMAS DE LA ENSEÑANZA Y LA INVESTIGACION. México: Edit. Siglo XXI, 1978.

-Piaget, J. y otros. LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS MODERNAS. Madrid: Alianza, 1980.

-Ruiz-Zúñiga, Angel. "Implicaciones teórico-filosóficas del Teorema de Gödel en el paradigma racionalista sobre las Matemáticas". REVISTA DE FILOSOFIA de la Universidad de Costa Rica. Vol. XXIII, N.58, Diciembre 1985, San José, Costa Rica.

-Ruiz, Angel. "El factor paradojas y el factor Gödel en los Fundamentos de las Matemáticas". REVISTA DE CIENCIA Y TECNOLOGIA de la UCR, Vol. IX(1-2), 1985, San José, Costa Rica.

-Ruiz, A. "Fundamentos para una nueva actitud en la enseñanza moderna de las Matemáticas Elementales", BOLETIN de la Sociedade Paranaense de Matemática, Vol. VIII(1), Junio 1987, Curitiba, Brasil.

-Ruiz, A. "Epistemological Constituents of Mathematics Construction. Implications in its teaching", PROCEEDINGS of the XI International Conference on the Psichology of Mathematics Education, Julio 1987, Montreal, Canadá.

-Ruiz, A. "Implicaciones de la filosofía y la historia de la matemática en la enseñanza". Rev. EDUCACION UCR, junio 1987, San José, Costa Rica.

-Ruiz, A. "De si las matemáticas sirven para algo o una discusión sobre la matemáticas aplicadas" DESARROLLO. N. 5, julio 1987, San José, Costa Rica.

-Ruiz, A. "Reflexiones metodológicas preliminares sobre una estrategia para la enseñanza de la historia de las matemáticas". REVISTA DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE HISTORIA DA CIENCIA. N. 4, 1989, Sao Paulo, Brasil.

-Ruiz, A. LA FILOSOFIA DE LAS MATEMATICAS Y EL ANALISIS DE TEXTOS DE MATEMATICAS PARA SECUNDARIA. Editorial UCR, setiembre de 1988, San José, Costa Rica.

EL DEPARTAMENTO DE FISICA Y MATEMATICA: UN ESBOZO HISTORICO

Danilo Solano Méndez/ Angel Ruiz Zúñiga
Escuela de Matemática/ Universidad de Costa Rica

RESUMEN

El presente trabajo reúne los aspectos más importantes que dieron origen al Departamento de Física y Matemáticas, así como también algunas de sus proyecciones principales. Para ello se hace un recorrido desde los años 30, pasando por la fundación del departamento, la reforma de las matemáticas en los 60, y la división del departamento al principio de los 70. Se trata de un bosquejo introductorio al estudio histórico de este departamento, que tanto aportó al desarrollo de las matemáticas y a la física en el país.

1. ANTECEDENTES

Antes de hablar de la creación del Departamento de Física y Matemáticas es necesario hacer un breve resumen sobre lo que eran las matemáticas y quiénes las enseñaban antes de la creación de la Universidad de Costa Rica.

Las matemáticas al igual que todas las otras ramas del conocimiento estaban en manos de maestros distinguidos de primaria, egresados de la misma secundaria, ingenieros graduados en el exterior, farmaceúticos y abogados.

Todos estos profesores eran esencialmente autodidactas en matemáticas, pues no tenían otra forma de ampliar sus conocimientos que no fuera vía los escasos libros o amigos que se habían graduado en el exterior. De hecho, muchos de ellos se quejaban por no encontrar personas que los asesoraran sobre qué libros realmente estudiar, no solo para aumentar su propio nivel de conocimiento sino también para implementar y mejorar las técnicas didácticas y metodològicas que empleaban.

Eran los farmacéuticos, los ingenieros y los exalumnos distinguidos quienes las enseñaban las matemáticas, así como también las otras materias relacionadas con la ciencia como la física, la química y otras ciencias. Por otra parte, todas las materias relacionadas con las letras, como cívica, estudios sociales, etc., las enseñaban los abogados.

Se puede decir, sin temor a equivocarnos, que eran muy pocas las

personas o grupos de personas que tenían interés en un desarrollo vertical de alguna de las ciencias. Aunque debemos mencionar, por ejemplo, que en matemáticas existía un grupo de estudio de las matemáticas, integrado por personas tan reconocidas como el Prof. José Joaquín Trejos Fernández, el Lic. Luis Demetrio Tinoco y algunos economistas. Este grupo de personas se preocupaba por comprar y estudiar libros especializados de matemáticas.
En ese tiempo la única utilidad que se le veía a las matemáticas era su aplicación en la contabilidad mercantil y en la administración de negocios.

Otros especialistas, como los ingenieros, al no tener demanda profesional, ya que las pocas construcciones las hacían los maestros de obras y no se sentía la necesidad de diseños, optaron por dedicarse a la docencia en campos como la física y las matemáticas.

Los maestros distinguidos de primaria, al igual que los buenos exalumnos de secundaria, comenzaban dando lecciones como profesores interinos. No era sino luego de cinco años y después de presentar una tesis original, que era revisada y aprobada por el Consejo de Directores de los cinco colegios oficiales, que adquirían el título de Profesor de Estado; título con el que realmente quedaban habilitados para enseñar en secundaria.

Consideramos conveniente hacer este resumen para que, luego cuando discutamos los orígenes y fundación del Departamento de Física y Matemáticas de la Universidad de Costa Rica, comprendamos mejor su filosofía y razón de ser.

2. LA FUNDACION DE LA UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

El 26 de agosto de 1940, el presidente de la República, Dr. Rafael Angel Calderón Guardia firmó la Ley No. 362, Ley Orgánica de la Universidad de Costa Rica. Es un texto breve, deliberadamente simple, de 25 artículos y algunos transitorios. El artículo 10 resume los propósitos de la creación:

> "Artículo 10 Créase, con el nombre de Universidad de Costa Rica, una institución docente y de cultura superior que tendrá por misión cultivar las ciencias, las letras y las bellas artes, difundir su conocimiento y preparar para el ejercicio de las Profesiones liberales".[1]

El artículo 20 nos dice cuáles Escuelas formarán parte de la Universidad, concretamente:

[1] Ley Orgánica de la Universidad de Costa Rica. pág. 1

> "Artículo 2° - Como institución docente, la Universidad constará de las Escuelas y Facultades que requieren las enseñanzas que se imparten en ella de conformidad con esta ley y las que la modifiquen. En consecuencia, integrarán desde ahora la Universidad las Escuelas de Derecho, Farmacia, Agricultura, Pedagogía y Bellas Artes, ya existentes, y las de Ingeniería, Ciencias, Letras, Cirugía Dental y Medicina, que se establecerán conforme lo permitan los recursos de que se disponga"[2]

Posteriomente, en 1943, a iniciativa de algunos profesores, entre ellos José Joaquín Trejos y uno de los principales pioneros de la fundación de la Universidad, el Lic. Luis Demetrio Tinoco, se crea la Escuela de Ciencias Económicas y Sociales. Más adelante esta Escuela admite una nueva carrera de Servicio Social, con el Padre Herrera como director de la misma.

La Escuela de Ciencias, que es la que más nos interesa en este trabajo, la constituyen dos secciones: la sección de Ciencias Biológicas y la sección de Física y Matemáticas.

Esta Escuela, al igual que la de Letras, tiene como objetivos y orientación, la formación de profesores para enseñanza media, cosa que es totalmente clara desde la fundación de la Universidad y, en donde, concretamente el artículo 22 de la Ley Orgánica establece:

> "Artículo 22 - ... Los alumnos que se gradúen en las Escuelas de Ciencias y Letras se considerarán, por ese sólo hecho, Profesores de Estado en los ramos de su especialidad y gozarán de preferencia para ocupar las plazas respectivas en los Colegios de Segunda Enseñanza"[3]

Sin embargo, la Escuela de Ciencias desaparece a finales de los 40 (1947), debido a que contaba con muy pocos alumnos. Algunas de sus funciones las vino a llenar luego el Departamento de Física y Matemáticas.

Las matemáticas, por su parte se enseñaban en la Universidad de acuerdo con la necesidad que tuviere cada Escuela. Es así, como encontramos enseñando matemática en la Escuela de Ciencias a Henry McGhie, en la Escuela de Ciencias Económicas y Sociales a don José Joaquín Trejos y a don Bernardo Alfaro Sagot, en la Escuela de Ingeniería a Jaime Soley, en la Escuela de Agricultura a Alfonso Peralta, etc..

El nivel de las matematicas en la Escuela de Ciencias no era de

---

[2] idem pág. 1

[3] idem pág. 5

los más elevados, debido al objetivo con que fue creada esta Escuela. De hecho, como ya señalamos anteriormente, al crearse la Universidad un alto porcentaje de su personal docente lo constituían buenos y distinguidos profesores de los colegios, y, por tanto, era obligación de las Escuelas de Ciencia y Letras formar profesores que llenaran el vacío que se produjo en secundaria por la ausencia de los mismos.

3. LA REFORMA DE 1956-57

En 1956, Rodrigo Facio planteó la idea de reorganizar la Universidad de Costa Rica, uno de cuyos objetivos era la departamentalización de la institución.

Se creó la Facultad de Ciencias y Letras y se nombró como primer decano a Rodrigo Facio. Cuando él se postula para rector se nombra al profesor José Joaquín Trejos como decano de la Facultad.

El Departamento de Física y Matemáticas se creó el día 28 de enero de 1957, según podemos constatar en la sesión número 42 del Consejo Directivo de la Facultad de Ciencias y Letras, que en su artículo VIII establece: "Se acuerda proponer el establecimiento formal de los Departamentos de Biología y de Física y Matemáticas para el proximo 1 de marzo". En la sesión número 43 del Consejo Directivo de la Facultad de Ciencias y Letras del 7 de febrero de 1957 se aprueba el acta anterior.[4]

El primer director del Departamento fue don José Joaquín Trejos, quien a su vez era el decano de la Facultad. El Prof. Trejos le pidió a Alfaro que le organizara el departamento aunque formalmente el director era Trejos. Se escogió la denominación de Coordinador para Alfaro.

Sin embargo, tiempo después, Trejos se vió obligado a dejar el cargo de director, porque Rodrigo Facio le solicitó al Prof. Trejos su renuncia a uno de los dos cargos que ejercía. Este renunció a su cargo de director del Departamento y se procedió a nombrar en su lugar al Prof. Bernardo Alfaro Sagot, siendo así en realidad el primer Director del Departamento de Física y Matemáticas, puesto que desempeñó en dos periodos consecutivos.

Quizás, mucha gente se puede preguntar: ¿por qué Departamento de Física y Matemáticas y no dos departamentos separados?. La respuesta a esta pregunta es muy sencilla, no había en el país un interés por la Física en sí misma. Además, el país no contaba con los recursos humanos como para formar los dos departamentos.

---

[4] Actas de la Facultad de Ciencias y Letras. Tomo I.

Existen dos aspectos en torno a esto de la unidad inicial entre las dos disciplinas. Porque también se podría pensar en que la física se incluyera ligada a la química, por ejemplo. Ya existía el antecedente de una sección de física y matemáticas en la Escuela de Ciencias con que se crea la UCR. Por el otro lado, Alfaro había propiciado a través de sus textos para física en secundaria un acercamiento, más acorde con la evolución real de la física moderna y de las matemáticas, entre las matemáticas y la física que se enseñaba. Alfaro hizo un texto en el que por primera vez, y sin una sanción programática oficial, se introducía matemáticas en su enseñanza.

De hecho, el Departamento de Física y Matemáticas se crea para integrar en él todos los cursos de Física y Matemáticas que se daban en las diferentes escuelas de la Universidad. Cuando se logra esto, el nivel de las matemáticas se implementa y aparece por primera vez la enseñanza del cálculo infinitesimal en el Departamento (antes solo se enseñaba en la Escuela de Ingeniería).

Se logra también de esta forma uno de los principales objetivos que Alfaro como director del Departamento había planteado, que los profesores de Física y matemáticas en secundaria ya no fueran los farmacéuticos sino profesores formados propiamente en el departamento.

4. ALGUNOS ASPECTOS IMPORTANTES EN EL DESARROLLO DEL DEPARTAMENTO DE FISICA Y MATEMATICA

Desde que Bernardo Alfaro Sagot asume sus funciones como director del Departamento de Física y Matemáticas siente la necesidad de formar un verdadero laboratorio de Física. Es decir, en el sentido que no solo fuera de utilidad para los estudiantes sino que pudiera implementarse y restaurarse aquí mismo, es decir, en Costa Rica. Pues los colegios tenían en sus laboratorios de Física muy buenos equipos pero la mayoría de ellos inservibles, ya fuera porque le faltaban piezas que no se conseguían en el país o que algún tornillo de rosca milimétrica se había extraviado, etc.

Alfaro Sagot lleva su idea al seno de la Facultad, donde es bien acogida. De hecho, la Facultad nombra una comisión en diferentes campos del conocimiento para que vayan a los Estados Unidos con el fin de que las ideas que aquí se tenían pudieran materializarse. Alfaro forma parte de esta comitiva y aprovecha la ocasión para ir al Massachusetts Institute of Technology (MIT) para pedir consejo de cómo instalar un laboratorio de Física. Alfaro Sagot aprende que lo más importante para montar un laboratorio era tener un taller donde se pudieran fabricar y reparar los implementos necesarios en el laboratorio. Para esto se necesitaba una persona que aparte de tener conocimientos en Física pudiera operar apropiadamente las diferentes máquinas. Alfaro se da cuenta de que el país cuenta con esta persona, el Ing. Henry McGhie, quien en ese entonces trabajaba en el Servicio Nacional de Electricidad. McGhie es contratado por medio tiempo para montar el taller. Se solicita a las autoridades universitarias todo lo necesario para montar el taller; a saber, se consigue planta física y se importan las máquinas y el material necesario para comenzar el funcionamiento. Posteriormente se construye el auditorio que serviría como aula para enseñar Física, siguiendo, según don Bernardo Alfaro Sagot, los planos del que tenían en el MIT en esa época.

Posteriormente, y siguiendo la línea de desarrollo y proyección de las matemáticas en el país, el Departamento vive la gran reforma de las matemáticas a nivel mundial.

Esta reforma integrá la visión de la Escuela Bourbaki que pretendía universalizar la simbología matemática y a la vez implementar la matemática abstracta en todos los niveles.[5]

La reforma llega a nuestro país a través de un proceso muy interesante que no deja de involucrar elementos políticos. En medio de la Guerra Fría, los Estados Unidos asumió que la delantera que demuestran los soviéticos en la carrera espacial con el lanzamiento al espacio del Sputnik, era debida, entre otras cosas, a la mala calidad de la enseñanza de las matemáticas en los EEUU y en el hemisferio. O sea, los gobernantes norteamericanos pensaron que los soviéticos tenían mejores programas de formación científica y matemática desde los primeros niveles, y que esto era decisivo de corregir. Es de esta forma que se crea una sección en la National Science Foundation para poderle dar forma a esta orientación educativa en las matemáticas. Los dirigentes pusieron énfasis en la secundaria y no solo a nivel de los Estados Unidos sino que también a nivel de toda América Latina. Esto era así puesto que muchos de los cuador técnicos y científicos de los EEUU provenían de América Latina, así como por el hecho de que se trataba de una política hemisférica frente al bloque socialista.

La realidad es que esta reforma incluía varios elementos. Por un lado, la existencia de una necesidad política e ideológica; por otro lado, la realidad de una gran disasociación entre las matemáticas escolares y las matemáticas de los investigadores de primera línea y las matemáticas de las universidades; la existencia de ideas específicas de cómo abordar los problemas de la enseñanza de las matemáticas; la existencia de una visión

---

[5] Se puede consultar el artículo de Hugo Barrantes y Angel Ruiz "La reforma matemática de la década de los sesenta en Costa Rica: aspectos ideológicos". MEMORIAS Tercer Congreso Centroamericano y del Caribe de Historia de la Ciencia y la Tecnología. San José, Costa Rica, Mayo de 1989.

sobre la naturaleza de las matemáticas que privilegia lo abstracto y puro versus lo heurístico y aplicado. Todo esto fué integrado bajo la motivación de una orientación política. No es que no hubiese gente que pensara sobre en estos términos antes, la había y no solo en los USA. Pero el asunto adquiere relevancia práctica en el contexto político mencionado.

Es así como en 1961, en Bogotá, se da la Primera Conferencia Interamericana de Enseñanza de la Matemática, donde se plantea la tarea de escribir nuevos textos de matemáticas que estén acordes con las nuevas ideas que se tenían con respecto a esta disciplina. Por Costa Rica asiste como representante don Bernardo Alfaro Sagot. [6]

En el mismo período, el Ministro de Educación, don Ismael Antonio Vargas, se da a la tarea de una reforma integral de la Enseñanza Media costarricense. Se crean dos ciclos:

- un ciclo de educación general
- un ciclo diversificado en ciencias o letras

Uno de los aspectos fundamentales para llevar a cabo esta reforma fue la escritura de nuevos textos en las diferentes materias En cuanto a las matemáticas se comisiona a Alfaro Sagot para su escritura. Don Bernardo, habiendo asistido a la Conferencia de Bogotá e influenciado por las ideas allí expuestas, aprovecha la oportunidad para introducir la matemática moderna en los textos que elabora. De esta forma, Costa Rica se convierte, de manera casual, en el primer pais latinoamericano que introduce la matemática moderna en sus programas de enseñanza media.

Para tratar de llevar a cabo de la mejor manera posible esta reforma, se les exigió a los profesores de enseñanza media recibir un curso en la Universidad que los capacitara para dar lecciones.

Aunque la reforma no tuvo grandes opositores en el país, en Costa Rica se dio una interesante polémica durante los meses de mayo y junio de 1966 a través del periódico la Nación. Esta fue protagonizada por Bernardo Alfaro y por don Manuel Enrique Castellón, sobre la forma en que se estaban escribiendo los libros de texto.

Bernardo Alfaro si bien era el gran introductor de las matemáticas modernas, fabricó textos que estaban en la mitad del camino planteado por la reforma y los existentes. Tal vez por su formación como farmaceutico y como profesor de física, Alfaro no

---

[6] Puede consultarse de Hugo Barrantes y Angel Ruiz el artículo "Historia de la implantación de las matemáticas modernas en la educación costarricense". MEMORIAS Tercer Congreso Centroamericano de Historia de la Ciencia y la Tecnología". San José, Costa Rica, mayo 1989.

adoptó de manera absoltuta el caracter abstracto y puro propuesto. En su lugar dió a luz un híbrido que hacía uso de ejemplos aplicados y referencias a la física y a la vida.

La mayoría de los críticos de los libros de Alfaro le reclamaron que no fuera hasta al final, y que estos textos no eran fieles a la reforma de las nuevas matemáticas.

Estando Don Gil Chaverri como representante de la UCR en el Consejo Superior de Educación, se cuestiona también que Alfaro confeccione estos textos bajo préstamo de la UCR, y que el mismo Chaverri podía formar un equipo para la redacción de los textos necesarios. Alfaro decide entonces no continuar con la confección de los textos, que habían avanzado para entonces hasta algunas secciones del tercer tomo. La redacción de los textos, va a ser seguida por los profesores Castellón, Camacho y Aguilar; y tiempo despúes por Gil Chaverri y un grupo de profesores de la UCR. Las colecciones de textos confeccionadas (separadamente) por Castellón y Chaverri fueron las que ayudaron a definir el tipo de matemáticas impartidas en la secundaria del país por varias décadas. [7]

Otro aspecto muy importante en el desarrollo del Departamento de Física y matemáticas fue la contratación de profesores extranjeros que hicieran su aporte al desarrollo de la Universidad. Entre los más importantes que vinieron al departamento figuran Joaquín Ninot, Bibernstein, John Ray, Santos Corcheri.

Estos profesores, ayudan mucho al desarrollo de las matemáticas puras en el país. Sin embargo, aparte de la implementación que le dan a cada una de sus disciplinas, se convierten en elementos que ayudan a empujar la división del Departamento en dos Escuelas. La preponderancia de las matemáticas puras hace justificar la división del departamento. En realidad, siempre hubo tendencias hacia la disasociación tanto entre los físicos como entre los matemáticos. Pero ni los físicos tenían la fuerza para subsistir solos ni existía con tanta fuerza entre los matemáticos la visión purista que intelectualmente tiende a disasociar las matemáticas de las otras ciencias.

A finales de los 60, en una sesión del departamento se acuerda separarlo en dos Escuelas. Sin embargo, ante un recurso del Prof. Ray se vuelven a unir, para separarse definitivamente en 1970. De esta forma ambas disciplinas comienzan a funcionar separadamente.

El primer director de la Escuela de Matemática fue el prof. Francisco Ramírez y el primer director de la Escuela de Física fue el Prof. Neville Clark.

---

[7] Puede consultarse el libro de Angel Ruiz LA FILOSOFIA DE LAS MATEMATICAS Y EL ANALISIS DE TEXTOS DE MATEMATICAS DE SECUNDARIA. San José: Editorial UCR, 1989.

Con estos elementos hemos querido brindar una primera aproximación a la historia de este departamento. Trabajos más extensos aparecerán luego en el marco del proyecto de investigación HISTORIA SOCIAL DE LAS MATEMATICAS EN COSTA RICA, que se desarrolla en la Escuela de Matemática de la UCR, y de la que los autores del presente ensayo somos parte.

BIBLIOGRAFIA

-Actas de la Facultad de Ciencias y Letras Tomo I.

-Arias. Rosario y otros. LA MATEMATICA MODERNA. UNA PROBLEMATICA. Tesis de grado. UCR. San José Costa Rica, 1979.

-Barrantes, H y Ruiz, A. La reforma de la enseñanza de las matemáticas en Costa Rica". Memorias de la Tercera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigadores en Matemática Educativa, San José, julio 1989

-Barrantes, H./ Ruiz Zúñiga, A. "La reforma matemática de la década de los sesenta en Costa Rica: aspectos ideológicos". MEMORIAS Tercer Congreso Centroamericano y del Caribe de Historia de la Ciencia y la Tecnología. Mayo 1989, San José, Costa Rica.

-Barrantes, H./ Ruiz Zúñiga, A. "Historia de la implantación de las matemáticas modernas en la educación costarricense". MEMORIAS Tercer Congreso Centroamericano y del Caribe de Historia de la Ciencia y la Tecnología". Mayo 1989, San José, Costa Rica.

-Consejo Nacional de maestros de matemáticas de los USA. LA REVOLUCION DE LAS MATEMATICAS ESCOLARES. Washington: OEA, 1963.

-Fallas, Marlene y otros. MODERNISMO DE LA MATEMATICA EN COSTA RICA. Tesis de grado UCR, San José, Costa Rica.

-González, Fernando. EDUCACION COSTARRICENSE. San José: EUNED, 1984.

-Fehr, Camp y Kellog. LA REVOLUCION DE LAS MATEMATICAS ESCOLARES (segunda parte). Washington: OEA, 1971.

-Fehr, Howard (editor). EDUCACION MATEMATICA EN LAS AMERICAS. Informe de la Segunda Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática, Lima, Perú, 12-15 diciembre 1966. Buenos Aires: OEA, 1968.

-Kuntzmann, Jean. ¿ADONDE VA LA MATEMATICA? PROBLEMAS DE LA ENSEÑANZA Y LA INVESTIGACION. México: Edit. Siglo XXI, 1978.

-Jones, Henry & Rodríguez, Analive. HISTORIA CRITICA DE LOS DISTINTOS PROGRAMAS DE ENSEÑANZA SECUNDARIA QUE HA HABIDO EN

MATEMATICAS EN EL SIGLO XX. Tesis de grado. UCR., San José, Costa Rica, 1982.

-Ley Orgánica de la Universidad de Costa Rica.

-Ruiz Zúñiga, A. LA FILOSOFIA DE LAS MATEMATICAS Y EL ANALISIS DE TEXTOS DE MATEMATICAS EN SECUNDARIA. San José: Ed. UCR, 1989.

SECCION DE HISTORIA, METODOLOGIA Y FILOSOFIA DE LA CIENCIA

POLEMICAS DE METODO EN LA HISTORIA DE LA CIENCIA Y LAS MATEMATICAS

Angel Ruiz Zúñiga
Escuela de Matemática
UCR

RESUMEN

En este trabajo se hace un recuento de las discusiones de método en la disciplina de la historia de la ciencia recogidas en la polémica entre el Internalismo y el Externalismo. Se busca a partir de esa discusión sugerir una visión metodológica original que sea útil a la disciplina en cuestión. En particular es analizado el rol jugado por la obra de Thomas Kuhn. Algunos comentarios específicos sobre las matemàticas también son realizados.

En este trabajo partimos del criterio de que las matemáticas deben considerarse parte de las ciencias naturales o empíricas y que los criterios de análisis de la ciencia empírica -de una u otra manera- pueden aplicarse a estas. En particular, la discusión en torno al rol en la ciencia empírica de los factores sociales, o los lógicos, o los intelectúales en general debe poder afectar la comprensión de las matematicas en particular. Por eso asumimos que las consideraciones que vamos a introducir a continuación suponen consecuencias precisas para el estudio de la historia de las matemáticas.

En los años sesenta se publicó la obra de Tomas Kuhn llamada LA ESTRUCTURA DE LAS REVOLUCIONES CIENTIFICAS, la cual desencadenó una extraordinaria polémica entre los filósofos y estudiosos de la ciencia. Es una obra que sin embargo cristalizó actitudes y tendencias que se venían desarrollando en teóricos de la ciencia desde antes. Esta obra influyó notablemente en el seno de una polémica metodológico-filosófica que parecía sancionada a favor del internalismo. Ya en épocas relativamente lejanas como fines del siglo pasado pueden caracterizarse como precursores del llamado internalismo a historiadores como Mach

(Empirio-criticismo) quien da un papel fundamental al desarrollo de las ideas.

También pueden considerarse precursores Brusk con su idea de que el espíritu humano siempre esta presente,o Duhen en el problema de los precursores o Meyerson y el crecimiento de la ciencia como árbol enraizado en la experiencia y el sentido común y cuyo crecimiento regular sufre a lo sumo pequeñas desviaciones (1). Sarton, el formador de la profesionalización de los historiadores de la ciencia, fue claramente un internalista. En realidad, excepto algunos casos provenientes del materialismo marxista y la escuela mertoniana la gran mayoría de los historiadores de la ciencia hasta los años cincuenta eran internalistas (aunque con matices que permiten distinciones entre ellos).

Vamos a recapitular algunas ideas acerca de estas visiones metodológicas. El internalismo asume que la génesis y la validación de los conocimientos no estàn influenciados por factores externos y su estudio es de competencia de la historia y la filosofía de las ideas. Entonces la sociología y la psicología tienen muy poco que ver en el desarrollo de la ciencia . Los elementos que se tienden a enfatizar son los teóricos en sí mismos: la racionalidad y la lógica.

El externalismo asume la posición opuesta. Su interés debe dirigirse hacia la estructura u organización de la ciencia . Recientemente las temáticas típicas de estas líneas son ciencia y tecnología, responsabilidad social de la ciencia, política científica, gobierno y ciencia, etc. Es decir se da un énfasis a los factores psicosociales , políticos, orgánico- administrativos, etc., en detrimento generalmente de elementos lógico-deductivos de la ciencia.

El internalismo podemos decir que está íntimamente vinculado al neopositivismo . En gran medida el reconstruccionismo lógico que se derivara de las posiciones de muchos de los neopositivistas son consecuencia de los puntos de partida filosóficos asumidos por el Círculo de Viena y sus seguidores. Por su parte el externalismo encuentra sus raíces desde la fenomenología y la sociología descriptiva hasta en el marxismo. Tal vez convenga distinguir dos tipos de internalismo: de primer grado y de segundo. (En realidad como explicaré más adelante existen dos posiciones más útiles para agrupar en el internalismo: la neopositivista por un lado y por otra la que se puede representar por Koyré). Entre los internalistas del primer tipo se podrían alinear historiadores y filósofos como Koyré, Nef, Hall, Agassi para citar unos pocos. Para estos la Historia de la Ciencia sería la historia de las ideas y eluden la incorporación de análisis de cualesquiera factores externos. Koyré por ejemplo señala que en tiempos en que la ciencia y la filosofía no estaban separadas sus historias eran análogas. En esta línea, Agassi afirma que solo existen hechos fuertes y generalizaciones inductivas. (2)

Esta última posición es criticada por Popper en 1959 y por Lakatos en 1974 quien señala que los internalistas inductivistas no pueden dar una explicación racional de por qué en la historia de la ciencia fueron seleccionados unos hechos y otros no. Para Lakatos el problema de la selección no es racional sino externo y empírico.(3)

Esto último abre una posición flexible (un segundo grado) que podría muy bien estar representada por estos trabajos de Lakatos y por su famosa teoría de las reconstrucciones racionales . En realidad, las posiciones originales de Popper o de Lakatos eran mucho más duras y radicales al inicio. En efecto en su polémica con Kuhn en el coloquio del Belford College en 1965, ambos negaban que la sociología de la ciencia mertoniana o cualquier tipo de sociología tuviera algo que ver con el estudio de los procesos del conocimiento científico. Popper va a reconocer que atempera su posición y Lakatos va a aceptar de algún modo la necesidad de introducir una externalidad en su programa de investigación sobre las reconstrucciones racionales de la Historia de la Ciencia. Así en su última posición en 1974, parafraseando a Kant dice "La Historia de la Ciencia sin filosofía de la ciencia está ciega". Lo que Lakatos intenta es establecer una Historia de la Ciencia con ayuda de la filosofía . Los escritos previos a su muerte permiten suponer un abandono progresivo de las posiciones que compartía con Popper y una progresiva Kuhnización que se hace evidente en una actitud mucho más flexible respecto al externalismo. En 1974 Él mismo declara "La historia de la ciencia es siempre más rica que su reconstrucción racional". Y en 1978 "la demarcación entre ciencia y pseudociencia no es un problema de filosofía de café. Es de importancia política y social vital". (4) No obstante sigue manteniendo que existe una racionalidad intrínseca interna en la ciencia . En este sentido la critica que Kuhn hace a Lakatos en 1971 parece razonable : "El método metodológico de Lakatos esta en peligro de reducirse a una tautología". Dicho de otro modo, la historia reconstruida racionalmente siempre dará la razón por la forma misma en que se reconstruyó.

En el coloquio del año 1965, Lakatos en efecto sigue enfatizando la necesidad de la justificación racional de la ciencia más que los elementos psicosociales presentes especialmente en el descubrimiento. Para Lakatos, sería prácticamente caer en el irracionalismo dejar la explicación en Historia de la Ciencia a esos elementos. Al igual que Popper, el conocimiento científico es aquí objetivo con objetos ideales que son los contenidos de la ciencia. Es decir se trata de un mundo de objetos integrados y comprendidos por una racionalidad

También en el externalismo se dan diversos matices y líneas. Como historia externalista debe catalogarse el materialismo histórico marxista, en especial a la escuela soviética. Esta posición se da ya desde el segundo congreso internacional de Historia de la Ciencia en Londres en 1931 cuando los enviados soviéticos Bujarin y Hessen iniciaron una perspectiva que rompe con el tipo de historia internalista que habían realizado hasta entonces. Con las posiciones de Bernal y Needham el materialismo histórico los conduce a un determinismo simplista que remite sistemáticamente el crecimiento de la ciencia a las fuerzas productivas.

Es interesante notar que Marx afirmaba que la ciencia era ella misma una fuerza productiva, la determinación de la ciencia por la organización productiva resulta ser una determinación de una fuerza productiva por las fuerzas productivas, lo que es una contradicción evidente que con toda propiedad ha señalado recientemente un historiador de la ciencia en China. (5) Igual línea siguen los análisis cuantitivistas que se publican en la Unión Soviética. Es posible afirmar que hasta la decada de los sesenta se da un estancamiento extraordinario en el externalismo en la Historia de la Ciencia.

Es la obra de Kuhn precisamente y la de otros de la misma época la que va a abrir especialmente a partir de su influencia en la filosofía de la ciencia nuevas posibilidades para abordar la historia de la ciencia. La idea metodológica central de Kuhn gira en torno a las revoluciones científicas y la intervención decisiva del factor psicosocial corporalizado en las comunidades científicas que escogen o desechan paradigmas en un complejo proceso. (6) En el paso revolucionario de ciencia normal a ciencia extraordinaria aparecen conceptos que encuentran filiación con ideas de Koyré, Piaget y la escuela fenomenológica francesa de Bachelard o Michel Foucault (o incluso althuserianos como Michel Fichant y Michel Pecheux). Con Koyré se encuentra relación con el sentido no acumulativo de la ciencia. Con Piaget en la participación de factores psicogenéticos; y con los fenomenólogos en los cortes cualitativos , noción que a la larga proviene mutatis mutandis de Hegel.

El positivismo desde Compte ha intentado apartar de la comprensión de la ciencia el proceso del descubrimiento y los saltos revolucionarios en los paradigmas (para usar este lenguaje). El neopositivismo (cuyas determinantes teóricas son: por un lado una teoría del conocimiento que reproduce la que se considera es de las ciencias empíricas y, por otro lado, la sistemática utilización de la lógica matemática) ha tenido una gran influencia intelectualmente en el mundo occidental moderno en la filosofía y la Historia de la

Ciencia durante muchos años (especialmente en los paises anglosajones). El conocimiento científico es para ellos fundamentalmente una colección de derivaciones lógicas y otra de comprobaciones empíricas. Su interés reside exclusivamente en la justificación racional de ellas y a su vez consistencia lógica y la correspondencia con los hechos. Siguiendo la distinción de Reichenbach entre el "contexto del descubrimiento científico" y el "contexto de justificación" los neopositivistas enfatizaban el segundo. Las leyes de la ciencia deben para ellos ser reformadas según los modelos lógico-formales. El tratamiento de la ciencia se reducía en gran medida a los problemas de una lógica aplicada. Existe en esta visión una radical despreocupación por la génesis y si se quiere por la evolución auténticamente histórica del conocimiento científico.

Por otra parte, también es posición neopositivista asumir una supuesta neutralidad o descontextualización del lenguaje científico mediante el que se expresa el conocimiento. Es decir la vieja teoría de un lenguaje de hechos, objetivo e incapáz de transmitir la contaminación humana o social.

Es frente a esta visión filosófica imperante en la Historia de la Ciencia que intervienen Kuhn y Feyerabend. Se trata de una reacción no solo contra el internalismo que es más bien una consecuencia teórica sino muy especialmente frente al neopositivismo (aunque no solo frente a él). La obra de Kuhn introduce una revolución teórica que abre una actitud metodológica diferente en la Historia de la Ciencia.

Por el otro lado. En los años treinta los teóricos marxistas fueron incapaces de dar cuenta de la estructura de las revoluciones científicas y de los procesos de la ciencia en general a partir del esquema trivial y mecánico que considera a la ciencia parte de las fuerzas productivas que a su vez determinan el resto de la estructura social (el ya clásico determinismo de la base económica).

En ocasiones, marxistas o filomarxistas llegaron a afirmar unilateralmente el carácter burgués de la ciencia enfrentado a un supuesto carácter "proletario" de la que se empezaba a afirmar en la Unión Soviética. La lógica de la ciencia venía así a ser expresión directa de las contradicciones de clase. No existía entonces realmente dinámica interna propia en el decurso de las teorías científicas . A lo sumo se les aplicaba la autonomía relativa de la superestructura, siempre aprisionada por los barrotes de acero del determinismo clasista y economicista. La incapacidad del marxismo en la comprensión del papel esencial de la cultura y la política y de las ideas en general en el devenir de la totalidad social no le permitía a sus teóricos dar una respuesta al internalismo.

En síntesis: las nuevas ideas de Kuhn aparecían en un doble contexto, por un lado un internalismo unilateral idealista fuerte y extremo y por el otro lado un externalismo de carácter marxista poco útil y capaz para poder explicar el desarrollo de la ciencia. Por otra parte una sociología mertoniana que intentaba una descripción sociológica cuantitativa (siguiendo cierta tradición de Durkheim) funcionalista, en el fondo también positivista, al margen de los procesos sociales reales que intervienen en la evolución de la ciencia. Ni los marxistas ni los mertonianos daban una explicación metodológica adecuada (Allí se debe buscar el fracaso del externalismo durante estos años y el avance del internalismo).

Feyerabend reaccionó contra la deficiente metodología neopositivista y clamó por introducir la vida de nuevo en el entendimiento y práctica de la ciencia. Kuhn reaccionó contra el esquema aceptado de la ciencia y hundió su análisis en la práctica. El proceso psico-sociológico de la misma encontró el corazón de las transformaciones paradigmáticas en los científicos mismos. Su análisis removió y ventiló metodológicamente la historia y la filosofía de la ciencia.

La teoría de Kuhn lo que establece es entonces un puente con las comunidades científicas entre el devenir propiamente conceptual de la ciencia y el devenir social. Hace incidir entonces el análisis de la Historia de la Ciencia en objetos concretos de carne y hueso. Hace incidir el análisis en el hombre, en los hombres y de una manera específica. Este es un buen punto de partida metodológico, a pesar de las dificultades de precisión que los conceptos de Kuhn (paradigma, ciencia normal, ciencia extraordinaria) encierran..

Me voy a permitir sobre este territorio sugerir algunas ideas para completar una visión sobre este conflicto entre externalismo e internalismo. En realidad podríamos señalar tres posiciones en torno a esta discusión metodológica. Dos vinculadas a lo que se suele llamar internalismo. La primera posición es la neopositivista que apuntala el contexto de justificación y entonces los aspectos lógico-deductivos y formales de la ciencia; aunque ligadas a las tareas de validación y por último de comprobación experimental. Es decir, se trata de una visión que se refiere a la lógica conceptual de la ciencia en sí misma.

La posición de Koyré y su escuela no es la misma. (7) Koyré va a afirmar que toda esa dimensión de la que hablan los neopositivistas no puede ser separada de la dimensión de la filosofía y de la historia de las ideas. Para Koyré la ciencia no está eximida de metafísica, no esta eximida de filosofía en general

Koyré va a afirmar entonces una relación entre ciencia y cultura o ideologia en un sentido general. Ambas posiciones serían internalistas en el sentido en el que no hacen intervenir elementos externos al mundo de las ideas, es decir aquellos que son parte de la vida social y material.

En mi opinión la critica de Koyré al neopositivismo es correcta . La idea de la descontextualización, la objetividad y neutralidad de la ciencia y de la descontaminación de la ciencia con relación a la metafísica y a la filosofía, en general y al mundo de la opinión, es una crítica acertada. No obstante, en efecto, la posición de Koyré deja por fuera elementos valiosos de naturaleza externa al mundo de las ideas que juegan un papel en el desarrollo y evolucìón de las ciencias.

Lo que es obvio es que ni un análisis internalista en el sentido neopositivista ni un análisis externalista en el sentido marxista por ejemplo son satisfactorios para entender la evolución de la ciencia. Es obvio que en la evolución de la ciencia intervienen factores internos y externos y que en realidad existe una relación llamemosle dialéctica entre factores internos y externos. Cuáles factores juegan un papel más importante en un momento concreto es algo que solo se puede determinar sobre la base del análisis concreto. La existencia de una mayor importancia de unos elementos sobre otros no se puede zanjar con una premisa a priori. En unos casos será de una forma, en otros casos será de otra. Esto es sin duda un llamado a una buena dosis de nominalismo metodológico en el análisis histórico.

Yo afirmo la necesidad de reducir esa manía de buscar en la realidad histórica leyes generales, esa subestimación de la infálible necesidad. Resulta más conveniente abrir una dimensión amplia a la intervención del azar. Esto es un llamado al estudio serio de casos concretos con una enorme flexibidad metodológica. Debe quedar claro sin embargo que lo concreto en mi visión de las cosas no está reñida con la filosofía, ni el reclamo por su más amplio desarrollo.

En la evolución de las ciencias yo afirmo que existen en primera instancia tres sustratos diferentes. (8) Por un lado, un sustrato intelectual que ampliando el que afirmaba Koyré, es el que hace referencia a la cultura, a la ideología, a la filosofía, a las creencias en general de una época presentes en la comunidad científica. Por otra parte, un sustrato de carácter técnico y económico. Que es aquel a que hace referencia (quitando los determinismos del caso) el marxismo. Y existe un tercer sustrato, cuya importancia se ha acrecentado especialmente en este siglo, que es el sustrato político. Me refiero a aquel territorio en que la toma de decisiones políticas empujan la evolución de la ciencia en un sentido u en otro (claro está dentro de límites específicos).

Es la combinación de las influencias específicas de esos tres estratos lo que de manera concreta determina la evolución de la ciencia en un momento histórico preciso. Esto nos explica los condicionamientos a los que se ve sometido una comunidad científica. Lo cual entraría dentro de una perspectiva kuhniana.

Sin embargo, esto es todavía limitado. Habría que añadir un sustrato adicional. Hay una dialéctica entre comunidad científica y sociedad, y comunidad científica y la esfera de las ideas. Pero existe una dialéctica entre el científico individual y la comunidad científica. En esta dialéctica intervienen elementos de naturaleza personal, psicológica, social, etc.

Es entonces la combinación del papel de todos estos estratos y el rol de todas estas dialécticas, de todos estos factores integrados, lo que explica en definitiva el hecho científico. Son todos procesos en los que el azar ocupa un espacio muy grande. Es evidente que un momento histórico en ciencia es la resultante de una combinación precisa de los elementos mencionados.

Podemos decir que en el fondo de esta polémica entre Externalismo e Internalismo penetraban discusiones y premisas teóricas de naturaleza metafísica, ideológica y hasta política. Los dogmatismos metodológicos en un sentido o en el otro no contribuían mucho al avance de la disciplina. Esta esterilidad generó que muchos historiadores de la ciencia hayan abandonado -tal vez con toda justeza- el territorio de los estudios de método concentrandose en el estudio atomizado de casos. En mi opinión el énfasis en el estudio de casos es adecuado, pero no la retirada completa de la discusión filosófica y de método.

Es decir, -ampliando mi posición- es cierto que en estos momentos existen más ideas y opiniones de método que estudios precisos históricos que permitan justificar unas u otras; que es necesario ampliar considerablemente los estudios concretos y específicos. Pero que no es posible desprenderse de consideraciones de naturaleza metodológica y filosófica en ese proceso. Esta últimas van a estar siempre presentes de una u otra forma. De lo que se trata es de buscar un equilibrio que ponga en comunicación a los profesionales que laboran más sobre los aspectos filosóficos y a los que lo hacen sobre los estudios de casos históricos específicos. Se trata de establecer un puente entre los filósofos de la ciencia y los historiadores de la ciencia.

En cuanto al estudio de las matemáticas yo opino que se pueden estudiar usando la metodología que he sugerido esquemáticamente. Una situación matemática debería estudiarse analizando los cuatro estratos o dimensiones mencionadas antes para la ciencia en general, y tomando como punto de partida las comunidades matemáticas concretas; y en estas incluyo por supuesto a los educadores de la matemática.

La naturaleza misma de las matemáticas hace -sin embargo- que los aspectos lógicos, meramente teóricos y abstractos jueguen un papel más decisivo que en las otras ciencias. La "lógica" de la construcción matemática pone énfasis especiales en las reconstrucciones analíticas y teoréticas y no tanto en la experiencia empírica directa.

NOTAS BIBLIOGRAFICAS

1- Cfr. Ruiz, Angel. Vicarioli, G. "Breve historia de la historia de la historia de la ciencia". Revista DESARROLLO. Asoc. Cost. de Historia y Filosofía de la Ciencia. Número 3-4, 1986. San José Costa Rica.

2- Cfr. Agassi, I. TOWARDS AN HISTORIOGRAPHY OF SCIENCE, HISTORY AND THEORY: STUDIES IN THE PHILOSOPHY OF HISTORY. The Hague: North Holland, 1963.

3- Cfr. Lakatos, Imre. HISTORIA DE LAS CIENCIAS Y SUS RECONSTRUCCIONES RACIONALES. Madrid: Tecnos, 1971.

4- Cfr. Lakatos, I. THE METHODOLOGY OF SCIENTIFIC RESEARCH PROGRAMS. Cambridge: Howard Ferting, 1978.

5- Un excelente análisis sobre los límites del externalismo hecho por un historiador de la ciencia de la China comunista, en particular a propósito del mecanicismo metodológico de Needham sobre la historia de la ciencia en China, es el de Quio Renzong: "Sobre la tensión entre internalismo y externalismo en la historia de la ciencia", que aparece en Lafuente, A., Saldaña, JJ. (editores), HISTORIA DE LAS CIENCIAS. NUEVAS TENDENCIAS. Madrid: CSIC, 1987.

6- Cfr. Kuhn, T. THE STRUCTURE OF SCIENTIFIC REVOLUTIONS. Chicago: The Chicago University Press, 1962.

7- Para una revaloración del papel intelectual de Koyré puede estudiarse Redondi, P. "A. Koyré, De la mystique á la science. Cours, conference et documents, 1922-1962". Paris, Editions de L'EHESS, 1986.

8- Adopto el término de Taketani usado por Shozo Motoyama en "Algunas Reflexoes sobre la Historiografía Contemporanea de Ciencia", en REVISTA DE HISTORIA, n.103, 1975, Brasil.

EPISTEMOLOGIA Y CIENCIA EN LA ANTIGUEDAD: EL CASO DEL EPICUREISMO

Angel Ruiz Zúñiga
Escuela de Matemática/ Universidad de Costa Rica

RESUMEN

Se trata de describir las principales ideas de Epicuro -en momentos contrapuestas a las del estoicismo- en torno a la ciencia y el conocimiento. Se estudia la teoría del conocimiento y de la verdad que esta escuela de pensamiento antiguo desarrolló. En particular, algunas aproximaciones a la lógica y las matemáticas.

En el terreno de liberar al hombre del dolor Epicuro señalaba dos trabas para este fin: el temor a los dioses y el temor a la muerte. Junto con la prudencia con los deseos y la búsqueda del placer constituyen el famoso cuadrifármaco. Ante la necesidad de hacer desaparecer estos males, Epicuro va a recurrir a definir una física -ciencia en general- coherente con este objetivo. Una física que elimine los elementos de supertición, a los dioses, a la muerte como temor, y que, además, concuerde con el carácter libre de los hombres. Como señala adecuadamente Bertrand Russell

"a través del problema del temor, Epicuro llegó a la filosofía teórica (...)La intervención de lo sobrenatural en el curso de los natural le pareció una causa de temor , y la inmortalidad fatal para la esperanza de libertarse del dolor. En consecuencia, construyó una acabada doctrina destinada a preservar a los hombres de las creencias que inspira el miedo"1.

El razonamiento de Russell es evidente si se recuerda el carácter práctico, de manual, que las representaciones y la actitud teóricas poseen en este período histórico.

El modelo físico que Epicuro adoptó fue el del atomismo de Leucipo y Demócrito. Para Epicuro se trataba de sintetizar los principios esenciales del atomismo y a la vez introducir elementos de corrección que tanto su visión y actitud hacia la vida, como las criticas sostenidas por pensadores posteriores a los atomistas, especialmente los idealistas, lo llevaron a realizar. Epicuro va a aceptar del atomismo los siguientes principios:

"1- La materia es increada.
2- La materia es indestructible.
3- El universo consiste en cuerpos sólidos y vacío.
4- Los cuerpos sólidos son simples o compuestos,
5- El número de átomos es infinito.
6- La extensión de los átomos es infinita.
7- Los átomos se hallan siempre en movimiento.
8- La velocidad del movimiento atómico es uniforme.
9- El movimiento es lineal en el espacio, vibratorio en los

compuestos.
10-Los átomos son capaces de desviarse levemente en cualquier punto del tiempo y el espacio.
11-Tres cualidades caracterizan a los átomos: peso, forma, y tamaño.
12-La cantidad de formas distintas no es infinita, sino simplemente innumerable." 2

Esa sistematización de los fundamentos de su cosmología muestra una concepción materialista en su aproximación. Recurrir al atomismo le permite explicar el origen de las cosas a través de una explicación que solo involucra al movimiento de los átomos y el vacío. El universo es resultado de un proceso material sin una finalidad establecida, sin una teología. (Lucrecio, De reram naturam, ", (419-431) 3.

El epicureismo elimina, recurriendo a la explicación atomista, la ingerencia de los dioses en la vida de los hombres. Para Epicuro, sin embargo, los dioses existen como seres antropomórficos, compuestos también de átomos. Admite su existencia porque dice no es posible que no existan si lo hombres creen en ellos en forma tan universal; pero además porque representan la cima de la escala de valores del estado ético ideal del alma que él plantea: la tranquilidad e imperturbabilidad. (Este método último de la cima de una escala de valores es aristotélico)

La explicación atomista epicúrea como señalábamos antes niega la Creación.

"Ante todo nada proviene de nada: pues todo nacería de todo sin necesidad de semillas y si se disolviese en la nada lo que desaparece, todas las cosas serían destruidas, anulandose las partes en las cuales se descomponían. Y también es cierto que el todo fue siempre tal como es ahora y será siempre así, pues no existe nada en el que pueda cambiarse. En efecto, más allá del todo no existe nada que, penetrando en él, produzca su cambio" (A Herod, 38-39)4.

Este concepto unido al de infinitud de los átomos y espacio, y al "movimiento eterno", en choques y agrupamientos de los átomos, son fundamentos de la visión, materialista de la antiguedad. Es altamente interesante que Epicuro señala que las agrupaciones del átomos da lugar a un infinito números de mundos, proceso de continuo cambio que es también infinito

"...hay infinitos mundos, semejantes o desemejantes a este. Pues, siendo los átomos infinitos en número, como ya se ha demostrado, son llevados a los espacios más lejanos. En efecto, tales átomos de los cuáles puede surgir o formarse un mundo, no se agotan ni en uno ni en un número limitado de mundos, sean semejantes o sean diversos de estos." (A Herod, 45)5.

Epicuro -entre otros motivos- para hacer útil su filosofía práctica del atomismo, debe introducir una diferencia esencial en la doctrina de Leucipo y Demócrito. En estos la cosmología es determinista. Todo esta sometido a férreas leyes naturales; el movimiento espontáneo de los átomos no es posible. La libertad no es posible. Epicuro tenía que introducir cambios adecuados para satisfacer esa condición. Es el concepto de la desviación oblicua y espontánea de los átomos. El descanso de los átomos no es líneal absolutamente; en cualquier espacio o tiempo se desvían y producen colisiones con otros átomos, llevando a agrupaciones y a construcción de cosas o de mundos. La "desviación" de los átomos no es solo un recurso justificatorio cosmológicamente de la libertad. De hecho, se trata de una exigencia interna teórica de la concepción atomista. Si los átomos caen en líneas paralelas sin tocarse los mundos no se pueden construir porque las agrupaciones atómicas no se podrían hacer. La desviación es necesaria para coherentemente explicar el origen de los mundos.

"Por lo cual aquel hombre agudo, objetando que si todos fuesen atraídos hacia abajo en línea recta, como ya he dicho, jamás resultaría que un átomo pudiera tocar a otro... introdujo una novedad y dijo que un átomo podía sufrir una desviación de una mínima cantidad de la que no se da la menor; y así se forman las combinaciones, reuniones y adhesiones de los átomos, de los cuales nacen los mundos." (Cicerón,loc.cit.) 6

Lo átomos que espontáneamente se desvían poseen la autosuficiencia y la imperturbabilidad que caracteriza a los dioses epicúreos y al ideal de individual libre y autosuficiente que pregona Epicuro.

Para los epicúreos, el alma de los hombres era visto no como un hábito divino en los prosaicos cuerpos humanos, sino como materia compuesta también de átomos, que son lisos y redondos. Una orientación bastante materialista. El alma se destruye con la muerte del cuerpo, que no es más que la privación de la percepción, la sensibilidad, y de la que no tenemos nada que temer. Ni dioses ni la muerte deben ser fuentes de terror. Como retomará Virgilio:

Felix qui potuit rerum cognoscere causas atque metus omnes et inexorabile fatum subiecit pedibus strepitumque Acherontis avari.

Para los epicúreos los conceptos y categorías no son entes inmutables en sí, como señalaba la tradición idealista. Esto es expresamente claro en la aproximación de Epicuro al concepto de "justicia": Jamás ha existido una justicia absoluta, solo un acuerdo al que se arriba en el curso de las relaciones sociales, que defieren de un lugar a otro, de una época a otra, para impedir que un hombre le haga daño a otro... Todos los elementos que las leyes reconocen como justos poseen ese carácter en la medida que las necesidades de la relación social lo cosidere conveniente, lo sean no para todos; y si una ley resulta incompatible con las conveniencias de las relaciones sociales, deja de ser justa" 7. Y, más aún, "la justicia no tiene existencia por sí misma, sino que se halla siempre en las relaciones recíprocas, en cualquier lugar y tiempo en que exista un pacto de no producir ni sufrir daño".(Sent. Princ.,33) 8. ¡Esto último adelanta la teoría del contrato social!

Epicuro es el último de los grandes pensadores griegos que asumió una postura esencialmente materialista frente a la realidad. Se podría ver como una sintesís y recopilación de los resultados materialistas desde el origen de la filosofía en Mileto, pasando por los atomistas y recogiendo aspectos progresivos de resultados de los idealistas de las ciudades-Estado griegas. Con Epicuro termina realmente el pensamiento materialista griego. Después de Epicuro se mantendrá su doctrina transmitida de generación en generación, por sus discípulos hasta la última y mejor elaboración de sus ideas en Roma con Lucrecio. La inspiración de Lucrecio es directamente Epicuro. Sus resultados de la mayoría de esa gran obra de la antigüedad De Rerum Natura están contenidas en Epicuro. No hay innovaciones en Lucrecio en la teoría atomista pero realiza un magnífico compendio materialista de resultados sobre el conocimiento de la realidad.

Lucrecio retoma el combate contra las principales posiciones del estoicismo en un período en que este ya ha sufrido transformaciones que lo elevan hacia la mística, la religión y el idealismo. 9

El poema de Lucrecio centra gran parte de su desarrollo contra la religión. La divinidad estoica como regente del mundo y hacia la que es necesario adoptar una posición de personal devoción, la expresa Cleantes en su "Himno a Zeus" :"¡Oh Dios gloriosísimo, que tantos nombres tienes, Gran Rey de la naturaleza, idéntico a lo largo de los años sin fin; Omnipotencia, que con justo decreto lo riges todo! ¡Salve o Zeus, según a Ti es digno que por doquier tus criatura te aclamen!"10 Lucrecio levanta las banderas contra la supertición religiosa, por la concepción atomista, por un concepto de materia y la naturaleza como creatividad, dando una interesante explicación evolucionista de la historia de la sociedad, tomando como punto la importancia en el estudio histórico el desarrollo de las técnicas,...No resulta gratuito el comentario de Farrington

"En ninguna obra de la Antiguedad, y pienso que podría agregar de la era moderna, se puede hallar semejante esfuerzo para reunir todos los fenómenos de la naturaleza y de la historia como testigos comunes de una visión unificada de las cosas". 11.

El estoicismo antiguo posee una cosmología que es en realidad panteismo materialista en tanto afirma la existencia y la independencia de la realidad natural y objetiva.

"Llaman mundo...al mismo Dios, que es la cualidad propia de toda la sustancia, inmortal e inengendrado, creador de la ordenación universal que según los ciclos del tiempo absorbe en sí toda la sustancia consumíendola, y la engendra nuevamente a de si mismo"(Diógenes Laercio, VII, 137). 12.

Y además:

"Dios es un animal inmortal, racional perfecto e inteligente en su bienaventuranza, inaccesible a todo mal, providencia que gobierna y todo lo que existe en el universo.(...) y el universo entero y el cielo son las sustancias de Dios, afirma Zenón, y análogamente Crisipo...y Posidonio...y Antipastro" (D.L, VII, 147-8). 13

Los estoicos antiguos establecen que todo ente es corporeidad: el alma, la palabra, el bien, los afectos, los vicios,...La creación del mundo obedece a un proceso material no interior y subjetivo

"El mundo se engendra cuando la sustancia se transforma de fuego en humedad, pasando por el estado de aire; después por una parte, formada por partes más pesadas y cuaguladas, se convierte en tierra; por la otra, compuesta de partes más sutiles, se transforma en aire que, rarificandose deviene fuego, en fin, de la mezcla de estos elementos nacen las plantas, los animales y las otras especies" (Diog L, VII, 142) 14.

Para los estoicos la materia es pasiva en contraposición con la causa o fuerza divina que es activa y dirige la materia. Los estoicos establecen una sin separabilidad entre materia y causa. Este tipo de dualismo particular responde a la necesidad de explicar la relación entre pensamiento y la "materia". En Aristóteles es la relación entre "materia" y "forma", en donde la forma es el principio activo. Es clara la influencia aristotélica en la concepción estoica. Aunque las explicaciones cosmológicas de los estoicos antiguos pueden situarse en un marco naturalista y empírico, es necesario afirmar con claridad significan un retroceso frente a las conquistas y resultados del atomismo y de la elaboración epicúrea. Volver al concepto de fuego, agua,... en la explicación del origen del cosmos es retroceder varios siglos en la historia de la filosofía y no puede tener un sentido histórico más que retardatario del proceso de esclarecimiento. de la realidad. El tomar la idea y el nombre de Dios, el concepto de la divinidad, aunque sea identificado con la naturaleza y el mundo es una gran concesión a las prácticas de la supersticion religiosa. El estoicismo antiguo crea en Dios inmanente es cierto, pero un Dios que debe ser adorado y venerado; crea un culto retrógado a un Dios que solo puede ser comprendido en términos místicos. Dios aparece como "creador"de todas las cosas; la naturaleza no es un devenir contínuo del que emergen la vida y las cosas, sino que es un concepto personificado que da la luz. Los vicios místicos y religiosos que se introducen en la cosmología estoica intoxican el marco materialista que ha tomado. El concepto de Dios estoico esta cargado de confusión y ambiguedad. Es sobre todo soplo vivificante, razón e inteligencia, frente a lo pasivo y material afirma la Razón frente al mundo, aunque admita su unidad. Hay, pues, contradicciones en la cosmología estoica. Si además añadimos su clásica teleología, que niega la libertad, y la concepción de la repetición identica de ciclos limitados por conflagraciones universales, solo nos es posible concluir una cosa. El estoicismo adoptó una cosmología que, aunque colocada en un general marco naturalista y materialista, significa un agudo retroceso frente al desarrollo existente del pensamiento materialista, que va a jugar un rol de reacción activa contra el epicureismo y que transmite en su seno elementos religiosos y místicos, y la vida descompuesta de conceptos del idealismo del siglo IV a.c. Frente al retroceso del idealismo en la disgregación de las ciudades-estados, el estoicismo se convitió en un buen marco para la transmisión de todos esos elementos que siempre han sido muy útiles a los grupos sociales dominantes.

El desarrollo-transformación del estoicismo a lo largo de los siglos estaba en forma intrinseca en los origenes intelectuales de esta corriente filosófica. La stoa media ni los romanos traicionaron a los fundadores. Era un desarrollo casi lógico. El concepto de Dios, su personificación, la mística y la religión, que cultivaron en un principio, era la base de su posterior postura. El paso del Dios inmanente y cosmológico al trascendente y antropomórfico no es casual; la transformación del mismo en dualismo tampoco. Es el desarrollo hacia el neoplatonismo y la apertura hacia su utilización cristiana. No es, tampoco, que haya sido un proceso estricto sensa teórico, los factores al desarrollo social e histórico fueron los determinantes, pero es que su marco teórico lo permitía. Es contrastable con la historia del epicureismo que siendo la mejor sintesís del materialismo antiguo haya sido, sin embargo, desprestigiado y hasta estigmatizado.

Cicerón escribe:

"La antigüedad indudablemente estuvo errada en muchas cosas, y el tiempo la experiencia, y los nuevos conocimientos han debido corregirla. Sin embargo, es necesario mantener la veneración del augur y del colegio de augures y la práctica del augurio en razón de las creencias del pueblo bajo y por los grandes servicios que le prestan al Estado" 15

Igualmente Polibio analiza:

"La base de la grandeza romana es la supertición. Ha sido introducida en todas las instancias de la vida pública y privada mediante todos los artificios capaces de asombrar a la imaginación. Porque las masas en todo momento son inestables, llenas de deseos ilegítimos, ira irracional y pasiones violentas. El único recurso es mantenerlos atados, mediante el temor a los desconocido y a otros engaños similares. No fue porque sí, sino por designio consciente, que los hombres de antaño introdujeron en las masas nociones sobre Dios y la idea de la vida después de la muerte" 16.

Lucrecio era consciente de esta situación como todos los epicúreos. 17

La epistemología que desarrollaron los epicúreos es consecuente con su concepción cosmológica. La base del conocimiento y el criterio de verdad están en las experiencias sensibles.

"...Epicuro dice en el Canon que criterio de lo verdadero son las sensaciones, las prenociones y los afectos....Las nociones nacen todas de las sensaciones... Y el subsistir de los efectos de la sensación testimonia la veracidad de las sensaciones...Ni hay nada que pueda refutarlas: en efecto, ni la sensación homogénea refuta a la homogénea, siendo de igual valor, ni la hetereogénea a la hetereogénea, no siendo juicios acerca de las mismas cosas; ni la una rechaza a la otra, poruqe nos atenemos a todas, ni la razón, pues toda razón depende de los sentidos" (Diogenes Laercio L,X, 31-32) 18

Según Epicuro la posibilidad del error no se haya en la percepción, sino en el juicio. Las afirmaciones y la elaboración de conceptos debe concordar con la experiencia:

"Ateniendose bien los fenómenos pueden hacerse inducciones acerca de aquello que nos resulta invisible(...) con la condición de que se sepa extraer, por el razonamiento, conclusiones concordantes con los fenómenos" (Epist. a Pit, 104-112). 19

Epicuro no es meramente empirista, su posición es claramente más elaborada: "La sensación debe servirnos de fundamento para proceder, razonando, a la inducción de las verdades que no son accsesibles a los sentidos" (Ep. a Herodoto, 39) 20. Es verdadero tanto lo que vemos con los ojos como lo que aprendemos con la intuición mental" (Epist a Herodoto) 21. Estos principios son pilares básicos de la ciencia y del método de la comprensión de los procesos naturales. Epicuro buscaba las explicaciones de los acontecimientos de lo real desintoxicando la mente de cuestiones sobrenaturales. Esta actitud progresiva, sin embargo, lo llevó también a no preocuparse mucho por la corrección y selección de las hipótesis no sobrenaturales que se referían a una situación concreta en estudio.

Los estoicos también partían para la verdad del conocimiento de las sensaciones y de la experiencia. Este reconocimiento de lo objetivo, natural y externo a la conciencia es importante:

"La primera forma de escritura, es por medio de la sensación: en efecto, quien siente algo, por ejemplo, lo blanco, al desaparecer este conserva la memoria: y decimos que posee experiencia, cuando se engendran muchos recuerdos de la misma especie, pues la experiencia es la multitud de las representaciones de la misma especie" (Aecio, Plac., IV,11). 22

El concepto de "representación" no es homogéneo en los estoicos: Crisipo difiere con Cleantes...

Los estoicos cuando se trata de introducir el razonamiento en el problema del conocimiento, a diferencia de los epicúreos que mantienen el marco de la experiencia, se elevan hasta la construcción de un criterio de verdad basado "...en cierta evidencia propia de las cosas representadas: a esa representación pues, en cuanto evidente por sí misma, la llamaba comprehensiva..." (Cicerón, Acad., Post., I, 41)23 Este criterio de verdad lleva a la subjetiva noción de "evidencia innata" que sería el centro epistemológico de Descartes muchos siglos más tarde. Frente a los problemas que este criterio hacía emerger (producto de la subjetividad) estoicos posteriores añadieron que a la representación comprehensiva se le debía añadir "que no haya nada en contra de sí" Este "remiendo" no lograba desaparecer, sin embargo, el carácter subjetivo del criterio de la verdad.

Algunos comentaristas han sugerido que la "representación comprehensiva" con la "evidencia" que le corresponde, no debe verse como una negación del criterio de la experiencia y la sensación, y, más que eso, tiende a identificar esta "evidencia" en términos de concordancia con los resultados de las sensaciones y la experiencia. De hecho, la "representación comprehensiva" sugiere en concreto una sustitución de la proposición aristotélica como criterio de verdad. Los criterios de verdad que aparecen en los estoicos son las sensaciones y las representaciones comprehensivas. Es lo más probable que la ambigüedad no fuese producto de las fuentes históricas sino de la propia coherencia lógica del estoicismo. La situación de esta "representación compresiva" entra también en contradicción con la posición semi-nominalista de los estoicos. La no aceptación de los universales poco compatible con la "comprehensividad"

Para los estoicos lo verdadero y falso es solo individual. "Las representaciones generales no son ni verdaderas ni falsas. De aquellas, en efecto, cuyas especies están determinadas así y de tal manera, en cambio, los géneros no son así y de tal manera" (Sexto Empírico, Adv. Math, VII, 246)(24) y además "Dice Crisipo que la definición es explicación de lo propio (individual) (Anecd. Gr. II, 647).25 "Los universales (comunes) no son nada...no existe un hombre universal" (Simpl. Ing. Categ., 226)26

En el terreno de la epistemología también el punto de partida epicúreo es superior al estoico. La introducción del criterio racionalista de la representación, comprehensiva" y los problemas teóricos que suscitaron fueron, sin embargo, fuente de elaboración entre los estoicos sobre ciertos aspectos de la teoría del conocimiento: la diferenciación entre representación y representable que separa una "afección del alma" de una causa que la produce, es adecuada; la relación que establecen entre un "real subsistente" y la "representación comprehensiva" los obliga a precisar nociones como la de "proposición" y de lo "expresable" y "expresado"; la relación entre el significado, el signo y la cosa es correcta; la diferenciación entre lo verdadero y la verdad, etc...Fue un mérito de los estoicos, es necesario reconocerlo, que hayan sido los primeros "...en elaborar con detalle una teoría de la argumentación en la que se tuviera en cuenta la forma condicional y otras formas complejas de las proposiciones"27. De hecho, como señalaba Kneale en EL DESARROLLO DE LA LOGICA:

"La lógica de las proposiciones que ellos investigaron es más fundamental que la lógica de los términos generales estudiada por Aristóteles, no en el sentido de que la primera incluya a la segunda, sino en el sentido de que esta última presupone a aquella" 28.

Ahora bien, es necesario señalar que estos desarrollos en lógica no son acción directa de esa relación entre cosa y "representación comprehensiva". Debe recordarse que los principales exponentes de el estoicismo antiguo (vgr. Zenón y Demócrito) estuvieron en una relación muy estrecha con las tradiciones, independientes a Aristóteles, de los megáricos.

Los epicúreos no realizaron aportes en la lógica, en la semántica o la linguística, pero, como decía antes, su punto de partida sobre la globabilidad del problema del conocimiento es altamente importante. Epicúreos y estoicos adoptaron una actitud espistemológica que partía de la premisa de la posibilidad del conocimiento verdadero, es decir, el ser es y puede ser conocido. Es la actitud que impera en la Antiguedad. La pregunta por el conocimiento y su posibilidad no es que no sea formulada, sino que no va a revolucionar la forma de aproximación a la realidad de la reflexión filosófica, como va a suceder luego con Descartes (aunque en definitiva con Kant). Epicúreos y Estoicos siguen la tradición "dogmática". Es solo con los escépticos que el problema del conocimiento y su posibilidad se coloca como central y decisiva. Como reacción frente a la filosofía "dogmática" negaron la posibilidad del conocer, aunque no la existencia de un mundo objetivo: "No debemos confiar en los sentidos ni en la razón, sino permanecer sin opinión, sin inclinarnos hacia una parte o hacia la otra, impasibles" (Aristocles, en Eus., loc. cit.) 29 Es decir, no hay criterio de verdad "Carneados se opuso, no solamente a los estoicos, respecto al problema del criterio, sino también a los filosófos anteriores. El demuestra que no existe criterio absoluto de verdad: ni razón, ni sensibilidad, ni representaciones, ni ninguna cosa. Pues todos estos nos engañan igualmente" (Sexto Empírico, A.M, VII, 159) 30. Esta actitud de los escépticos no correspondía simplemente a la teoría en sí, sino que, como con toda la filosofía del período, también al fin de dar una fórmula de "salvación", un "evangelio", para los hombres: "Dice Timón que asumiendo tal actitud alcanzaremos, ante todo, la abstención del juicio (afasia) y luego la imperturbabilidad (atoraxia)"31 (Aristocles, loc. cit.) El cuestionamiento escéptico significaba una relativización de los criterios del conocimiento, de la cosmología, de la física.., del pensamiento. Una relativización de los capacidades de conocer de los hombres, del hombre en general. Era una relativización de la lógica formal, del principio de la no contradicción. Estos elementos que con una justa interpretación podrían ser progresivos y contribuir al desarrollo del pensamiento, son, sin más, también la negación del pensamiento. El esceptismo extremo es a la larga la negación, la destrucción "teórica" del hombre, de la sociedad y de la naturaleza. El escepticismo no pasará por la historia de la filosofía como avecilla pasajera: doscientos años sobre la Academia testimonían su importancia, otras épocas verán esta actitud presente en su pensamiento. El valor del epicureismo en relación con la epistemología y la ciencia -a pesar del simplismo y de actitudes teoricas muy mecanicas- debe reconocerse sin duda. Este ha sido el tema principal de este ensayo.

BIBLIOGRAFIA

1-Russell, Bertrand. HISTORIA DE LA FILOSOFIA OCCIDENTAL. Madrid: Espasa Calpe SA, 1971, P.271.
2-Novack, George. LOS ORIGENES DEL MATERIALISMO. Bogotá: Ed. Pluma, P196.
3-Lucr. DE RERUM NATURA, V, 419-431, en Mondolfo, Rodolfo. EL PENSAMIENTO ANTIGUO (Historia de la Filosofía Greco-romana, Tomo II). Buenos Aires: Losada. P.102.
4-A Herod., 38-39, en Mondolfo, Rodolfo. EL PENSAMIENTO ANTIGUO (Historia de la Filosofía Greco-romana, Tomo II). Buenos Aires: Losada. P.101.
5-Ibid, 45. P.101.
6-Ciceron, loc. cit. en Mondolfo, Rodolfo. EL PENSAMIENTO ANTIGUO

(Historia de la Filosofía Greco-romana, Tomo II). Buenos Aires: Losada. P. 101.
7-Novack. Op. Cit. P.201.
8-Sent. Princ., 33. en Mondolfo, Rodolfo. EL PENSAMIENTO ANTIGUO (Historia de la Filosofía Greco-romana, Tomo II). Buenos Aires: Losada. P.106.
9-Novack. Op. Cit. P.266.
10-Copleston, Frederick. HISTORIA DE LA FILOSOFIA (Vol. I: Grecia y Roma). Barcelona: Ariel, 1974. Segunda edición. P.391.
11-Novack. Op. Cit. P.211.
12-Diog Laerc, VII, 137 en Mondolfo, Rodolfo. EL PENSAMIENTO ANTIGUO (Historia de la Filosofía Greco-romana, Tomo II). Buenos Aires: Losada. P.125.
13-Ibid., VII, 147-8.
14-Ibid., VII, 142.
15-Novack. Op. Cit. P207.
16-Idem.
17-Russell. Op. Cit. P. 273.
18-DL, LX, 31-32 en Mondolfo, Rodolfo. EL PENSAMIENTO ANTIGUO (Historia de la Filosofía Greco-romana, Tomo II). Buenos Aires: Losada. P. 96.
19-Ep. a Pit. 104-112 en Mondolfo, Rodolfo. EL PENSAMIENTO ANTIGUO (Historia de la Filosofía Greco-romana, Tomo II). Buenos Aires: Losada. P.97.
20-Ep. a Herod, 39, en Mondolfo, Rodolfo. EL PENSAMIENTO ANTIGUO (Historia de la Filosofía Greco-romana, Tomo II). Buenos Aires: Losada. P.97.
21-Idem.
22-Aecio, Pla. IV, 11 en Mondolfo, Rodolfo. EL PENSAMIENTO ANTIGUO (Historia de la Filosofía Greco-romana, Tomo II). Buenos Aires: Losada. P.115.
23-Cicerón, Acad. Post, I, 41.
24-Sexto. E, Adv. Math, VII, 246, en Mondolfo. Op. Cit. P.120.
25-Anecd. Gr, II, 647, en Mondolfo. Op. Cit. P.121.
26-Simpl., Ing. Categ., 26b en Mondolfo. Op. Cit. P.121.
27-Kneale, Martha y William. EL DESARROLLO DE LA LOGICA. Madrid: Tecnos, 1972. P.109.
28-Ibid. P.166.
29-Aristocles, en Eus, loc. cit. en Mondolfo. Op. Cit. P.147.
30-Sexto, AM, VII, 159 en Mondolfo. Op. Cit. P.149.31-Aristocles, Loc. Cit. en Mondolfo. Op. Cit. P.149.

LA APLICACION DEL ALGORITMO DE UNIFICACION EN EL CONTEXTO DEL METODO DE ROBINSON Y EN ALGUNAS TEORIAS LINGUISTICAS.

CELSO VARGAS
MAESTRIA EN COMPUTACION
INSTITUTO TECNOLOGICO DE
COSTA RICA

SUMMARY: Unification is the subject of constant research in different fields, including, Logic-Programming, Many Sorted Equations, Problem Solving, Parallel execution of Logic Programs, and Linguistics. This report attempts to describe the central role of unification in important contemporary syntactic theories and formalisms. In the first section, the context in which this concept was introduced is presented, that is, in the context of Robinson's resolution method (1965). In the second section, the utilization of this operator in linguistics is described. In this section the discussion is limited to the formalism named PATR-II, developed by Shieber at Palo Alto, and HPSG (Head-Driven Phrase Structure Grammar) of Pollard, Sag and associates, at Stanford University. Obviously, these examples constitute only a sample of the potential use of unification in linguistics.

RESUMEN: Unificación ha sido, y es, objeto de muchas investigaciones en diferentes campos, incluyendo programación lógica, ecuaciones de tipo múltiple, resolución de problemas, ejecución en paralelo de programas lógica y linguística. Esta ponencia intenta describir el rol central que el algoritmo de unificación desempeña en formalismos e importante teorías sintácticas contemporáneas. En la primera sección, presento el contexto en el que este concepto fue introducido, es decir, en el contexto del método de resolución de Robinson (1965). En la segunda sección, describo la utilización de este operador en linguística. En esta sección nos limitamos a describir el formalismo PATR-II desarrollado por Shieber en Palo Alto, y HPSG (Gramática de Estructura Sintagmática "Head-Driven") desarrollada por Pollard, Sag y asociados de la Universidad de Stanford. Obviamente, estos ejemplos constituyen solamente una muestra del uso potencial de la unficación en linguística.

0- INTRODUCCION

La lógica de predicados de primer y segundo orden desempeñan un papel muy importante en computación y en matemática. No solamente constituyen un instrumento para formalizar la noción de "prueba" o "deducción", sino para representar diferentes propiedades y relaciones tanto sintácticas como semánticas de lenguajes de programación, de teorías matemáticas, y más recientemente, de las lenguas naturales. Esto es, para desarrollar diferentes lenguajes de programación y teorías para el análisis de las lenguas naturales.

Sin embargo, dichas lógicas son indecidibles, esto es, no existe un procedimiento general para determinar, dada una fórmula arbitraria de esa lógica, si existe una prueba (problema de la validez). La lógica de predicados de primer orden es parcialmente decidible, mientras que la lógica de segundo orden es esencialmente indecidible, esto es, no existe ningún subconjunto de la lógica de segundo orden que sea decidible.

El algoritmo de la unificación está directamente relacionado con el problema anteriormente señalado. En esta ponencia quisiera presentar, en forma general, el contexto en el que se introdujo el algoritmo de unificación y ver su aplicación en el área de linguística y procesamiento de lenguas naturales. En la primera sección presentamos el contexto en el que se introduce el operador de unificación; en la segunda sección, presentamos la utilización que se hace del operador en PATR-II y en HSPG.

1- EL METODO DE ROBINSON.

El operador de unificación fue* introducido por Robinson (1965) en el contexto de su método de resolución. El método de resolución es de decisión parcial. Se aplica a fórmulas en forma clausal. Se dice que una fórmula está en forma clausal si reune las siguientes condiciones:

1-Contiene únicamente los operadores lógicos de conjunción, disyunción y negación, 2-Todos los cuantificadores universales aparecen a la izquierda de la expresión eliminando todos los cuantificadores redundantes.

3-No posee cuantificadores existenciales (estos son eliminados en favor de funciones Skolem).

4-La fórmula en su totalidad consta de conjunciones con disyunciones internas y negaciones de fórmulas atómicas.

Uno de los teoremas de esta lógica o lógicas, debido a Skolem, establece que para cada fórmula de primer o segundo orden que es satisfacible, existe otra de segundo orden que es equivalente a la primera. (Sin embargo, en la práctica la fórmula resultante, con frecuencia, es de mayor complejidad).

El método de resolución es un procedimiento de decisión parcial y se aplica únicamente a fórmulas en forma clausal. Dada una fórmula en forma clausal A, el método de resolución toma negación de A y determina si es insatisfacible, en cuyo caso, A es decidible. A es insatisfacible si y solo si, la fórmula vacía puede ser derivada. Esto significa que todas sus fórmulas atómicas son de la forma A' y -A'.

En la aplicación del método de la resolución se hace uso de dos importantes elementos: la interpretación Herbrand y la operación de unificación. Quisiéramos referirnos brevemente a cada uno de ellos antes de ver la utilización de la operación unificación en linguística.

El lenguaje de predicados de primer y segundo orden se construye a partir de los siguientes elementos: a- un conjunto de constantes, de dos tipos: individuales y constantes de predicado de adicidad n, b- un conjunto de funciones de adicidad n; c- un conjunto de variables individuales y de predicado; d- un conjunto de conectivas diádicas y monádicas y d- un conjunto de cuantificadores (universal y existencial). Se define el conjunto de términos de esta lógica como el conjunto que contiene todas las constantes, todas las variables individuales y el conjunto de funciones con sus respectivos argumentos.

La idea de la interpretación Herbrand es la siguiente: toda fórmula de lógica de predicados puede ser interpretada en términos de sí misma, es decir, reemplazando las variables por constantes (un conjunto finito de instanciaciones). Una fórmula no se satisface si, y solo si, es falsa en todas las instanciaciones.

Uno puede ver el conjunto de términos como el conjunto base de un monoide libre; las instanciaciones, selección de subconjuntos del monoide. Cada fórmula puede admitir un conjunto infinito de instanciaciones.

En general, el algoritmo de la unificación es un caso especial de substitución. De todo el conjunto de instanciaciones o sustituciones que yo puedo realizar, son interés aquellas que me permitan aplicar el método de resolución, es decir, que me permitan obtener fórmulas del tipo A' y -A' (recuérdese que el objetivo del método de resolución es derivar la cláusula nula cuando una fórmula sea insatisfacible). Dos términos t1 y t2 unifican si, y solo si existe una sustitución s tal que s(t1) = s(t2). Así formulado, sin embargo, no me asegura que la unificación para los dos términos sea la más general. Podemos definir al **unificador más general** de dos términos del siguiente modo:

> Un unificador u de los términos s y t es llamado **un unificador más general** (UMG) de s y t si para cualquier otro unificador m, existe una sustitución h tal que hu = m. (Knight 1979 : 95)

Al procedimiendo para encontrar el UMG se denomina algoritmo de la unificación. En relación con este algoritmo señala Robinson (1979):

> Este algoritmo, que es el corazón del principio de resolución, es de considerable interés por sí mismo. Opera sobre cualquier conjunto S de expresiones y tiene dos maneras de terminar (y siempre termina): o termina con la indicación de que el conjunto S no es unificable; o termina indicando que es unificable y señalando el unificador más general de S (Robinson 1979: 189).

El algoritmo de unificación que introduce Robinson contiene dos partes: un chequeador para evitar infinitas unificaciones y el programa que busca el unificador más general, si existe. Sin embargo, tiene varios problemas. Uno ellos es que requiere tiempo exponencial para decidir si un conjunto de expresiones es unificable o no.

Muchísima investigación se ha realizado, y se sigue realizando, para optimizar dicho algoritmo y extenderlo a diversas áreas de investigación.

El artículo de Knight, recién citado, incluye consideraciones sobre unificación en las siguientes áreas: complejidad computacional, algoritmos y estructuras de datos, prueba de teoremas, programación lógica, lógicas de orden superior, estructuras de rasgos, procesamiento de lenguas naturales, algoritmos de unificación en paralelo, teorías de ecuaciones, inferencia tipo, lenguajes de programación y máquinas de aprendizaje.

2- UNIFICACION Y LENGUAS NATURALES.

El método de resolución de Robinson constituye uno de los primeros esfuerzos por construir procedimientos computacionales para el desarrollo de lenguajes de programación basados en lógica. Durante la década de los 70 se realizan los primeros esfuerzos por construir un lenguaje de programación basado en fórmulas en forma clausal, específicamente, claúsulas Horn. La familia PROLOG es el resultado de estos esfuerzos. PROLOG utiliza de manera central el método de resolución de Robinson.

La posibilidad de desarrollar lenguajes de programación lógica, y la aparición de los primeros, fue una fuente importante de intuiciones en el área de procesamiento y tratamiento de lenguas naturales. Martin Kay introduce por primera vez la unificación en el contexto linguístico.

Se han desarrollado varios formalismos computacionales basados en unificación para expresar diferentes aspectos linguísticos. Estos han sido utilizados de dos maneras: como instrumentos para el tratamiento computacional de fenómenos linguísticos, específicamente, el desarrollo de interfaces, analizadores sintácticos, y procesamiento de lenguas naturales, y por el otro, para desarrollar teorías linguísticas que incorporen unificación como operador principal o como única operación. Un ejemplo de los primeros es PATR-II desarrollado por Shieber (1984 y 1986) en el SRI y extendido por Karttunen y otros de la Universidad de Texas. Un ejemplo del segundo tipo es la teoría HPSG (Head-Driven Phrase Structure Grammar), desarrollada por Pollard, Sag y asociados de la Universidad de Stanford. En realidad, como señalan Pollard y Sag (1987, 1988), HPSG es la teoría linguística que por excelencia ejemplifica PATR-II.

Ahora bien, podemos expresar la diferencia entre "instrumentos" y "teorías linguísticas" del siguiente modo: Al linguista le interesa comprender la estructura del lenguaje humano por sí mismo, y para esto desarrolla teorías comprensivas, descuidando un poco si éstas pueden ser implementadas computacionalmente, y en caso de que lo sean, si corren en tiempo aceptable o no. Estos aspectos, en cambio, son fundamentales desde el punto de vista computacional (como instrumentos).

El propósito de esta sección es señalar el uso de unificación en el área de tratamiento de lenguas naturales. Dado que HPSG constituye una extensión de PATR-II (y en este momento, la teoría linguística que mejor se enmarca dentro del formalismo), dedicaremos mayor atención a PATR-II.

1- PATR II.

Una de las principales características de PATR-II, y que constituye una de sus mayores ventajas, es que es fundamentalmente declarativo. Desde el punto de viste de la implementación computacional, un lenguaje o formalismo declarativo conlleva una relativa independencia respecto a los mecanismos de control (Conory 1987). Lo más importante es expresar "qué asociaciones son permisibles" más que "cómo computarlas". Esto constituye una de las ventajas de los lenguajes de programación lógica sobre los otros lenguajes.

Una segunda característica de PATR-II es que no necesita una distinción, como la introducida por Chomsky, entre estructura profunda y estructura superficial, sino que está basada en el orden de aparición de los elementos de la oración.

En tercer lugar, es informacional, esto es, lo más importante dentro del formalismo es la información, sintáctica, semántica y pragmática que los distintos ítemes léxicos, los sintagmas y las oraciones conllevan, así como información sobre las restricciones.

En cuarto lugar, la base que utiliza es libre de contexto. Sin embargo, puede incrementarse su poder computacional hasta ser equivalente, presumiblemente, a una máquina de Turing. Esto tiene muchas ventajas, tanto desde el punto de vista computacional como linguístico. En efecto, desde el punto de vista computacional se puede modelar aspectos importantes del lenguaje natural con tiempo lineal (libre de contexto), pero a su vez, se pueden expresar diferentes gramáticas para tratar fenómenos que no son libres de contexto (véase Gazdar y Pullum 1985 y Gazdar 1985).

Los elementos básicos del formalismo son rasgos y valores. Existen dos tipos de rasgos y valores: los primitivos o simples y los complejos. Cada rasgo primitivo tiene asociado un valor. Los valores de los rasgos complejos son conjuntos de rasgos. Cada ítem léxico es especificado mediante una matriz de rasgos y valores. La estructura matemática que utiliza PATR-II para codificar información son grafos acíclicos dirigidos (directed aclyclic graphs). Los ítemes léxicos con combinados mediante reglas léxicas. La estructura una regla léxica tiene varios componentes, cada uno de los cuales toma la forma de una ecuación. Estas reglas especifican el tipo de ítemes léxicos que pueden combinar bajo ciertas condiciones y el tipo de información qué la estructura resultante conlleva. Mediante la aplicación de las reglas se generan nuevos grafos (véase Pereira y Shieber 1986 para una descripción formalizada del dominio de las estructuras de rasgos). La idea es que nueva información pueda ser introducida por las reglas.

La operación fundamental utilizada por PATR-II para combinar información es unificación, pero se utiliza en un sentido bastante diferente al descrito en la sección anterior. En efecto, unificación en lógica cumple un papel fundamental al interior del método de la resolución. En PATR-II la Unificación tiene las tres características siguientes: 1- proyecta esructuras de rasgos sobre nuevas estructuras de rasgos, en este sentido, unificación cambia o puede cambiar las estructuras de rasgos sobre las que se aplica la operación (en este caso se dice que cada una de estas estructuras es subsumida en la estructura resultante); 2- puede fallar cuando la información de las estructuras sobre los que opera es incompatible; 3- siempre termina.

En el contexto del método de resolución, unificación permite generar elementos resolventes sobre los que opera el método de resolución. En el contexto de PART-II unificación permite generar nuevas estructuras con mayor información.

Sin embargo, en linguística es importante expresar generalizaciones y simplicar la cantidad de rasgos necesarios. Para ello se introducen algunas convenciones muy útiles. Por ejemplo, en español existe un regla muy simple de grafía que rige el cambio de 'z' a 'c'. Esta regla afirma que se cambia de 'z' a 'c' cuando lo que sigue es una 'e' o una 'i'. En este caso la introducción de disyunciones es muy importante. Por otro lado, existe también en español una regla que rige el uso del imperativo. Por ejemplo, "cierre la puerta". En general, los imperativos no se aplica a la primera persona singular o plural, pero sí al resto de las persona(?). Es suficiente con indicar que no se aplica a estos casos. Aquí el uso de '+' y '-' para la indicar la presencia o ausencia del rasgo en cuestión es importante.

En PATR-II se pueden dar reglas sistemáticas para regular estos dos casos.1- Dadas dos estructuras de rasgos y valores A y B que poseen valores negativos, Unificar (A, B) falla cuando existe una estructura C, tal que A subsume C y C no es incompatible con B, o B subsume C y C no es incompatible con A. De otro modo, la operación es definida. 2- Dadas tres estructuras A, B y C, tales que A es disyuntiva de B y C es compatible tanto con A como con B, C unfica A o B . (Unficar ({A,B}, C)), si y solo si, existe otra estructura C', tal que C' = { (A,C), (B, C) }. (Véase Karttunen 1986, para una exposición más detallada de éstas).

En PATR-II pueden expresarse diferentes teorías linguísticas o componentes de teorías linguísticas, como las siguientes: GPSG (Generalized Phrase Structure Grammar) desarrollado por Gazdar y otros (1985), LFG (Lexical Functional Grammar) de Bresnan y Kaplan (1983), DCG (Define Clause Grammar) de Kay (1983), CG (Categorial Grammar) Steedman (1983), Karttunen (1987) y Uszkoreit (1987) y otras más.

2- HPSG

Sobre HSPG diremos pocas cosas aquí. Esto por dos razones. Por un lado, desde el punto de vista de unificación incorpora los aspectos fundamentales de PATR-II. Es de hecho, la teoría linguística que mejor expresa la perspectiva y estilo de PATR-II. Por otro lado, es muy poco el espacio de una ponencia para un análisis más detallado de la teoría. Me interesa más, señalar algunas de las características que la diferencias de un formalismo como PATR-II.

En primer lugar, una teoría linguística hace una serie de afirmaciones empíricas sobre la estructura y funcionamiento de las lenguas naturales o de una lengua particular. El formalismo en cambio es más bien un instrumento en el que se puede codificar la información pertinente para el linguista. Sin embargo, el tipo de instrumento utilizado impone restricciones sobre el tratamiento que la teoría puede hacer.

El igual que PATR-II, HSPG es una teoría sintáctica y semántica basada en información. Pero incorpora, además, aspectos de otras fuentes, como **Situation Semantics**, GPSG y áreas en computación como Representación del Conocimiento. Hace uso central de idea de 'cabeza' como núcleo central de las oración; de los sintagmas y de otras categorías gramaticales.

En segundo lugar, HPSG aunque comparte importantes aspectos de PATR-II, combina dos estrategias: top-down y Bottom-up. Ambas estrategias no son incompatibles con PATR-II, pero como Shieber sugiere (véase Shieber1986b), PATR-II puede ser restringida de otro modo.

En tercer lugar, HPSG asume que la transmisión de información en las lenguas naturales está regida por un conjunto de principios. Estos principios son de varios tipos: b- universales, válidos para todas las lenguas, b-específicos, válidos para una lengua particular y c- opcionales. Entre los principios universales podemos citar: 1-FFC (Foot Feature Convention), que estipula que la especificación de rasgos en una rama-hija de un árbol deben estar incluidos en los que la madre. 2- CAP (Control Agreement Principle) que establece que el verbo debe concordar con el sujeto de la oración.

Existen principios específicos válidos para una lengua particular. En el caso del español existe una regla que exige que el verbo de la oración completiva de verbos de deseo o espectativa, deba ir en subjuntivo ("espero que María venga").

Una lengua natural, de acuerdo con HSPG, puede considerarse como la conjunción de los principios universales, de los principios específicos, del conjunto de restricciones a nivel léxico y el conjunto de reglas.

BIBLIOGRAFIA.

Conary, John (1987) PARALLEL EXECUTION OF LOGIC PROGRAMS. Kluwer Academic Publishing Company. The Netherlands.

Gazdar (1985) THE APPLICABILITY OF INDEXED GRAMMAR TO NATURAL LANGUAGES. CSLI, Stanford University.

------ y Pullum (1985) COMPUTATIONAL RELEVANT PROPERTIES OF NATURAL LANGUAGES AND THEIR GRAMMAR. CSLI, Stanford University.

Karttunen (1986) "Features and Values" en: Shieber y otros (1986) 17-35.

Knight (1989) "Unification: An Interdisciplinary Survey". ACM COMPUTING SURVEYS (1989) (21) 93-124.

Manna, Z. (1974) MATHEMATICAL THEORY OF COMPUTATION. McGraw Hill, USA.

Pereira y Shieber (1986) "The Semantics of Grammar Formalisms Seen as Computer Languages" en: Shieber y otros (1986) 37-55.

Pollard y Sag (1987a) HEAD-DRIVEN PHRASE STRUCTURE GRAMMAR: AN INFORMAL SYNOPSES. CSLI, Stanford University.

------------ (1987b) INFORMATION-BASED SYNTAX AND SEMANTICS. Vol. I, CSLI, Stanford University.

Robinson, J. J. (1979) LOGIC: FORM AND FUNCTION. The Computer Science Library, North Holland.

Shieber, Stuart (1986a) AN INTRODUCTION TO UNIFICATION-BASED APPROACHES TO GRAMMAR. CSLI. Stanford University.

----- (1986b) "Using Restriction to Extend Parsing Algorithms for Complex-Feature-Based Formalisms" En Shieber y otros (1986) 36-58.

----- y otros (1986) A COMPILATION OF PAPERS ON UNIFICATION-BASED GRAMMAR FORMALISMS. PART I AND II. CSLI, Stanford University.

SECCION DE FILOSOFIA DE LAS MATEMATICAS

La Matemática Como Ciencia Experimental: El Caso de Fractales y Caos Determinístico

Bill Lambert M.

RESUMEN:

Los objetos geométricos llamados "fractales" han generado mucho interés en la matemática pura así como en la aplicada, y son muy relacionadas al fenómeno de "caos determinístico" el cual implica, por ejemplo, la imposibilidad absoluta de predicciones adecuadas meteorológicos.

No obstante, el estilo de estudiar estos temas y en particular la fuerte dependencia de experimentos numéricos, ha generado bastante controversia. Vamos a explicar brevemente de qué se trata y discutir las implicaciones metodológicas-filosóficas.

ABSTRACT

"Fractals" have generated much interest in both pure and applied mathematics , and are closely related to the phenomenon of "deterministic chaos" which implies, for instance,the impossibility in principle of adecuate weather prediction.

Nonetheless the way in which these themes are studied and in particular a strong dependence on numercial experiments has generated a lot of controversy. We shall explain the topic briefly and discuss the methdological-philosophical implications.

En los últimos años se ha suscitado mucho interés en los objectos geométricos llamdos fractales: una clase no muy bien definida (la definición en [Ma], por ejemplo: dimensión de Hausdorff > dimensión topológica, es provisional). Hablando muy informalmente, son conjuntos que tienen una estructura "quebrada" y típicamente de autosemejanza a muchas escalas. Su estudio detallado usualmente emplea las computadoras; de hecho existen varios programas para hacer imágenes, "maginificar" partes, re-plantear los imágenes por razones estéticas etc. Muchas personas simplemente tienen interés en esta materia por su valor estético: ver por ejemplo [PR].

La materia está muy relacionada con el tema de caos determinístico; en una forma sencilla esto puede definirse como "dependencia sensible de condiciones iniciales". Más específicamente, se puede decir que una función es caótica sobre un conjunto S si para puntos aribtrariamente cercanos $x, y \in S$ las orbitas $x, f(x), f(f(x))\ldots$ & $y, f(y), f(f(y))\ldots$ son "radicalente diferentes": por ejemplo $\limsup_{n\to\infty} |f^n(x)-f^n(y)|>0$ y a la vez $\liminf_{n\to\infty} |f^n(x)-f^n(y)|=0$) donde $f^n(x)$ es la iteración n veces de f empezando en x, (¡no una potencia!).Li y Yorke mostraron(ver [LY]) que este fenómeno es bastante general; y por ejemplo Smítal(ver(Sm]) ha mostrado que fácilmente se puede obtener una f con conjunto "caótico" de medida positiva dónde adems las condiciones son más fuertes, en particular el lim sup es acotado abajo para todos los pares de x, y. En general el conjunto-límite de un tal proceso, o "atractor" es de carácter fractal, un así llamado "strange attractor", atractor raro.

Aquí hay algo serio. Muchos de los artículos sobre estos temas son informes de experimentos numéricos o hasta observaciones de fenómenos observados en experimentos físicos. Muchas veces salen en revistas científicas prestigiosas (por ejemplo el Journal of Statistical Physics) donde los criterios para publicación son no obstante diferentes de los de las revistas matemáticas (¡nótese que decimos "diferentes" y NO "inferiores"!)

Y de eso viene. que muchos consideran que hay algo "ilegítimo" (tal vez hasta choriceado) acá. En [KM] la parte de Krantz fue destinada orignalmente como una reseña de [PR] para el Bulletin de la American Mathematical Society y es muy hostil; "parece", dice, "que a la gente que se llaman geómetros de fractales, no les interesa mostrar teoremas".[Desafortunadamente la réplica de Mandelbrot tiene casi el nivel de "¡¡LA TUYA!!" y no ayuda mucho a la discusión. Debe notarse que Krantz solicitó la oportunidad de reseñar el libro, se supone con intención de quejarse de lo que pasa sobre fractales; al final su reseña no se publicó en el Bulletin.]

A mi concepto la crítica de Krantz es a la vez justificada y no justificada. Es cierto que hay muchas publicaciones en esta área de dudosa rigor; a la vez hay muchas que son totalmente acceptables desde el punto de vista usual de la comunidad matemática. Un ejemplo del segundo caso es el trabajo de Douady y Hubbard para mostrar que la frontera del "conjunto de Mandelbrot" es conexa (ver [DH], también [PR]); de hecho Krántz cita este trabajo pero le parece anómalo en la literatura fractal (juicio que no compartimos). Igualmente insiste que el libro [Fa] de Falconer, de rigor indiscutible, no tiene nada que ver con el culto; lo cual nos parece simplemente una equivocación, si bien es cierto que no es cosa que se cita demasiado en los artículos.

Lo que pasa es que estamos frente a algo bastante común en las ciencias "duras" pero a la cual no estamos demasiado acostumbrados en la matemática: informes de resultados experimentales. En realidad esto se ve en cosas como las reseñas designadas "Preliminary Reports" en los A.M.S Abstracts: pero allá se trata de teoremas que son solución provisional a un problema dado, con miras a reclamar prioridad antes de publicar un informe "bien pulido"

Pero no estamos acostumbrados a ver informes definitivos más explícitamente "experimentales". En alguna manera pensamos que estudiamos, como matemáticos, algo "en los cielos" que existe en forma absoluta; o bien, que la matemática es un "juego formal" y por lo tanto no puede "pegarse" con la realidad. Obviamente se trata de posiciones follosóficas: la primera Platonista y vinculada al logicismo, la sgunda nominalista y por supuesto en la linea "formalista" de Hilbert.(No estamos tomando en cuenta las variadas formas de intuicionism y de constructivismo, que no tienen mucha vela en este entierro).

Hay una discusión reciente de matemática como ciencia experimental en [Go] donde también se encontrará referencias bibliográficas al tema. (En particular menciona a [Sp] que debe ser muy relevante a nuestro tema pero no he podido ver el libro. Las "ecuaciones de Lorenz" fueron descubiertas en investigacions metorologicas y rperesentan el empiezo del estudio de "caos determinístico".) En particular Goodman indica cómo las bases filosóficas de la matemática están hoy en día bajo discusión en una forma mucho más honda que la tradicional tricotomía logicismo-formalismo-intuicionismo (ver [Bl]).

La situación en esta materia está en flujo. Hasta que las definiciones son muy provisonales; como ya se notó, la de "fractal" dada por Mandlbrot en [Ma] es explícitamente tentativa y hay discusiones sobre la forma correcta de "dimensión" a usar (o LAS formas, puesto que hay conceptos múltiples y hasta el concepto de un "espectro" de dimensiones--ver p.e. [Gr]). Se duda aún de los conceptos más acceptados; ver como sólo un ejemplo [AGK]).

Ahora, no hay nada novedosa acá--salvo que el interés general suscitado por las bellezas gráficas generadas en el estudio de (¡o el juego con!) los fractales, más las vinculaciones con el mundo de las ciencias experimentales, ha dado como resultado que vemos en literatura materia que en ramas más calmadas de la matemática quedarían tal vez en el "submundo" de comunicaciones informales, "preprints" etc.etc.

Es cierto que en un artículo matemático del tipo usual hay una clase de "certeza" que no corresponde al tipo de materia que acabamos de mencionar: esto, ¡siempre y cuando no esté lleno de "obvio", "demostración fácil dejada al lector" etc.etc. Pero se puede tener esta certeza sin que los resultados tengan el más mínimo interés para nadie. Cabe preguntar si no quepa también un tipo de publicación matemática menos rigurosa, en el sentido de demostraciones formales, pero que puede suscitar especulaciones, ivestigaciones--y por supuesto al fin demostración en el sentido usual, o bien refutación. De hecho, esto ha pasado siempre, pero en general este segunda clase de publicación ha quedada en la "literatura informal" como hemos indciado antes.

(Un ejemplo del desarrollo parcial de una teoría matemática en forma " 'científica o 'cuasi-empírica' ", según Shapiro, se puede ver en la reseña [Sh]. Esta teoría, la de las funcions computables, ha pasado ya por las etapas de axiomatización, generalización y abstracción "hacia las nubes".)

El uso de computadores en la demostración de teoremas, como en el caso de el de los Cuatro Colores, ha suscitado también una controversia sobre qué es en realidad una demostración. Se ha hablado seriamente de cambiar "las reglas del juego" para publicaciones matemáticas para acercarse a los criterios de las ciencias experimentales: ver por jemplo [La], Quien escribe cree que esto es admisible, pero como "informe provisional",o algo así. ¡No debemos perder la esperanza de una demostración totalmente correcta según criterios tradicionales!

En nuestro concepto, lo que pasa es saludable como contrapeso a un rigorismo un tanto exagerado. Indica que estamos en un período de fermento. Tendrá que venir después la consolidación, formalización y al fin axiomatización - o bien la decisión de la comunidad matemática (incluso los "usuarios", y no sólo las personas que se autoproclaman "matemáticos") que no valga la pena. Sinceramente creo que no pasará lo segundo en el caso de los fractales.

BIBILOGRAFIA

[AGK] Arneodo,A.,G. Grasseau, y E. Kostelich
"Fractal dimensions and f(α) spectrum of the Hénon attractor"
Physics Letters A v. 124,426-432; 1987

[Bl] Black, Max
The Nature Of Mathematics
Routledge & Kegan Paul, Londres 1933
(y muchas otras ediciones)

[DH] Douady, A. y J.H.Hubbard
"Iteration des polynomes quadratiques complexes"
Comptes Rendus Acad.Sci. Paris Ser. I.
T. 294, 123-126; 1982

[Fa] Falconer, K.J.
The Geometry of Fractal Sets
Cambridge Univ. Press , Londres-N.York etc. 1985

[Gl] Gleick, James
Chaos: Making A New Science
Viking, N.York 1987
(Exposición popular)

[Go] Goodman, Nelson
"Mathematics as natural science"
Journal of Symbolic Logic v. 55,182-193 (1990)

[Gr] Grassberger, P.
"Generalizations of the Hausdorff dimension of fractal measures"
107A Physics Letters 101 -105 (1985)
[Mathematical Reviews 86i:58081]

[Hi] Hirsch, Morris
Reseña crítica de [Gl]
Mathematical Intelligencer V. 11 # 2
(Primavera) 1989

[KM] Krantz;Steven G.;Mandelbrot, Benoit M.
(Debate sobre [PR] y [PS])
Mathematical Intelligencer V. 11 # 4, 12-19
(Otoño) 1989

[La] Lam, C.W. H.
"How relaible is a computer-based proof?"
Matematical Intelligencer V. 12 #1, 8-12
(Invierno) 1990

[LY] Li,T-J. y Yorke,J.
"Period Three implies Chaos"
American Mathematical Monthly vol. 82,985-992;1975

[Ma] Mandelbrot, Benoit B.
The Fractal Geometry of Nature
Freeman, N.York 1983
{Math Reviews 84h:00021 y ver v. 57 #2015, #11224 }

[PR] Peitgen, H.-O. y Richter, P. H.
The Beauty of Fractals
Springer, Berlin-N.York etc.1986
{Math Reviews 88e:00019}

[PS] Peitgen, H.-O. y. Saupe,D. (redactores)
The Science of Fractal Images
Springer,Berlin-N.Y. etc. 1988

[Sh] Shapiro, S.
(Reseña de artículos de Kleene y Davis de tipo histórico)
Journal of Symbolic Logic v. 55, 348-350 ;1990

[Sm] Smítal, J.
"A scrambled set with positive Lebesgue measure"
Proceedings Amer. Math.Soc. V.92,50-54 (1984)
{*Mathematical Reviews* 86b:20009b}

[Sp] Sparrow, C.
The Lorenz equations: bifurcations, chaos and strange attrractors
Springer, Berlin-N.York etc., 1982

[VV] (Varios autores)
Respuestas a [Hi]
Mathematical Intelligencer V. 11 # 3
(Verano) 1989

PARADOJAS Y CONJUNTOS

Prof. Roxana Reyes Rivas, M.A.
Maestría en Computación, ITCR.
Escuela de Filosofía, UCR.

Prof. Bach. Javier Vargas López.
Escuela de Matemática, UCR.
Estudiante, Maestría en Computación, ITCR.

RESUMEN

Una paradoja inspirada en la conocida paradoja de Richard, es presentada. La paradoja aparece cuando se encuentra que es posible definir por medio de un número finito de símbolos, al conjunto que no pertenece a D, siendo D el conjunto de conjuntos que son definibles por un número finito de símbolos (en este caso se usa el idioma español pero puede usarse cualquier otro). Seguidamente, se mencionan y se discuten brevemente algunas soluciones que se plantean a paradojas de esta clase, incluída la solución de Richard mismo. Se expone también por qué la mayoría de estas soluciones les parecen poco apropiadas a los autores.

SUMMARY

A paradox based on the famous Richard's paradox, is presented. The paradox appears when it is found that it is possible to define by means of a finite number of symbols, the set that is not in D, being D the set of sets which are defined by a finite number of symbols (in this case it is use Spanish language, but it could be used any other language). After this, a brief mention and discussion of the solutions given to this kind of paradoxes is provided, including Richard's own solution. Finally, it is explained why most of these solutions do not seem appropriate to the authors.

Paradoja de Richard:

Hágase una lista de las propiedades de los números enteros positivos. A cada propiedad le corresponderá un número entero positivo. Defínase un entero positivo "no richardiano" si este cumple la propiedad que enumera; y un número es "richardiano" si no cumple la propiedad que enumera.

Ser richardiano es una propiedad de los números enteros positivos, por lo tanto, existe un número entero positivo que enumera esta propiedad.

¿El número que enumera esta propiedad, es richardiano o no?

Inspirados en esta clase de paradoja planteamos lo siguiente:

Sea D un cierto conjunto de conjuntos de números enteros positivos, definido como sigue:

> un conjunto de números positivos pertenece a D si y solo si es definible mediante un número finito de palabras en español.(*)

(*)La definición de D fue extraída del libro de George Boolos y Richard Jeffrey, Computability and Logic.

Posteriormente Russell planteó una modificación a la idea original de la Teoría de los Tipos, a saber, la Teoría Ramificada de los Tipos. En esta última cada tipo de propiedad está dividido en órdenes. Estos órdenes están determinados por el tipo de definiciones en que se usan, de tal forma que una propiedad sólo puede ser usada en una definición que se refiera al orden inmediatamente inferior. Las razones para introducir dicha modificación son el no incurrir en paradojas semánticas, y, por otra parte, no permitir el uso de definiciones impredicativas.

No obstante, la Teoría Ramificada de los Tipos presenta dos problemas fundamentales: a). dificultades que hacen casi inmanejable la teoría de los números reales(*); b). suscita una prescripción contra las definiciones recursivas y, con ella, la teoría de las funciones recursivas.

Nos interesa aquí extendernos un poco sobre este segundo problema. Las definiciones recursivas recurren al concepto que se está definiendo para definirlo. Esto es, una definición como la del factorial para cualquier otro argumento mayor que cero es una definición circular e inválida según el enfoque russelliano (fac(x')=fac(x).x'). Sin embargo, la recursividad propicia el método de

(*)Russell trató de superar estos problemas con la introducción del Axioma de la Reducidibilidad, el cual no discutiremos aquí ya que se aleja del interés específico de esta ponencia. Huelga apuntar que su axiomaticidad ha sido uno de los puntos más discutidos del logicismo russelliano.

Notación matemática:

W = { conjuntos que son definibles mediante un número finito de palabras }

$D = \{ x \subset Z^+ / x \in W \}$

Ejemplos de conjuntos de D:

Z^+ : El conjunto de números enteros positivos (6 palabras)

Ø : El conjunto que no tiene elementos (6 palabras)

{1,2} : El conjunto cuyos elementos son el uno y el dos (10 palabras)

Enunciado de la paradoja:

Sea H : El conjunto de números positivos que no pertenece a D (10 palabras)

H es definible por un número finito de palabras, entonces H pertenece a D, pero por definición de H, este no pertenece a D.

POSIBLES SOLUCIONES

Ramsey (siguiendo a Peano) distinguió dos tipos de paradojas, a saber, las lógicas y las semánticas. Mientras las paradojas lógicas son aquellas que pueden ser expresadas en símbolos lógicos, las semánticas son aquellas que no pueden ser expresadas de esa manera. Para Ramsey paradojas como la de Richard pertenecen a la segunda clase.

Richard mismo propuso una solución muy parecida a la que Russell dió, y que discutiremos más abajo. Según él la solución era que había un error en el uso del conjunto de todas las propiedades de los enteros positivos (P:={p/p es una propiedad de los enteros positivos}). Por tanto, no cumplir la propiedad que se enumera (ser un número richardiano) es a su vez una propiedad que no debe pertenecer a P. Por consiguiente la paradoja queda resuelta pues dicha propiedad no pertenece a P.

Russell ideó la Teoría de los Tipos para evitar la ocurrencia de algunas formas de paradojas (las lógicas). Esta teoría, muy someramente explicada, lo que dice es que un predicado de un determinado tipo(*) no puede ser aplicado más que a predicados u objetos del tipo inmediatamente inferior (el tipo 0 corresponde al nombre de los objetos del dominio del discurso, el tipo 1 a las propiedades de aquellos, etc.).

(*)Se puede definir un tipo como un conjunto de argumentos para los cuales una función proposicional posee valores.

computación más poderoso y sería inútil en matemáticas escatimar un recurso que ha probado ser tan apropiado para el desarrollo de las ciencias de la computación y la metamatemática.

Ramsey, siguiendo la idea original de Russell, trató de usar la Teoría de los Tipos para evitar las paradojas en matemáticas. Para ello, eliminó la Teoría Ramificada de los Tipos, pues la consideraba innecesaria y que introducía más problemas de los que solucionaba. Por otra parte, aceptó las definiciones impredicativas. Para éste la totalidad de las propiedades existe en sí misma antes de que las evoquemos en una definición. Sin embargo, esta defensa de las definiciones impredicativas da pie a la postulación de un mundo platónico de entidades matemáticas tales como la totalidad de las propiedades, antes de la demostración de su existencia.(*)

En conclusión, consideramos que las soluciones de Richard y Russell son poco adecuadas pues introducen nuevos problemas en el desarrollo matemático. Sin prescripciones en contra de la autorreferencia como las hechas por ellos no

---

(*)El problema del platonismo matemático es un tema muy controversial que por sí mismo llevaría mucho espacio. Puede verse la solución planteada por Carnap en "The logicist foundations of mathematics" Por otra parte, tal propuesta platónica es totalmente contraria al espíritu logicista en que se enmarca la Teoría de los Tipos. Para un desarrollo más amplio de este problema véase la ponencia: "Carnap, Quine y Tait: sobre la existencia matemática" presentado por la coautora de la presente ponencia en este mismo congreso.

hay ningún obstáculo para que las paradojas se susciten. Si bien es cierto que el lenguaje matemático es susceptible de un refinamiento mayor que el lenguaje ordinario, este pulimento debe ser llevado a cabo con gran precaución ya que su localidad, a veces, hace perder la perspectiva general del edificio matemático. Tal es el caso de los problemas arriba planteados con respecto a los números reales y la recursividad.

la existencia de tales entidades abstractas es indeterminable.(*)

Para plantear su parecer Carnap distingue dos clase diferentes de preguntas acerca de la existencia, a saber, preguntas internas y preguntas externas. La referencia a cierta clase de entidades implica la construcción y adopción de un marco lingüistico. Así las prenguntas internas serian aquellas que preguntan por la existencia de las entidades las cuales se suponen que están incluidas dentro del marco, por ejemplo, "¿Existe un número primo mayor que cien?". Las preguntas externas son aquellas que preguntan por la existencia de las entidades de un marco en general, y, por ende, la adopción del marco mismo, por ejemplo, "¿Existen números?"

Por consiguiente, en el primer caso, las preguntas serian contestadas dentro del marco también, esto es, de acuerdo con los recursos desarrollados dentro del marco somos capaces de determinar que algo sea real o no. Es decir, los limites del marco limitan la existencia de los objetos para los cuales hemos producido el marco. En otras palabras, asumimos un marco para referirnos a ciertas entidades, y en tanto el marco funcione, aquellas entidades existen en terminos del marco. Mas no deberíamos tomar la eficiencia del marco como una garantia de la existencia de las entidades a las que el marco se refiere.

> ..."Pero esto no debe ser interpretado como si significara su aceptación de una creencia en la realidad del mundo objeto; no hay tal creencia o afirmación o asumción, porque ésta no es una pregunta teórica. Aceptar la cosa mundo no significa más que aceptar una cierta forma de lenguaje, en otras palabras, aceptar las reglas para formar propocisiones y para examinar, aceptar o rechazarlas. La aceptación del lenguaje objeto lleva, basados en la observación llevada a cabo,

(*) Carnap podria decir a este respecto que no estoy planteando un verdadero problema sino un pseudoproblema, pero, como yo lo veo, el que plantea semejante pseudoproblema es él mismo ya que todo su articulo parece estar orientado hacia ésta tesis implicitamente.

también la aceptación, creencia, y la afirmación de ciertas proposiciones. Pero la tesis de la realidad del mundo objeto no puede ser formulada en el lenguaje objeto o, al parecer, en ningún otro lenguaje teórico".(1) (*)

De acuerdo con Carnap, la pregunta por el status ontológico de las entidades involucradas en un marco, una pregunta externa, es la clase de pregunta que los filósofos preguntan, y dado que tal pregunta no está formulada dentro del lenguaje científico (el marco), entonces es un pseudoproblema.

Así el problema del compromiso ontológico es evitado por Carnap a través de su afirmación de que la inclusión de algunas entidades dentro de un marco significa solamente la aceptación del marco mismo, pero no de la existencia de tales entidades. Como yo lo entiendo, el autor está diciendo que el marco regula la forma en que nos vamos a referir a alguna clase de entidades, a saber números naturales, aunque podríamos haber estado usando palabras que las mencionen dentro de un lenguaje más amplio. Por ejemplo, podemos usar "diez" en nuestro discurso ordinario, pero dentro de su marco específico nos referimos derectamente a "diez", como en " 'Diez' es un número".

..."Podríamos hablar (y lo hemos hecho) inclusive de "la aceptación de nuevas entidades" partiendo de que esta forma de hablar es consuetudinaria; pero se debe tener presente que esta frase no significa para nosotros más que la aceptación del nuevo marco, i. e , de las nuevas formas lingüísticas. Sobretodo, ésto no debe ser interpretado como refiriéndose a una asumción, creencia, o afirmación de la "realidad de las entidades". No existe tal afirmación. Una alegada proposición de la realidad del sistema de entidades es una pseudo-proposición sin contenido cognoscitivo. Para estar seguros, no hemos enfrentado en este punto un problema importante; pero éste es un problema práctico, no uno teórico;

(1)Rudolf Carnap. "Empiricism, semantics, and ontology", en Paul Benacerraf and Hilary Putnam, eds. Philosophy of Mathematics, Selected Readings. pp. 243-244.

(*)Todas las citas han sido traducidas directamente del inglés por la autora de este trabajo.

> éste es un problema de aceptar o no nuevas formas lingüísticas. La aceptación no puede ser juzgada como si fuera algo verdadero o falso porque no es una proposición. Sólo puede ser juzgada como más o menos expedita, fructífera, conducente a la meta para la cual el lenguaje está dirigido. Los juicios de esta clase proporcionan la motivación para la decisión de aceptar o rechazar la clase de entidades". (2)

Por otra parte, tenemos el trabajo de Quine sobre el compromiso ontológico y su argumento en contra de la solución de Carnap a dicho problema. De acuerdo con Quine, el compromiso ontológico no se deriva del uso de los nombres en general, sino del uso de las variables cuantificadas. Esto es, para que una proposición que contenga un nombre o una descripción sea significativa, ésta no tiene que referirse a un objeto concreto: el compromiso ontológico se presenta a través del uso de variables cuantificadas.

Esto también debe ser aplicado a los universales; es decir, podemos usar palabras que mencionan universales sin implicar la existencia de algunas entidades especiales. El hecho de que podamos hacer proposiciones ontológicas acerca de los universales puede ser realizado a partir de proposiciones casuales y ser verdadero, de acuerdo con algún esquema conceptual, pero de acuerdo con otros esquemas conceptuales esas proposiciones ontológicas podrían no ser verdaderas.

> "El problema es más claro ahora que antaño, porque ahora tenemos un standard más explícito por medio del cual decidir con qué ontología una teoría dada o forma de discurso están comprometidas. una teoría está comprometida con aquellas y sólo aquellas entidades a las cuales las variables acotadas de la teoría deban ser capaces de referirse para que las afirmaciones hechas en la teoría sean verdaderas". (3)

De acuerdo con Quine ésto es así porque cuando acotamos las variables estamos suponiendo que estas variables

(2)Carnap. op. cit. pag. 250
(3)W.V.O. Quine. "On what there is", en From a Logical Point of View. pp. 13-14

representan alguna entidad o grupo de entidades. Dado que las letras de predicado pueden ser tomadas como variables acotables, el compromiso con una ontología de clases es obvio, ya que las letras de predicados tienen a clases como sus valores, sin embargo, no estaríamos comprometidos con una ontología de atributos, a pesar de que existe un compromiso con una ontología de entidades abstractas. Por supuesto, el compromiso ontológico debe ser puesto a prueba a la luz de la ciencia, y su verdad es determinada por su función dentro de la teoría científica.

Así, el punto de vista de Quine ciertamente permite afirmar la realidad de cualquier entidad que resulte necesaria para el poder explicativo de la teoría. En el caso de las matemáticas, el compromiso ontológico puede ser reducido a clases, dado que tal introducción es lo suficientemente fuerte para su poder explicativo. Sin duda, ésto se enfrenta a la Teoría de los Tipos de Russell, y para evitar la paradoja, Quine encuentra otra vía, el uso de clases a causa de la simplicidad y fuerza de las matemáticas. Pues de acuerdo con Quine, la teoría de los tipos concede la realidad de las clases que son universales a cambio de la realidad de los atributos los cuales también son universales. En relación con la controversia sobre la teoría de los tipos y antes de comparar a Carnap y Quine, debo enfatizar una característica de la teoría de los cuantificadores de Quine. El cuantificador cuantifica sobre cualesquiera objetos en el mismo sentido; ésto es, la realidad puede ser vista como un universo único y las variables se refieren a cualquier cosa que exista en dicho universo. (4)

Como podemos ver, el punto de vista de Carnap sobre la existencia matemática es totalmente opuesto al de Quine. Ya que, donde Carnap solamente ve la utilidad práctica de la

(4)Vease una explicación del punto de vista de Quine sobre este asunto en su "Logic and the Reification of Universals", en From a Logical Point of View. pp. 119-127.

asumción de ciertas entidades sin implicación ontológica alguna, Quine, en cambio, encuentra que las proposiciones verdaderas que el lenguaje científico puede afirmar, implica la existencia de las entidades involucradas, al igual que otras proposiciones objetivas.

Pero una de las diferencias más interesantes entre estos filósofos se presenta a partir la crítica de Quine a la división entre preguntas externas e internas. Hay que recordar que el artículo de Carnap arriba mencionado fue escrito para responder a posiciones como la que Quine sostenía acerca del compromiso ontológico. La respuesta de Quine no se hizo esperar.

Según Carnap, las oraciones existenciales que involucran universales son o propuestas de adoptar algún lenguaje específico para referirse a los universales, ésto es, adoptar el lenguaje de las propiedades, números o proposiciones, o son afirmaciones sin significado. De esta forma, la cuantificación sobre los universales para Carnap tiene un carácter diferente de la cuantificación usando variables individuales. Siguiendo a Wittgenstein, Carnap toma los universales como una clase de predicados diferente de aquellos que son considerados predicados ordinarios, a saber, los predicados ordinarios se refieren a objetos no lingüísticos y los universales se refieren al lenguaje. Quine no ve tal diferencia. Pues en su posición, los predicados ordinarios circunscriben subclases de clases las cuales son delimitadas por predicados universales. Así, la diferencia entre predicados es sólo un problema de grados de generalidad; en ambos casos se estan refiriendo a objetos no lingüísticos. Es entonces obvio que la cuantificación ya sea sobre universales o sobre objetos que satisfacen predicados ordinarios siempre tiene la misma índole.

Para terminar esta comparación me gustaría hacer hincapié en las profundas diferencias que ambas posiciones implican. Por una parte la declaración de Carnap en contra del compromiso ontológico tiene su raiz en su acuerdo con

Wittgenstèin, y también su división entre analítico y sintético(*). Por otra parte, la posición de Quine en favor del compromiso ontológico lo lleva a un platonismo matemático(*); debido a su rechazo de recursos tales como la Teoría de los Tipos y su concepción holista, que no reconoce diferencia entre verdad lógica y factual, también tiene que rechazar la división entre analítico y sintético. En su artículo "Sobre la visión de Carnap de la ontología" Quine escribe sobre su oposición a tal división de la forma ya establecidá en su otro artículo "Dos dogmas del empirismo":

> "Dentro de la ciencia natural hay un continuo de gradaciones, desde las proposiciones que reportan observaciones a aquellas que reflejan características básicas digamos de teoría cuántica o la teoría de la relatividad. La visión con la que yo concluyo en el último artículo citado, es que las proposiciones de la ontologia y aún las de las matemáticas y la lógica forman una continuación de éste continuo, una continuación que es quizá más alejada de la observación de lo que están los principios centrales de la teoría cuántica o la relatividad. Las diferencias aquí son en mi opinión diferencias sólo de grado y no de clase. La ciencia es una estructura unificada, y en principio es la estructura como un todo, no sus proposiciones componentes una por una, lo que la experiencia confirma o demuestra ser imperfecto. Carnap sostiene que las preguntas ontológicas, así como preguntas sobre principios matemáticos o lógicos, son cuestiones no de hecho sino de escoger un esquema conceptual conveniente o marco para la ciencia; y estoy de acuerdo con ésto sólo si lo mismo es concedido para cada hipótesis científica". (5)

(*)Para Carnap analítico significa lógicamente verdadero y sintético es factualmente verdadero. Ibid. pp. 244 y 249.

(*)Aquí estoy usando "platonismo" de una forma diferente a la que Quine usa con respecto a Carnap: mientras que para Quine Carnap es platónico porque admite variables de más alto orden, yo uso "platonismo" en el sentido de que se acepta la existencia de un reino de entidades independientes, más a la manera de Tait.

(5)W.V.O. Quine. "On Carnap's Views on Ontology", en The Ways of Paradox. pag. 134.

Antes de concluir con esta parte quiero enfatizar que a la base de la crítica de Quine debemos ver las polémicas que desató la teoría de la verificación del significado de Carnap. Según ésta el significado está determinado por la experiencia que podamos tener de la referencia de las proposiciones, la experiencia es el fundamento del significado. Esto es lo que Lakatos llamó el empirismo neoclásico(*). Pero entonces para Quine el problema es ¿qué tan significativas son las proposiciones de la matemática?; Popper antes que Quine ya habia criticado tal posición. El programa de investigación carnapiano está orientado en mucho por el problema que arriba hemos mencionado.

Una tercera posición puede ser encontrada en el trabajo de Tait "Verdad y prueba: el platonismo en matemáticas". Según Tait, la elucidación de la relación entre verdad y prueba en matemáticas aclarará cuanta confusión hay dentro de lo que es llamado platonismo en matemáticas. El problema que Tait es la concepción de platonismo como la declaración de que lo que conocemos en la proposiciones matemáticas existe en algún sistema independiente de entidades matemáticas. De acuerdo con su punto de vista, no hay posibilidad de que podamos demostrar que tal sistema o estructura contiene de hecho las entidades y las propiedades que les atribuimos, no aun si las encontramos mediante una prueba. En este platonismo, las proposiciones matemáticas funcionan como un lenguaje objeto que se refiere a una existencia real de los números si se prueba que tales proposiciones son verdaderas.

Tait dice que la verdad en matemáticas es solamente probar que el objeto que mencionamos puede ser presentado, y

---

(*) Imre Lakatos. "Cambios en el Problema de la Lógica Inductiva", en Matemáticas, Ciencia y Epistemología. Este artículo hace un buen examen de la evolución y dificultades del programa de investigación de Carnap. La evidencia experimental se convierte en el problema del "grado de confirmación". Todo su desarrollo y consecuencias están fuera del propósito de este trabajo, sin embargo.

presentar tal objeto significa probarlo, es decir, construir el objeto.

> ..."Mi punto es más bien que, independientemente de lo que nosotros diríamos que estamos haciendo cuando estamos probando un teorema, lo que nosotros estamos haciendo puede ser fácilmente entendido como la construcción de un objeto. Los principios matemáticos básicos de prueba que usamos, por ejemplo, las leyes de la lógica, inducción matemática, etc., son naturalmente entendidos como principios de construcción.(...) Aquí está pues la respuesta a una de nuestras preguntas: ¿por qué es la prueba la última garantía de la verdad? La respuesta es por supuesto, que la única forma de mostrar que hay un objeto de tipo A es presentar uno. (Probar que hay un objeto de tipo A significará nada más que probar A, y eso significa exhibir un objeto de tipo A)". (6)

En contra de la posición intuicionista, como él la ve, solamente construimos el objeto pero no hay un objeto que pruebe las proposiciones matemáticas. Esto es, en la prueba construímos el objeto y no hay nada más que el objeto construído al cual la proposición matemática se refiere. Más aún, Tait declara que el peor problema del punto de vista intuicionista es la identificación de prueba y computación. Existen algunas proposiciones en matemáticas que podrían ser probadas pero difícilmente podrían ser computadas. (7) De tal forma que las computaciones son una especie de objeto dentro del corpus matemático al igual que los números (objetos a construir).

Así, a través de esta distinción, Tait concluye que la prueba es la única forma de encontrar la verdad matemática y, de todos modos, no necesita postular un mundo independiente de entidades matemáticas, a pesar de que la construcción de tales objetos por medio de la prueba no involucre la condición de desarrollar todo el proceso de producirlos como en la computación. En otras palabras, la

(6) Tait. "Truth and Proof: the Platonism of Mathematics". pág. 17.

(7) Véase el ejemplo en la pag. 19 del artículo de Tait citado anteriormente

verdad matemática sigue siendo independiente de nuestras capacidades de conocimiento.

> "La visión platónica de que la verdad es independiente de lo que conocemos o podemos conocer es una visión enteramente correcta. En primer lugar, pueden existir proposiciones que podamos probar en principio basados en las matemáticas existentes, pero cuyas pruebas son demasiado complejas para que las procesemos. Segundo, puede haber proposiciones que no son probables sobre la base de lo que ahora aceptamos, pero son probables por medios que nosotros aceptaríamos. Cuando hablo aquí de medios de prueba, por supuesto no me refiero a nuevos principios lógicos concernientes a 0, 2, V,], definiciones inductivas, etc. sino mas bien a la introducción de tipos ulteriores a los cuales le podamos aplicar estos principios". (8)

En conclusión, Tait no niega que exista la verdad matemática independiente de la mera actividad humana, sino que aquella actividad humana es la única que muestra tal verdad y, por consiguiente, no puede ser encontrada la posibilidad de mostrar de tal verdad independiente, como un mundo superior. Así, con respecto a Quine y Carnap, Tait tiene lo que podríamos llamar una posición media. Ya que la pregunta externa de la existencia de entidades matemáticas se mantendría sin sentido, pero de todos modos no podríamos reducir la verdad matemática a un problema de las posibilidades humanas para realizar cierto tipo de operaciones. (9)

Sin embargo, debido a esto último esta posición "media" parece poco coherente. Por un lado este autor reconoce la independencia de la actividad humana que tiene la verdad(*) matemática, pero por otra parte hace depender su comprensión de una actividad estrictamente humana (la prueba). Pero precisamente es esta dependencia de la

---

(8)Tait. op. cit. pp. 22-23

(9)Con respecto al problema de las preguntas externas, véase la nota #4 en el artículo de Tait, pag. 27.

(*)Cabe preguntarse si usar la noción de verdad independiente de la actividad intelectual humana no es un sin sentido, pues me inclino a creer que es lo que afirmamos sobre algo a lo que llamamos verdad.

actividad humana la que no nos permite postular la existencia de un sistema de entidades matemáticas, entonces, ¿cómo se sostiene esta verdad independiente?

METAFISICA, METODO Y MATEMATICAS EN DESCARTES

Jeanette Campos/ Escuela de Filosofía
Angel Ruiz Zúñiga/ Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

RESUMEN

En este trabajo se quiere hacer una interpretación que integre la metafísica, el método y las matemáticas en el pensamiento filosófico de Descartes. Se trata de plantear que existe una clara conexión entre el método típico de la axiomática con los preceptos básicos de la epistemología cartesiana.

Nadie podría dudar del papel jugado por Descartes en las matemáticas. La geometría analítica, cuya paternidad también debe dársele a Fermat, resultó esencial para la constitución del Cálculo y, por ende, de la matemática moderna. Pero Descartes fue también un filósofo que tuvo mucha proyección, y en cuyo pensamiento se nota una profunda influencia de las matemáticas y de las ideas que sobre esta se tienen en su tiempo.

Indiferente a las condiciones de la experiencia y a los principios explicativos de los fenómenos, Descartes afirma la posibilidad de establecer un método que nos conduzca a un conocimiento profundamente nuevo de la verdad de las cosas basado en el "método de los matemáticos". En su Discurso del Método expresa:

> "Encontraba placer sobre todo con las matemáticas, a causa de la certeza y evidencia de sus razones; pero yo no notaba aún su verdadero uso y... me extrañaba de que, siendo sus cimientos tan firmes y tan sólidos, no se hubiera construido sobre ellos nada más levantado.:" [1].

Descartes no niega que las matemáticas hayan hecho ya un esfuerzo para asegurar a la ciencia la conquista de la verdad, pero, considerado uno aparte de otro, la lógica, el silogismo, el experimento, la deducción matemática, no bastan para producir la ciencia.

[1] Descartes. DISCURSO DEL METODO. P 18.

No se trata, entonces, de renunciar a todas las maneras de pensar anteriormente, sino de unirlas en un pensamiento nuevo, bajo un nuevo método. Descartes intentará reducir los datos de la experiencia a las ideas claras de la razón. Las matemáticas han establecido ya que existen medios para demostrar cómo un movimiento engendra a otro, es decir, nuestra razón logra justificar la naturaleza, su verdad, puesto que comprendemos sus leyes.

Para Descartes, las ideas que surgen de la experiencia sensible no expresan la verdadera naturaleza de las cosas, el descubrimiento de las ideas innatas va a traer consigo el descubrimiento de las verdades garantizadas por Dios. Afirma Descartes que es bastante manifiesto que, para algunos filósofos:

> "no hay nada en el entendimiento que no haya sido primeramente en el sentido, donde es cierto, sin embargo, que la idea de Dios y del alma no han estado nunca...es que no elevan nunca su espíritu más allá de las cosas sensibles... y todo lo que no es imaginable les parece no ser inteligible."[2].

<u>El criterio de verdad</u> cartesiano se establece a partir de las ideas claras y distintas que están en el espíritu y la aplicación de su método. El conocimiento de la verdad consiste en:

> " 1) ...no aceptar nunca ninguna cosa como verdadera si yo no la conociera ser tan evidentemente, es decir, evitar cuidadosamente la Precipitación y la Prevención; y no incluir en mis juicios nada más que lo que se presente tan CLARA Y DISTINTAMENTE A MI ESPIRITU que no tuviese ninguna ocasión de ponerlo en duda."[3]

Hay entonces, para Descartes, proposiciones cuya verdad se impone a mi espíritu; "Yo pienso, luego existo". Hay una razón que me permite discernir lo verdadero de lo falso sin salirme de mi mismo, un entendimiento que logra concebir ideas sin necesidad de recurrir a los órganos corporales. Está mirada del espíritu sobre las nociones que le son inmediatamente presentes es lo que llamamos <u>intuición</u> .La intuición no podrá engañarnos siempre que sea clara y distinta. La verdad nos es dada y debemos comprobarla en nosotros mismos, la verdadera experiencia es interior y no exterior al espíritu.

---

[2] Ibid. P.50.

[3] Ibid. P.30.

Descartes plantea un deducción indirecta, pues parte de las ideas complejas, encuentra primero las ideas simples, para constituir de nuevo las ideas complejas. Esta deducción lleva en sí dos momentos principales: el análisis y la síntesis.

El análisis es el gran descubrimiento de Descartes y se apoya en la enumeración de todos los objetos conocidos o desconocidos, que se designan mediante símbolos.

El segundo precepto de su método es

> "2)...dividir cada una de las dificultades que examinaría en tantas parcelas como se pudiera y fuera requerido para resolverlas mejor."
>
> Y el tercero:
>
> "3)... conducir ordenadamente mis pensamientos comenzando por los objetos más sencillos y más fáciles de conocer, para ascender, poco a poco, como por grados, hasta el conocimiento de los más complejos; e incluso suponiendo un orden entre los que naturalmente no se preceden unos a otros."[4].

El análisis tendrá por objeto investigar con motivo de una verdad o de una realidad particular, los principios de los cuales se deriva, los principios de dónde se deduciría por síntesis. He aquí el descubrimiento de la hipótesis cartesiana, es decir de la hipótesis inmediata, la necesaria, sin la cual el hecho propuesto permanecería ininteligible.

La intuición es la única manera de conocer, es preciso entonces, que la deducción sea una intuición continua, es preciso que pasemos de una intuición a otra nueva por la intuición de su relación. El cuarto punto de su Método va consistir en:

> "... hacer en todo enumeraciones tan completas y revisiones tan generales que estuviera seguro de no omitir nada."[5].

La actividad mental define las naturalezas simples, y sólo la intuición intelectual capta los vínculos necesarios entre los términos para guiar el progreso de la inferencia. La enumeración, entonces, dentro del análisis, desempeña una segunda función en el proceso deductivo, que consiste en controlar la continuidad en la cadena de los razonamientos. Bajo este método, la totalidad de nuestros conocimientos exige que estos se sigan unos a otros, de

---

[4] Idem.

[5] Idem.

la misma manera en que se siguen los términos conocidos de los desconocidos en una ecuación matemática. Desde este punto de vista, la reducción del conocimiento a verdades a partir del innatismo cartesiano es en su forma axiomático. La teoría del conocimiento de Descartes está basada en Axiomas, es decir, en principios tan claros y distintos que no necesitan explicación, pues su veracidad es garantizada por Dios que crea todas las cosas, las esencias y las existencias, " las Verdades Eternas" que gobiernan el Universo y regulan nuestra razón.

Descartes dirá:

> "...nuestras ideas o nociones siendo cosas reales y que provienen de Dios en todo aquello en que son claras y distintas, pueden ser en esto sino verdaderas"[6].

> Era preciso, por necesidad,

> "que hubiese algún otro más perfecto del cual yo dependiera y del cual yo hubiese adquirido todo lo que yo tenía."

Ahora bien, el cogito cartesiano: "pienso, luego existo" es el principio y modelo de la evidencia indudable. Es la coincidencia entre el acto de pensar y el yo. "Veo muy claramente que para pensar hay que ser"[8] concluye Descartes. Es la unidad del ser y el pensar. Se plantea acá una realidad indudable de mis ideas en cuanto se actualizan en mí, y un yo que las piensa. Pero resulta también la toma de conciencia de mi pensamiento limitado, carente de la absoluta perfección que sólo Dios, su creador, posee:

> "si había algunos cuerpos en el mundo o bien algunas inteligencias u otras naturalezas que no fuesen totalmente perfectas, su ser debía depender de su poder (de Dios), de tal suerte que no podían subsistir sin él en un solo momento."[9]

El doble aspecto del Cogito exige una causa real a pesar de que toda su verdad se funde en Dios. A Descartes se le hace necesario establecer una correspondencia entre los cuerpos y nuestro pensamiento debido a la dualidad que se manifiesta en el cogito mismo. Se plantea la distinción entre Res Pensante y Res Extensa.

---

[6] Ibid. P.51.

[7] Ibid. P.48.

[8] Ibid. P.47.

[9] Ibid. P49.

El mundo físico está determinado en Descartes por la extensión. Además de la Res o Sustancia Infinita que es Dios, aparecen las dos sustancias finitas: la sustancia pensante (el hombre) y la sustancia extensa (el mundo).

El problema planteado por Descartes tiene su solución: Los cuerpos existen en cuanto extensos y la idea clara de la extensión es concebida en nuestro entendimiento. Con la misma certeza que en las matemáticas. Descartes desarrolla todas las nociones claras y distintas que pueden estar en nuestro entendimiento referentes a las cosas materiales. Es decir, donde hay extensión hay materia, cada partícula de cuerpo se puede dividir indefinidamente, el movimiento y el desplazamiento exigen como complemento otro cuerpo, una materia. Descartes recurre a las extensiones geométricas para identificarlas con la materia física. Las cosas materiales (las figuras, los tamaños y los movimientos) se diversifican entre sí en el entendimiento según las reglas y principios de la geometría y la mecánica.

El dualismo del pensamiento y la extensión lleva a Descartes a la relación alma-cuerpo. De esta distinción entre las ideas del pensamiento y de la extensión concluye (siempre en virtud de la veracidad divina) la distinción real del espíritu y de las cosas materiales. Para Descartes, el Alma se reconoce en sus ATRIBUTOS, es decir, en los caracteres esenciales, sin los cuales no sería ella misma, y se manifiesta por sus modos, en los efectos diversos y contingentes de su naturaleza esencial. El alma es, pues, una SUSTANCIA: un ser cuya existencia en el mundo depende de Dios, nunca dependerá de la existencia de ningún otro ser, por ejemplo, de un cuerpo. El cuerpo, que es extensión, existe, pero como un ente independiente, una realidad distinta, OTRA SUSTANCIA.

Es indudable la existencia de un mundo material, pero para conocer la verdadera naturaleza del mundo debo interrogar primero mi razón, pues no debo fiarme del instinto que me inclina a juzgarlo por mis percepciones. Hay cualidades primarias de los cuerpos que les pertenecen realmente: longitud, anchura, profundidad, ser divisible, etc. Pero hay cualidades secundarias: colores, sabores, olores, sonidos, etc. que son estados afectivos de mi alma, sensaciones o sentimientos; son cualidades que existen en mi pensamiento.

Los modos del pensamiento no pueden ser los mismos modos de los cuerpos. No podemos concebir clara y distintamente los cuerpos como unidos a la extensión, pues manifiestan cualidades que no les pertenecen realmente. Cada naturaleza tiene sus atributos. Para comprenderla, no podemos, con Descartes, "espiritualizar la materia" o "materializar el espíritu" . Nuestra alma no tiene conocimiento únicamente de lo que pasa en nuestro cuerpo, es independiente a él e irreductible.

Tenemos así la idea del pensamiento para concebir el alma y la idea de extensión para concebir el cuerpo, una sustancia pensante y una sustancia extensa, ¿Cómo es posible su unión?.

Según Descartes, en la unión de las dos sustancias, cada una de ellas conserva su carácter de realidad autónoma. Esta unión resulta un accidente relativamente a cada una de ellas, pues cada una puede subsistir sin la otra, y se llama accidente a aquello que no quita ni añade nada al sujeto.

La unión del cuerpo y el alma (accidental respecto al alma y al cuerpo) es otra o TERCERA SUSTANCIA, porque produce otro ser (el hombre, el ser compuesto de un cuerpo y un alma).

La prueba de que esta unión es sustancial la da Dios, que nos ha dado una IDEA SIMPLE. En virtud de la veracidad divina se establece una relación entre lo ideal y lo real, entre los conceptos claros y distintos y las cosas. Toda sustancia se expresa en el espíritu por una idea que no depende de ninguna otra idea, por una IDEA SIMPLE, por un ABSOLUTO.

Existe, entonces, para Descartes, una triple realidad en la voluntad divina: el pensamiento, la extensión y la unión del alma y el cuerpo. Existen tres maneras de conocer y cada manera es inteligible en sí. Los principios de la certidumbre humana se encuentran ya establecidos, así como los métodos que permiten alcanzarlos en los diferentes dominios de la especulación.

Descartes constituye su método por el análisis de las condiciones necesarias del conocimiento cierto. Los procedimientos de la verdad se encuentran descritos en un orden diferente al orden "real", los efectos proceden de las causas y, según Descartes, para comprender el verdadero encadenamiento de las acciones del pensamiento en el origen de la certidumbre se debe invertir ese orden, hay que ir de las causas a los efectos.

Descartes planteó la necesidad de elevarse a los Principios para observar la naturaleza de los hechos, enriquecidos con todas las ideas que los hacen inteligibles. Parte de naturalezas fijas y firmes del pensamiento.

La realidad objetiva de los conceptos requiere una causa, en la que la misma realidad se contiene no sólo de un modo objetivo. Es decir, en el concepto, sino también de un modo formal. Es decir de un modo aún más perfecto. Es necesario que en la causa se contenga toda la verdad que reúne los efectos.

Para ir concluyendo este trabajo, debemos mencionar que las matemáticas y la metafísica juegan papeles importantes en la definición del método cartesiano. Las matemáticas, el álgebra y la geometría, definen un modelo epistemológico que enfatiza la deducción (la lógica). La metafísica sirve para justificar la aplicación o introducción de los conceptos matemáticas a la realidad. Descartes usa la metafísica para darle validez a su método y para, dentro de su esquema epistemológico deductivo, justificar la verdad de us axiomas y primeros principios. Si abstraemos la metafísica, tenemos simplemente el modelo de las matemáticas, tal y como es concebido por él.

Descartes hace de su método un instrumento de aplicación universal. Todos los conocimientos especiales pueden generarse a partir del método. Como señala Cassirer:

"Lo mismo que todos los números brotan de una operación exactamente determinada, que es la numneración, todos los conocimientos especiales se obtienen y solo pueden obtenerse por medio del "método"; y así como aquí el camino conduce a lo ilimitado, aunque la dirección del progreso aparece trazada de antemano de un modo preciso e inequívoco, así también, sin cerrarnos a la plenitud infinita de la experiencia, debemos aspirar a dominarla por medio de un plan y un bosquejo fijo y predeterminado del pensamiento." (476)

Entonces, Descartes afirma la universalidad de su método, pero ademas no niega la intervención de la experiencia. Solo que esta aparece en un plano diferente, la dirección viene establecida por el método. Es interesante que existe una contraposición con el empirismo, pero no para eliminar la experiencia, sino para colocarla en otra posición.

Evidentemente, el conocimiento exige la sanción empírica, pero es innegable que la experiencia se aborda desde una óptica y una metodología determinadas. El problema con Descartes es que en su definición de esta metodología matemátizante se introducen -aparte del reduccionismo axiomático, premisas metafísicas. Como un todo, sin embargo, el énfasis en el valor de la matemática resulta muy importante, porque es evidente el valiosísimo papel de las matemáticas en la configuración de la ciencia moderna. Si se le "perdonan" a Descartes sus extrapolaciones y la presencia metafísica, su método, como valoración del espacio y posibilidades de las matemáticas, aporta considerablemente a la definición de la ciencia moderna. Es necesario reconocer -lo que en la tradición empírico-positivista no ha sido el caso normalmente- el valor epistemológico de las ideas cartesianas.

Pero sigamos con el método y la matemática universal. La combinación es de algebra, geometría y lógica. Como señala Cassirer:

> "La lógica y la teoría de las magnitudes deben combinarse y unirse, para crear el nuevo concepto de la matemática universal. Esta nueva ciencia toma de la lógica el ideal de la construción rigurosamente deductiva y el postulado de los primeros fundamentos "evidentes" de la argumentación, al paso que determina el contenido que a estos fundamentos debe darse tomando como modelo la

geometría y el álgebra" [10]

Ahora bien, lo que aparece es la relación y la proporción:

> "...es siempre el criterio general de la relación y la proporción el que sirve de punto de partida y de criterio de unidad. Por tanto, una ciencia pura de las "relaciones" y "proporciones" -independientemente de la propia peculariedad de los objetos en que se expresen y tomen cuerpo- constituye la exigencia primordial y la meta primera a que tiende el método". [11]

Descartes devuelve a la razón humana un papel que la escolástica había reducido a la interpretación del verbo divino. No es este ya mero receptor, sino que actúa de manera activa, aunque el fundamento sea mental y no esencialmente empírico. Descartes se separa del "apriorismo" escolástico, aunque [12] -ya en análisis profundo- contribuya a edificar un apriorismo de nuevo tipo, que se afirma en el racionalismo moderno.

Es nuestra opinión que las tendencias dominantes en la filosofía de las matemáticas han sido herederas de este nuevo apriorismo que empieza a constituirse con el pensamiento cartesiano.

La realidad es que existen en Descartes ideas que encierran contradicción. Como señala correctamente Russell:

> *"Hay en Descartes un dualismo no resuelto entre lo que aprendió de la ciencia contemporánea y el escolasticismo que le enseñaron en La Flèche. Esto le llevó a contradicciones, pero también le hizo más rico en ideas fructíferas de lo que hubiera podido haber sido un filósofo completamente lógico."* [13]

---

[10] Cassirer, E. EL PROBLEMA DEL CONCIMIENTO. 454

[11] Cassirer. Idem.

[12] Vease Cassirer. Op. Cit. P.478.

[13] Russell. Bertrand. HISTORIA DE LA FILOSOFÍA OCCIDENTAL. P.190.

Se debe ser justo con Descartes. Es necesario, como decíamos arriba, saber extraer las premisas metafísicas e inútiles, de las ideas originales y valisas que han servido para progresar en la aventura del concocimiento y la ciencia.

BIBLIOGRAFIA

-Cassirer, E. EL PROBLEMA DEL CONOCIMIENTO. (TOMO I). México: Fondo de Cultura Económica, 1965 (segunda edición en español)

-Descartes, R. DISCURSO DEL METODO. Trad. Constantino Láscaris. San José: EDUCA, 1983 (octava edición).

-Leal, Fernando. ENSAYO SOBRE LA ONTOLOGIA DE LA MENTE. Costa Rica: Editorial de Costa Rica, 1985.

-Russell, Bertrand. HISTORIA DE LA FILOSOFIA OCCIDENTAL. Trad. Julio Gomez de la Serna y Antonio Dorta Madrid: Espasa-Calpe, 1971 (segunda edición).

-Wahl, J. DU ROLE DE L´IDEE DE L´INSTANT DANS LA PHILOSOPHIE DE DESCARTES. Paris, 1920.

METAFISICA, EPISTEMOLOGIA Y MATEMATICAS EN SPINOZA Y LEIBNIZ

Jeanette Campos/ Escuela de Filosofía.
Angel Ruiz Zúñiga/ Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

RESUMEN

Este ensayo describe algunas de las principales ideas metafisicas de Spinoza y Leibniz, en las cuales se hace referencia a las matemáticas. Aunque no de la forma tan clara como aparece en Descartes, en Spinoza y Leibniz encontramos ese modelo de reducción axiomática que se piensa como la quintaesencia de la naturaleza de las matemáticas, y que se proyectará en la filosofía de las matemáticas por muchos siglos.

Tanto Spinoza como Leibniz se colocan en la tradición del racionalismo cartesiano. Aunque de diferentes maneras, ambos van a asumir como suyo el método de la reducción a primeras verdades, reconocido en las matemáticas. Spinoza va a asumir el arquetipo geométrico para definir una metafísica y también una ética.[1] Leibniz lo usará para orientar su ontología y su epistemología.

PRIMERA PARTE: SPINOZA

Baruch Spinoza desarrolla hasta sus extremos el principio en el que se inspira la filosofía cartesiana. Adopta en sus escritos la terminología de Descartes y plantea reformar el entendimiento y hacerlo apto para conocer las cosas como es debido. Para esto, dirá Spinoza:

> "el orden natural exige que pasemos revista a todos los modos de percepción que hasta ahora usé para afirmar o negar algo con certeza, con el fin de elegir el mejor de todos." [2]

La clasificación de los modos de percepción o géneros del conocimiento que hace Spinoza son:

1) Percepción por el oído o por algún signo.
2) Percepción por excelencia vaga.
3) Por razonamiento: conocimiento de la causa a partir del efecto

---

[1] En este ensayo no vamos a introducirnos en la ética de Spinoza.

[2] Spinoza, Baruch. TRATADO SOBRE LA REFORMA DEL ENTENDIMIENTO. P.21.

o conocimiento de una conclusión sacada de un universal. Y 4) POR INTUICION DE LA ESENCIA.

Este cuarto modo de percepción es el más importante, pues es el único para Spinoza que capta la verdad de la cosa sin riesgo de error. En cuanto al tercer modo, explica y aclara:

> "hay que decir que en cierta manera poseemos en él la idea de una cosa y también que concluimos sin riesgo de error. Sin embargo, de por sí NO es el medio para alcanzar nuestra perfección. SOLO EL CUARTO MODO CAPTA LA ESENCIA ADECUADA DE UNA COSA SIN RIESGO DE ERROR. Por consiguiente, es el que debe ser utilizado sobre todo."[3].

Para Spinoza la existencia de una cosa no es conocida sino en la medida en que conocemos su esencia. Ya establecido el modo de conocimiento que nos es necesario, se indica el camino y el Método para alcanzar la verdad. Existe para Spinoza, al igual que en Descartes, una especie de "revelación interior". El entendimiento posee un "poder Nativo"; es decir, algo que EN nosotros No es causado por causas externas. Dice Spinoza:

> "...el entendimiento, por su potencia nativa se forja unos instrumentos intelectuales con los cuales adquiere otras fuerzas para realizar otras obras intelectuales y gracias a éstas, otros instrumentos, o sea, el poder de avanzar en la búsqueda... Será fácil ver que las cosas son así para el entendimiento, con tal que se comprenda en qué consiste el método para investigar lo verdadero y cuáles son ESOS INSTRUMENTOS INNATOS, los únicos que le son necesarios para componer otros y así avanzar." [4].

Así, la verdad de una idea resulta de la manera como está pensada, es decir, de cierto uso que se hace del intelecto, de cierto método que sigue. Esto es claramente cartesiano. Spinoza se plantea si una idea verdadera o adecuada es la idea que corresponde a su objeto. Desde este punto de vista la verdad de una idea sería su carácter extrínseco, y no la idea misma, para él.

> "La idea verdadera (pues tenemos una idea verdadera) es algo distinto de aquello de lo que ella es la idea: una cosa es el círculo, otra la idea del círculo... O sea, la idea, en tanto esencia formal, puede ser el objeto

---

[3] IBID. P.25.

[4] Ibid. PP.26-27.

> de otra esencia objetiva y, a su vez, esta otra esencia objetiva, considera en sí misma, será también algo real e inteligible..." [5].

La idea en tanto ESENCIA FORMAL es la idea tal cual es en sí misma; en tanto ESENCIA OBJETIVA, es el ser de la idea en cuanto es idea de tal cosa. No podemos comparar una idea de un objeto más que a otra idea del mismo objeto; es decir, para Spinoza, una idea no espera para ser verdadera que el objeto que representa exista en el mundo. Hay una manera de pensar que por sí misma es verdadera. La verdad de una idea está en la manera cómo esta idea es idea y en cómo se dice en su FORMA, y esto depende únicamente de la naturaleza y de la potencia del intelecto. La cuestión de saber como llegamos a formar ideas de cuerpos, nos lleva a considerar las cosas según sus "diferencias, conveniencias y oposiciones". Será el trabajo de la razón elevarlas a su verdad a partir del método geométrico. Spinoza trata de plantear una MATEMATICA de lo REAL o de lo concreto. Así, tener una idea verdadera de la elipse es representarse un plano cortando un cono bajo cierto ángulo, tener una idea verdadera de un círculo es representarse que una recta de longitud fija gira sobre un plano alrededor de uno de sus extremos, tener una idea verdadera de la palabra es representarse que órganos humanos, dispuestos de cierto modo, imprimen tales movimientos al aire, etc.. Aquí encontramos entonces cierto construccionismo geométrico, que posteriormente retomará Kant. Spinoza no ve otro medio para el hombre de avanzar con certeza en el estudio de las cosas, más que de la manera en que lo hacen los geómetras en el estudio de las figuras y de los sólidos. Intentará que toda certeza se parezca lo más posible, por el orden el rigor y la claridad de sus demostraciones, a un tratado geométrico:

> "...el verdadero método es el camino por el cual la verdad misma, o las ESENCIAS OBJETIVAS de las cosas, o las ideas (todo esto significa lo mismo) son buscadas en el ORDEN DEBIDO." [6]

Entonces:

> "Por consiguiente, lo que constituye la forma del pensamiento verdadero ha de ser buscado en el pensamiento mismo y ser DEDUCIDO de la naturaleza del entendimiento" [7]

Spinoza trata de considerar como están ligadas nuestras ideas a una verdad, las remonta a una manera de pensar que sea por si misma verdadera. Plantea una DEDUCCION CORRECTA a partir de

---

[5] Ibid. P.27.

[6] Ibid. P.28.

[7] Ibid P.43.

cierto método que nos otorgue la representación precisa de las causas y de las propiedades de las que se ha afirmado. Dice:

> "...cuando el espíritu presta atención a algún pensamiento para sopesarlo y deduce de él en buen orden lo que ha de ser deducido, si es falso, descubrirá su falsedad; si, en cambio, es verdadero, entonces avanzará sin ninguna interrupción en la deducción de cosas verdaderas."

Para Spinoza, no hay verdad sino en el ESENCIA, y la esencia debe buscarse en las cosas "FIJAS Y ETERNAS", (como son la esfera y el círculo). En la idea de la verdad de una deducción encontraremos encerrada como su condición necesaria, la idea de alguna <u>verdad conocida</u> de otro modo que por deducción; estas son las VERDADES ETERNAS, principios simples claros y distintos evidentemente. Para que una deducción sea verdadera, es necesario que haya habido una primera verdad. Es preciso que en cada momento de la deducción, lo que está deducido haya sido conocido inmediata e intuitivamente como verdadero. Es, pues, un conocimiento intuitivo e inmediato de cada esencia determinada, de cada verdad establecida. *Esto es entonces el reduccionismo epistemológico que se afirma en la axiomática.* El Método de Spinoza es el método reflexivo, o reflexión verdadera:

> "...el Método es conocimiento reflexivo mismo, este fundamento que debe dirigir nuestros pensamientos no puede ser sino el conocimiento que constituye la forma de la verdad y el conocimiento del entendimiento de sus propiedades y de sus fueras."

No se trata entonces de encadenar ideas y explicarlas unas por otras, es decir, de razonar sobre las causas de los seres y sobre las causas de estas causas, sino de la REFLEXION sobre <u>la idea verdadera dada</u>, la reflexión de lo que es cierto inmediata e intuitivamente. Es partir de la verdad inmediatamente conocida como principio de nuestras demostraciones. La idea inmediatamente verdadera, de la cual partimos, encierra necesariamente el Pensamiento Perfecto, del cual nuestro pensamiento es una parte. Si nos referimos a la Verdad inmediata, ABSOLUTA, hemos de referirnos a DIOS, según Spinoza, y por tanto al concepto de SUSTANCIA. Esto ya ha sido tratado anteriormente por Descartes, pero resuelto de manera significativamente diferente por Spinoza. Para Spinoza, la Sustancia es UNA, esta idea es también la idea de lo verdadero, la idea del ser total, absoluto, perfecto, la idea de Dios. Dios es sustancia porque es en si y causa de si, es único y eterno. Dios es todo lo que existe necesariamente, la

---

Ibid. P.58.

Ibid. P.58-59.

CAUSA NECESARIA.

La importancia de este pensamiento spinozista es la UNIFICACION de la SUSTANCIA, pues ya Descartes había definido tres sustancias: La Sustancia Infinita, que es Dios, la Sustancia Pensante, y la Sustancia Extensa. Spinoza afirma que la sustancia es solo una, la EXTENSION y el PENSAMIENTO son atributos de esa sustancia. Hay, pues dos maneras de considerar el ser, la Sustancia o Dios: como formado de los cuerpos (extensión) o como formado de los pensamientos. Para nosotros el hecho y la verdad son distintos, pero NO PUEDEN SER DISTINTOS PARA DIOS, porque DIOS es UNO, Dios es todas las verdades y toda la verdad, es la unidad de lo uno y de lo otro. Dios tienen una infinidad de atributos, solo que, según nos dice Spinoza, no conocemos más que dos: la Extensión y el Pensamiento. Lo más importante de esta expresión es que Spinoza concibe el ser como UNIDAD. La mente y el cuerpo son una y la misma cosa, de ahí se desprende el hecho de que el ORDEN o ENCADENAMIENTO de las cosas es UNO ya sea qué se conciba cono atributo de extensión, ya sea que se conciba como atributo de pensamiento, la VERDAD ES UNA.

Una idea puede existir implicitamente en Dios en tanto que infinito y en tanto que acto. La existencia implícita de la idea es su NECESIDAD independientemente de la existencia de la cosa. El alma y el cuerpo están unidos de igual manera que en Dios, los atributos pensamiento y extensión están ligados, es decir, son dos atributos de un solo y mismo ser.

El sistema de Spinoza es en realidad la objetivación del sistema cartesiano, bajo la forma de la verdad absoluta, de la verdad eterna. Y por VERDAD ETERNA Spinoza entiende: una proposición que si es afirmativa nunca podrá ser negativa. Así Dios es, es una verdad primera y eterna.

> "Por eso la falsedad consiste solamente en que se afirma de alguna cosa algo que no está contenido en el CONCEPTO que hemos formado de ella, como es el caso del movimiento y el reposo con respecto al semicirculo... el movimiento del semicirculo es falso si se encuentra aislado en el espiritu, pero el mismo es verdadero cuando está unido al concepto de esfera o al concepto de alguna causa que determina el movimiento. Que si, como parece a primera vista, pertenece a la naturaleza del ser PENSANTE formar pensamientos verdaderos o ADECUADOS, es cierto que las ideas inadecuadas se originan en nosotros únicamente porque somos parte de algún ser pensante cuyos pensamientos, INTEGRAMENTE UNOS, otros sólo en parte constituyen nuestro

espíritu." [10]

Spinoza intenta alcanzar real fuerza demostrativa en los fundamentos de su método cuando lo hace partir de la consideración de los seres que son objeto de la geometría.

SEGUNDA PARTE: METAFISICA Y EPISTEMOLOGIA EN LEIBNIZ

Leibniz emprende la construcción de un sistema absolutamente racional, es decir un sistema que, LOGICAMENTE, debe hacer imposible la aparición de las paradojas o contradicciones propias de la filosofía clásica. Representa el extremo paradójico al que conduce el uso y el abuso de la razón como único instrumento de conocimiento válido. Leibniz distingue dos grandes principios en los que se fundamentan todos nuestros razonamientos:

Principio de Contradicción

> "Nuestros razonamientos están fundados en dos grandes principios, el de contradicción, en virtud del cual juzgamos falso lo que encierra contradicción, y verdadero lo que es opuesto a, o contradictorio con, lo falso." [11]

Este primer principio de contradicción, también llamado de identidad, establece que toda proposición idéntica, es decir, aquella en la que la noción del predicado está contenida en el sujeto, es verdadera, y su contradictoria falsa. Por ejemplo, la proposición : "A es A" es una proposición necesariamente verdadera, es verdadera en todos los mundos posibles, puesto que negarla supone caer en contradicción.

No es posible que A sea y no sea a la vez; cuando comprendemos el significado de una proposición idéntica, no podemos concebir su contradictoria como verdadera.

El principio de contradicción nos permite, entonces, juzgar como falso lo que encierra contradicción. A partir de este principio podemos reconocer si una proposición es falsa o es verdadera, nunca podrá ser las dos cosas al mismo tiempo.

Principio de Razón Suficiente:

> "Y el de razón suficiente, en virtud del cual consideramos que no puede encontrarse ningún hecho verdadero o existente, ni ninguna enunciación verdadera sin que haya una razón suficiente para que sea así y no de otro

[10] Ibid PP.44-45.

[11] Leibniz. MONADOLOGIA. R.31.

> modo. A pesar de que esas razones muy a menudo no pueden ser conocidas por nosotros."[12]

El principio de razón suficiente es complementario del de contradicción y se aplica preferentemente a los enunciados de hecho, que se refieren a los existentes, sean posibles o actuales. Pareciera referirse Leibniz a que no hay efecto sin causa. Sin embargo, al final del fragmento, hace ver que si bien todo lo que acontece responde a una causa o razón de ser, muy a menudo no alcanzamos a descubrirla.

En sentido general el principio de razón suficiente es el fundamento de toda verdad porque nos permite establecer cual es la condición (razón) de verdad de una proposición. Pero en sentido estricto, el principio de razón se aplica a las proposiciones contingentes, es decir, a las que no excluye la posibilidad de sus contrarios y enuncian hechos, posibles o actuales (se puede atribuir predicados opuestos al sujeto). La simple atribución de un predicado al sujeto de la proposición contingente no la hace ni verdadera ni falsa, se requiere, entonces de una razón suficiente para que sea de una forma u otra.

Todos nuestros razonamientos, según Leibniz, se basan en estos dos principios, <u>la matemática</u> en el principio de no contradicción; la física y la metafisica en el principio de razón suficiente que permite traspasar las fronteras de las verdades de razón.

Respecto a las proposiciones verdaderas, Leibniz distingue entre verdades, razonamiento y verdades de hecho.

Las <u>Verdades de Razón</u> son las necesarias y su verdad se fundamenta en el principio de razón suficiente.

<u>Las Verdades de Hecho</u> son las contingentes (empíricas) y su verdad se fundamenta en el principio de razón suficiente.

> "Hay dos clases de verdades: la de razonamiento y las de hecho. Las verdades de razonamiento son necesarias y su opuesto es imposible, y las de hecho son contingentes y su opuesto es posible." [13]

La verdad de una proposición de razonamiento puede establecerse por análisis (es verdadera si no es contradictoria); es decir, puede establecerse a priori, pero la verdad de una proposición de hecho exige un análisis infinito de causas. Podemos conocer la

---

[12] iBID. p.32.

[13] iBID. p.21.

verdad de una proposición de hecho solamente a posteriori. (Dios y hombre). Las verdades necesarias o son evidentes o pueden reducirse por análisis a otras que lo son. En un sistema deductivo, analizar es demostrar y esto consistiría en verificar una proposición mediante su reducción a otra ya verificada del sistema a que pertenece. Esto es lo que sucede con las proposiciones matemáticas.

> "Cuando una verdad es necesaria, se puede encontrar su razón por medio del análisis, resolviéndola en ideas y verdades más simples hasta que se llega a las primitivas.
> Así es como, entre los matemáticos, los teoremas de especulación y los cánones de práctica son reducidos mediante el análisis a las definiciones, axiomas y postulados.
> Por último, hay ideas simples de las que no es posible dar definición; también hay axiomas y postulados o, en una palabra, <u>principios primitivos</u> que no podrían ser probados y no tienen necesidad de ello; y estos son las <u>enunciaciones idénticas</u>, cuyo opuesto contiene una contradicción expresa."[14]

Las definiciones, <u>los axiomas</u> y los postulados son los <u>principios primitivos</u> de un sistema deductivo. Los principios primitivos serían entonces proposiciones evidentes por sí mismas, y como tales se conocen por simple intuición (son indemostrables). La evidencia de los axiomas se fundamenta en la comprensión de sus términos, solo las proposiciones idénticas pueden ser llamadas propiamente axiomas pues serían intuitivas (indemostrables).

Leibniz distingue entre <u>axiomas universales</u> y <u>axiomas particulares</u>. Los primeros son axiomas de identidad, es decir, se basan en el principio de contradicción y los segundos son los axiomas <u>reducidos</u> a identidad es decir deben ser demostrados.

Leibniz menciona en el texto los teoremas de especulación y cánones de práctica. Los teoremas, a diferencia de los axiomas, no son verdades inmediatas o conocidas por análisis de sus términos, sino que son proposiciones cuya verdad es conocida de forma mediata, es decir, por demostración. El teorema de especulación sería el enunciado de una proposición de evidencia mediata en la que no se especifica el proceso de deducción. El cánon sería el cálculo en donde consta el proceso de una demostración y sirve de ejemplo para demostrar otros teoremas similares.

<u>Verdades Innatas</u>

Señala Leibniz:

---

[14] Ibid. p.32.

"...por el conocimiento de las verdades necesarias y por sus abstracciones nos elevamos a los actos reflexivos, que nos hacen pensar en eso que se llama YO y considerar que esto o aquello está en nosotros: y es así como pensando en nosotros, pensamos en el Ser, en la sustancia, en lo simple y en lo compuesto, en lo inmaterial y en Dios mismo, concibiendo que lo que es limitado en nosotros, en El no tiene límites. Y estos actos reflexivos proporcionan los principales objetos de nuestro razonamientos"[15]

Para Leibniz el proceso de conocimiento racional parte de las ideas, de las verdades innatas, es decir de aquellos principios que pueden ser derivados de la mente a partir de ella misma.

Se opone, por tanto, a la idea aristotélica-tomista, o bien de Locke, acerca de la mente como una tabula rasa, en blanco, que se llena solo a partir de la experiencia. Para Leibniz el espiritu humano contienen ideas innatas (como la idea de Dios, la Ser, la de posible), verdades innatas necesarias eternas (como las de Aritmética y la Geometría) principios innatos ontológicos (como los principios de contradicción y razón suficiente). Las verdades innatas son para él entonces aquellas que la mente obtiene de si *misma porque* las *contiene* en si *misma* (asi por ejemplo las proposiciones lógicas o matemáticas.)

En su sistema Leibniz introduce la Mónada. La Mónada es considerada a categoría ontológica por excelencia, es el fundamento y raiz de todo ser. Significa UNIDAD, ya sea en su sentido general y absoluto (la unidad en si) o ya sea en sus sentido atributivo (la unidad que se predica de un ser real).

A pesar de esta unidad, las *mónadas* se distinguen de las unidades matemáticas de los pitagóricos (puramente abstractas) como de las unidades sólidas de los atomistas (carentes de verdaderas cualidades necesariamente compuestas de partes) De modo que la unidad que se predica de las mónadas no se identifica con la simplemente empirica ni con la cuantitativa. Leibniz argumenta en favor de la existencia de las mónadas que, dado que hay compuestos, es necesario qùe hayan sustancias SIMPLES de que se componen. Lo compuesto, que es fenoménico, se fundamenta en lo simple, *en* las *mónadas*. Sólo las *mónadas*, cuya existencia se establece por ANALISIS LOGICO, son reales y su unidad, en tanto que sustancias simples carentes de partes, es la UNIDAD VERDADERA. Al introducir la paradoja, Leibniz da un paso importante en el campo de la LOGICA. La teoria monadológica, es un intento metafisico de acercar al hombre a la verdad por medio

[15] Ibid. P.23.

de un sistema cuya armonía está preestablecida.

En ambos filósofos los criterios de verdad descansan en el tratamiento de las ideas de una forma que encuentra origen en las matemáticas, y no en la contrastación empírica. La razón, usada "apropiadamente", es la que da valor a las proposiciones del conocimiento. La reducción axiomática exige darle verdad a principios y a los axiomas, esto es lo que obliga a la intervención de la metafísica y en mitad de un mundo todavía escolástico- a la acción divina. La monadología leibniziana trata de no ser mera reducción deductiva, pero en su forma no se puede desprender del modelo axiomático. Filosóficamente Spinoza y Leibniz apuntalan el racionalismo, y la sobreestimación de la razón en la aproximación al problema de la verdad en el conocimiento.

BIBLIOGRAFIA

-Cassirer, E. EL PROBLEMA DEL CONOCIMIENTO. (TOMO I). México: Fondo de Cultura Económica, 1965 (segunda edición en español)

-Descartes, R. DISCURSO DEL METODO. MEDITACIONES METAFISICAS. Trad. Manuel García Morente. Madrid: Espasa Calpe, edición de 1968.

-Leal, Fernando. ENSAYO SOBRE LA ONTOLOGIA DE LA MENTE. Costa Rica: Editorial de Costa Rica, 1985.

-Leibniz. MONADOLOGIA. Madrid: Alhambra, 1986.

-Leibniz, G.W. DISCURSO DE METAFISICA. Trad. Alfonso Castaño Piñán. Buenos Aires: Aguilar, 1967.

-Leibniz. G. W. MONADOLOGIA. DISCURSO DE METAFISICA. PROFESION DE FE DE FILOSOFO. Trad. Manuel Fuentes Benot/ Alfonso Castaño/ Francisco de Samaranch. Barcelona: Aguilar Argentina, 1983.

-Leibniz, G.W. SISTEMA NUEVO DE LA NATURALEZA. Trad. Enrique Pareja. Buenos Aires: Aguilar, 1963.

-Russell, Bertrand. HISTORIA DE LA FILOSOFIA OCCIDENTAL. Trad. Julio Gomez de la Serna y Antonio Dorta. Madrid: Espasa-Calpe, 1971 (segunda edición).

-Spinoza. B. ETICA. Buenos Aires: Aguilar, 1963 (tercera edición). El título original de la obra fue ETHICA ORDINE GEOMETRICO DEMONSTRATA, publicada como obra póstuma en 1677.

-Spinoza. B. TRATADO SOBRE LA REFORMA DEL ENTENDIMIENTO. Bogotá: Ed. Univ. nac. de Colombia, 1984.

-Wahl, J. DU ROLE DE L'IDEE DE L'INSTANT DANS LA PHILOSOPHIE DE DESCARTES. Paris, 1920.

EN TORNO A LOS ORIGENES DEL RACIONALISMO EN LA FILOSOFIA DE LAS MATEMATICAS

Jeanette Campos/ Filosofía
Angel Ruiz Zúñiga/ Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

RESUMEN

De lo que se trata en este ensayo es de realizar una síntesis analítica acerca de algunos aspectos filosóficos y metafísicos en Descartes, Leibniz y Spinoza. Se trata de entender de una manera unificada e integradora una relación entre ontología, epistemología, metafísica y matemáticas, que ayuda a fundamentar el racionalismo moderno.

El Siglo XVII en lo que se refiere a la historia de la filosofía podría definirse como el Siglo del Método, o, mejor, como el Siglo del Método Moderno.

El número de tratados sobre lógica no aumentó con relación al siglo precedente, pero en definitiva el espíritu cambió: aparece Descartes con su Discurso del Método para inspirar grandes tratados posteriores acerca del Arte de Pensar, del Entendimiento y de la Verdad.

Podemos decir que la modernidad de Descartes, de cierta manera, consiste en la aplicación (en cierta dimensión) del modelo matemático en la Lógica y en la Filosofía. Las matemáticas van a constituir la certeza de su método, es decir, las largas cadenas de raciocinios que van a posibilitar una filosofía deductiva.

El modelo matemático, base del método cartesiano, adquiere un alcance revolucionario: inaugura una racionalidad que trata de colocarse por encima de las limitaciones del empirismo y la abstracción del intelectualismo, pues depende menos de las convenciones verbales y más de la <u>realidad del acto mental</u>. Antes de Descartes, en la tradición platónica y aristotélica, <u>las ideas</u> o esencias seguían siendo <u>trascendentes</u> al espíritu humano en relación con <u>los inteligibles</u>. Con Descartes la idea verdadera, INNATA (aunque garantizada por la veracidad divina) se hace inmanente al espíritu humano, procede del interior del hombre mismo, de la realidad de su pensamiento.

Es necesario reconocer el valor del empirismo en la constitución intelectual del mundo moderno. Sin duda, el rescate y ampliación de las tradiciones que enfatizaban la experiencia sensorial y la confrontación práctica en el conocimiento, resultaron esenciales para el devenir de la ciencia y a la configuración de una nueva sociedad. Y el siglo XVII es un momento clave para la historia del pensamiento y de la sociedad. En esto no sólo la actitud empirista fue suficiente para empujar en esa dirección. En su justa proporción, el pensamiento escolástico, el método cartesiano y la contraposición "continental" del EMPIRISMO INGLES, son necesarios de estudiar para comprender mejor la estructuración filosófica del siglo XVII.

La Filosofia cartesiana abandona el terreno de la teologia filosofante de la Edad Media o de la Epoca Medieval, para dar paso a un nuevo concepto del individuo: un ser pensante por naturaleza (el hombre alcanza la verdad por medio de la reflexión) y se enfrenta al Empirismo Sensualista británico simultáneamente, a veces con justeza, a veces no.

Vemos, por una parte,una metafísica: la importancia del pensamiento abstracto como tal y, por otra, la importancia de su contenido tomado de la experiencia. Es la contraposición entre el RACIONALISMO y el EMPIRISMO.

El pensador "moderno" de esta época no es ya un escolástico , pero le resultará difícil y hasta "peligroso" abandonar la importancia del concepto de Dios para la justificación y veracidad de su pensamiento.

Desde el siglo IX aparecen las "escuelas" de disciplina escolástica. Es al saber teológico filosófico y a sus métodos a lo que se le va a llamar la ESCOLASTICA. Del Siglo XI al XV, aproximadamente, esta parte de la historia del pensamiento va a tomar un cuerpo unitario de doctrina, que conserva o enfatiza su interés en los problemas teológicos que ya venía discutiendo la Patrística.

Se formula una relación entre fe y razón, pues la Escolástica va a tratar problemas filosóficos que surgen con ocasión de cuestiones religiosas y teológicas. Es decir, los dogmas del cristianismo se desarrollaron más profundamente a partir de su interpretación o explicación racional.

La Escolástica trata, pues, de una peculiar unidad teológico filosófica que busca responder a una actitud vital del hombre cristiano y su fe, enriquecidas por laas concepciones platónicas y aristotélicas expandidas en la antiguedad. Sin embargo, la filosofía medieval o escolástica es muy posterior a la plenitud de la filosofia griega y, por lo tanto, esencialmente distinta, ante todo porque sus preguntas son distintas y parten de distintos supuestos (que corresponden a condiciones históricas y materiales diferentes). La Escolástica se construye en un mundo controlado con mano dura por la Iglesia Católica. El pensamiento de esta época está aprisionado por los preceptos religiosos, por eldogma dominante y por aquellos hombres que lo defendían usando la hoguera si lo juzgaban necesario. La Escolástica no es la expresión de un pensamiento libre. Lo que de creativo pu diera aparecer debe entenderse en un contexto histórico tremendamente oscuro para la evolución de la humanidad y su progreso, que aparece como resultado de la decadencia del mundo antiguo en Occidente.

Pero, dicho lo anterior, había problemas filosóficos e ideas que es necesario estudiar como partes constitutivas de nuestro pensamiento occidental. Podríamos decir que los tres problemas capitales de la filosofía de la Edad Media son: el de la creación, el de los universales y el de la razón: 1) Se abre un nuevo campo metafísico entre Dios y el mundo, Dios y su creación necesaria (los griegos no contemplaron de esta manera su concepto del mundo, para ellos el mundo es contingente, no necesario y el tiempo cíclico o eterno retorno es prueba de que el mundo no tiene en sí su razón de ser); 2) La disputa en torno a los universales está presente en toda la época escolástica. Los universales son los géneros y las especies y se oponen a los individuos, la cuestión radicaba en saber qué tipo de realidad corresponde a estos universales. Los objetos que se presentan a nuestros sentidos son individuos: ESTE HOMBRE, ESE ARBOL. Los conceptos con que pensamos esos mismos objetos son universales: EL HOMBRE, EL ARBOL. Se plantea, pues, el problema de saber en qué medida nuestros conocimientos se refieren a la realidad. y 3) El logos aparece como un motivo esencial cristiano. En el principio era el Verbo, el Logos, esto quiere decir que Dios es entendido como palabra y además razón.

El desarrollo de la Escolástica, tomada en sus tres cuestiones más hondas, va a conducir, entonces, a una nueva situación del pensamiento que establecerá la metafísica moderna.

Bajo este influjo de la época renacentista y de la escolástica se constituye el descubrimiento de la "razón matemática", en nuestra opinión uno de los fundamentos del RACIONALISMO moderno. Durante el siglo XVI y el XVII se construyen los grandes sistemas racionalistas en la física y en la filosofía: Galileo y Newton abrirán las puertas a la ciencia como base de una nueva cultura y civilización. DESCARTES, SPINOZA Y LEIBNIZ, abrirán las puertas al racionalismo unificador del nuevo espíritu moderno.

Desde el siglo XVI y hasta el XVIII se desarrolla en Inglaterra, paralelamente al idealismo racionalista del Continente, una filosofía con caracteres propios, definidos y distintos: la Filosofía del Empirismo Inglés que manifiesta una preocupación menor por las cuestiones rigurosamente metafísicas, para enfatizar más en la teoría del conocimiento (que supone siempre una metafísica) y a la filosofía del Estado. Como método, frente al racionalismo de tendencia apriorística y matemática, la filosofía inglesa presentará un Empirismo sensualista que concederá la primacía a la experiencia sensible en lo que al saber se refiere.

Los elementos más importantes que se dan con el desarrollo de las ideas empiristas de este siglo, van a ser: La crítica de la facultad de conocer (que en algunos casos llega hasta el escepticismo). Las ideas de tolerancia. Los principios liberales. El deísmo o religión natural. Y, finalmente, como reacción práctica contra el escepticismo metafísico, La filosofía del "Buen sentido" o "sentido común" . La moral utilitaria y el pragmatismo.

La Europa del siglo XVII se construye en su filosofía sobre estas bases de pensamiento. El intelectual moderno no hace más que buscar métodos para abrir caminos nuevos hacia la verdad de las cosas y el conocimiento. Bajo el mando de la racionalidad se constituye su nueva ciencia.

A Descartes, padre del racionalismo moderno, lo acompañan los metafísicos tal vez más originales del fin de siglo: Spinoza y Leibniz.

Europa es aún profundamente religiosa, por lo que era dificial establecer ningún sistema (y sobre todo ningún sistema importante) que no hiciera de Dios garantía de la verdad, ya sea por su bondad, en la "equivocidad" del ser, como sucede en Descartes, o ya sea por necesidad lógica, en la "univocidad" del ser, como sucede en Spinoza o Leibniz.

La idea de Dios fundada en los dogmas y la teología de la Escolástica va a ser suplantada por la idea de la importancia de la razón humana y la naturaleza. Dios pasa a ser una condición necesaria para la conquista de la verdad dentro de la implantación del nuevo método.

El siglo XVII, desde la filosofía pura, adquiere cierta relevancia posiblemente a lo siguiente: primero al papel de DESCARTES, la implantación de su método, el modelo matemático y la aportación de las ideas Innatas. Segundo a la filosofía de SPINOZA, quien edifica su sistema metafísico a partir de la definición constructiva de los geómetras, y tercero al intento de LEIBNIZ por perfeccionar el método mediante una combinatoria algebraica del pensamiento que extenderá a todas las ciencias la necesidad fecunda del discurso matemático.

El aporte de la nueva metafísica establece la unidad del ser y el pensar con Descartes y Spinoza, y la Mónada de Leibniz expresará la totalidad de la concepción del mundo.

Es evidente que no sólo en la especulación pura vamos a encontrar sustrato para la acción del pensamiento. El siglo XVII es importante por la revolución científica y especialmente matemática. Esta reforma no estaba desligada de consideraciones de naturaleza filosófica, y más aún cuando se pretenda estudiar el tejido intelectual que hace avanzar la ciencia moderna en este siglo, inevitablemente se deberá acudir a las ideas más generales de la época y a la filosofía y a la metafísica. También no está de más subrayar que el mismo Descartes contribuye sustancialmente a esta revolución que luego gestará el cálculo infinitesimal. La nueva filosofía está íntimamente ligada a la revolución matemática y científica del siglo XVII y XVIII.

No obstante, si bien la acción empírica es vital en esto, sin embargo,. es necesario subrayar la importancia de las matemáticas en la configuarción intelectual de la filosofía moderna. Es evidente que para los grandes pensadores del siglo XVII, que empujaron el fortalecimiento del RACIONALISMO y, por tanto, influyeron sustancialmente en todo el desarrollo de la filosofía posterior moderna, lo que se consideraba -partiendo de una visión específica sobre las matemáticas- el Método de los Matemáticos resultaba el mejor y más seguro camino para buscar y para enseñar la verdad. Es decir, habia que tratar en la investigación y la exposición de las ciencias, el modo de demostrar unas conclusiones por medio de Definiciones, Postulados, Axiomas; todo inmerso en un edificio de rigor mental. Las definiciones, en efecto, son vistas como las explicaciones muy claras de los términos y nombres que designan las cosas que serán tratadas. Los Postulados y los Axiomas, o Nociones Comunes al espíritu, son proposiciones tan claras y distintas que nadie que haya comprendido correctamente las palabras puede negarse a darles su veracidad. De tal manera que el espíritu deseoso de una verdad inmutable, ha de considerar lo que hasta ahora habia aportado la Matemática y seguir su método. El reconocimiento del valor del método matemático es claro en Descartes y Spinoza, ambos lo tomaron como fundamento estable sobre el cual pueden asentase las bases del conocimiento humano.

Leibniz cierra el periodo de esta nueva filosofía, la época que se inicia con Descartes. Es decir, Leibniz aparece al final de una época de gran densidad metafísica.

Descartes funda su filosofía en el criterio de evidencia. Esta evidencia no se refiere a la percepción ni a los sentidos, "que nos engañan con frecuencia", sino a la claridad y distinción de las ideas, es la evidencia de la razón, el método cartesiano es un buen modelo para el racionalismo.

Dios justifica la verdad o certeza de nuestras conclusiones según todos estos pensadores, pero resulta importante destacar sus diferencias para reconocer qué paso dio cada uno en el avance del periodo racionalista. Si varía el concepto de Dios, varía el concepto de Sustancia y éste es el principio de todos los sistemas estudiados.

La definición de los seres geométricos le hace ver a Spinoza un tipo de relación totalmente ajeno al finalismo, es decir , al carácter representativo de la idea y a todo su carácter subjetivo sin dejar de lado su carácter inmanente.

La importancia de la unificación de la Sustancia de Spinoza radica en la objetivación del sistema cartesiano.

Spinoza parte de la situación de Descartes. Este decía que por Sustancia se entiende aquello que no necesita de nada para existir, y sólo podría ser sustancia Dios; pero luego encontraba otras sustancias que no necesitan de otras "criaturas" para existir, aunque sí de Dios: la Res Pensante la ya Res Extensa. Spinoza toma esto con todo rigor, pero él entiende por sustancia: todo aquello que es en sí y se concibe por sí. Esto es: aquello cuyo concepto No necesita del concepto de otra cosa para formarse. Por tanto, para Spinoza no va a haber más que Una Sustancia única. La Sustancia, o sea Dios, es todo lo que hay, y las cosas todas son afecciones suyas. Es pues naturaleza en un doble sentido: en el de que todas las cosas proceden de Dios, que es el origen de todas las cosas. A esto llama Spinoza: "natura naturans", pero, por otra parte, Dios NO engendra nada distinto de El; de modo que es naturaleza en un segundo sentido: las cosas mismas que emergen o brotan, y a esto llama: "natura naturata".

El sistema de Spinoza es, pues, panteísta. La Sustancia General Una, expresa un Dios con dos atributos: Pensamiento y Extensión. Toma el esquema cartesiano, pero con una modificación esencial: de las tres sustancias de Descartes (una Infinita y dos Finitas) sólo la primera conserva el carácter sustancial y las otras dos son atributos.

El pensamiento spinozista da muerte al Dios personal, no es la doctrina de una totalidad que sería la suma de todos los seres singulares, sino que se construye como un sistema donde la CAUSALIDAD INMANENTE DE DIOS PRODUCE la incancelable diferencia entre el infinito y los seres singulares.

Spinoza ataca "un universo de la escisión"; es decir, ataca el sistema dualista creado por la distinción ABSOLUTA de todo lo que es en dos categorías. Acto y Pensamiento expresan la esencia misma de Dios. Llegar a ser activo es expresar la esencia misma de Dios.

La "Noción geométrica", que establece Spinoza, es el tipo de la verdad objetiva que excluye toda denominación extrínseca y toda finalidad trascendente. La producción de las propiedades por la noción están en la creación misma, en el universo único y ordenado.

El encadenamiento de las propiedades derivadas es el encadenamiento causal en lo que tiene de claro y distinto. El valor de la demostración geométrica está, por lo tanto, en que representa la verdad deduciéndose y explicándose sin ningún préstamo de las formas específicamente humanas de la conciencia y de la inteligencia; está en que un orden puramente RACIONAL, inalterable por el hombre e inviolable por su querer, manifiesta la producción de los seres por el Ser, así como la unión de los espíritus con Dios.

Spinoza niega toda pluralidad de sustancias. El orden ideal es el mismo orden real. Y justamente el hacer perder a la extensión y al pensamiento, esto es al mundo en su más amplio sentido, el carácter subsistente (que aún conservaba en Descartes), para reducirlo a meros atributos de la sustancia única, es lo que obliga a identificarla con Dios por una parte, y con la naturaleza por otra. En este momento es que vemos surgir un panteísmo en Spinoza. Esto podría parecer una nueva teología, pero no es más que el estudio metafísico de la Sustancia y al mismo tiempo la consideración RACIONAL de la naturaleza, entendida, al modo cartesiano, GEOMETRICAMENTE.

En el sistema de Spinoza, como en todos los demás del Siglo XVIII, es necesario asegurar la existencia de Dios, pero un SER no quiere decir en Spinoza CREADO POR DIOS (como en Descartes), sino ser DIVINO. El criterio de Verdad, justificado por Dios, se hace más inmanente, pero menos subjetivo, pues depende de un ORDEN ESTABLECIDO (casi estoico) que hemos de seguir para la producción del encadenamiento causal.

El método no es ya un encadenamiento para ALCANZAR las ideas verdaderas, sino el PROCESO INMANENTE a estas ideas por el cual se engendran según un orden regular.

Cuando Leibniz llega a su madurez, hacía ya sesenta años que se hace metafísica de esa manera tan intensa. Los sistemas del racionalismo se han ido sucediendo con rapidez (Descartes, Spinoza) pero el tiempo es otro.

Leibniz no asumió el típico desdén de la Escolástica que caracterizó a los pensadores del Renacimiento y aún se conservó, al menos externamente, en los primeros racionalistas. Vuelve a utilizar las ideas aristotélicas, se dedica intensamente a las matemática y a la nueva ciencia natural, y hace progresar a las matemáticas de un modo extraordinario. Leibniz es uno de los fundadores de la nueva matemática, que emerge con el cálculo diferencial e integral. De hecho, su notación resultó más util que la que Newton desarrolló.

El horizonte concreto en que se mueve Leibniz es la situación filosófica que dejaron Descartes y Spinoza. Leibniz es tal vez el primer idealista en sentido estricto; en Descartes, el idealismo está aún impregnado de realismo y de ideas escolásticas, y Spinoza no es propiamente idealista, aunque sí lo sea el marco teórico de su tiempo. Leibniz se ve obligado a plantear con rigor las grandes cuestiones de la época, y tendrá que alterar esencialmente la idea de la física y el concepto mismo de Sustancia.

Para Descartes como hemos visto, el mundo físico es EXTENSION, algo quieto. La idea de <u>fuerza</u> le era ajena, pues le parecía confusa y oscura e incapaz de traducirse en conceptos geométricos. Descartes cree que la cantidad de movimiento permanece constante. Leibniz demuestra que la constante es la fuerza viva, a él le parece absurda esa física estática, geométrica. Un movimiento para él, no es un simple cambio de posición, sino algo real, producido por una FUERZA.

Este concepto de la fuerza es lo fundamental de la física y de la metafísica de Leibniz. La idea de la naturaleza estática e inerte de Descartes se sustituye por una idea DINAMICA. Frente a la física de la extensión, se establece una física de la energía. Leibniz tiene que llegar a una nueva idea de la sustancia.

La estructura metafísica del mundo es para Leibniz la de las MONADAS. Las mónadas son sustancias simples, sin partes, que entran a formar los compuestos. Son los elementos de las cosas. La Mónada es fuerza, o mejor, fuerza de representación. Cada mónada representa o refleja el universo entero activamente.

La metafísica de Leibniz es pluralista y perpectivista. No todas las mónadas son de igual jerarquía; reflejan el universo con distinto grado de claridad. Además no todas las mónadas tienen conciencia de su reflejar, cuando tienen conciencia y memoria puede hablarse no sólo de percepción, sino también de apercepción. Este es el caso de las Mónadas humanas, es una representación ACTIVA, es un hacer de la mónada, una "apetición", que emerge del mismo fondo ONTOLOGICO de ella, de su propia realidad. Todo lo que acontece a la mónada brota de su mismo ser, de sus internas posibilidades, sin intervención exterior.

La incorporación de este carácter activo de la mónada, es muy importante, pues pasamos -puesto de una manera general- de una Teoría del Conocimiento EPISTEMOLOGICA anterior, a una Teoría del Conocimiento ONTOLOGICA, con Leibniz.

Leibniz hace pues, lo contrario de Spinoza: mientras este reduce la SUSTANCIALIDAD a un ente único, naturaleza o Dios, Leibniz restituye a la SUSTANCIA el carácter de "cosa individual".

Frente a la dualidad cartesiana de la Res extensa y Res cogitans, presididas por la Res Infinita que es Dios, Leibniz vuelve a una absoluta pluralidad de mónadas sustanciales, que encierran en si la totalidad de sus posibilidades ontológicas.

Leibniz afirma el pensamiento contra la percepción de "los ingleses" y frente al ser sensible: lo pensado como la esencia de la verdad. Mientras que Spinoza sólo proclamaba la Sustancia general y una, Leibniz con su principio fundamental de la individualidad, proclama el ser para si, la mónada pensada, aunque no como concepto absoluto. De aqui que el sistema de Leibniz sea un sistema intelectual, para el que todo lo material es, por consiguiente, algo puramente representativo, perceptivo. La mónada actúa como este algo representativo. perceptivo, nos dirá Leibniz, pues la actividad es la diferenciabilidad dentro de la unidad.

La Mónada consciente se distingue de la Mónada Material, por la claridad de la representación. El hombre es capaz de conocer las verdades necesarias y eternas, estas verdades descansan sobre los principios de contradicción y razón suficiente. La esencia absoluta, que en Leibniz es algo distinto de aquellas mónadas, se desdobla en dos lados: el de ser GENERAL y el de ser como UNIDAD de los contrarios.

Aquel Algo General es Dios; como la causa del Universo. La existencia de Dios, en Leibniz es una consecuencia de las verdades, ya que éstas en cuanto leyes de la naturaleza son eternas. Dios en cuanto la unidad consigo misma es la Mónada de las Mónadas. Dios es comprendido, en primer lugar, como algo general, pero ya por el lado de la relación entre los contrarios.

El sistema monadológico presenta la percepción de las cosas como una categoría ontológica, pues hace referencia a los estados transitorios del proceso de autodespliegue de la mónada, y no al resultado de recoger y elaborar los datos proporcionados por los sentidos.

La noción individual de cada sustancia comprende el conjunto de atributos que se predica de cada sujeto particular (de cada mónada) y expresa todo cuanto puede acontecerle en el proceso de su autodesarrollo.

Hemos visto como a pesar del apartamiento de la teologia, la filosofía racionalista e idealista de Descartes hasta Spinoza, se funda en Dios. La situación del tiempo es la de tener a Dios un tanto lejano, un tanto inaccesible e inoperante en la actividad intelectual, pero, sin embargo, seguro.

Dios deja de ser el horizonte siempre visible, para convertirse en el suelo intelectual de la mente europea del siglo XVII. Esto es lo que da unidad profunda a este periodo de la historia de la filosofía que va de Descartes a Leibniz. Aparece este grupo de sistemas como envuelto en un aire común, que revela una filiación semejante: una profunda coherencia en las construcciones filosóficas a raiz de la importancia del Método matemático.

Podríamos decir que Dios se volvió matemático: principio de todo orden, perfección y demostración de la verdad de las cosas, o bien que la temática se "divinizó" para dar paso a la primacía de la razón.

BIBLIOGRAFIA

-Cassirer, E. EL PROBLEMA DEL CONOCIMIENTO. (TOMO I). México: Fondo de Cultura Económica, 1965 (segunda edición en español)

-Descartes, R. DISCURSO DEL METODO. MEDITACIONES METAFISICAS. Trad. Manuel García Morente. Madrid: Espasa Calpe, edición de

1968.

-Leal, Fernando. ENSAYO SOBRE LA ONTOLOGIA DE LA MENTE. Costa Rica: Editorial de Costa Rica, 1985.

-Leibniz, G.W. DISCURSO DE METAFISICA. Trad. Alfonso Castaño Piñán. Buenos Aires: Aguilar, 1967.

-Leibniz. G. W. MONADOLOGIA. DISCURSO DE METAFISICA. PROFESION DE FE DE FILOSOFO. Trad. Manuel Fuentes Benot/ Alfonso Castaño/ Francisco de Samaranch. Barcelona: Aghuilar Argentina, 1983.

-Leibniz, G.W. SISTEMA NUEVO DE LA NATURALEZA. Trad. Enrique Pareja. Buenos Aires: Aguilar, 1963.

-Russell, Bertrand. HISTORIA DE LA FILOSOFIA OCCIDENTAL. Trad. Julio Gomez de la Serna y Antonio Dorta. Madrid: Espasa-Calpe, 1971 (segunda edición).

-Spinoza. B. ETICA. Buenos Aires: Aguilar, 1963 (tercera edición). El titulo original de la obra fue ETHICA ORDINE GEOMETRICO DEMONSTRATA, publicada como obra póstuma en 1677.

-Wahl, J. DU ROLE DE L'IDEE DE L'INSTANT DANS LA PHILOSOPHIE DE DESCARTES. Paris, 1920.

SECCION DE PROSPECTIVA, POLITICA Y PROPUESTAS DE ORIENTACION EN LAS MATEMATICAS

MATEMATICAS Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS: PROPUESTA DE UNA ORIENTACION

Hugo Barrantes Campos/ Angel Ruiz Zúñiga
Escuela de Matemáticas/ Universidad de Costa Rica
San José, Costa Rica

RESUMEN

Se trata de estudiar la situación de la matemática y la enseñanza de las matemáticas en América Latina desde un punto de vista metodológico, filosófico y prospectivo. Se sugieren tres posibles orientaciones en el desarrollo posible de las matemáticas y su enseñanza. Para establecer esas orientaciones se parte de sus premisas filosóficas sobre la naturaleza de las matemáticas inscritas dentro de un constructivismo empirista.

A la hora de buscar un derrotero adecuado al desarrollo de las matemáticas y su enseñanza en nuestros paises, es imposible de evadir un cierto holismo en su configuración. Son muchas las dimensiones en las que cada tema que abordamos penetra. No es posible evadir la multidisciplina y sobre todo la visión de conjunto. En particular, con las ciencias y la tecnología es imprerscindible alejarse del especialismo y el reduccionismo que ha sido característico en buena parte de los países desarrollados. En este terrritorio la reflexión filosófica aplicada juega un papel trascendente. Por eso de alguna forma hacemos énfasis en este trabajo en premisas filosóficas y de método.

ELEMENTOS TEORICOS DE PARTIDA

Vamos a empezar con una pincelada teorética. Es claro que el teorema de Gödel y sus corolarios, en los años 30, fueron desde un punto de vista teórico, un golpe formidable a esa sobreestimación de la axiomática, los sistemas formales, que ha sido paradigma dominante en la filosofía de las matemáticas. Pero -además y en última instancia- ha sido también un golpe al racionalismo. (1) El teorema de Gödel era un desafío a todas aquellas visiones que pretendían eliminar la intuición empírica en las matemáticas. (2) Podemos decir que a partir de esos resultados, los intentos por dotar a la matemáticas de una fundamentación completa, el esquema de las verdades infalibles y absolutas no puede defenderse con toda propiedad.

La realidad es, sin embargo, que a pesar de la fuerza de esto, los resultados de Gödel no lograron una gran influencia en la conciencia de la mayor parte de los pensadores y matemáticas y educadores de las matemáticas. Por eso es precisamente que 30 años después de los resultados de Gödel se realizó una reforma tan importante en la enseñanza de las matemáticas como si Gödel no hubiera existido, e incluso hoy en día en buena parte del mundo, todavía imperan esa visión o la falsamente alternativa neopositivista sobre las matemáticas.

Es necesario intentar rescatar el sentido y las implicaciones teoréticas de los resultados de Gödel en los años 30 y a partir también del fracaso de la enseñanza de la matemáticas modernas en las últimas décadas, buscar conclusiones y trazar una orientación y un sentido histórico a la evolución de las matemáticas modernas.

Como bien dice Ubiratan D´Ambrosio, "Para enfrentar los retos de la Educación Matemática de las últimas decadas del siglo es necesario romper con las visiones conservadoras acerca de las matemáticas".(3) Epistemológicamente, por ejemplo, ya no es posible afirmar un epistemología que privilegie alguno de los factores epistemológicos, como lo hace el empirismo clásico del objeto, el racionalismo del sujeto, e incluso visiones más modernas como las de Piaget que también enfatizan el sujeto, aunque desde una óptica basada en premisas biológicas no demostradas. (4)

PREMISAS

Para dejar claras las premisas teóricas de las que partimos:

(i) Afirmamos que las matemáticas deben poderse entender con una epistemología que afirme una relación dialéctica entre el sujeto y el objeto epistémico, es decir, una relación de mutuo condicionamiento. (5)

(ii)Habría que añadirle por otra parte la importancia de que en el análisis de las componentes epistemológicas el factor social juegue un papel autónomo, activo y condicionante, no simplemente como parte del objeto epistémico en general, en sentido clásico, sino de manera independiente. Esta concepción puede permitir comprender mejor su trascendencia en la concepción epistemológica y entonces permitirnos establecer un marco epistemológico en el cual los factores activos condicionantes, aunque siempre de manera integrada y dialéctica serían el sujeto, el objeto y lo social. El papel de la sociedad nos permite entender cómo la diferencia entre las sociedades, no solo en el terreno económico, sino también en el territorio de lo cultural, son decisivos en la formación, en la asimilación, en el aprendizaje de las matemáticas, y cómo, por ejemplo, es necesario abordar la problemática en la enseñanza de las matemáticas de una manera adecuada, ajustada a las condiciones sociales y culturales diferentes de cada sociedad. Esto justifica epistemológicamnete el papel de la etnomatemática.

(iii) Desde el punto de vista ontológico, tal vez sea conveniente romper con el esquema de que las matemáticas son a priori, en el sentido clásico, y buscar en el gran territorio de lo que no es a priori, un mejor sentido para la naturaleza de las matemáticas. Se trata de abrir camino como ya lo ha señalado Lakatos, hace bastantes años, hacia una nueva vía en la interpretación de las matemáticas. (6)

(iv)Dentro del esquema racionalista y formalista de que hemos hablado ha sido característico afirmar la unidad de las matemáticas, tal vez sea entonces conveniente enfatizar aquí la diversidad de las matemáticas.

En esta visión es perfectamente comprensible entonces la importancia de cambiar el sentido vectorial de las matemáticas, no favorecer un apuntalamiento excesivo y extremo del purismo y de los aspectos más abstractos, generales y a veces estériles de las mismas, sino buscar un sentido vectorial en una relación más estrecha con la realidad y entonces con lo que se suele llamar la aplicación.

Con estos elementos de naturaleza filosófica tal vez sea entonces posible abordar un programa, una orientación, en el desarrollo de las matemáticas para un país periférico.

TRES ORIENTACIONES

I-En primer lugar, es evidente que se convierte en algo tremendamente importante establecer un énfasis en la aplicación de la matemáticas a la realidad. Es decir, su relación estrecha con el mundo de las otras ciencias, su relación estrecha con el mundo de la economía y la infraestructura productiva. Esto no quiere decir por supuesto que haya que destinar todos los trabajos matemáticos a hacer matemáticas aplicada de una forma mecánica, torpe. Todo lo contrario, trabajos de gran importancia de matemáticas llamadas erróneamente puras deben mantenerse. Pero el gran sentido vectorial, especialmente en nuestros países en vías de desarrollo, debe orientarse hacia la aplicación. Se trata de una relación dialéctica entre la construcción más abstracta y la más aplicada en la que se beneficia la segunda dimensión por lo menos durante una buena etapa histórica, y esta aplicación, en parte, debe orientarse hacia una relación estrecha con las ingenierías, la economía, con las ciencias médicas y con las ciencias en general. (El problema de la aplicación es en realidad el problema de la construcción de modelos y toda la dialéctica de contrastación y reformulación de los modelos a partir del contacto con la realidad y el mundo en que se trabaja).

Visto desde otra óptica, las matemáticas puras juegan un papel decisivo solo dentro de una auténtica estrategia de desarrollo de las matemáticas. Si se concentraran todos los recursos matemáticos en la aplicación inmediata es posible que se diera respuesta a muchos problemas inmediatos científico-técnicos y de la producción nacional, pero se estaría cortando las posibilidades de largo plazo. Las matemáticas más abstractas y libres de aplicación adecuadamente planteadas son vitales en una estrategia de largo plazo. Desestimarlas sin más solo nos conduciria a un callejón sin salida histórica. Sería añadir otros niveles de dependencia y atraso. Es por eso que hemos hablado de una dialéctica con énfasis concretos. Es claro que esta estrategia de manera precisa se puede aplicar en cada país solo sobre la base del análisis concreto. No todos los países tienen ni los mismos recursos ni las mismas posibilidades. (7)

Lo que sí es necesario señalar como regla general es la importancia de decidir los campos decisivos de trabajo en las áreas más abstractas de las matemáticas, y en general en todas. Existe otra dialéctica entre las necesidades de diversificación y concentración, que en nuestras circunstancias debe enfatizar el último término. Esto no se puede hacer por la vía de la imposición sino del consenso sobre la base del análisis prospectivo.

II-En segundo lugar, es imprescindible lograr un fortalecimiento de las condiciones matemáticas de la población y en particular de los profesionales vinculados a las ciencias y a la tecnología. Esto implica entonces un mejoramiento cualitativo de la enseñanza de la matemáticas desde los primeros niveles hasta los últimos. Esto debe hacerse entonces buscando una aproximación educativa que corresponda mejor a las condiciones culturales y psicológicas de la población.Aquí juega un papel muy importante la investigación concreta en etno-matemática.

Pero debe ser una enseñanza que afirme el método heurístico, lo intuitivo, lo empírico, lo contingente, lo inacabado, lo falible, lo real de las matemáticas. Esta enseñanza debe hacerse relacionada con la enseñanza de las otras ciencias, y a partir de esa enseñanza.

III-La tercera orientación esencial, es, en nuestra opinión, la vinculación del trabajo en matemáticas con la estadística, las probabilidades y la computación. En general con lo que se suele llamar matemática discreta. (8) Afirmamos, en particular, que en este último campo se puede encontrar una riqueza extraordinaria para avanzar en una comprensión más aplicada, más real, más mundana de las matemáticas, así como, al mismo tiempo, la integración para la obtención de recursos y de desarrollos en un campo que es tremendamente importante en esta etapa de nuestro siglo. Las matemáticas discretas se han convertido en esta parte del siglo en uno de los campos más importantes del desarrollo científico y tecnológico, en particular la computación con su relación con todos los sistemas de información juega, y jugará, un papel clave en nuestra sociedad y en el mundo en general.

La vinculación consciente de los trabajos de matemáticas con las necesidades y los ritmos de la evolución en los territorios de la computación, se convierte en una prioridad a darle a todos los profesionales que trabajen en este campo. Por su origen y por su relación con los algoritmos numéricos y lógicos, la computación está intimamente ligada a las matemáticas. De hecho, en gran medida, la computación y la informática han sido parte de los departamentos de matemáticas en la mayoría de las ocasiones.

ALGUNAS IMPLICACIONES

Es obvio que estas tres orientaciones, muy integradas, significan un cambio importante en la situación actual de la evolución de las matemáticas.

El énfasis en la aplicación, por ejemplo, implica por lo menos dos cosas: (i) un énfasis importante en los trabajos de investigación por parte de los profesionales en matemática, lo que no ha sido el caso, puesto que la mayor parte de la matemática en nuestros países no se ha dedicado a la investigación sino fundamentalmente a la docencia. (ii) En segundo término, el énfasis en la aplicación implica la transformación de los currículos de los programas, contenidos y dinámica de las carreras de matemáticas que se han enseñado en las universidades, puesto que en esta orientación los cursos estarían muy vinculados a las facultades de ingeniería, economía y otras unidades de ciencia y tecnología.

La importancia de la matemática discreta daría, por ejemplo, un cambio sustancial en contenidos y orientación de los cursos y carreras de matemáticas; fortalecimiento en las ecuaciones diferenciales, en las probabilidades, en el análisis numérico, en los recursos y teoría de computación, en teoría sobre la estadística, es decir, una orientación diferente. Debe señalarse que los campos de la estadística, las probabilidades y la computación provocan mayores niveles de investigación aplicada.

La reforma a la enseñanza de las matemáticas a partir de la visión filosófica planteada significaría un sustancial cambio en todos los programas de enseñanza de las matemáticas de la primaria a la secundaria. Significaría cosas evidentes tales como prácticamente la eliminación de la teoría de conjuntos, en primaria y secundaria, de todas las estructuras algebraicas tal como se imparten en esos niveles y de todo ese cargamento de formalismo totalmente inadecuado para el nivel de desarrollo y formación de los jóvenes en esos períodos. Significaría, evidentemente, enfatizar la geometría, aunque no una geometría deductivista y formalista, sino una geometría intuitiva vinculada a la realidad, a la práctica con materiales físicos, etc.(por ejemplo, ligada a la agrimensura, cartografía, etc.). (9) Se trataría entonces de una reforma radical en la enseñanza de las matemáticas.

Estas tres orientaciones implicarían la necesidad de un nuevo tipo de profesional en matemáticas y de una nueva concepción de las escuelas y departamentos de matemáticas en las universidades. Implica una nueva formación y una nueva programación de los trabajos en todos los niveles educativos: primario, secundario y universitario.

Esta reforma en todos los niveles, debe hacerse de manera integrada y de forma equilibrada a través del plazo correspondiente a objetivos y viceversa. Las grandes reformas y las nuevas orientaciones que se hagan en las universidades deben al mismo tiempo implicar planes, programas y actividades en primaria y secundaria. En estos niveles es esencial reeducar a todo el personal que fue formado en una visión inadecuada de la enseñanza de las matemáticas en las pasadas décadas. Las universidades tienen estas importantes responsabilidades no solo porque son las unidades centrales en la organización de las matemáticas pero porque son precisamente ellas, en nuestros países especialmente, las que se hicieron abanderadas del purismo, del formalismo y de esta forma combinada de racionalismo sobre la matemáticas que tantos obstáculos han traido. Ahora les corresponde también la tarea de reformar, de recrear en una dirección diferente a todos estos profesionales.

Una política en matemáticas como la que acabamos de esbozar exige el concurso de las comunidades de matemáticos, y especialmente de aquellos que enseñan esta disciplina, que han sido quienes más han sufrido en sus decepciones constantes y fracasos las consecuencias de toda esta problemática. Creemos que son las sociedades gremiales de educadores de la matemática las bases sociales que pueden jugar un papel decisivo en las transformaciones radicales que una nueva enseñanza y desarrollo de las mátemáticas implican.

NOTAS BIBLIOGRAFICAS

1- Cfr. Ruiz, A. "El factor paradojas y el factor Gödel en los fundamentos de la matemática", REVISTA DE CIENCIA Y TECNOLOGIA 9 (1,2): 97-108, 1985. Univ. de Costa Rica, San José, Costa Rica.

2-D´Ambrosio, Ubiratan. SOCIO-CULTURAL BASES FOR MATHEMATICS EDUCATION. Campinas: Unicamp, 1985. P.66.

3-Cfr. Ladrière, Jean. LIMITACIONES INTERNAS DE LOS FORMALISMOS. Madrid: Alianza Editorial, 1981.

4- Cfr. Piaget, Jean INTRODUCCION A LA EPISTEMOLOGIA GENETICA. Buenos Aires: Editorial Paidós, 1979.

5- Cfr. Ruiz, A. "Epistemological constituents of the mathematical construction, implications in its teaching", PROCEEDINGS of the XI International Conference on the Psicology of Mathematics Pedagogy, Montreal, 1987.

6- Lakatos hace una formidable crítica a todos los intentos fundacionales de las matemáticas infalibles y absolutamente verdaderas en MATEMATICAS, CIENCIA Y EPISTEMOLOGIA. Madrid: Alianza Ed., 1981.

7- Un interesante artículo sobre la importancia de la ciencia fundamental en los países periféricos se encuentra en Camacho, Luis "La ciencia pura en el subdesarrollo", Revista DESARROLLO n.3-4, 1986, San José, Costa Rica.

8- Cfr. Ruiz, Angel. "De si las matemáticas sirven para algo, o una discusión sobre las matemáticas aplicadas",Revista DESARROLLO N.5, Agosto 1987, San José, Costa Rica.

9- En esta dirección los trabajos de David Hawkins en Boulder, Colorado, USA, son de lo más interesante que se está haciendo actualmente.

ESTUDIO INTERDISCIPLINARIO DE MATEMATICA E INGENIERIA

Carlos Lewis Parks
Escuela de Matemáticas/ Universidad de Costa Rica
Sede Regional de Limón/ Limón, Costa Rica

RESUMEN

Las alternativas profesionales para el estudioso de las matemáticas en nuestro medio son limitadas. La poca versatilidad, propia de esta carrera, no le permite al egresado incursionar en otros campos y pasar así de figura marginal a protagonista en el desarrollo tecnológico del país. Se propone entonces la formación de un matemático polifuncional.

JUSTIFICACION

La docencia pareciera ser el destino inexorable de la gran mayoría de matemáticos. Algunos investigan, otros se pasaron a la informática y muy pocos ocupan puestos en la industria y en el comercio.En general las perspectivas laborales son reducidas. Mi propuesta pretende abrir un amplio abanico de posibilidades, que siempre han existido, pero que posiblemente por falta de información o de interés en campos ajenos no han sido explotados a plenitud.

Hay otra realidad que no debemos perder de vista, cada día es más difícil encontrar un puesto de trabajo acorde con lo estudiado, por lo tanto el nuevo profesional debe tener capacidad de adaptarse facilmente a un mundo de cambios rápidos.

EL MODELO ALEMAÑ

En la facultad de Matematicas del Politécnico de Darmstadt, en la Rep. Fed. Alemana, existe la posibilidad para el estudiante con premaestría aprobada en Física, Matemática o una carrera técnica, de introducir en el plan de Maestría en Matemática un bloque de materias técnicas y terminar con el título de Ing. en Matemáticas. La carga académica la compone el 80% de las materias de Física-Matemáticas exigidas normalmente. El restante 20% son materias técnicas, pero sustituyendo una hora de matemáticas por dos horas de técnicas.
A los estudiantes de carreras técnicas se les aconseja ponerse al día por cuenta propio en ciertas asignaturas básicas de la premaestría en matemática. La tesis de grado se puede confeccionar en otra facultad, siempre y cuando el grado de dificultad es comparable al exigido a un matemático.

MI PLAN DE ESTUDIOS

Ingresé al programa con premaestría en ingeniería Civil,por eso tuve que ponerme al día en : algebra lineal, algebra general y topología general. Mis cursos por sección fueron:

Matemáticas Puras (20%): Analisis funcional y ecuaciones integrales, Algebra Superior y Transformaciones Conformes
Matemáticas Practicas (30%): Métodos Numéricos y Optimización
Mecánica Superior (30%): Dinámica de Gases, Mecánica de Fluidos Aplicada, Biomecánica

y Oscilaciones Aplicadas

Materias Técnicas (20%) : Tecnificación Agrícola, Hidráulica del Aceite y Accionamiento hidráulico, Metalurgia, Método de los Elementos Finitos, Dinámica de Maquinas

La Tésis se escribió en el departamento de Estructuras Ligeras (met. Elementos Finitos) bajo el título de:

" Un problema de optimización de estructura sujeta a restricciones no lineales, se resoverá linearizando sólo las restriciones, permaneciendo la función objetiva en su forma no lineal "

PROPUESTA

Considerando que la solución de muchos problemas técnicos hoy en día requieren de un alto grado de formación matemática, que va más allá de la poseida por un ingeniero, la Escuela de Matemática abre la posibilidad a sus estudiantes a optar por el título de Ingeniero en Matemática bajo las siguientes condiciones:

a) Tener el bachillerato en Matemática
b) El plan de Licenciatura contendrá las asignaturas fijas del plan original. Los créditos de las optativas se multiplican por tres, para dar los créditos del estudio técnico complementario. De esta forma se asegura un contacto más profundo con la parte técnica.
c) En base a las materias técnicas presentadas por el bachiller, la Escuela de Matemática, en consulta con la Escuela

correspondiente, fijará las materias del bachillerato técnico que complementan el bloque escogido. Estas deberán aprobarse por suficiencia u otro medio que demuestre conocimientos suficientes en los cursos básicos. Dichos créditos no son computables.

De esta forma se preserva la unidad de la materia, pues estudiar Estructuras, sin haber cursado resistencia de materiales no tiene sentido académico, aunque hoy en día los métodos numéricos a base de matrices pudieran hacer parecer este enfoque conservador por no decir obsoleto.

CONCLUSIONES

El tipo de profesional propuesto es en todo sentido de la palabra un matemático, pero con conocimientos especiales en ingeniería, que le permite desempeñarse con propiedad en ese campo. Podrá calcular un edificio, una red de cañería,un tanque de oscilaciones y cuando guste, batallar con las dificultades matemáticas de las ecuaciones matemáticas involucradas. Podrá diseñar una represa y despúes devanarse los sesos con la teoría de las memoranas, aplicable en muchos de estos casos.Podrá buscarle aplicación a tantos métodos numéricos propuestos.

PROBLEMAS LEGALES

Debido a los Colegios Profesionales el egresado propuesto podría topar con dificultades para incorporarse. Sin embargo confio en que cada día será más evidente las superposicióņes existentes entre ciertas carreras,lo cual traerá una modificación en los conceptos actuales.

IDEOLOGIA, POLITICA Y MATEMATICAS

Angel Ruiz Zúñiga
Escuela de Matemáticas/ Universidad de Costa Rica

RESUMEN

En este ensayo se busca hacer ver la influencia de factores ideológicos en las matemáticas y en las ciencias, así como de la necesidad de decisiones de naturaleza política para el avance de estas. Se hacen algunas consideraciones sobre la naturaleza de los problemas que las matemáticas atraviesan en América Latina, y se plantean las dimensiones generales de sus posibles soluciones. Se introducen algunos planteamientos sobre asuntos de método que hacen referncia a las discusiones tenidas en la disciplina de la historia de la ciencia en las décadas pasadas.

A veces, por miopía intelectual, a veces por celos profesionales, muchos intelectuales disminuyen el lugar de los estudios históricos, filosóficos, éticos, políticos, prospectivos, etc., sobre las ciencias y la tecnología. No es extraña la prepotencia del especialista en ciencia y tecnología que cree que porque ha logrado unas cuantas publicaciones técnicas en revistas internacionales, o ha participado en unos cuantos congresos científicos, puede mirar de reojo este tipo de consideraciones. Al igual que tenemos en nuestros países que avanzar colectivamente en el apuntalamiento de la práctica científica y tecnológica de gran excelencia y competividad internacionales, tenemos que luchar contra la alienación y la prepotencia del especialista científico. Es por eso que me parece importante en este tipo de actividades hacer notar el valor de los estudios -en general- sociales sobre la ciencia y la tecnología, de los estudios meta-científicos y meta-tecnológicos. Tal vez así, y para beneficio del progreso de nuestros países, avancemos la conciencia social de tal manera que en los medios de científicos y técnicos -cuya responsabilidad social y ética es más grande de la que suelen ser conscientes- la reflexión meta-científica deje de ser vista con desprecio, abierta o encubiertamente. Decía Kant que la historia de la ciencia es ciega sin la filosofía de la ciencia. Tal vez deba decirse, adicionalmente, que la ciencia sin consideraciones meta-científicas además de ciega puede ser miserable y despiadada, y hasta mortal, para el progreso humano.

Tiene razón Hebe Vessuri cuando en su libro LA CIENCIA

PERIFERICA, y a diferencia de Shils, afirma que "es posible adquirir conocimiento a través de este tipo de estudios" y que estos pueden tener "carácter científico".(1) Pero tendríamos que decir que más que un problema epistemológico se trata de uno de naturaleza política. Dada la importancia de la ciencia y la tecnología en la sociedad moderna, para países como los nuestros los instrumentos analíticos que puedan permitir tomar decisiones necesarias para el progreso representan una dimensión esencial de la actividad intelectual y esto con el sentido más fuerte de urgencia nacional.

La elaboración de estos estudios no puede entonces concebirse como mera especulación intelectual sino como un compromiso teórico-práctico con el futuro positivo de nuestra realidad. Es necesario buscar los mecanismos sociales, intelectuales y organizativos que permitan que este compromiso sea factible y no un simple buen deseo.

Si la ciencia no puede verse como asépticamente "descontextualizada", ni tampoco como neutral y apolítica, en mucha menor medida puede verse así cualquier cosa que se llame meta-ciencia. La política y la ideología son entonces referencias metodológicas imposibles de evadir. La forma específica en que esto sucede, es decir la forma de la intervención de la política y la ideología, debería ser uno de los principales temas de la investigación concreta.

Como se podía presumir por lo anterior, en este trabajo se afirma que no es posible separar la evolución de las ciencias en general de condicionantes de orden social y específicamente los que vamos a llamar ideológicos. En este sentido vamos a adoptar una posición que algunos bien podrían llamar "externalista" en la metodología de la Historia de la Ciencia. Pero para evitar malos entendidos quiero dejar claro que no creo que el decurso de la ciencia esté determinado por factores externos de una manera unilateral. En particular no creo que lo sea estrictamente por factores económicos o políticos. Para hacer referencia a una peligrosa posición metodológica que desafortunadamente sigue ganando adeptos en América Latina, no creo que baste una "autonomía relativa de las superestructuras" para salvar los desaciertos de los determinismos economicistas y materialistas usados como respuesta errónea frente a la fortaleza del idealismo y el llamado "internalismo". El "universo de discurso" de las ciencias y de las ideas no puede ser eliminado en sí mismo sin caer en las telarañas del misticismo y la metafísica. Solo es necesario encontrar, como diría Aristóteles, el "justo medio".

América Latina ha estado plagada de ideologías. Pero como sucede generalmente en el Tercer Mundo, estas no han correspondido sin más a nuestros procesos sociales endógenos. Ha sido común a lo largo de nuestra historia la penetración cultural e ideológica en términos de alienación local. Las ideologías de origen exógeno, como ha mencionado el historiador argentino José Luis Romero, son recibidas a través de grupos influyentes e ilustrados, aunque reducidos, que reproducen estas de manera mecánica y esquemática.(2) Esto que ha sido así con las grandes ideologías como el liberalismo, el positivismo o el marxismo, también se puede observar en las ideologías "menores" o más específicas.

El problema no es entonces que no deban llegar y penetrar ideologías y conjuntos de ideas en nuestros países. Más aún, esto resulta lo más natural y conveniente. El problema nace cuando no se asume una actitud de crítica y asimilación con base en criterios propios y en la autoafirmación endógena. Uno de los principales problemas del subdesarrollo de América Latina ha radicado en la ausencia de una estructura social capaz de discernir, distinguir y aprehender las ideas de acuerdo a nuestras conveniencias. La actitud intelectual frente a las ideas y aquello que se produce en otras latitudes ha sido una de las principales componentes del retraso. Es claro que esto está relacionado con muchos factores sociales, políticos e históricos, pero se trata de una realidad esencialmente cultural.

Pero vayamos a las matemáticas. Podemos afirmar que existen por lo menos dos dimensiones en la crisis o en la problemática actual del desarrollo de las matemáticas que se plantean similarmente en cada país latinoamericano.

Por una parte, encontramos todos aquellos problemas derivados precisamente de la naturaleza periférica de estos países. Es decir, países en los cuales encontramos subdesarrollo y dependencia científico-técnica con relación a los países altamente industrializados: escasos recursos materiales, sociales, humanos, culturales, dedicados a estas dimensiones; ausencia de desarrollo científico integrado en las formas de la organización de la vida productiva, en el comercio, etc., En fin, ausencia de una base científico-tecnológica capaz de permitir un rol de las matemáticas como factor ensamblador y edificante al seno de la sociedad.(3) Esta situación implica, por ejemplo en las universidades, la ausencia de recursos destinados a la investigación, la ausencia de equipos humanos de trabajo orientados por la investigación matemática. Al mismo tiempo supone grandes deficiencias en la transmisión de los conocimientos matemáticos y en la formación necesaria para el desarrollo científico-tecnológico de éstas sociedades.

En el nivel de la primaria y secundaria, en el sistema educativo nacional, toda esta situación representa ausencia de materiales, ausencia de personal profesional idóneo y falta de recursos en general. En consecuencia, falta de buenos resultados en la asimilación y por ende en la promoción académica en el territorio de las matemáticas.

En parte, también conduce esta situación de nuestros países en América Latina a una ausencia sintomática de las matemáticas en los procesos productivos y, al mismo tiempo, de una relación más estrecha y realizada de un modo más eficaz con ctras disciplinas científicas.

Por el otro lado, existe otra dimensión tremendamente importante en la problemática de la evolución de las matemáticas. Esta es: la ideología dominante sobre la naturaleza de las matemáticas.

Afirmamos que en nuestros países, y no solamente en ellos, sino también en la escala mundial, ha existido una ideología precisa sobre la naturaleza de las matemáticas que, en lugar de convertirse en un factor dinámico y edificante del desarrollo de las mismas y un factor que adecúe los desarrollos de las matemáticas a los desarrollos y necesidades del conocimiento y la ciencia en general, se ha convertido en un verdadero obstáculo. Esa ideología es lo que vamos a caracterizar aquí como un paradigma racionalista y formalista sobre la naturaleza de las matemáticas. (4) Es este -sin embargo- un tema que he tratado en múltiples artículos desde hace varios años.

Lo que me interesa señalar aquí es que existe una relación dialéctica (es decir, mutuamente condicionante) entre ambas dimensiones en el resultado de la evolución matemática en nuestros países. Es decir, esta ideología ha podido penetrar y ser dominante en estas sociedades, de una forma en general acrítica, a partir de condiciones y características que han poseído y poseen nuestros países. Con ello ha apuntalado los procesos que inhiben un mejor desarrollo científico-técnico. Ha apuntalado un modelo que solo ha contribuido a aumentar nuestra dependencia y subdesarrollo. Por el otro lado, el carácter formalista y academicista que suele predominar en nuestra historia de la ciencia ha apoyado precisamente este tipo de ideología. Con esto se logró amplificar más los defectos de nuestra práctica mátemática y científica.

Si tenemos en cuenta esta realidad, y si nos dotamos de una actitud práctica adecuada, se hace necesario definir políticas y realizar prospectivas sobre las matemáticas. Es decir, se hace necesario señalar dispositivos para la resolución de los problemas tomando decisiones en ambas dimensiones, y entendiendo la imbricación y diferencia (al mismo tiempo) que estas pueden tener.

Vayamos ahora a una discusión más general sobre el método en los estudios sobre la ciencia. Si la ideología no ha podido evadirse de nuestras realidades mucho menos podría hacerlo la práctica política.

La política -en su sentido más general- es el arte de crear orientaciones colectivas y de hacerlas una realidad. Es un arte donde la teoría sirve a la práctica, y donde la práctica es quien sanciona a la teoría. Es el territorio de las decisiones, acertadas o incorrectas, pero que pueden ser decisivas para muchos individuos y pueblos.

La solución de los problemas globales que enfrentamos en el territorio de las matemáticas en nuestros países, obliga a poner en movimiento muchos elementos , y a asumir actitudes prácticas. Los grandes niveles de subdesarrollo que posee America Latina hace imposible asumir los mismos ritmos que los países desarrollados asumieron en su historia. estamos obligados a realizar en una fracción del tiempo una multitud de objetivos.

Visto globalmente, el retraso de nuestras estructuras productivas deriva de una combinación de factores. Por un lado, responden a ordenamientos sociales y políticos retrasados. Por otro lado, a patrones culturales que no favorecen el trabajo duro y la disciplina colectiva y nacional. También a un marco de relaciones internacionales que no ha estado basado en la colaboración y el progreso armonioso entre las naciones.

Pero, por otro lado, también a la ausencia de un papel importante del ciencia y la tecnología en nuestra sociedad. La ciencia y la tecnología -ya vistas cara al futuro- deberán ocupar un rol decisivo en nuestro ordenamiento económico y social o estos paises no tendrán posibilidad de desarrollo. Y en este territorio las matemáticas -piedra vital de la ciencia- deben poder ocupar un lugar de primer orden. En esta medida, el desarrollo de las matemáticas se convierte en una importante prioridad, aunque esto a veces no sea entendido.

Entonces, las discusiones en torno a cómo hacer de las matemáticas ese lugar se tornan trascendentales en una perspectiva de progreso. Entonces, la reflexión, la discusiòn, y la toma de decisiones, sobre los planes y los métodos en las matemáticas son importantes.

La filosofía y la metodología de las matemáticas dejan de ser meros elementos de elucubración intelectual, para encontrar un lugar en el desarrollo de una estrategia de avance social y nacional. [1]

Ahora hemos llegado a un punto importante en este análisis. Cuál es la relación que existe entre la renovación y avance de los métodos de análisis de la ciencia con las perspectivas de la prospectiva y la política de la ciencia? Vamos, entonces, a retrotraer aquí la discusión metodológica que en la metodología de la historia de la ciencia se dió en las últimas décadas. En otra parte he mencionado que el debate entre externalismo e

[1] Aunque por supuesto existen límites históricos muy difíciles de franquear. Para países pequeños como Costa Rica por más políticas correctas en ciencia y tecnología se requiere de otros inputs internos y externos

internalismo en la historia de la ciencia obedeció más bien a razones políticas y de grupos profesionales, y que en realidad de lo que siempre se ha tratado es de adecuar los métodos de análisis a la realidad histórica concreta y específica sin ceder a grandes generalidades metodológicas. Sin embargo, por otra parte, tampoco se puede afirmar que los debates de método no hayan tenido influencia en la realidad de los estudios de la ciencia. Si la ideología penetra en la ciencia, con mucha mayor razón en la meta-ciencia. Por eso una actitud intelectual errónea frente a la ciencia y la meta-ciencia puede ser nefasta para el desarrollo de una práctica vital para el progreso sostenido -y de largo plazo- de nuestros países; al igual que una actitud correcta puede acelerar procesos nacionales y hacer avanzar con fuerza.

Y sobre esto yo creo que conviene tomar una posición (que por lo demás ha sido transparente y explícita en este trabajo). Yo opino que la obra de Kuhn renovó el "externalismo" en la historia de la ciencia en su conjunto. Esto quiere decir que a partir de los años setenta se ha desarrollado como teoría metodológica dominante una actitud externalista sobre la historia de la ciencia. (5) Es decir, esto fue un claro avance metodológico. Pero, como también lo hemos señalado anteriormente, afirmar la existencia de factores externos al desarrollo de la ciencia no basta para la mejor comprensión de la misma. La discusión de método no acaba allí. Ahora bien, es mi opinión que esta situación de éxito social del externalismo posee importantes implicaciones en el desarrollo de los estudios prospectivos y de la política científica. Veamos por qué.

Si se piensa que en la ciencia no intervienen elementos más allá de los propiamente conceptuales o más allá del marco conceptual y cultural de una época entonces la intervención de la sociedad sobre el decurso de la ciencia es muy difícil de cuantificar y de establecer. Los territorios de las decisiones políticas en torno a la evolución de la ciencia adquieren una limitación extraordinaria. La evolución interna de las ciencias, la evolución interna de las ideas, es libre y donde interviene una dimensión subjetiva tremendamente importante. No es posible en este tipo de visión introducir elementos prospectivos con cierto nivel de eficacia y veracidad. Es entonces natural que durante los periodos de mayor dominio de actitudes internalistas no haya habido suficiente interés en los problemas de la administración de la ciencia, de la planificación y de la política de la ciencia.

Salvo en el caso de la Unión Soviética y los paises comunistas en donde se dió exactamente la situación contraria. Puesto que la consideración de la ciencia como fuerza productiva y como elemento determinado plenamente por la sociedad (y en especial en una sociedad que hace de la planificación estatal centralizada prácticamente absoluta una premisa necesaria) plantea la necesidad de su administración en términos extremos.

La ingerencia entonces de la política y de las decisiones sociales en esta conducta van a tener una importancia excesiva y deformmadora de la práctica científica e intelectual. Es en este contexto que se explica el caso Lysenko y otros sucesos deplorables en la historia de la ciencia que ocurrieron en estos paises.[1]

Afirmar la posibilidad de orientar la evolución de la ciencia en un país es afirmar entonces la injerencia de factores externos a la ciencia y al mundo conceptual en su determinación. La existencia de una prospectiva en ciencias exige entonces una visión en la que estos factores externos puedan intervenir en la historia de la ciencia.

En particular, para los paises subdesarrollados y eufemistamente llamados en vías de desarrollo no es posible prescindir de una prospectiva en ciencia y en tecnología. La ausencia de recursos humanos , materiales, económicos, etc., obliga a la necesidad de la selección, la centralización, la concentración de recursos en con métodos y plazos precisos. Es decir, la prospectiva en ciencias es esencial de una manera activa y edificante en los paises que intentan una escala positiva de desarrollo, progreso y bienestar.

Sin embargo, la orientación y dirección de la ciencia a partir de decisiones políticas y entonces vinculadas a los resortes estatales tiene claros límites. Esto es así en la medida en que la evolución y desarrollo científicos positivos solo son posibles a partir de la participación creativa y amplia de los individuos en la sociedad civil y dentro de plenas condiciones de libertad y de movimiento. La única forma de lograr éxito duradero y de largo plazo en la dirección de la evolución de la ciencia es a partir del consenso. Se requiere entonces consenso social en la comunidad científica particular de una nación para poder echar a andar una programación que ha implicado selección de campos, de métodos, de sectores, de plazos y objetivos. Y aun en esta escogencia el máximo de flexibilidad con el investigador y el científico individuales se vuelve imprescindible dentro de un concepto de organización científica que auto-incluya elementos correctivos dentro del proceso.

Por otra parte, la dirección y el trazamiento de líneas prospectivas a partir del Estado en particular solo pueden realizarse con éxito sobre la base de la existencia de elementos activos estructurados al seno de la sociedad civil. Es decir, sin los grupos de científicos, las colectividades de científicos así como otros grupos de profesionales e intelectuales de la sociedad, funcionando de una manera dinámica y coordinada al mismo tiempo que libre, no es posible pensar en una orientación o en la eficacia de una dirección en la evolución de la ciencia.

---

[1]Este es un peligro siempre presente que siempre se debe evitar.

En otro orden de cosas, existen límites a la prospectiva efectiva y a la política de la ciencia, que corresponden a la naturaleza misma de la ciencia. Estos límites son aquellos que corresponden a la autonomía real del universo de discurso de los conceptos y de las ideas en general, así como de la práctica intelectual. No es posible prever ni dirigir ni empujar todas las evoluciones de las ideas científicas en una sociedad. Para llamarle así, la "dimensión interna" de la evolución de las ciencias son un límite preciso a la injerencia de la política y la prospectiva activa en una sociedad. Y esto es importante sobre todo en la medida de que se entienda la importancia de los elementos de libertad, de creatividad, y de flexibilidad absoluta que en la creación intelectual y en el conocimiento son imprescindibles.

Como hemos visto, existe una relación muy estrecha entonces entre la reflexión que hace la Historia de la Ciencia y las posibilidades de asumir de una forma activa la dirección y la orientación de la evolución científica hacia el futuro. Para resumir: es claro que una visión que excluye el rol de los factores externos en la evolución de la ciencia o una visión que reduce extraordinariamente el rol de las ideas y de la lógica interna de la ciencia en su decurso, constituyen obstáculos para poder construir una base metodológica qué oriente en particular nuestras sociedades hacia una situación en la que la intervención de la ciencia suponga o implique progreso y desarrollo. Para los paises periféricos la discusión entre externalismo e internalismo no es una discusión entonces trivial y sin importancia. En la medida de que para obtener reales posibilidades de progreso y desarrollo necesitamos tensar todos los recursos y organizar de la mejor forma posible todos los esfuerzos dentro de nuestros paises no podemos darnos el lujo de contar o de asumir posiciones erróneas (sin elementos correctivos rápidos) sobre la naturaleza de la evolución científica. Por eso, aunque hoy en día en general es reconocido que ni una visión internalista extrema ni una visión externalista extrema son viables, posibles o adecuadas, para nosotros el asunto es de mayor trascendencia. En los paises de Tercer Mundo esto no es una discusión especulativa sino que es una discusión de importancia vital y práctica en la conformación de nuestros destinos. Además: una orientación de método que escojamos, como todas las visiones metodológicas, su auténtica realización tiene sentido definitivo solo después de la existencia de muchísimas investigaciones concretas que den cuenta de la verdad o la inconveniencia o la insuficiencia de la visión metodológica. En estos paises esta colección de investigaciones deben hacerse pero inevitablemente tendrán que ser hechas al mismo tiempo que la adopción de políticas prácticas precisas en los desarrollos concretos de nuestros paises. Esto es así puesto que no existe tiempo para poder libremente probar en abstracto o en experimentos controlados concretos la justeza de una metodología sea cual sea.

En cuanto a las matemáticas y su enseñanza en América Latina, y para concluir este ensayo, ya no es posible condenar sus crisis de largos años a la inercia. Sería irresponsable. Es necesario enfrentar esa crisis con suma rapidez y tomar las decisiones políticas necesarias. En mi opinión ya existen condiciones intelectuales, sociales y de oportunidad histórica para que se tenga éxito en su ejecución. Por supuesto, esto no sería más que una etapa en un camino que siempre volverá sobre sí mismo para avanzar hacia nuevos horizontes. Pero es esencial empujar en esa dirección cuanto antes.

NOTAS

1-Vessuri, Hebe (y otros). LA CIENCIA PERIFÉRICA. Caracas: Monte Avila Editores, 1983. P.11.

2-Romero, José Luis. SITUACIONES E IDEOLOGIAS EN LATINOAMERICA. Buenos Aires: Editorial Sudamericana, 1986. P.42.

3- Para elementos metodológicos sobre las condiciones de la ciencia y la tecnología en países periféricos puede consultarse Ruiz, Angel. "Indagación reflexiva para una política científico-tecnológica del desarrollo", Revista DESARROLLO N.1, Noviembre 1984, San José, Costa Rica.

4- La noción de paradigma racionalista se puede ver en Ruiz, Angel. "Implicaciones teórico-filosóficas del teorema de Gödel en el paradigma racionalista de la reflexión sobre las matemáticas", REVISTA DE FILOSOFIA de la Universidad de Costa Rica, XXIII (58), 183-194, 1985.

5- Cfr. Hahn, R. "Nuevas tendencias en historia social de la ciencia" en La fuente; Saldaña, J.J. Citado en la Bibliografía.

BIBLIOGRAFIA DE CONSULTA ADICIONAL

Agassi, I. TOWARDS AN HISTORIOGRAPHY OF SCIENCE, HISTORY AND THEORY: STUDIES IN THE PHILOSOPHY OF HISTORY. The Hague: North Holland, 1963.

Kuhn, Thomas. THE STRUCTURE OF SCIENTIFIC REVOLUTIONS. Chicago: The Chicago University Press, 1962.

Kuhn, Thomas, en "The relations between History and the History of Science" en THE ESSENTIAL TENSION: SELECTED STUDIES IN SCIENTIFIC TRADITION AND CHANGE, Chicago: The University of Chicago Press.

Lakatos,Imre. MATEMATICAS, CIENCIA Y EPISTEMOLOGIA. Madrid: Alianza, 1981.

Lakatos, Imre. HISTORIA DE LAS CIENCIAS Y SUS RECONSTRUCCIONES RACIONALES. Madrid: Tecnos, 1971.

Lakatos, I. THE METHODOLOGY OF SCIENTIFIC RESEARCH PROGRAMS. Cambridge: Howard Ferting, 1978.

Quio Renzong: "Sobre la tensión entre internalismo y externalismo en la historia de la ciencia", que aparece en Lafuente, A.,Saldaña, JJ. (editores), HISTORIA DE LAS CIENCIAS. NUEVAS TENDENCIAS. Madrid: CSIC, 1987.

INDICE DE AUTORES

MEMORIAS

Tercer Congreso Nacional de Matemáticas.

Ciudad Universitaria RODRIGO FACIO

15-19 Octubre San José, Costa Rica.

Durante los días del 15 al 19 de octubre de 1990 se lleva a cabo el Tercer Congreso Nacional de Matemáticas en la Ciudad Universitaria "Rodrigo Facio" de la Universidad de Costa Rica. Con este congreso se le da continuidad a los dos primeros congresos nacionales de matemáticas realizados en 1983 y 1985 respectivamente.

Representa una magnífica ocasión para reunir a la comunidad matemática nacional y para conocer los trabajos que se han realizado, así como para discutir los problemas existentes y trazar las perspectivas de desarrollo de esta disciplina.

Patrocinadores: UNA - ITCR - UCR -
Colegio de Licenciados y Profesores-
Asociación Costarricense de Matemáticas-
Asociación Costarricense de Historia y Filosofía de la Ciencia-
MEP - Ministerio de Ciencia y Tecnología - CONICIT.

Impreso en el Departamento de Publicaciones
Universidad Nacional