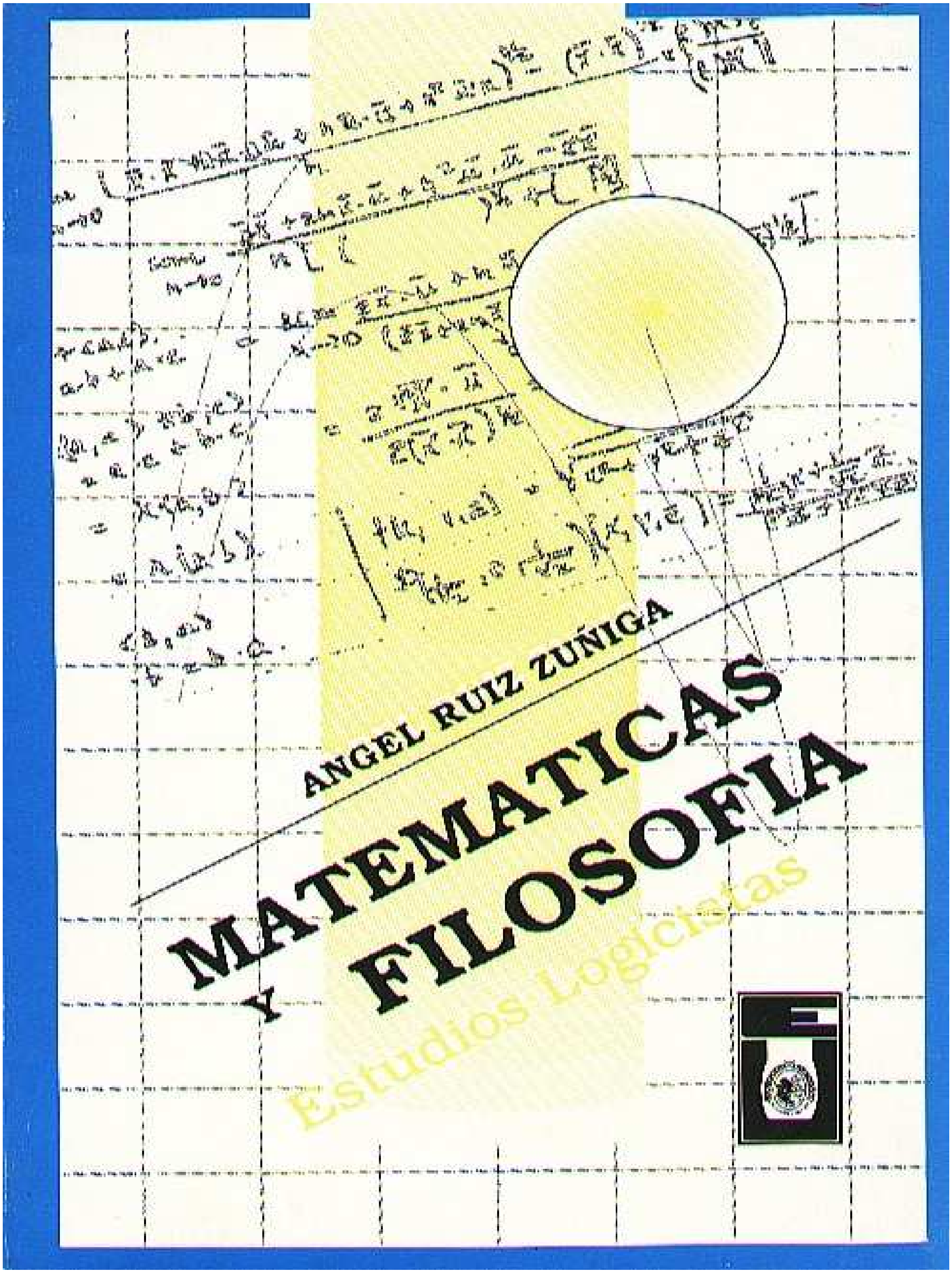


Editorial de la Universidad de Costa Rica
1990

Índice

PREFACIO

Conviene que el lector se prepare para empezar a leer este libro como lo haría si fuese a tener una discusión acalorada: tranquilo, para no perder la compostura, pero muy concentrado para no perderse ningún matiz de la argumentación. El autor, graduado en matemáticas con un postgrado en filosofía, profesor de matemáticas en la Universidad de Costa Rica y presidente de la Asociación Costarricense de Historia y Filosofía de la Ciencia, esboza aquí una posición en filosofía de las matemáticas que no es corriente ni fácil de seguir.

¿Qué son las matemáticas? Una sencilla respuesta: lo que hacen los matemáticos. (También, por supuesto, lo que hacemos los no matemáticos cuando tratamos de encontrar procedimientos para contar, medir, etc.) Ahora bien: ¿Qué hacen los matemáticos? Una primera manera de ver su actividad sería como sigue: los matemáticos descubren entidades matemáticas (por ejemplo, los números), y las propiedades de esas entidades, de igual manera que un científico natural encuentra especies de seres vivos, o genes que corresponden a características de seres humanos, o compuestos químicos, o estrellas lejanas. Los seres descubiertos, y sus propiedades, no dependen del matemático: el número 3 es primo e impar aunque uno no quiera. Hasta aquí todo bien, y muchos sostienen esta posición sin ver problemas en ella. Pero, ¿qué ocurriría si un matemático nos dijera que acaba de descubrir el último número que existe, más allá del cual no hay ninguno? ¿Le darían un premio por su esfuerzo? Otro ejemplo: ¿saldría un matemático a la prensa a declarar que el número 3, contra todas las expectativas, ahora se está comportando como un número par? ¿O que se ha descubierto que a temperaturas muy bajas 2+2=5? Obviamente no. A pesar de que en cierto modo hacer matemáticas es descubrir cosas cuyas propiedades no dependen de la voluntad de uno, parece evidente que términos como “descubrir”, “entidad”, “propiedad” y “existir” no tienen en las matemáticas el mismo significado que en biología o química. Cual sea la diferencia es una de las tareas inconclusas en filosofía de las matemáticas.

¿Será entonces que las matemáticas son simplemente un juego de combinación de símbolos en el papel, siguiendo ciertas reglas? Esta posición tiene sus ventajas. Explica, por ejemplo, que el matemático no pueda descubrir un último número: dada las reglas con que usamos el término “número”, esto no es posible. Esta opinión sería muy atractiva si no fuera porque las matemáticas son cosa seria. De un cálculo correcto pueden depender cosas importantes, no porque el juego así lo determine, sino porque topamos contra los hechos. Supongamos -y es algo que se me ocurrió- que uno contrata a alguien para que le enzacate el patio trasero. El precio se fija por metro cuadrado, y el jardinero empieza a trabajar. Cuando al terminar me dice lo que cuesta el trabajo lo encuentro muy por encima de mi primer cálculo aproximado. Después de mucho discutir me doy cuenta de que el jardinero ha calculado los metros cuadrados contando superficies de cuatro lados con la cuarta parte de un metro lineal por lado. “Así suman 1” -me dice. ¿Diríamos en este caso que el jardinero juega otro juego? ¿O más bien que no sabe las relaciones entre dimensiones? Otra consideración: el desarrollo de la ciencia y de la tecnología ha exigido muchas veces, y ha tenido que esperar, desarrollos en las matemáticas. La gran importancia que el "descubrimiento" de la raíz cuadrada de menos uno tuvo para el desarrollo de las comunicaciones es asunto conocido. No diríamos que las ciencias, ni menos aún la tecnología, son simples juegos. ¿Lo diríamos entonces de las matemáticas, cuando éstas son presupuesto para las ciencias?

La posición de Angel Ruiz en cuanto a la naturaleza de las matemáticas consta, a mi entender, de dos partes:

(1) En las matemáticas interviene el objeto, el sujeto y la sociedad. Distintas posiciones en filosofía de las matemáticas han enfatizado uno u otro punto de estos elementos, pero solo si se tienen en cuenta los tres nos hacemos una idea de cómo operan.

(2) No basta con tener en cuenta los distintos aspectos de estos tres elementos: el papel de cada uno varía según épocas históricas, según tipos de problemas, según partes de las matemáticas. En otras palabras se trata de una relación compleja y variable. Si no fuera porque el término ha sido objeto de toda clase de abusos diríamos que la relación es dialéctica.

Uno de los resultados de la posición enunciada es que la relación entre las matemáticas y los objetos físicos es más remota que entre las nociones de otras ciencias y sus respectivos referentes. Tal vez algo semejante tenían en mente los escolásticos cuando colocaron a las matemáticas en el segundo grado de abstracción, después de lo que llamaron física y que en realidad incluía todas las ciencias empíricas. Lástima que esa posición escolástica degeneraba en una variante del psicologismo, y que por tanto en último término su verificación o refutación se hizo dependiente del avance de una ciencia empírica.

Algunos detalles de la posición de Angel Ruiz los encontrará el lector en las páginas que siguen. Otros aun esperan respuesta, que en parte vendrá de la discusión subsiguiente. Para volver al comienzo de estas líneas, ojalá la discusión a la que llama la publicación de esta obra sea desinteresada y atenta.

Dr. Luis A. Camacho
Universidad de Costa Rica, agosto 1990

PREFACIO

Una filosofía para nuestro desarrollo

Mi parecer ha sido, conforme lo han reafirmado mis investigaciones, que los filósofos de hoy son los científicos pensantes, tanto en la teoría cuanto en la práctica: en la busca del saber y en la aplicación de lo encontrado. El desprecio a las cuestiones filosóficas que manifiestan algunos científicos, sea de lo que en filosofía se refiere a la naturaleza o bien a la sociedad, es cosa más bien de la baja cultura que caracteriza desde hace algún tiempo al medio intelectual. Precisamente la necesidad de los estudios interdisciplinarios y de los trabajos en grupo, ha vuelto a reunir lo que en ciertos momentos se hizo en períodos históricos memorables: los hombres y mujeres que investigaron lo más globalmente posible, a veces integrando en sí mismos cuestiones tan aparentemente distintas como el arte y la ciencia. Ejemplo de ello lo encontramos en los más antiguos filósofos, quienes además de investigar la naturaleza, es escribían poesía, estudiaban y componían música, legislaban -sin ser la clase de "político" desarticulado de nuestros lares- y como ciudadanos libres se interesaban por la cosa pública. El famoso Tales de Mileto, quien fue matemático, físico, legislador y ontólogo, hasta se atrevió a comerciar, al parecer con éxito. El interés de la Escuela pitagórica fue también múltiple, lo mismo que el de la primera Universidad de Occidente: la Academia de Platón, en que el único requisito de admisión era saber geometría. Puesto que los griegos aprendían gramática, música, gimnasia, historia y danza durante los años de su "primaria" y "secundaria", es de suponer que los estudios matemáticos no eran su fuerte, ya que el mismo Platón propone la primera reforma de programa, insistiendo en que los niños pueden aprender matemáticas desde muy pequeños, haciendo cálculos en sus juegos y creciendo progresivamente en ellos. Esto se percibe claramente en Leonardo da Vinci, Galileo Galilei, Descartes, Lebniz y otros. Hasta Isaac Newton aproximadamente, los científicos se honraban en cuanto "filósofos de la naturaleza".

Los padres de la Edad Contemporánea son aquellos que reintroducen el concepto del devenir en todos los campos de los de los saberes básicos: Goethe, Lyell, Hegel, Darwin, Wallace, Marx. Llegados nuestros tiempos, los pioneros de la Era Atómica filosofaban como lo hicieron Einstein, Plank, Heisenberg, Russell, Whitehead, Conrad Lorenz y muchos otros, hasta nuestros días en que los especialismos comienzan a integrarse y la necesidad de filosofar es cada vez más perentoria, hasta para los políticos, que comienzan a sentir que sin estudios éticos no subsistirán. Por tanto, renuevo mi parecer acerca de que los filósofos de nuestros tiempos son los científicos pensantes, lo mismo que no se puede construir filosofía en cualquier escuela universitaria sin estudios científicos y artísticos, y sin por lo menos mantener un buen concepto de la gimnasia.

Uno de los méritos de esta obra de Angel Ruiz se encuentra en que se trata de un libro que ha sido concebido filosóficamente incita a pensar. En acuerdo algunas veces y en desacuerdo otras -cosa de lo más saludable en la historia del pensamiento-, los lectores podrían, además, enterarse de lo que han sido las principales corrientes de pensamiento matemático, en una apasionada discusión con ellas o contra ellas, en que el autor desde un inicio delinea su posición al respecto. Y así como nos resultan familiares Demócrito, Platón, Euclides, Aristóteles, Arquímedes, Tomás de Aquino y otros ya citados, hemos de familiarizarnos con los de Boole, Frege, Wittegenstein, Russell, Lakatos, Gödel y aquellos que principalmente estudia Angel Ruiz, para defender su propia tesis con la ayuda de las argumentaciones de ellos o bien en su contra.

Sin pretender etiquetar -porque es cosa deleznable, digna de mentalidades fanáticas o dogmáticas- y más bien por razones metodológicas, creo que Angel Ruiz se balancea entre pragmatismo y funcionalismo y que su tesis acerca de la "correspondencia" obedece a un modelo físico que Ruiz conduce a las matemáticas. Esto lo digo sin afán peyorativo, porque estimo esencial el pleno respeto a las diversas posiciones y métodos, tanto en ciencia como en arte y en general en todos los quehaceres humanos constructivos. Sé que puedo equivocarme, pero como lo he dicho en diversas ocasiones, aunque *errare humanum est* no me gusta insistir en este errar que conduce al conformismo y a justificar errores a veces fatales. Así que el amable lector, que posiblemente sea el mejor juez, tendrá un criterio al respecto seguramente mejor fundado.

Las referencias de Angel Ruiz de un autor a otro, a veces me han parecido *sui generis,* como cuando se refiere a un Frege platonizante que yo considero más bien hegelianizante, pero como en lo anterior, esto es cuestión controversial de lo más interesante y lo que hace del libro una obra de grandes alcances. En aquello creo que la opinión de Ruiz es contraria, aunque no estoy en ello muy claro y me da gusto decirlo, porque el pensamiento cuando se da no es necesariamente claro y distinto, y es lo que nos hace libres y propensos a mejorar nuestra conciencia por nuestra imaginación.

Sin tratar de establecer un paralogismo al respecto, creo difícil de aceptar la idea de "intuición" de Angel Ruiz, pero esto puede obedecer a un defecto de parte mía, porque siempre me ha parecido esto de las "intuiciones" cosa todavía por esclarecerse, igual que ocurría hace algún tiempo con el famoso "instinto" de los animales, que nos era más que la palabra con que ocultábamos nuestra ignorancia en lo que se refiere a la conducta animal. Puede ser que obedezca a un cambio en la noción de "intuición" que usa Ruiz, porque no la encuentro similar ni a la John Locke ni a la de Kant ni a la de otros, aunque parta de las ideas de Gödel. Lo bueno de este libro resulta en que no es sólo controversial en estos sentidos, sino en otros tantos, como la interpretación de Ruiz acerca de Piaget. Yo diría al respecto que el sujeto necesita actuar para vivir y las acciones generan cambios en sus estructuras mentales; estos cambios ayudan a la actuación y se produce así el movimiento dialéctico. Sin embargo, pienso que esto no se da sucesiva sino simultáneamente. También en cuanto a esto creo que el análisis fisiológico puede ser todo lo físico que se quiera, pero que la identidad entre el objeto epistemológico y el físico y el fisiológico es por ahora cuestión de hipótesis, además de que la relación al fin podría resultar no ser analítica, sino según otro modo.

Estimo que reiniciamos con este libro la fructífera polémica del construccionismo, el operacionalismo, el organicismo, el logicismo, el realismo, el idealismo, etc. y hasta una revaloración controversial del pensamiento de Popper que permite ejercitar el pensamiento. En nuestro medio cultural raquítico, esta polémica es tan necesaria como el dinero que nos hace falta producir para desarrollarnos autóctonamente y en concordancia con el desarrollo mundial. Precisamente por no existir en nuestro país todavía una buena manera de enseñar música, biología, matemáticas, castellano, filosofía y gimnasia desde el Kindergarten, nuestra educación más bien ha contribuido a nuestra baja cultura. La investigación, -sea matemático- filosófica o de los tantos géneros que existen, es en tal sentido necesaria de toda necesidad y nosotros somos capaces de crearla, como lentamente lo hemos venido demostrando desde hace buen tiempo, sin que nosotros mismos no hayamos querido percatarnos de ello, paradójicamente. Quizá por el materialismo de los vendedores y compradores de lujos innecesarios y chucherías inútiles, que sirven solo para entontecernos o destruir lo bueno de este mundo.

Por ultimo, la afirmación de Angel Ruiz acerca de que "*los límites de los sistemas formales son los límites de lo racional en el conocimiento, es el reclamo de la vida empírica, de la vida*", creo que abre paso al irracionalismo en matemáticas, por esa idea de "intuición" propia de Ruiz. Pero como siempre he intentado evitar los prejuicios y las profecías, me parece que se trata de un intuicionismo empirista heterodoxo que podría desarrollarse. En todo caso, me atrevo a valorar este magnífico libro digno de estudiarse, lector de libre pensamiento.

Fernando A. Leal.
4 de setiembre de 1990

INTRODUCCIÓN GENERAL

A la hora de tratar de escribir una introducción a este libro había pensado en intentar explicar cómo cada capítulo se conecta con los otros de manera teórica y siguiendo cierta secuencia histórica. Ahora que la escribo se me ocurre que lo más adecuado es no desentrañar esta red de conexiones teóricas, sino más bien hacer manifiesta una idea del tipo de tejido intelectual con el que está hecho este libro. O sea, intentar hacer un bosquejo del marco de ideas y opiniones, percepciones e intuiciones que se encuentran en la base del análisis realizado. Y pienso esto porque se bien que este marco teórico con el que usted, estimado lector, pronto entrará en contacto, no es aceptado ni siquiera medianamente en la comunidad no sólo de filósofos profesionales sino en la de matemáticos y educadores. Se trata de una interpretación sobre la naturaleza de las matemáticas poco ortodoxa. Estas frases constituyen -sin duda- una primera advertencia al lector. Por otra parte, en este libro y en esta introducción no pretendo “demostrar” mi visión sobre las matemáticas. Me contentaré con sugerir ideas, opiniones y digamos tomas de posición. Estas se van a hacer manifiestas a lo largo del análisis de los temas propuestos. La pintura que se plantea busca ser apenas una visión diferente a partir de la cual pueda intentarse una reflexión innovadora sobre las matemáticas. Se trata en lo esencial de solamente un punto de partida para la investigación sistemática y el análisis detallado posteriores.

Este es un libro de filosofía, y como tal no es posible eliminar el papel de la opinión subjetiva y personal. Y aquí vamos a hacer una disgresión. Existe en nuestro tiempo cierta “manía” a pensar que la filosofía puede sufrir los tratamientos demostrativos que se afirma se dan con la lógica y la ciencia en general. Y es que la opinión -por más fundamentada que esté- nunca deja de ser opinión. Y no por eso deja de ser valiosa. La filosofía, la interpretación epistemológica y ontológica nunca pueden estar liberadas de la opinión y del mundo subjetivo y la visión personal que el pensador le confiere. Y -más que eso- cúantas veces la opinión y la idea no demostrada constituyen precisamente el elemento más valioso en el avance cognitivo y en el decurso ascendente de la creatividad intelectual. Cuántas veces es la interpretación subjetiva y, a veces, extraña e intuitiva, la que ha abierto los derroteros al conocimiento “positivo”. Esto me recuerda una discusión reciente en el V Congreso Centroamericano de Filosofía en donde un par de filósofos jóvenes trataban de descubrir un criterio para decidir en torno a la conveniencia de dos teorías científicas. La idea esencial que se afirmaba era que la mejor teoría sería la que explicase por lo menos lo mismo que la otra pero tuviera menos carga metafísica. Desde el punto de vista lógico, el criterio sonaba muy bien, pero la realidad siempre trasciende la lógica. El caso común en el conocimiento es más difícil, no es el mencionado sino otro: la existencia de teorías con más carga “metafísica” pero mayor rango explicativo.

La “metafísica” o en nuestros términos la carga de opinión (aunque no descabellada ni implausible) más que considerarse objeto para el desprecio debería juzgarse en relación con parámetros diferentes. Si esto es así -aunque en diferente grados- con las ciencias mismas, pues, entonces, con mayor razón se aplica a la filosofía. La realidad es que el conocimiento de una u otra manera es una combinación compleja entre lo demostrable y lo no demostrable (de acuerdo a diferentes criterios), lo fundamentado y lo no fundamentado, lo que es opinión y lo que no es opinión. Y no se me mal-interprete, es obvio que sólo de meras opiniones no se puede armar el conocimiento. Lo que quiero es sobre todo hacer una llamada de atención en torno a la naturaleza del conocimiento y a la actitud metodológica con que debemos juzgar su evolución. Es entender que el conocimiento es un fenómeno histórico, social e individual, en donde las ideas no se construyen al margen de la subjetividad individual. Cuán valioso resulta en estos tiempos ese sano relativismo crítico en torno a la certeza y a la verdad infalible en el pensamiento científico y filosófico.

La realidad es que en la historia reciente de las ideas filosóficas se ha vuelto a incurrir en lo que siempre se dijo criticar de la filosofía anterior: el dogmatismo y la rigidez en el pensamiento. Se ha llegado a pensar que el conocimiento y el pensamiento pueden llegar a eliminar por completo la “contaminación” de lo interpretativo y subjetivo. Las viejas ideas leibnizianas del lenguaje universal y la máquina de pensamientos para erradicar la polémica subjetiva y zanjar la discusión “mecánicamente” han sido en nuestra época un dogma en buena parte de la filosofía. Es obvio que este tipo de premisas están en la base de la “arrogancia” del profesor que se niega a volver la vista ante lo que en su marco estrecho no está demostrado.

Pero lo anterior nos conduce también a otro de los grandes vicios de los filósofos contemporáneos y especialmente de los profesores de filosofía. Y es que existe una desproporcionada tendencia a olvidarse de que en la aventura del conocimiento las ideas son lo básico. Cuántas veces la preocupación recae en la estructura formal de lo escrito, en la “suficiencia” o no de las citas bibliográficas y de los autores estudiados, o en si la noción usada en la página 16 no es la misma que la de la página 48 o peor aún resulta -a juicio del profesor- contradictoria. La actividad intelectual -de esta forma- se constriñe en los detalles, y las ideas polémicas o novedosas no reciben la menor atención. Es algo así como si el foco de atención se ha desvirtuado hacia una dirección equivocada y estéril. El debate fundamentador sobre las ideas abre paso a la mini-polémica sobre si Quine o Russell dijeron exactamente eso o si la cita está mal tomada, o sobre la ausencia de tal o cual referencia, etc. Me decía hace poco tiempo un excelente filósofo costarricense que han habido apenas unas cuantas ideas extraordinarias en la historia del pensamiento, pero que -en realidad- alrededor de ellas el pensamiento humano se ha ido aglutinando. Es completamente cierto, las grandes ideas no han sido relativamente tantas. Y la búsqueda o creación de este tipo de ideas es precisamente la esencia de la creación intelectual. Y no se trata -por supuesto- de un retorno a Platón. Las ideas son siempre el resultado de una combinación de muchos factores históricos (donde la actitud de la comunidad intelectual es una componente sumamente importante), pero siempre creación humana.

No es extraño encontrar, por otro lado, que la subestimación de la opinión y la interpretación originales esté acompañada de esta sobreestimación de los aspectos menos trascendentes del pensamiento. Ambos se han convertido en un extraordinario vicio intelectual que ha hecho que muchos buenos cerebros por su propia voluntad se hayan rebelado -desafortunadamente- contra la misma creatividad y contra la inteligencia.

Este libro integra varios pequeños estudios sobre el logicismo y la filosofía de las matemáticas. A partir del estudio de algunos textos básicos de Frege y Russell se hace un análisis de la filosofía del logicismo y no de los aspectos más técnicos asociados con éste. A partir del estudio del logicismo se filtran varias ideas en torno al problema de los fundamentos de la matemáticas y esencialmente sobre la naturaleza de las matemáticas. Para dejar claro desde un principio el tipo de visión que está -globalmente- detrás del análisis he considerado apropiado -ya lo decíamos arriba- hacer una pequeña síntesis sobre la misma en esta introducción.

Desde la antigüedad griega hasta nuestros días la visión racionalista sobre las matemáticas, es decir, aquella en la que se afirma el rol predominante del sujeto, contrapuesto al del objeto epistémico (ya sea este rol vinculado a un énfasis en la lógica, la intuición o la sintaxis) ha sido una constante en la conciencia occidental. No es entonces de extrañar que buena parte de las ideas que todavía se poseen a cerca de la naturaleza de las matemáticas, así como de su desarrollo y enseñanza, estén condicionados por el racionalismo y, en particular, por otra parte, lo que ha sido -en mi opinión- otro paradigma que también se ha asociado al clásico racionalismo, por un esquema axiomático formalizante (es decir, que sobrestima la dimensión de la axiomática y de lo formal en las matemáticas).

Por otra parte, ¿cuál ha sido la visión sobre las matemáticas dentro de las filas del Empirismo? Tal vez esto sea importante mencionarlo aquí. El Empirismo, si se quiere, ha sido el gran triunfador en el terreno de las llamadas ciencias naturales. La experiencia empírica se aceptó claramente en las componentes de las ciencias desde por lo menos el siglo XVIII; sin embargo, en las matemáticas la cosa no estaba tan clara. La visión filosófica de -por ejemplo- Mill en el siglo pasado afirmaba a las proposiciones de las matemáticas como simples generalizaciones inductivas. Sus verdades poseían en cada situación un referente físico casi inmediato (todo dentro del contexto de un empirismo duro, que hacía de la mente apenas cera donde el objeto empírico imprimía sus huellas). Las críticas al racionalismo no se dejaron esperar en esta visión tan simplista, obligando al empirismo a buscar una mejor interpretación de la naturaleza de las matemáticas. Gracias al influjo de Wittgenstein y del Círculo de Viena, (así como a la visión de un Russell tardío), el Empirismo del siglo XX decretó que las matemáticas no se referían al mundo.

La evidencia en las matemáticas era para el Neo-positivismo evidencia sintáctica. En esta visión, las proposiciones de la matemática equivalen a las del tipo: "tres pies hacen una yarda". Con ella se eliminaba de las matemáticas -en nuestra opinión- la referencia a la verdad, o a la ontología, las reglas y objetos de las matemáticas aparecen entonces absolutamente convencionales.

Este es -de manera esquemática- el panorama intelectual que ha predominado en la reflexión más generalizada sobre las matemáticas. Tenemos -por un lado- un dinámico racionalismo que encuentra como su oposición epistemológica a un inductivismo simplista o, por otra parte, un convencionalismo que libra de contenido fáctico a las matemáticas. Se trata, entonces, de un marco intelectual en donde no aparece adecuadamente -siempre en nuestra opinión- una esencial referencia empírica intuitiva y, al mismo tiempo, un activo papel del sujeto epistémico. Opino que los intentos empiristas, tanto en el sentido clásico de Mill o de los Neo-positivistas en el sentido por ejemplo de Ayer, no son verdaderas alternativas al racionalismo en la filosofía de las matemáticas. Yo afirmo que es necesario buscar una síntesis teórica, un nuevo paradigma en la comprensión más profunda de la naturaleza de las matemáticas, capaz de orientar en los próximos años el desarrollo de las matemáticas y la comprensión del sentido de la enseñanza de las mismas dentro de ese desarrollo. Creo también que esta es una tarea que está planteada de manera histórica.

Con una nueva mentalidad filosófica, los aportes de Tales y Pitágoras, por ejemplo, tal vez se podrían valorizar mejor en una relación estrecha y espacial, con la que fue el origen, si se quiere, de la Ciencia Occidental, que supuso la actitud naturalista jónica. La obra de Euclides, por ejemplo, se podría analizar especialmente como una sistematización importante de los resultados de muchísimos matemáticos previos. De hecho, de Tales a Euclides se dio un período muy rico en aproximaciones y métodos matemáticos. Baste mencionar a los Pitagóricos, a Anaxágoras, a Hipias, a Filolao, a Arquitas, a Xenón, a Demócrito, a Teodoro de Cirene, a Eudoxo, etc. Es mi opinión que los problemas clásicos de la matemática griega fueron planteados en esta época. *Los Elementos* de Euclides podrían ser comprendidos como lo que en realidad fueron: un texto introductorio de matemáticas elementales que se basaba en los trabajos previos. Sería entonces muy razonable sugerir que muchos de los resultados matemáticos codificados por Euclides fueron obtenidos a través de métodos heurísticos, intuitivos y aproximativos, aunque, sin duda, la participación de la deducción y la edificación axiomática pudo ser una dimensión también importante. Pero bien, si la tarea de Euclides la podemos relativizar y caracterizar como esencialmente de formalización y sistematización, aunque hubiere sido magistral, esta obra no debería verse tanto como un reflejo iluminador de la naturaleza de la construcción matemática como sobre todo de su expresión. Por otra parte, también debería poderse en esta nueva mentalidad filosófica hacer una balance de la influencia que Platón tuvo en en las matemáticas griegas y especialmente en el mismo Euclides (indirectamente), y entonces de los muchos efectos “distorsionados” que este pudo suponer en la obra matemática y especialmente en su comprensión. Hay que decir, sin embargo, que en el análisis de la antigüedad siempre se debe tomar una precaución, y es que en ausencia de mayores elementos de información siempre existe un énfasis mayor en la interpretación y en la opinión. No obstante, creo que existe suficiente evidencia para afirmar que el modelo axiomático de los *Elementos* no puede considerarse un modelo ni de la construcción matemática griega, ni de las matemáticas en general. Pero ha sido tomado a lo largo de muchos siglos como precisamente eso: modelo de la construcción matemática. Y por eso cuando buscamos en siglos más recientes, incluso en el siglo XX, raíces del éxito y la dominación del racionalismo en la filosofía de las matemáticas, no podemos dejar de tomar en cuenta la poderosa influencia que fue este libro de Euclides y, sobre todo, una interpretación de lo que significaba este libro de Euclides.

El caso Arquímedes es, sin embargo, un caso tremendamente interesante. Por una parte, descubrimos en Arquímedes un número muy elevado de resultados físicos y técnicos, no propiamente abstracciones puras en matemáticas. Los trabajos de Arquímedes tenían una estrecha vinculación con problemas clásicos de Física. Sin embargo hay nuevos elementos para poder leer en la historia griega características o dimensiones de la construcción matemática. Uno de ellos tal vez se puede apreciar a partir de lo que es posible que constituya el testimonio más importante sobre la naturaleza y métodos de la construcción matemática en la antigüedad. Me refiero a un palimsesto escrito por Arquímedes llamado “El Método” y descubierto en Constantinopla en el año 1906. Es precisamente en este escrito en donde Arquímedes nos revela su método mecánico e intuitivo con el que aborda la construcción de sus resultados. No era la fría, metálica y abstracta deducción la que generaba la base de la construcción de sus resultados matemáticos. La forma axiomática de sus resultados hacía referencia fundamentalmente a la expresión, no a la construcción. La matemática, separada del mundo, aunque en buena parte de la filosofía Griega supuesta codificadora de las leyes del Mundo, aparecía en Arquímedes tremendamente ligada a la Física, al mundo de lo empírico.

Esto es un punto de partida para poder interpretar de otra manera este período. Pero podríamos irnos a otro período de la historia de las matemáticas. La historia del Cálculo, que va a ser sin duda el primer motor de la matemática moderna, nos revela la importancia de la Física y la intuición en la gestación de los conceptos matemáticos. ¿Acaso el famoso “cálculo de fluxiones” de Newton no está directamente ligado a la cinemática? Pero esto que es obvio debe completarse sin embargo con algo más: El rol de las nociones abstractas en la construcción matemática. La fuente más inmediata anterior para el trabajo de Newton fue sin duda la geometría analítica de Descartes, que no es más que la conjunción de la geometría griega con los resultados algebraicos disponibles en el siglo XVII. Las nociones algebraicas menos ligadas a los intuitivo y material intervinieron importantemente en una síntesis intelectual dinamizante como la geometría analítica, que a la vez sería un punto de partida central para la creación del Cálculo. Es decir, las dimensiones más abstractas de las matemáticas encuentran su papel siempre en relación con el mundo físico y social. Se trata de una combinación diversa, compleja y distinta de elementos intuitivos y abstracto-lógicos que generan síntesis teóricas, en las que a veces predominan unos elementos y a veces otros. Pero que siempre existe una “dialéctica” de ambas dimensiones.

Las matemáticas del siglo XIX con su abstracción y con las necesidades del rigor lógico empujaron hacia el apuntalamiento del racionalismo. El logicismo y el formalismo son expresión de la matemática nueva del siglo pasado. Sin duda podemos decir que hasta la década de los años 30 en el presente siglo no se habían dado importantes crisis o dificultades en esta aproximación epistemológica. Sin embargo, en la década de los 30 Gödel publicó un famoso artículo llamado: “Sobre sentencias formalmente indecidibles de *Principia Mathemática* y sistemas afines”. Este resultado -como señalaremos en este libro- tiene una gigantesca cantidad de implicaciones con relación a la epistemología y también a la ontología sobre las matemáticas. También posee grandes implicaciones con relación a los sistemas formales en general y a los límites en particular de los formalismos en matemáticas y en el conocimiento. Los resultados de Gödel implican que cualquier formalismo suficientemente fuerte para expresar la teoría elemental de números es incompleto. La conclusión es inevitable: las matemáticas no pueden ser formalizadas de manera absoluta y además, lo cual es un corolario del trabajo de Gödel: en las partes formalizables, no es posible garantizar la consistencia. Este resultado sólo puede significar que todas las aspiraciones de fundamentar la matemática por la vía de los sistemas formales quedaban semi-destruidas. Y este es precisamente el tipo de fundamentación que se había intentado desde finales del siglo pasado. El intento de la fundamentación de la matemática entraba entonces en crisis.

Esto resultaba un duro golpe también para el racionalismo, pero, sin embargo, no implicó en la conciencia del pensamiento occidental una renovación de las ideas dominantes sobre la naturaleza de las matemáticas. La realidad es que las consecuencias de los resultados gödelianos no sólo no fueron sacados completamente, sino que tampoco lograron ascender mucho en la comunidad intelectual y filosófica de nuestro siglo.

El Empirismo Lógico que había adoptado una reducción sintáctica de las matemáticas no pudo suponer una respuesta metodológica verdaderamente alternativa al racionalismo, y ser capaz de integrar los nuevos resultados. A pesar de esto el Empirismo Lógico ha sido una corriente filosófica bastante influyente en el devenir intelectual de nuestro siglo. A pesar de Gödel, la filosofía de las matemáticas ha seguido dominada por ideologías apriorísticas, axiomáticas, formalistas, racionalistas o convencionalistas. Los resultados de Gödel eran decisivos, no sólo se destruían las vías particulares de la fundamentación de la matemática que habían existido hasta entonces, sino que se cuestionaba cualquier fundamentación basada en el poder casi absoluto de los sistemas formales. Debían de haber conducido a una auténtica revolución conceptual. Es decir, a una renovación de las categorías usadas anteriormente en la comprensión en las matemáticas. En este sentido, las categorías y distinciones del tipo de analítico versus sintético, a priori versus a posteriori, inductivo versus deductivo, deberían haber sido replanteadas; es más, en el territorio epistemológico, la construcción entre empirismo y racionalismo debería haber dado a luz una nueva interpretación dialéctica entre ambas corrientes epistemológicas. Sin embargo, la mayoría de matemáticos y filósofos y también educadores, se negaron a soltar la tradicional visión sobre las matemáticas que partía en particular de su carácter formal, absoluto e infalible.

En algunas ocasiones he mencionado la relación entre los resultados de Gödel y una crisis del racionalismo, y he encontrado que los filósofos buscan siempre encontrar salidas al asunto y se niegan a admitir el problema: se me dice que no se ha demostrado la crisis del racionalismo, o que en el intuicionismo podemos encontrar gran éxito despúes de Gödel, o que en la metamatemática existen nuevas vías de lograr la fundamentación "adecuada" del conocimiento matemático. Se me dice: usted no ha demostrado nada, usted ha hecho un incorrecto análisis de los filósofos para concluir antojadizamente lo claramente falso. Es natural. Cuando se leen los resultados de Gödel con otra mirada las conclusiones resultan diferentes. Nadie podría afirmar lo que yo he afirmado desde las tiendas de la filosofía tradicional neopositivista, o racionalista (y dentro del abanico de posiciones intermedias que aparecen entre ellas). La interpretación que hemos delineado se aparta de las visiones tradicionales y busca una conceptualización diferente de la naturaleza de las matemáticas. Busca impulsar un programa de investigación en la historia y la filosofía de las matemáticas. A manera de sistematización de una serie de ideas -y por supuesto de manera esquemática- me voy a permitir indicar una colección de ideas metodológicas acerca de una nueva visión posible sobre las matemáticas. Si usted, estimado lector, encuentra que comparte -total o parcialmente- algunas de las ideas que aparecen a continuación, siéntase preocupado, porque si luego se atreve a decirlo en voz alta puede que no tarde en encontrar quien califique sus ideas de "locura", "loquera", "disparate", etc. Esta es una segunda advertencia.

Yo afirmo que las matemáticas se pueden entender a partir de una epistemología que enfatice una relación mútuamente condicionante entre el objeto y el sujeto epistémico, al mismo tiempo que una ontología que establezca a las matemáticas no como a priori en el sentido clásico (más aún, creo que la distinción es insuficiente e inapropiada para dar cuenta de las matemáticas) y considero que estas se refieren al mundo de igual manera que otras ciencias naturales, aunque no de la misma forma. Creo que una combinación epistemológica y ontológica de esta naturaleza crea una marco conceptual diferente. Yo afirmo una epistemología que apuntala el papel activo, no pasivo ni receptivo, tanto del objeto como del sujeto epistémicos. Es decir, es una metodología en la que cualquiera de los dos factores puede ser más determinante que el otro, pero donde esto sólo es posible de manera particular y ocasional. Es decir, creo que epistemológicamente no es posible privilegiar ninguno de los factores epistemológicos; ni privilegiar el objeto como hace el Empirismo clásico, ni el sujeto como lo hace el Racionalismo, ni el sujeto como lo hace a su manera Piaget. A veces el sujeto puede ser determinante, a veces puede serlo el objeto. Se trata de una relación dialéctica de mutua dependencia siempre en la que sólo de manera concreta y precisa, de manera individualizada y específica, es posible estudiar el peso de los factores epistémicos. No creo, entonces, en una visión metodológica a priorística del rol específico de los factores epistemológicos.

Por otra parte, me parece de vital importancia, en el análisis epistemológico, estudiar el rol preciso que juega el factor social. A diferencia tal vez de una epistemología clásica, creo que hay que afirmar el papel del factor social en la realidad epistemológica de una manera independiente, autónoma, condicionante y activa. El análisis epistemológico debe entonces estudiarse a partir de una relación integrada, condicionante y recíproca del objeto y del sujeto epistémicos y del factor social aquí con la categoría de factor epistemológico. De nuevo, aquí yo considero que la preminencia de cualquiera de estos tres factores en el resultado epistémico debe ser establecida a partir del análisis concreto de la situación concreta.

Volviendo a la ontología, yo sé que es una “provocación” afirmar que las matemáticas no son *a priori*. Pero creo que es un buen punto de partida para aprehender la auténtica naturaleza de las matemáticas. Es obvio que no son clásicamente experimentales, pero sí creo que es posible determinar los referentes reales a los que sus nociones y conceptos están vinculados. Es decir, a la hora del establecimiento de criterios de verdad en matemáticas no creo que baste ni la consistencia ni la completitud, ni las categorías en general de la lógica, sino que nunca creo posible prescindir de la experiencia como última sanción para su verdad. El punto debería ser entonces: ¿Cuáles son los posibles mecanismos experimentales o no, pero empíricos y relacionados con el mundo, capaces de determinar si las proposiciones o teorías estructuradas de las matemáticas son verdaderas o no? ¿Cuál debe ser, entonces, la noción de verdad que corresponde?. En este sentido, tal vez, el concepto de modelo, y entonces la recurrencia apropiada a la multitud de modelos científicos que existen puede darnos la solución. Creo que centrar dispositivos de investigación en este territorio sería de gran importancia y resultaría extraordinariamente fecundo. Ahora bien, cuando hablo de establecer la experiencia como última sanción para la verdad matemática, no dejo por fuera la importancia de la existencia de importantes falsadores no empíricos que pueden jugar un papel en la valoración veritativa así como en la utilidad y desarrollo de las matemáticas. Creo, en efecto, que el rol de la “lógica” dentro de las matemáticas juega un papel muy especial, pero al mismo tiempo entiendo que este papel lo puede jugar precisamente, o se puede jugar precisamente, por el carácter especial de las matemáticas, integrado en una realidad global y empírica de las mismas. Con relación a los referentes de las matemáticas, creo que deben considerarse estos referentes no en sí mismos, independientes del sujeto, sino que existiendo estos referentes no se puede prescindir de una relación cognoscitiva con el sujeto, con sus límites y sus condiciones (materiales, psicológicas, etc.) que intervienen precisamente para determinar la naturaleza del objeto cognocitivo. En síntesis: El objeto es subjetivizado y el sujeto es objetivizado. Visto de otra forma, al establecer una relación material el sujeto con el objeto, se crea un referente en el que es tan importante el sujeto como el objeto, y este referente es el referente para la construcción matemática; la construcción matemática como creación conceptual e intelectual siempre como abstracción que parte de un referente que sólo puede existir en el marco de esa relación sujeto-objeto. De hecho, yo me aventuraría a decir que en general este es el mecanismo básico a partir del cual se edifica todo conocimiento científico. Conceptos matemáticos como los de infinito, o el de continuidad, corresponden precisamente a una realidad que no podemos decir que exista en sí misma sino a partir de una relación entre el objeto y el sujeto epistémicos. El infinito no existe externamente o si existe, es un punto a debatir, si se quiere, en el territorio de la práctica. Pero es obvio que existe una realidad que aparece infinita al sujeto, debido a sus límites, a sus condiciones sensoriales, etc. La percepción del sujeto es la base de la construcción conceptual y la percepción no es entonces un fenómeno pasivo en que el objeto brinde sus determinaciones al sujeto; existe una relación mutuamente condicionante. En esta relación se construye los elementos conceptuales.

Si las matemáticas deben verse, como construcciones en las cuales intervienen el objeto y el sujeto, y lo social, en las proporciones que correspondan, entonces, la construcción matemática debe verse como un acto histórico; es decir la construcción matemática es histórica. De lo que se trata para quien estudia la evolución de las matemáticas, es de estudiar en cada momento cuáles fueron los factores que generaron los resultados matemáticos planteados. A veces la conexión con las otras ciencias pueden ser lo decisivo, a veces las necesidades de la técnica y la vida práctica, a veces las necesidades de la coherencia lógica, a veces las intuiciones subjetivas más extrañas. En la aventura de la construcción matemática los factores decisivos pueden ser muy variados y diferentes. No existe una receta universal a priori. Los temas y problemas de interés en matemáticas a veces han estado definidos por la colectividad intelectual o matemática, a veces por el interés individual. La flexibilidad es en matemáticas aún mayor que en otras ciencias.

Para ir a una asunto particular, pero que siempre ha sido muy importante para mí: la visión anterior apunta, para cualquier estrategia educativa en matemáticas, hacia el uso de la historia de las matemáticas. No es posible pensar en una estrategia de la enseñanza de la matemática al margen de una vinculación estrecha con el uso de la historia de las matemáticas. La historia de la matemática se puede convertir en un poderoso instructivo no sólo para ambientar a partir de anécdotas las clases -cosa que sería importante- y mejorar la asimilación de los conceptos matemáticos; sino también para ayudar a definir la lógica y la estructura de los programas de matemática. La enseñanza de los conceptos matemáticos es la enseñanza de la construcción de la matemática. Es imprescindible, entonces, que veamos la historia como un referente metodológico central a la hora de debatir cómo se trate la enseñanza de las matemáticas. No quiere decir esto, por otro lado, que el orden que se deba seguir en la exposición de la matemática, en su enseñanza, sea necesariamente el histórico. Es evidente que las grandes síntesis teóricas, los nuevos conceptos deben abordarse introduciendo también una alta dosis de deducción y de modelos que codifiquen esas síntesis y resultados. Es cierto que debe buscarse entonces un equilibrio entre lo histórico si se quiere, y lo lógico. Pero debe introducirse sin duda la discusión histórica en la enseñanza de la matemática, cosa que no ha sido ni estimulado ni sistematizado. La forma precisa del uso de esta debe estar sujeto a investigaciones y experiencias concretas. Es un problema abierto. Yo no creo, por ejemplo, que los cursos de matemática básica deban de convertirse en cursos de historia de las matemáticas. No creo tampoco que todos los conceptos y las nociones de la matemática deban introducirse históricamente ni siguiendo la evolución histórica que tuvieron. Creo más bien que la historia de la matemática debe jugar un papel extraordinariamente decisivo en la formación de los maestros y profesores de matemática. Creo que si logramos que los maestros y profesores realmente conozcan la historia de la matemática va a ser posible que enseñen las matemáticas de una forma que pueda ser asimilada mejor, comprendida mejor, y utilizada mejor por los estudiantes. Aunque no sea esta matemática presentada a los estudiantes de manera histórica. La presentación histórica es algo que debe decidirse de manera concreta, de una manera específica. No creo que de manera a priori podamos definir como se hace esto. Esto está sujeto a la investigación como ya lo he dicho. Lo que quiero enfatizar es que cualquier concepción de la naturaleza de las matemáticas que afirme a la construcción como algo esencial, que cualquier visión que enfatice los aspectos constructivos de la matemática, que haga de la evolución de la matemática, la evolución de construcciones, no puede prescindir de una intervención decisiva del uso de la historia de las mismas.

La visión que he tratado de delinear en las pasadas páginas afirma epistemológicamente un construccionismo -en un sentido general- heurístico, donde el sujeto y el objeto juegan papeles activos definidos y concretos en contextos sociales y de forma histórica; afirma la sanción empírica de la verdad en matemáticas, aunque reconoce la importancia de los criterios relacionados con la lógica en la misma.

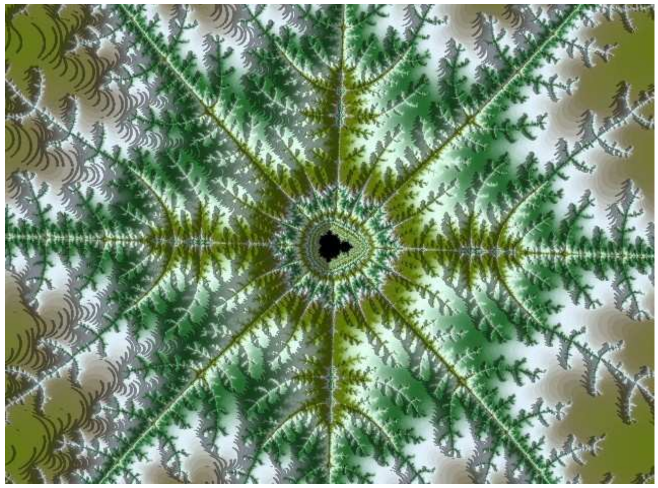
Esta visión estuvo presente cuando redacté las páginas que siguen, pero no se podría decir que cada frase o cada idea que se encontrará en el libro es la deducción directa de las premisas que he planteado. Se trata más bien de una relación intelectual flexible y amplia. No trato de demostrar mi interpretación subjetiva en el análisis específico del logicismo de Frege o Russell ni tampoco busco que todo todo lo que menciono constituya crítica de otras posiciones filosóficas.

Este libro está compuesto -en lo esencial- por artículos publicados en numerosas revistas académicas, e incluso algunos pocos fragmentos fueron tomados de un pequeño libro -de circulación muy restringida- editado por la Editorial de la Universidad de Costa Rica en 1988: *La filosofía de las matemáticas y el análisis de textos en secundaria.* Debo mencionar que, sin embargo, la redacción original fue hecha en 1984 pensando en un libro. Por eso existe una "lógica" en el análisis realizado. Esta es más bien -aunque relativamente- histórica. En el primer capítulo se busca analizar algunas aspectos intelectuales previos a la edificación del proyecto logicista por Frege. Se ponen en conexión algunas ideas centrales de Descartes y Leibniz que se afirman como sustrato del proyecto logicista. Se mencionan avances de la lógica, y sobre todo se hace un análisis panorámico de la historia de las matemáticas modernas hasta el siglo XIX, que es donde se afirma está precisamente el sustrato del proyecto. El segundo capítulo resume la visión de Frege. El tercer capítulo es la descripción de la etapa del proyecto que desarrolla Russell.

Los capítulos Cuarto, Quinto y Sexto constituyen una incursión en las filosofías de Frege y Russell en lo que pueden tener de interés para la mejor comprensión de las ideas de estos sobre las matemáticas. El capítulo Sétimo es una breve exploración sobre las filosofías del formalismo y el intuicionismo que permita al mismo tiempo que ampliar la perspectiva del análisis del logicismo, realizar una pintura de la problemática de los fundamentos filosóficos de la matemática en general. El capítulo Octavo es al mismo tiempo que el lugar donde se introducen específicamente los teoremas de Gödel, una breve síntesis de ideas a manera de conclusión, especialmente en relación con el racionalismo. Este capítulo no pretende ser el corolario de los siete anteriores capítulos, ni tampoco el último eslabón de una demostración. Se trata más bien de la sugerencia de algunas ideas y opiniones así como cierto balance teórico sobre la reflexión de la naturaleza de las matemáticas. El libro contiene -no obstante- suficiente descripción de las ideas logicistas (así como suficientes referencias) como para servir como introducción al tema, sólo que con una visión intencionadamente "parcializada".

Aunque el análisis que se realiza en este libro ha tomado como punto focal a la filosofía del logicismo, en realidad se trata de una incursión en buena parte de los problemas de la filosofía de las matemáticas. En realidad, de eso es de lo que trataba desde un principio.

CAPÍTULO I
PROLEGOMENA LOGICISTA



INTRODUCCIÓN

Si bien es cierto que es posible rastrear en la antigüedad clásica componentes del logicismo moderno, no es menos cierto que este realmente responde a una visión en correspondencia con la naturaleza de la matemática moderna, que podríamos decir arranca en el siglo XVII. La misma filosofía moderna, por otra parte, podríamos atrevernos a decir comienza con Descartes.

Por circunstancias diferentes, la visión cartesiana sobre las matemáticas estuvo conectada a las corrientes filosóficas e ideas que darían forma al logicismo.

De igual forma y tal vez con mayor nitidez, los resultados e ideas de Leibniz en torno a la relación entre lógica y matemáticas contribuyeron a definir la filosofía del logicismo moderno. Dentro del racionalismo y en una conexión (en cada caso diferente) en torno al rol de lo axiomático y lo formal, Descartes y Leibniz representan un punto de partida intelectual para la reelaboración teorética que Frege y Russell realizaron tiempo después.

Los desarrollos conceptuales de Boole en la «matematización» de la lógica y en el apuntalamiento de lo axiomático y operatorio, constituyen una fuente muy importante para la elaboración de un proyecto específico de fundamentación de las matemáticas por la lógica.

Pero aunque encontremos ideas y actitudes sobre las matemáticas en Leibniz y Descartes, recursos técnicos interesantes en Boole y los lógicos del siglo XIX, era necesario un nivel de desarrollo especial de las matemáticas (que se da en los siglos XVIII y XIX) para abrir el tipo de pensamiento y proyecto que Frege planteó. Frege fue un filósofo de las matemáticas modernas que adquieren un carácter también especial en el siglo XIX.

Es evidente que sin la existencia de Frege o Russell no es posible pensar que la idea logicista se habría planteado determinada por un desarrollo cuasi-mecánico de la historia del pensamiento. Pero sí es posible rastrear en el pasado las componentes teóricas y el contexto intelectual matemático de ese proyecto logicista. Es posible encontrar en sus prolegómena cierta concatenación.

DEDUCCIÓN E INTUICIÓN EN DESCARTES

Para Descartes la matemática era la esencia de la ciencia, y era suficiente para dar cuenta de la realidad. Del modelo aristotélico afirma la deducción, y entonces la axiomática, pero también la intuición. Descartes establece la necesidad de una "contemplación" de un objeto individual a la hora de realizar las conclusiones matemáticas. El razonamiento matemático no está desprovisto de un objeto, que en su caso, como señala Beth en su obra con Piaget *Epistemología Matemática y Psicología*, es del mismo tipo que emerge al referirse a un triángulo, "la esencia del triángulo" 1. Este objeto individual, a pesar de que no se libra del designio platónico, es necesario en tanto la intuición necesita objetos particulares para actuar. La intervención de la intuición en el razonamiento matemático establece una óptica diferente a la de la mera "deducibilidad" lógica. El postulado de la experiencia no se afirma aquí, puesto que Descartes no le reconoció valor 2.

Para Descartes los conceptos de la matemática han sido puestos por Dios, son innatos. Es este el puente entre la deducción y la intuición. Salvo por los primeros principios puestos por Dios y absolutamente intuitivos, el resto en matemáticas es deductivo.

La aproximación de Descartes apunta a la intuición, que en ocasiones identifica con la razón, pero, lo que es especial para nuestro tema, la deducción. De hecho, es la conjunción de la deducción y la búsqueda de primeros principios, lo que aparece, por ejemplo, en la raíz de las revoluciones cosmológica y geométrica. Esto es lo que ya podemos llamar axiomática, que aparece en Descartes con un hálito semi-religioso, cargado de prejuicios escolásticos. La axiomática cartesiana aparece con ese deseo de toda metafísica por como señala Cassirer en *El Problema del Conocimiento*: "...abarcar y agotar con el pensamiento, de una vez para siempre, toda la extensión del ser" [3]. El sentido último de las revoluciones cartesianas es importante de comprender a la hora de incidir sobre la constitución moderna del paradigma racionalista y axiomático de las matemáticas.

Una gran parte de los resultados teóricos matemáticos conocidos en la época de Descartes fueron obtenidos en la Antigüedad. Sin embargo en el medievo aparecen elementos teóricos antecedentes de los resultados cartesianos. Brunschvicg, en *Les ètapes de la philosophie mathematique* así lo apunta:

> "*Le Tractatus de Latitudinibus Formarum* (cuya influencia fue grande y duradera hasta tal punto que, desde el descubrimiento de la imprenta, cuatro ediciones se sucedieron de 1442 a 1515), enseña a representar las variaciones de cualquier magnitud que sea, transportando sobre una superficie plana las líneas de señal que habían sido hasta el momento trazadas sobre una esfera. Los grados del fenómeno natural se describen por la ordenada; y constituyen así lo que Oresme llama latitud de la forma; la longitud, es decir la línea de las abscisas, describe los tiempos correspondientes" [4].

Oresme apunta hacia las coordenadas. Vieta hacia el método operatorio, siguiendo a Diofanto (lo que adecuadamente señala Brunschvicg [5]). Para Descartes, a diferencia de posiciones posteriores, el álgebra (como señalaba Paul Germain) no es una ciencia sino un método [6]. Esto es herencia de las ideas anteriores.

La mathesis

La noción de matemática universal que describe rasgos centrales de su aproximación teórica aparece como un ideal esencial, determinante metodológico sobre la ciencia y el conocimiento. En el seno de ese ideal es que las dos reformas se establecen. Esta matemática universal tendrá un alcance diferente en relación a que se considere el conjunto de la obra filosófica (cosmológica) de Descartes o sólo la parte estrictamente matemática [7].

Estas dos aproximaciones separables esclarecen sus diferencias en el uso cartesiano del espacio. Para Descartes: "...los *Principes de la Philosophie* son una física de la geometría; la *Géométrie* es una geometría de analista" [8]. La concepción espacial cartesiana es importante en la imagen del mundo moderno. La *mathesis universalis* busca encerrar el conocimiento del mundo en un esquema matematizante. Se trata de englobar la ciencia a partir de lo deductivo matemático. Reforma matemática y reforma cosmológica encuentran intersección común en la metodología y en uno de los énfasis teóricos que Descartes apuntala. La reforma cosmológica parte de la comprensión de la existencia de un método universal en el conocimiento [9].

En Descartes todo esto es posible a partir de la reducción a la noción de espacio y a su medición en el interior de la cosmología. El establecimiento de proporciones es la base de la medición espacial, es esto lo que expresa cuando se refiere a la extensión. El carácter universal se desprende de una profunda unidad racional 10. Es universal por ser racional; la justificación recae en una sola parte de los participantes: en la relación cognoscitiva. Las reglas clásicas del método cartesiano y no otras son las que están presentes aquí. Para Descartes la extensión es un elemento constitutivo de la esencia de la matemática, pero también lo es el "orden", y, en relación al espacio también la "dimensión". La matemática universal de Descartes toma como punto de partida las ideas "claras y distintas" de extensión y movimiento. El mecanismo cartesiano elevado a cosmología universal es geométrico; es espacial, el movimiento no es fundamental. Esta aproximación va a poseer una gran influencia en el pensamiento occidental.

Se puede afirmar que la *mathesis universalis* cartesiana se reduce a una extensión de los métodos geométricos a los problemas de las ciencias. La palanca teórica que utiliza es la redefinición del espacio en términos de extensión y proporción, como señala Gerd Buchdahl en *Methaphysics and the Philosophy of Science*:

> "El tema de que la extensión y comparaciones entre extensiones es la materia propia de la ciencia, ha sido previamente abordado más ampliamente en *Regulae* XII y XIV" 11.

La reducción cartesiana a la extensión no es una observación empírica. Se trata de una premisa metafísica frente al mundo. A través del cristal de lo "extenso" el mundo va a poder ser desentrañado teóricamente por las reglas de la geometría. Se trata de hacer encajar el esquema *a priori* de las reglas geométricas. Este es un método clásico escolástico:

> "... de sostener que un tratamiento científico exitoso de la naturaleza presupone su ser considerado bajo el aspecto de la extensión, Descartes se introduce en la aserción que la naturaleza (material) es esencialmente equivalente a la extensión, y que esto sólo nos justifica para postular la existencia de la ciencia genuina" 12.

La axiomática cartesiana

La preocupación principal de la *Géométrie* de 1637 no recae en la geometrización de la física sino, como señala Brunschvicg: "...opera una transformación de los métodos técnicos de la Geometría y el Álgebra" 13. A propósito de un problema planteado por Pappus, Descartes muestra las ventajas del método abstracto que él propone, y expresa las características fundamentales de la "nueva matemática" en *Reponses aux secondes objections faites sur les Meditations Metaphysiques*. La expresión de las relaciones geométricas en algebraicas se convierte, desde un punto de vista técnico, esencial para

Descartes. Son las coordenadas rectangulares las que enlazan las relaciones geométricas y las algebraicas. Con la *Regulae* se tiene una yuxtaposición de geometría y aritmética; en la *Géométrie* se da una jerarquización.

Las reformas cartesianas a la física y a la matemática están íntimamente entrelazadas. No sólo por la unidad en la aproximación al mundo, sino por el método usado en ambas. Se trata de la deducción de resultados partiendo de principios previos, que son en Descartes *a priori* y mentales. En la reforma cosmológica esto implica más problemas que en la matemática; que sólo pueden ser abordados con premisas metafísicas. En la matemática, aparte de establecer un resultado importante teóricamente, cual es la aritmetización de la geometría, establece una forma de entenderla que va a influir en la concepción de su naturaleza. Descartes con estos resultados va a apuntalar (matemática y filosóficamente) los métodos abstractos y el tratamiento axiomático de las matemáticas modernas. Las reformas cartesianas deben estudiarse en conexión con el desarrollo de la axiomática y entonces con las condiciones en las que el modelo antiguo de ciencia y matemática (aunque transformado) deviene un paradigma fundamental de la filosofía moderna.

En Descartes la intuición es fundamental en matemáticas, pero la deducción es apuntalada por los resultados que establece.

El análisis sobre la cosmología y la matemática de Descartes está íntimamente ligado a las mismas reglas que sanciona su *Discurso del Método* (que enfatiza los aspectos analíticos y deductivos, pero también la búsqueda de primeros principios).

La participación de Descartes en la configuración de la reflexión moderna sobre la matemática no es nada despreciable. Su contraposición epistemológica a una metodología empírica de aproximación a lo real ha influido extraordinariamente en los siglos pasados. La traslación de los criterios de verdad de la correspondencia con el ser (Aristóteles y escolásticos) a los de rigor, claridad y distinción de las ideas, fue esencial en la edificación del racionalismo moderno.

En lo que se refiere a la cosmología las hipótesis de Descartes son cualitativas y poco útiles para el desarrollo de la ciencia; todo el siglo XVII vivió una atmósfera cualitativista.

Frente al racionalismo que subestima la experiencia y que hereda la pretensión escolástica de los primeros principios, la aproximación cuantitativa, por ejemplo de Galileo, en la descripción de la naturaleza y en la concepción de la matemática representa un auténtico salto metodológico y epistemológico hacia adelante (aunque esto no sea válido universalmente). Pero será la tradición racionalista la que más peso tendrá en la constitución del paradigma dominante sobre las matemáticas.

UN PASO MÁS: EL LOGICISMO LEIBNIZIANO

Para Leibniz existía también la conexión divina. Las leyes de la matemática y la naturaleza poseen una armonía preestablecida por designio divino 14. Para él el conocimiento era innato. Se colocó también en el marco del modelo aristotélico pero no sólo no tomó en consideración un objeto real o la experiencia, sino que tampoco la intuición cartesiana. El postulado de la deductibilidad y la axiomática era lo decisivo. En la matemática -entonces- de lo que se trata es de la reducción a axiomas "primitivos" o "idénticos":

> "Por lo demás, hace ya mucho tiempo que he dicho pública y particularmente que tendría importancia demostrar todos nuestros axiomas secundarios, de los que nos valemos ordinariamente, reduciéndolos a axiomas primitivos, o inmediatos e indemostrables, que son aquellos a los que últimamente y en otros lugares he llamado idénticos" 15.

Leibniz estableció con gran precisión el plan general de su proyecto. El programa de Leibniz lo reseña Beth así:

> "1) La construcción de una teoría (a la que llamaremos lógica pura) que comprende el conjunto de todas las identidades lógicas; en esta construcción se observarían estrictamente los preceptos de la metodología aristotélica. 2) La definición de los conceptos específicamente matemáticos por medio de los conceptos de la lógica pura. 3) La demostración de los axiomas específicamente matemáticos a partir del conjunto de las identidades lógicas y de las definiciones de los distintos conceptos específicamente matemáticos. La necesidad de alcanzar un nivel especialmente elevado de rigor y de lucidez lleva consigo otro paso previo más, también previsto por Leibniz, que es el siguiente: 4) La construcción de un lenguaje formalizado capaz de servir de medio de expresión para la lógica pura" 16.

En Leibniz el problema ontológico está resuelto por la vía divina. Epistemológicamente las proposiciones de la matemática son verdades porque son “verdades de razón”, lo que quiere decir, que su negación es lógicamente imposible. Las verdades de la matemática no se refieren al mundo, en donde se exige una relación práctica “material” con lo real independiente a la conciencia subjetiva, no son “verdades de hechos”. Leibniz funde la lógica con la matemática de un plumazo: las reglas lógicas de la no contradicción, las leyes de la identidad y del Tercero Excluido..., son las que dan la base de la epistemología matemática leibniziana. A diferencia de Platón, la ontología aquí no es lo determinante. Leibniz proporciona una teoría de la verdad matemática capaz de ser funcional. Para Leibniz, es necesario buscar una simbolización de los pensamientos; lenguaje que permita luego a través de un cálculo mecánico resolver las discusiones entre los hombres.

El calculo lógico y las ideas precursoras

Leibniz, a diferencia de Descartes y Pascal, va a proporcionar un avance a la lógica formal, ayudándola a salir del estrecho marco en la que la había sumergido la escolástica 17.

La construcción de un “*Calculus ratiocinator”* fue un proyecto que intentó por lo menos en tres ocasiones, buscando dar una forma más algebraica a la lógica aristotélica 18. Señala Bourbaki:

> “...unas veces conserva la notación AB para la conjunción de dos conceptos, mientras que otras emplea la notación A + B; señala (con notación multiplicativa) la ley de idempotencia AA=A, hace notar que puede reemplazarse la proposición “todo A es B” por la igualdad A=AB y que a partir de aquí se puede obtener la mayor parte de las reglas de Aristóteles mediante un cálculo puramente algebraico” 19

Las ideas de Leibniz no sólo son precursoras del logicismo en la conjunción lógica y matemática. Sino también de los métodos finitistas de constructibilidad de fórmulas y de consistencia formal de la escuela hilbertiana. No es extraño que esto sea así, en tanto en cuanto Leibniz readecuó el modelo aristotélico en los términos que posteriormente (en los siglos XIX y XX) ocuparían un lugar privilegiado en la concepción de la naturaleza de la matemática. Leibniz fue el filósofo racionalista que contribuyó con mayor claridad al desarrollo de lo que podemos llamar un paradigma formalizante y axiomático de las matemáticas. Este modelo constituía una parte extraordinariamente importante de toda su filosofía. La “monadología” se puede apreciar en realidad como un reduccionismo ontológico de corte axiomático. Leibniz fue precursor de orientaciones y métodos que tendrían una mayor influencia en el siglo XIX. Es interesante señalar, sin embargo, que, aunque el logicismo lo asumió como precursor, Leibniz pensaba que la lógica podía ser matemática (idea que atribuía a Aristóteles en carta a Gabriel Wagner en 1596 y que, de hecho, Roger Bacon también la había expresado en su tiempo).

LÓGICA Y MATEMÁTICAS EN BOOLE: NUEVAS HERRAMIENTAS

El siglo XVIII y la primeras décadas del XX crearon un mundo matemático diferente, que no podía dejar de influenciar las ideas que sobre las matemáticas se tenían. Las nuevas condiciones en las matemáticas (y la reflexión sobre las mismas) generaron, por ejemplo, un intento extendido por solventar las debilidades de las matemáticas del XVII y del XVIII. Se sucedieron importantes intentos en búsqueda de la consistencia de las nuevas geometrías y en la rigorización del análisis y el álgebra (Bolzano, Abel, Cauchy, etc.). Cauchy trató de fundamentar el cálculo en el número, y en el concepto de límite 20. El mejor intento en esta rigorización fue hecho por Weierstrass 21. Este dió una derivación de las propiedades de los irracionales a partir de los racionales, y Dedekind se colocó en la misma dirección 22. Pero, además, como era consecuencia de los nuevos tiempos, la lógica debía sufrir modificaciones.

El resurgir de la lógica en las islas británicas fue iniciado en el siglo XIX por Richard Whately. Sir William Hamilton y Augustus De Morgan contribuyeron también; pero fue George Boole el verdadero fundador de la lógica simbólica moderna.

Su aproximación se va inspirar en la visión del álgebra de Peacock, Gregory y De Morgan, pero sobre todo en las características de una nueva matemática (cuaterniones y geometrías no euclidianas apuntalaban una visión axiomática y operativa, no cuantitativa). Los avances de Boole en la lógica son establecidos por la matematización de la misma (el simbolismo y el carácter operatorio-aritmético). Sus trabajos reforzaban una nueva visión de las matemáticas.

Para Boole la lógica encuentra su fundamento más profundo en las operaciones de la mente. *En Análisis Matemático de la Lógica* publicado en 1847, afirma que la lógica está "...basada en hechos de otra naturaleza que tienen su fundamento en la constitución de la mente" 23. La lógica es posible, entonces, en la medida de la existencia de las facultades propias del intelecto, en "...nuestra capacidad para concebir una clase y designar sus miembros individuales por medio de un nombre común" 24. Es en el lenguaje, añade, donde vamos a observar la manifestación de las operaciones de la mente y, por tanto, sus leyes van a ser también las leyes del mismo lenguaje.

Hagamos una disgresión en este punto: el lenguaje es un "instrumento" del pensamiento y no sólo un "medio"; está entonces en una relación fundamental con el pensar, y, por lo tanto, debe ocupar una posición determinante en todo análisis epistemológico.

El método de Boole es el de incidir en el lenguaje que, como manifestación del operar intelectual, conducirá al análisis de las operaciones de la mente; como señala en *An investigation of the laws of thought*:

> "Estudiando las leyes de los signos, estamos en efecto estudiando las leyes manifestadas del razonamiento" 25.

La lógica, sus leyes y proposiciones, pueden establecerse a través de "un cálculo del razonamiento deductivo" 26. O, como diría luego:

> "La teoría de la lógica y la teoría del lenguaje resultan así, íntimamente relacionadas. Un intento afortunado de expresar las proposiciones lógicas por medio de símbolos -cuyas leyes combinatorias podrían basarse en las leyes de los procesos mentales que representan- sería un proceso en el camino hacia un lenguaje filosófico" 27.

La lógica como calculo operatorio y simbólico

La visión de Boole se conecta con las pretensiones leibnizianas de un cálculo simbólico que es entendido como matemático, axiomático. Para Boole la lógica es operatoria, en esto retoma la obra de Leibniz. En el primer capítulo de su libro de 1854 nos dice:

> "El designio del siguiente tratado es el de investigar las leyes fundamentales de aquellas operaciones de la mente por las cuales el razonamiento es realizado; para darles expresión en el lenguaje simbólico de un cálculo, y sobre esta fundamentación establecer la ciencia de la lógica y construir su método; para hacer ese método mismo la base de un método general para la aplicación de la doctrina matemática de las Probabilidades; y finalmente, para recoger de los variados elementos de verdad traídos a la vista en el curso de estas indagaciones algunas indicaciones concernientes a la naturaleza y constitución de la mente humana" 28.

Coherente con estos objetivos, la consideración que hace de la lógica no es en términos de filosofía, si por ello se entiende metafísica. La lógica es matemática, porque es esencialmente axiomática y operativa. Más aún, especialmente, por ser desarrollada como un cálculo simbólico. Existen verdades fundamentales sobre las que descansan todas las otras verdades. Todas ellas descansan sobre "*...la fundamentación de unos cuantos axiomas; y todos estos son verdades generales"* 29*.* Esto, que señala en sus *Laws of thought*, ya lo había señalado en 1847 así:

> "... la lógica, como la geometría, se basa en verdades axiomáticas y ... sus teoremas se construyen teniendo en cuenta esa doctrina general de los símbolos que constituye la base del Análisis hoy aceptado" 30·

Enfatiza, en el mismo opúsculo:

> "... porque es un método que se apoya en el empleo de símbolos regidos por leyes combinatorias generales y conocidas, cuyos resultados admiten una interpretación no contradictoria" 31.

La lógica es matemática

Las leyes de la lógica son para Boole en su forma, aunque no en su contenido, matemática 32. Todas las leyes básicas de lógica las va reduciendo a relaciones de asociatividad, conmutatividad, distributividad, etc. Para ello identifica el signo " + " a los términos "y", "o" de la lógica (se debe al usar las relaciones que vinculan clases de objetos exigir intersección vacía entre las clases para así garantizar la identificación con el " + "). Las únicas diferencias con la aritmética-álgebra son: (i) (si XY = XZ => Y = Z) no es válida y (ii) $X^2=X$, que no es una regla clásica del álgebra (en 1847 había señalado $X^n=X$). Boole sustituyó las relaciones lógicas así:

Todo X es Y .... $x*(1-y)= 0$
Ningún X es Y ......$x*y=0$

Donde "x" representa la clase de las cosas X y "y" la de las cosas Y. Boole, además, añade:

Algún X es Y .... $xy = v$
Algún X no es Y ...... $x(1-y) = v$,

para la expresión de proposiciones particulares, y donde vx = algunos X. En la base de la aproximación booleana se encontraban condiciones particulares de la matemática de la época. Kneale en *Desarrollo de la Lógica* dice:

"Las obras publicadas hasta la fecha arrojaban dos importantes resultados que habrían de servir a Boole de punto de partida: (I) el descubrimiento de la posibilidad de un álgebra de entidades que no fuesen números en ninguno de los sentidos convencionales del vocablo, y (II) el descubrimiento de las leyes que rigen para cualquier clase de números hasta llegar a los complejos e incluidos estos últimos, no necesitan ser conservadas en su totalidad por un sistema algebraico que no resulte aplicable a tales números" 33.

La matemática es axiomática

Para Boole la matemática no es de magnitudes, su esencia está dada por su carácter calculatorio y axiomático 34· Esta es una aproximación que deja de lado los aspectos cuantitativos que fueron los que predominaron en el siglo XVIII. Para Boole la realidad (al igual que la lógica) también está regida por las leyes matemáticas.

La forma precisa de la expresión matemática de la lógica se desarrolla en Boole a través de "ecuaciones" 35, cosa que Hamilton (el filósofo) había obtenido. Los razonamientos pueden expresarse a través de funciones y sus desarrollos. El camino interno entre las premisas y las conclusiones pueden establecerse simbólica y matemáticamente, para sólo al final retomar el sentido lógico. Esta "expansión" es el "procedimiento fundamental en el despliegue formal del sistema de Boole" 36.

Nuevos resultados de Boole

El tratamiento booleano de la lógica introduce la lógica de clases, y con ello una mejor aproximación que la dominada por la relación clásica sujeto-predicado. De hecho, la matemática tal y como él la concibe es el "instrumento" que le permite la delimitación de fronteras para abrir curso a la independización de la lógica como ciencia. Esta dirección va a ser asumida en la segunda mitad del siglo XIX y establecerá indiscutiblemente el camino de la lógica moderna. Boole inició con su teoría de las funciones electivas y su expansión lo que puede llamarse "la teoría de las funciones de verdad y su expresión en forma normal disyuntiva". Los trabajos de Boole actualizaron en el espectro intelectual de la época la visión leibniziana sobre la matemática y la lógica, engendraron elementos que fueron utilizados luego en la edificación del proyecto logicista de Frege. Apuntaló entonces una visión axiomática y formal de las relaciones entre lógica y aritmética 37. La separación de las relaciones entre primarias y secundarias puede considerarse un antecedente (ordenación en dos niveles) de la "teoría de tipos".

Los resultados de Boole superan los trabajos de Leibniz (que ya habían intentado sin éxito ser superados por diversos autores previos: Segner, J. Lambert, Ploucquet, Holland, De Castillon, Georgonne) 38. Boole al asociar a una proposición el conjunto de“casos” en los que se verifica,

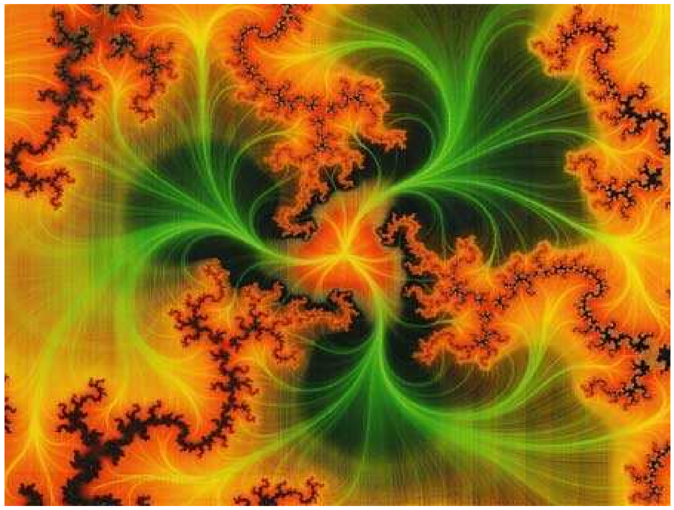
> “... interpreta la relación de implicación como una inclusión, y su cálculo con conjuntos le proporciona de este modo las reglas del ‘Cálculo Proposicional’ ” 39.

Sus trabajos van a servir como base para Jevons, el mismo De Morgan y C.S. Peirce. De Morgan había establecido en su *Formal Logic* de 1847 que la lógica se refiere esencialmente a relaciones, al igual que Boole 40. Peirce extendería estos resultados en sus escritos de 1870 a 1893 y Schröeder los sistematizaría 41. El énfasis en las relaciones era una consecuencia del flujo general que apuntalaba la axiomática y de la nueva aproximación hacia la matemática y la lógica. Peirce introdujo una notación para las proposiciones que expresan relaciones, enfatizó (lo que Boole apenas había tocado) el concepto de función proposicional 42 y el de cuantificadores 43. La conjunción de relaciones, clases, funciones proposicionales y cuantificadores, abría una nueva etapa en la lógica y describía el panorama de la misma previo a los trabajos de Frege.

Durante esta época los avances en la lógica habían sido introducidos en el marco de la evolución de la matemática. Muchas de las innovaciones aparecían condicionadas por las necesidades en la búsqueda de sustentar condiciones de rigor para los resultados matemáticos. En Boole (como también en Peirce) la lógica simbólica era matemática. La “autoconciencia” de la lógica como ciencia independiente, aparte de su consideración como leyes del pensamiento, objetivas o subjetivas, va a aparecer con claridad en Frege. Aquí la lógica ya no es matemática, sino al revés: esta última es lógica. Para establecer esta *inversión* adecuadamente era necesario una renovación y síntesis de la lógica, un lenguaje simbólico más desarrollado y una aproximación filosófica apropiada. El proceso que conduce a ese resultado en Frege no fue establecido, sin embargo, a partir solamente de los productos del trabajo de Boole, De Morgan o Peirce; de nuevo, la evolución de los problemas de las matemáticas fue central en ese desarrollo.

La búsqueda del fundamento lógico de la matemática, en una etapa en que se percibía esto como una tarea intelectual decisiva, fue un factor determinante, que es necesario abordar en cierta medida.

OTRO COMPONENTE: LA BÚSQUEDA DE LA RIGORIZACIÓN Y LOS FUNDAMENTOS LÓGICOS



Durante el siglo XVIII se habían desarrollado trabajos en el análisis muy importantes (Euler, Lagrange, etc.). En la búsqueda del rigor se buscó la conexión de los infinitesimales, las "operaciones" de derivación e integración y, en general, el continuo real, con la aritmética. Se puede señalar a Bolzano como iniciador de este proceso, aunque desde el siglo anterior se buscaban formas de rigorización de los resultados obtenidos. Para Cauchy era necesario buscar definiciones claras y precisas y el establecimiento preciso de las fronteras de los conceptos y las fórmulas 44. Intentos en la aproximación del análisis y la aritmética fueron realizados por Martin Ohm (1822) 45, y después Grassmann, Hankel y Weierstrass. Pero fue este último el que ofreció una definición rigurosa de los números irracionales a partir de los racionales. Su trabajo implicaba una "*... liberación del Análisis del tipo de prueba geométrica intuitiva tan prevaleciente en ese tiempo"* 46. La noción de número real estaba conectada entonces a las magnitudes de la geometría. Otros autores como Dedekind (en sus trabajos de 1872 y 1888) 47 y Cantor, tomando como punto de partida la validez de las propiedades de los racionales, les conectaron a estos los irracionales 48. Nos señala E.T. Bell en su *Historia de las Matemáticas* de 1940:

> "La definición de Dedekind de los números irracionales como cortaduras en clases infinitas de racionales, las sucesiones de números racionales de Cantor para definir los números irracionales, y los números irracionales de Weierstrass considerados como clases de racionales, todas ellas en definitiva referían el continuo de los números reales a los números naturales. Las 'magnitudes' de Eudoxio quedaban reemplazadas por construcciones hipotéticas realizadas con los números 1,2,3... De este modo, la aritmetización del análisis era una vuelta al programa de Pitágoras" 49

Aritmetización y rigor

La aritmetización del análisis no se puede considerar un proceso mecánico y simple de rigorización de resultados matemáticos, sino que debe verse integrada a una nueva “autoconciencia” en la evolución de la matemática. La aritmetización iba dirigida en el siglo XIX al abandono de la intuición geométrica que había predominado en el cálculo del siglo XVIII; era la búsqueda por aprehender una nueva realidad en la que la validez lógica aparecía como central 50.

Los trabajos de Cantor en lo que se refiere a los fundamentos del análisis continúan la obra de Weierstrass 51. En las definiciones de los reales el problema residía en la forma de traducir el paso al límite a los enteros. Para Cantor, por ejemplo, “toda sucesión regular define un número; la clase de todos los números así definidos es el sistema de los números reales” 52. Para Dedekind y también para Wierstrass está presente esta incidencia sobre lo que es una referencia al continuo y, entonces, al infinito. La noción de continuo real implica un proceso matemático (mental si se quiere) cualitativamente diferente al que se manifiesta en la aritmética.

Con la aritmetización del Análisis no se trataba simplemente de desgeometrizar el cálculo y de apuntar hacia mejores condiciones lógicas en sus fundamentos; se trataba de una reducción de diferentes nociones conceptuales (referidas a objetos diferentes) a las nociones aritméticas. Este proceso de cualidades diferentes sólo podía ser realizado a partir de una nueva abstracción y, sugiero, a partir de la introducción implícita o explícita de supuestos teóricos sobre la existencia y la naturaleza de las entidades matemáticas.

La aritmetización de las matemáticas es la manifestación, por otra parte, de una intención reduccionista de sus distintos componentes. Es la búsqueda de una unidad teórica en la diversidad, cuyo planteamiento exige una readecuación en la conciencia de la naturaleza de la matemática e incluso del conocimiento. Un proceso que no fue abordado en el siglo XIX y es posible que fuesen necesarios más elementos teóricos que los existentes entonces para establecer su “actualidad”.

La teoría de conjuntos

La matemática del siglo XIX se puede resumir en la emersión de las geometrías no euclidianas, la aritmetización del análisis, la sistematización geométrica y el surgimiento de formas algebraicas nuevas. Aún así quedarían por fuera, sin duda, muchos importantes resultados 53: los trabajos de Gauss en la teoría de números (seguidos por Dirichlet), los logros en la generalidad de la geometría analítica, la teoría de las funciones de Weierstrass, Schwarz y Mittag-Leffler 54... En este panorama intelectual se construyó la teoría de conjuntos. Esta nace, nos dice Bourbaki, debido a:

> “...las necesidades del análisis en particular el estudio a fondo de las funciones de variables reales, que se desarrolla durante todo el siglo XIX” [55].

Tal y como la conocemos ahora es trabajo de Cantor. Este se interesó por el asunto en 1872, a propósito de los problemas de equipotencia en 1873, de la dimensión a partir de 1874, y entre 1878 y 1884 incidió sobre casi todos los problemas de la teoría de los conjuntos [56]. A pesar de la oposición general que esta teoría generó en la época de Cantor, Weierstrass y Dedekind siguieron con interés la labor de Cantor. Para Dedekind su objetivo era fundamentalmente la aplicación de la noción de conjunto a la de número [57]. Desde el momento en que aparecen muchos de los resultados, éstos van a ser aplicados a las cuestiones clásicas del Análisis [58]. La teoría de conjuntos fue muy importante porque iba a servir como engranaje de los principales resultados matemáticos y lógicos de la época y también concentraría sobre ella la reflexión sobre los fundamentos de la matemática. La teoría de conjuntos, de una u otra forma, va a representar desde entonces un papel esencial en la descripción de las matemáticas, a pesar de las dificultades que a partir de ella se sucedieron en momentos posteriores.

Con los elementos de la filosofía moderna de las matemáticas que se plantean en Descartes y Leibniz, y con los resultados matemáticos y lógicos del siglo XIX, se ofrecía un cuadro intelectual extraordinario para la síntesis en los fundamentos y la reflexión sobre las matemáticas. Esta va a ser realizada por Gottlob Frege retomando -en esencia- la filosofía logicista de Leibniz.

CAPÍTULO II
FREGE: EL PROYECTO LOGICISTA PRIMERA ETAPA

Para Gottlob Frege las cuestiones de la filosofía de la matemática eran de mucha importancia. No se trataba simplemente de un matemático y lógico encerrado en un mundo "técnico" y alejado de preocupaciones generales. Su punto de vista filosófico, como desarrollaremos más adelante, fue un factor constitutivo central del proyecto teórico fundamental de su obra.

En *Die Grundlagen der Arithmetik, eine Logisch-mathematische Untersuchung veber den Begriff der Zahl*, en la Introducción, nos dice:

> "Para impugnar la ilusión de que respecto a los números enteros positivos no existe propiamente dificultad alguna, sino que reina una concordancia universal, me parece propio discutir algunas de las opiniones de filósofos y matemáticos sobre las cuestiones en consideración. Se verá que hay poco concierto, de suerte que resultarán ni más ni menos que expresiones contradictorias" 1.

Frege manifiesta la necesidad de un mayor esclarecimiento en la reflexión sobre la matemática. Esto es completamente natural, puesto que vive en el siglo de una nueva matemática, de una pléyade de resultados matemáticos y lógicos que apuntan a una necesaria "autoconciencia". Se trataba de dar cuenta del carácter de lo nuevo usando viejas y nuevas categorías teóricas. Se trataba de establecer entonces si las viejas aproximaciones leibnizianas o kantianas, confrontadas con los razonamientos y teorías nuevos, aún eran válidas y útiles.

A lo largo del siglo XIX se había desarrollado un proceso de intensa producción matemática y lógica, pero no se había abordado la reflexión filosófica sobre ella de una forma sistemática. La filosofía de Boole, De Morgan, Cauchy y, en general, de cualquiera de los principales matemáticos de la época, no pasaba de ser en el mejor de los casos simples comentarios.

Por otro lado, los grandes filósofos del siglo habían dirigido su mirada hacia una problemática que incidiría más directamente en sus vidas y conciencias. Ni los matemáticos ni los filósofos por diferentes razones habían indagado con profundidad sobre la naturaleza de la matemática.

Si durante el siglo XVIII la visión kantiana sobre la matemática había predominado en las conciencias intelectuales, con las geometrías no euclídeas, y con una matemática que se alejaba cada vez más en general de lo intuitivo, en el siglo XIX la estrella de Kant había declinado, pero nada ni nadie lo había sustituido. La geometría no euclídea y los cuaterniones habían torpedeado la solidez de premisas establecidas sobre el carácter último de las matemáticas. El camino estaba abierto para una nueva conciencia, pero antes de intentarlo había que dejar correr el tiempo. La evidencia absoluta de las matemáticas dada en la intuición kantiana o en relación al éxito mundano de los resultados obtenidos, debía ser reformulada, pero ¿cómo?.

El primer mérito de Frege fue haber asumido esta tarea seria y sistemáticamente. Frege fue un auténtico filósofo de la matemática y de la lógica. Su visión estuvo condicionada no sólo por un esquema leibniziano sino especialmente por una extraordinaria etapa histórica en la evolución de las matemáticas.

EL CONCEPTO DE NÚMERO

El concepto de número en Frege es esencial para comprender toda su obra; posee coherencia en el conjunto de proyectos y realizaciones que puso en ejecución en su vida. Su concepto de número aparece como una reacción a las posiciones de las tendencias filosóficas de la época sobre los números y las matemáticas: el empirismo, el psicologismo y el formalismo.

La crítica al empirismo clásico

Critica a J.S. Mill en aquella vieja posición de que el uso de la definición de un número en forma correcta exige el conocimiento de un hecho físico específico y que el signo "+" se refiere a la adición física:

> "El símbolo de suma ciertamente puede aparecer corresponder, en muchas aplicaciones, a la formación de un grupo; pero este no es su significado; porque en otras aplicaciones podría no tratarse de grupos, agregados, de las relaciones de un cuerpo físico respecto a sus partes, por ejemplo, cuando el cálculo se refiere a sucesos. Ciertamente, aquí también se puede hablar de partes; la palabra se usa, pero no es un sentido físico o geométrico, sino en sentido lógico, como cuando se llama al asesinato de un tirano una parte del asesinato en general. Aquí hay subordinación lógica. Y así, en general la adición tampoco corresponde a una relación física. En consecuencia, las leyes generales de la adición tampoco pueden ser leyes naturales" 2

Mill había sostenido que la aritmética descansa en la inducción de hechos relativos a agrupaciones concretas. Frege critica a Mill preguntando por el hecho físico que se encuentra detrás de la expresión "1.000.000 = 999.999+1", y mostrando cómo fórmulas que involucran el "+" pueden referirse a hechos, situaciones, virtudes, y no a agregados físicos. La crítica de Frege a Mill es válida en muchos aspectos. La aritmética no es una mera colección de productos de la inducción sobre hechos de agrupaciones concretas. Es cierto también que el "+", la suma, se refiere también a hechos no físicos. La visión de Mill es la del empirismo clásico en la que el sujeto epistémico no tiene nada que aportar. Sin embargo, Mill se apunta un tanto en la medida de que su orientación general pone el origen de las teorías de la aritmética en la práctica humana, en las relaciones de orden empírico.

La aritmética posee leyes propias que dan lugar a resultados (bajo la acción del quehacer matemático) obtenidos independientemente de experiencias empíricas concretas. Tampoco pueden ser éstas reducidas a la aplicación de la inducción (la actitud empirista clásica es mecánica y simple). Pero esas leyes no son producto ni del azar ni de Dios, sino que corresponden al devenir del mundo real, establecidas teóricamente en el decurso de la relación entre los hombres y la naturaleza en forma histórica; en una relación, por lo menos en sus primeras etapas, profundamente empírica.

Por otra parte es correcto señalar a la suma, al "+", como adición de cosas no meramente físicas, pero es falso suponer que esta dimensión no interviene en su conformación. La adición física es importante para la abstracción matemática; no es única, pero interviene en los fundamentos epistemológicos de la misma.

En esta crítica a Mill, Frege pone en evidencia una concepción de la aritmética separada de las “leyes naturales”, separada de la práctica social, empírica y material. Un elemento constitutivo de una visión y un modelo de aproximación particular es en la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas.

La crítica al formalismo

La crítica de Frege a los formalistas se manifiesta en el segundo volumen de sus *Grundgesetze*, aparecido en 1903. Lo esencial que dice Frege es que resulta absurdo pensar que meras combinaciones de trazos sin significado alguno puedan llamarse matemática. Frege pregunta ¿cuándo se le da significado a los símbolos usados en las combinaciones?. 3

Es evidente que los objetos y las reglas básicas de la matemática pueden tratarse en forma de sistema axiomático abstracto. Estos objetos podrían ser hasta cierto punto variables. Pero lo que es necesario dejar claro es que las reglas son reglas que corresponden al objeto, el objeto determina sus reglas aunque después “obviemos” los procesos originarios; son reglas “objetivizadas”. Esto no quiere decir que no podamos distribuir, organizar estas reglas y diferentes objetos. Es correcta la afirmación de Frege de que no cualesquiera reglas y símbolos indeterminados son matemática. En esto Frege manifiesta sus consideraciones epistemológicas: no acepta una interpretación de la aritmética en términos sintácticos. Su visión en esto sigue siendo clásicamente “semántica”. Esta última frase se refiere a que a pesar de que contribuye al apuntamiento de lo formal en el racionalismo (como veremos), Frege no puede aceptar el formalismo. Lo que Frege aclara aquí es acerca de qué tipo de relación existe entre las colecciones de objetos matemáticos y sus reglas, con la realidad. Es decir, si los entes matemáticos que se construyen y son resultados de la aplicación de reglas tienen significado, y si lo tienen ¿cuál es?. La respuesta de esto deberemos buscarla en la posición ontológica de Frege.

La crítica al subjetivismo

La crítica en el *Grundlagen* de Frege al subjetivismo psicologista se realiza tanto en el terreno de la lógica como de la matemática:

> “Tal descripción del proceso interno que precede a la realización de un juicio numérico, aún cuando pudiera ser justa, jamás podría sustituir una genuina determinación del concepto (...). De esta suerte, el número es tan escasamente un objeto de la psicología o un producto de los procesos psíquicos, como podría serlo, por caso, el Mar del Norte”. 4

Y, aclara más adelante:

> "... tampoco puedo concordar con Schloemilch, quien llama al número representación del lugar de un objeto en una serie. Pues si el número fuera una representación, la aritmética sería psicología. La aritmética es tan escasamente psicología, como, por ejemplo, lo es la astronomía (...). Si el dos fuera una representación, sería la mía por lo pronto. La representación de otro sería, en cuanto tal, otra representación. De esta manera, tal vez tendríamos muchos millones de doses. Si se aceptaran representaciones latentes o inconscientes, se tendrían también doses inconscientes que con posterioridad volverían a ser conscientes". 5

En su famoso artículo de 1918 (traducido al inglés como "*The Thought: a logical Inquiry"*) resume lo que en general sería su posición:

> "Nada sería un mayor malentendido de la matemática que su subordinación a la psicología. Ni la lógica ni la matemática tiene la tarea de investigar las mentes y los contenidos de la conciencia cuyo portador es una sola persona. Tal vez su tarea podía ser representada mejor como **la investigación de la mente, de la mente no de las mentes"** (Negritas añadidas, A. R.) 6.

Las leyes de la matemática y de la lógica no son dependientes justamente de la acción del pensar individual, o de los contenidos particulares del pensar individual, o de los contenidos particulares del pensar. La crítica al psicologismo es la búsqueda de la posibilidad del conocimiento positivo. Se trata de una pretensión epistemológica que lo va a conducir a asumir posiciones ontológicas definidas. Frege encuentra un "común denominador" en los errores de las tres corrientes filosóficas. Ninguna reconoce un estrato de realidad objetivo no material ni subjetivo 7. Frege se ve obligado a introducir la noción de *objetividad* en su consideración de los números. Esta se refiere a algo que es "regulable", "conceptuable", "enjuiciable" 8, e "independiente" de los sentidos, las intuiciones, la imaginación, "aunque no de la razón" 9.

¿Que es un número?

Mosterín resume la caracterización de Frege sobre los números de la manera siguiente:

> "Los números no se dicen de las cosas, sino de los conceptos. Si decimos que la tierra tiene un satélite, o que nuestro sistema solar tiene nueve planetas, o que no hay habitantes en Marte, estamos diciendo algo de conceptos: que bajo el concepto "satélite de la tierra" cae un individuo, bajo el concepto "planeta de nuestro sistema planetario" caen nueve individuos y bajo

el concepto “habitante de Marte” no cae ningún individuo” 10.

Passmore lo explica a su manera:

> “Si nosotros consideramos una cosa física, él dice, vemos de una vez que no tiene en él números específicos. Por ejemplo, un montón de piedras puede ser uno (como un solo montón) o veinte (como conteniendo veinte piedras) o cinco (como siendo hecho de cinco capas). No tiene en él mismo ninguno de estos números e incluso más obviamente, él dice, no puede ser “nada”. Frege concluye que lo que ha sido numerado no es un conjunto de objetos sino un concepto” 11.

Efectivamente Frege establece el carácter de los números como señalan Mosterín y Passmore. En su Prólogo a *Die Grundgesetze der Arithmetik* de 1893 dice Frege:

> “Lo fundamental de mis resultados lo expresé allí, en el & 46, diciendo que la asignación de un número es una aserción sobre un concepto; y en eso se basa el presente sistema. Si alguien tiene una concepción distinta, que intente fundamentar sobre ella mediante signos un sistema consecuente y útil, y verá cómo no se puede. En el lenguaje natural, la situación no es, claro está, tan transparente; pero si se examina cuidadosamente, se hallará que también aquí al asignar un número se nombra siempre un concepto, no un grupo, un agregado o algo por el estilo, y que, incluso si esto ocurre alguna vez, el grupo o el agregado siempre están determinados por un concepto, es decir por las propiedades que debe tener un objeto para pertenecer al grupo, mientras que para el número es completamente indiferente lo que hace grupo al grupo, sistema al sistema, a las relaciones que tienen los términos entre sí” 12.

La concepción de Frege sobre los números plantea un problema que es, de hecho, epistemológico y ontológico. La seguridad con la que Frege dice “... verá como no se puede” atestigua la firme convicción de estar tratando en la aritmética no con criterios sintácticos, fáciles de variar sin consecuencia alguna, sino con una descripción de una realidad que es aprehendida. El número se refiere a los conceptos, pero Frege lo plantea de tal forma que manifiesta un sustrato ontológico, cuya esencia aparece descrita al seno de un mundo objetivo no espacial y no sensible. La aproximación de Frege muestra que los números no se pueden concebir como los conceptos de las ciencias naturales (distinción, color, número) 13, pero al mismo tiempo se escapa de la realidad física.

Una interpretación histórica de las matemáticas

Hagamos una pequeña disgresión. La conciencia, el pensar, el pensamiento y el lenguaje son elementos ligados entre sí y producto todos de la actividad material de los hombres. La conciencia del hombre es, esencialmente, el “ser consciente” de lo que le rodea, de lo objetivo a lo que se opone, y de sí mismo. La expresión de la conciencia es la expresión limitada por el desarrollo biológico-cultural y social concreto del hombre y su conciencia.

La matemática es parte de los productos de la conciencia de los hombres en su proceso de vida, nace como todas las disciplinas teóricas en el seno de la relación señalada. Los conceptos teóricos de la aritmética y la geometría son construidos por los hombres como partes integrantes de la elaboración de su conciencia en su relación con el mundo real, nacen históricamente ligados a las actividades concretas del contar, medir, ordenar, agrupar, organizar, etc., necesarios en esa práctica vital. Se refieren, de una manera diferente a otras nociones de otras ciencias, a condiciones de lo real, aunque mediatizadas por el sujeto (materialmente).

Con el desarrollo global de las sociedades, la cultura, el conocimiento, las técnicas, los conceptos y nociones matemáticas se han reestructurado, reorganizado, se han ampliado se han integrado otros nuevos y se ha establecido en general una legalidad interna. Pero estos elementos han sido engendrados en un proceso de este orden, usando reglas de derivación, implicaciones lógicas, que a su vez, están conectadas con las condiciones del devenir de lo real. El proceso ha conducido a cuerpos teóricos y a reglas que no poseen ni la misma forma ni el mismo contenido originario con la realidad material, pero que no están separados de él.

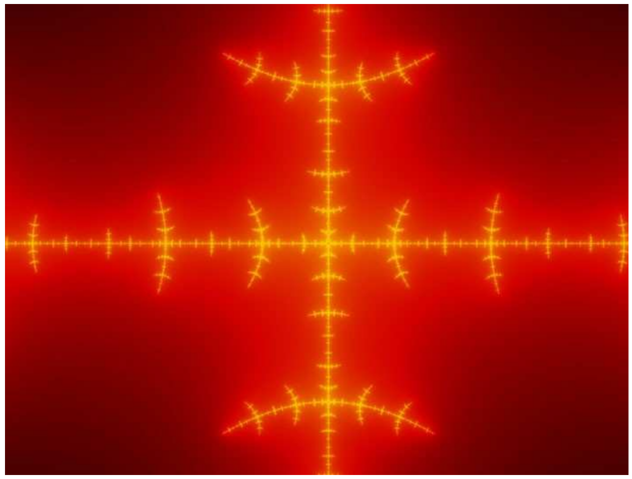
Las proposiciones de la matemática no son meras generalizaciones de hechos físicos o el sentido abstracto de repeticiones materiales, pero están íntimamente conectadas a las relaciones materiales como, en general, sucede con todas las llamadas ciencias naturales.

Se puede estudiar las leyes de la lógica a través de las leyes y reglas de la actividad del sujeto, del pensar. En esta situación no se trata de un sujeto particular o del contenido individual de lo pensado, sino de uno ideal, epistémico. Las leyes de la expresión de la conciencia (como sugerí en el párrafo anterior) también corresponden a las leyes del devenir de lo real.

Los desarrollos matemáticos y lógicos pueden de partida conducir a resultados verdaderos sobre lo real, precisamente a partir de la naturaleza misma de las nociones y reglas de la matemática y la lógica. La aproximación específica al objeto no es, sin embargo, un problema meramente teórico, es también práctico. Los signos 1,2,3, etc., corresponden entonces al marco de las nociones específicas de las matemáticas. Corresponden al movimiento y a la diversidad de lo real. Sin embargo, su referencia no son objetos en sí sino de alguna forma subjetivizados , no a partir de categorías o nociones innatas en el sujeto sino a partir de las condiciones materiales del mismo. Las nociones de las matemáticas nacen de una forma precisa de la relación material sujeto-objeto, más que del objeto en sí. Aquí es posible detectar las diferencias con relación a las de las ciencias "naturales". Hay una intervención precisa del sujeto, aunque material, pero que es la base de su mismo operacionar mental. El número en esta interpretación no es algo que se refiere a conceptos y que encuentra su pleno sentido en el marco de un mundo independiente objetivo no sensible sino que está referido a aspectos de la naturaleza y la sociedad que son determinados en la relación sujeto-objeto. En este terreno debe quedar claro que yo no sugiero que la realidad material de la que es expresión el número como concepto teórico sea aprehendible por los hombres de la misma forma que por ejemplo lo es el color verde. Lo que sí afirmo es la base material de lo que llamamos números, en cuyo sustrato se encuentran condiciones que parten de la diversidad.

La concepción de Frege es bastante diferente de la que he expuesto. Para él los números son objetos referidos a conceptos, a un mundo no sensible. Las reglas de manipulación de esas nociones ¿de dónde pueden provenir? Como no se refieren a la realidad material, deben provenir de este mismo mundo. Este mundo es coherentemente "*timeless*". A partir de aquí es fácil señalar cómo las dificultades de la dialéctica del crear y el descubrir en el conocimiento son resueltas en Frege por la vía ontológica. La verdad se aprehende en la descripción acertada de las leyes de un mundo objetivo irreal. La noción de número en Frege está conectada a la de objetividad y se planteará desde la época del *Grundlagen* a la de "*Der Gedanke*", predominando en el sentido del último término unas veces las consideraciones epistemológicas y otras las ontológicas. Frege asume el proyecto logicista como parte del proceso de rigorización de las matemáticas, de su fundamentación lógica; parte también de la evolución innovadora de la lógica, pero lo hace especialmente en la búsqueda del esclarecimiento de la naturaleza de la aritmética y del sentido último de los números. Sus esfuerzos ayudaron a conformar una visión de las matemáticas que todavía está presente en el cosmos intelectual de nuestros días.

EL PROYECTO LOGICISTA



El proyecto logicista busca en parte dar una respuesta a la pregunta ¿qué es un número?. No se trata simplemente de darle un sentido sintáctico, aprehendido en un sistema formal axiomático.

Para Frege su proyecto pretende mostrar que la naturaleza última de los números es lógica. Se trata de demostrar, en primer lugar, que se puede axiomatizar y, en segundo lugar, que sus axiomas últimos son lógicos. No cualesquiera sistemas formales son apropiados para el proyecto, sino aquellos que puedan evidenciar su contenido lógico. Para Frege la lógica no es matemática como en Boole, tampoco es la sierva de la matemática como en Peano, es la naturaleza más profunda de las matemáticas. Ahora bien, la lógica está conectada a las leyes más profundas de lo pensable. En "*The Thought: A logical Inquiry*" afirma:

> "La palabra "verdadero" indica el objetivo de la Lógica como hace "bello" en la estética o "bueno" en ética. Todas las ciencias tienen la verdad como su meta; pero la lógica está referida también con ella en una manera muy diferente de esto (...). Descubrir verdades es la tarea de todas las ciencias; le cae a la lógica la de discernir las leyes de la verdad" 14.

Más adelante nos dice:

> "Para evitar este malentendido y prevenir la confusión de las fronteras entre psicología y lógica, yo asigno a la lógica la tarea de descubrir las leyes de la verdad, no de la aserción o del pensamiento. El significado de la palabra "verdadero" está explicado por las leyes de la verdad" 15.

La lógica en Frege no sólo apunta a la validez sino que hace referencia a la realidad misma en tanto su objetivo es la verdad. Esta es absoluta, "*timeless*". Por qué es esto así no es difícil de entender, pero no es satisfactorio si se busca la mayor claridad epistemológica.

Sobre los "indefinibles"

Frege define "lo verdadero" como una noción básica y cuyo contenido dice "es probable" que sea "único e indefinible" 16. Aquí es necesario hacer un comentario en cuanto a la forma de tratar esta definición. Cuando se trata de explicar el sentido de una noción como la lógica en términos de lo verdadero, no es posible referirla a solamente "las leyes de la verdad" y decir que lo "verdadero" es "indefinible" sin mayor explicación. Sin entrar en el contenido de este asunto tan importante, el método de mantener nociones indefinibles, indeterminadas, en una teoría axiomática no es problemático. Pero sí resulta peligroso cuando se establece en relación a lo que deben ser los fundamentos filosóficos de la naturaleza de un cuerpo teórico; a través de los "entes indeterminados" todo género de problemas es posible. En las nociones primarias lo que cabe es la explicación epistemológica y si se quiere la interpretación teórica. Frege piensa, sin embargo, que los indeterminados son a veces inevitables. En su artículo "*Negation*" (publicado por primera vez en *Beitrage zur Philosophie des Deutschen Idealismus*, Vol. I, en 1919) nos dice:

> "Después de refutar errores, puede ser útil de trazar las fuentes de las cuales ellos han salido. Una fuente, pienso, en este caso es el deseo de dar definiciones de los conceptos que uno quiere emplear. Es con certeza loable tratar de hacer claro a uno mismo tanto como se pueda el sentido que uno asocia con una palabra. **Pero aquí no debemos olvidar no toda cosa puede ser definida.** Si insistimos a cualquier costo en definir lo que es esencialmente indefinible, vamos a amarrarnos a accesorios inesenciales, y entonces a empezar la indagación en un camino equivocado desde el mismo principio"(Negrita añadida) 17.

En la Introducción a los *Grundgesetze* lo plantea de la siguiente forma:

> "No siempre será posible definirlo todo normalmente, porque nuestro esfuerzo ha de ser precisamente retroceder hasta lo lógicamente simple, que en cuanto tal no es propiamente definible" 18.

Desde Aristóteles encontramos referencia a términos indefinibles, pero esta situación en una teoría axiomática (así como en una teoría en general) es más que una simple y natural característica. Cuando el escepticismo plantea la eterna regresión en los fundamentos del conocimiento 19, no es posible afrontarlo con sólo señalar que en un momento determinado el proceso para en nociones que son indefinibles -y se acabó. Una adecuada indagación sobre los fundamentos de la matemática y la lógica no puede admitir el método de lo “indefinible” sin más. Es posible que dentro del discurso de una teoría surjan los indefinibles; pero entonces se trata de aprenhenderlos con una explicación metodológica esclarecedora, en la que inevitablemente se introducirán reflexiones epistemológicas y filosóficas en general. No es satisfactorio teóricamente analizar el sentido último de la ciencia de la lógica a partir de lo “verdadero” siendo este término indefinible.

Lo verdadero en Frege se encuentra en las leyes de la verdad y si se quiere en alguna parte del proceso de la deducción lógica. Mientras la lógica se trata como conectada a lo absoluto, la aritmética tampoco deja de ser valorada con tan alta estima. Nos indica Kneale:

> “...las leyes de la aritmética no son leyes de la naturaleza, sino leyes de las leyes de la naturaleza, esto es, principios fundamentales acerca de lo pensable” 20.

Es claro que entre “principios de lo pensable” y “leyes de la verdad”, sea lo que sea que signifiquen, debe haber una gran identificación.

La aritmética es lógica

Frege pone las cosas en claro en relación a la aritmética. En “Función y Concepto” nos dice:

> “La aritmética es lógica extensamente desarrollada, que una fundamentación rigurosa de las leyes aritméticas nos retrotrae a leyes puramente lógicas y sólo a tales” 21.

Lo cual debe concretarse en opinión de Kneale así:

> “...desea mostrar (Frege) que el lenguaje matemático en términos de números naturales resulta reducible a un lenguaje en términos de conjuntos, clases o multiplicidades, que en la terminología de los lógicos constituyen extensiones de conceptos. De ahí que expresamente afirme que los objetos aritméticos son en definitiva objetos lógicos” 22.

El proyecto empieza por tratar de reducir el concepto de orden en una secuencia lógica y “...así proceder de ahí al concepto de número” 23, como afirma en el Prólogo de su *Begriffsschrift* de 1879.

En este punto es interesante mostrar las diferencias del proyecto logicista y los resultados expuestos por Peano en la misma etapa histórica. Para Peano y sus seguidores se trataba de reducir el álgebra y la aritmética a unas pocas ideas básicas como: clases, pertenencia de clases, implicación y producto de clases; a tres ideas matemáticas primitivas: cero, número y sucesor; y algunas proposiciones primitivas. En 1889 publica Peano su *Aritmetica Principia Nova Methodo Exposita*, donde establece sus axiomas aritméticos:

(1) 1 es un número; (2) el sucesor de cualquier número es un número; (3) no hay dos números que tengan el mismo sucesor; (4) 1 no es el sucesor de ningún número; (5) cualquier propiedad que pertenezca a 1 y, así mismo, al sucesor de cualquier número que lo posea pertenecerá a todos los números 24.

Estos axiomas serían la base de la reducción axiomática de Peano. Dedekind había llegado a resultados similares, aunque sin usar explícitamente el lenguaje de la axiomática, un poco antes que Peano. Estos resultados no resolvían el problema de qué es un número, sobre su significado. EL problema residía en la ausencia de una conexión del trabajo axiomático de Peano con una precisión de la aritmética más allá de la de una progresión 25. Frege, con una actitud metodológica diferente a la de Peano y Dedekind, partirá de la definición de los números para extraer de ellos las reglas de la aritmética. La diferencia era establecida a partir de las motivaciones diferentes: como señala Gödel, para Peano se trataba de un trabajo a aplicar en la misma práctica matemática, mientras que para Frege se buscaba el análisis del pensamiento 26. Con Dedekind, sin embargo, existía un vínculo más estrecho entre sus criterios, puesto que ambos compartían la idea de que la aritmética no se refería al mundo material, sino que sus leyes eran leyes del pensamiento 27. Es seguro que Dedekind ejerció alguna influencia en Frege 28.

Los trabajos de Peano se condensaron en la *Revista de Matemática* y en su *Formulario de Matemática*; su objetivo se concentraba en el rigor y en los fundamentos lógicos. Ellos tuvieron una influencia decisiva en la evolución de la lógica-matemática de Russell, pero no esencialmente en la obra de Frege. Frege se separó de la tradición de la simple y técnica rigorización de las matemáticas, aunque, a partir de ella, sobre la base de intereses filosóficos mayores. Como señala Beth en *Les Fondements Logiques des Mathématiques*:

> "En la base de las investigaciones de Frege sobre los fundamentos de la aritmética, hay un sistema y una doctrina lógicos que son fuertemente divergentes a muchos de sus predecesores y de sus contemporáneos: se distingue de Boole y Schröder en que busca una formalización no sólo de la lógica, sino de las matemáticas puras enteras; de Peano por su interés más filosófico que enciclopédico" 29.

"Equinumerocidad" y la definición de número

La forma concreta como Frege trató de mostrar la reducción lógica de la aritmética parte de la definición de número a través de los conceptos de "*equinumerocidad" y "extensión de concepto".*

En el Prólogo a los *Grundgesetze* señala:

> “...los recorridos tienen además una gran importancia fundamental; yo defino el número mismo como una extensión de concepto, y las extensiones de concepto son según mi concepción, recorridos” [30]

En la Introducción al mismo libro establece:

> “Así quedará establecido definitivamente que la asignación de número contiene una afirmación sobre su concepto. He reducido el número a la relación de equinumerocidad y ésta a la aplicación biyectiva. De la palabra “aplicación” puede decirse lo mismo que de la palabra “conjunto”. Ambas se usan ahora con frecuencia en la matemática, y en la mayoría de los casos falta una comprensión profunda de lo que realmente se quiere designar con ello. Si es correcta mi idea de que la aritmética es una rama de la lógica, entonces habrá que elegir en vez de “aplicación” una expresión puramente lógica. Y escojo la de “relación”. Concepto y relación son las piedras fundamentales sobre las que construyo mi edificio” [31]

En el *Grundlagen* ya establece su definición de lo que es un número a partir de lo “equinumérico”:

> “... la expresión” el concepto F es equinumérico respecto al concepto G” significa lo mismo que la expresión: “hay una relación φ que coordina biunívocamente a los objetos que caen bajo el concepto F con los objetos que caen bajo G”. Repito: el número que corresponde al concepto F, es la extensión del concepto “equinumérico respecto al concepto F”, y agrego: la expresión “n es un número” significa lo mismo que la expresión “hay un concepto de tal tipo que es el número que le corresponde” [32].

En el *Grundgesetze* Frege va a definir número en los mismos términos [33].

El axioma de comprensión

Las definiciones de Frege van a tener una dificultad que luego se manifestaría como el talón de Aquiles de su *Grundgesetze*. Esta se encuentra en la relación de conceptos o propiedades y conjuntos; Frege establece un extraordinario vínculo que se suele llamar el principio o axioma de comprehensión. Beth en su libro *Mathematical Thought* lo formula así:

> “(i) Los objetos que comparten una cierta propiedad pueden ser traídos a un concepto común que exprese su propiedad característica; (ii) cada concepto es un objeto y entonces puede en su turno ser subsumido bajo un concepto. (iii) dos conceptos que se aplican a los mismos objetos son idénticos” [34].

Quine en “On Frege's way out” lo expresa simbólicamente:

“De acuerdo al sistema original de Frege, cada atributo φ tenía una clase $\hat{x}(\varphi\hat{x})$ como su extensión, y $\hat{x}(\varphi\hat{x}) = \hat{x}(\Psi x) .\supset. (\hat{x})(\varphi\hat{x} \cong \Psi\hat{x})$” 35.

Teoría de conjuntos y reducción logicista

El razonamiento fregeano envuelve la noción de clase en una orientación no muy diferente a la suministrada por la teoría de conjuntos de Cantor 36. Para Beth la conexión logicismo y cantorismo es muy estrecha; la diferencia se refiere a la consideración que hacen ambos de la lógica: para el segundo la lógica está instrumentalizada al servicio de la Teoría de Clases 37. Frege conocía la obra de Cantor y compartía sin lugar a dudas la existencia del nuevo “paraíso” de las clases 38.

Hay dos observaciones al proyecto logicista de Frege que debemos hacer aquí: por un lado, lo que ha hecho Frege es trasladar la aritmética y el lenguaje de los números al lenguaje de la teoría de conjuntos. Si se quiere se ha ofrecido una reducción a ésta y a la lógica; pero no está claro que ésta sea a su vez lógica. Por otra parte, tampoco está claro que la noción de clase no presuponga una alusión a lo numérico desde un principio, que la noción de “extensión de concepto” esté “libre” de lo numérico. Frege trató de buscar esclarecimiento, sobre esta última dificultad, sin embargo, sus resultados no fueron totalmente satisfactorios.

La obra de Frege

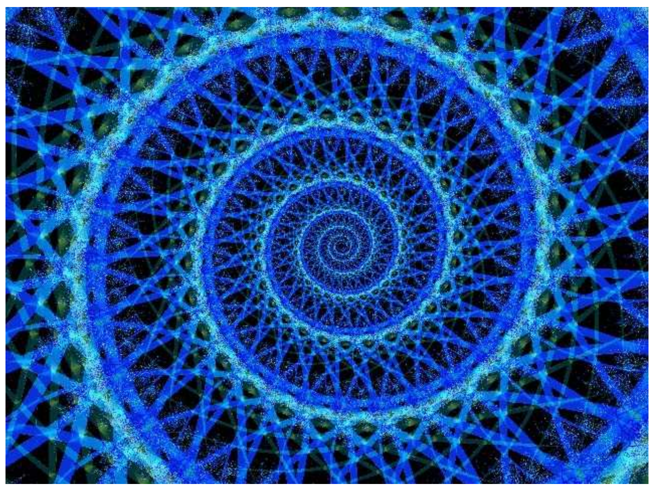
La reflexión sobre la naturaleza de la aritmética y la “logicización” de la misma fueron el eje central de las preocupaciones teóricas de Frege la mayor parte de su vida.

Podemos afirmar que desde el mismo *Begriffsschrift* tomó lugar este intento. En esta obra de 1879 Frege trataba de dar un lenguaje formalizado y preciso capaz de expresar las leyes de la lógica y la aritmética. Se trataba de una obra preparatoria, de construcción del instrumental lógico y simbólico para permitirle probar su visión particular sobre la naturaleza de la aritmética. Así lo expresa en el Prólogo a su *Conceptografía*:

> “Como he señalado al principio, la aritmética ha sido el punto de partida del curso de pensamiento que me ha conducido a mi conceptografía. A esta ciencia, por tanto, pensé aplicarla primero, tratando de analizar más sus conceptos y de fundamentar más a fondo sus teoremas” 39.

Aunque sus objetivos aquí están mediatizados por las necesidades de su proyecto logicista, Frege obtiene importantes resultados para el desarrollo de la lógica. Por primera vez aparecen los cuantificadores y las variables ligadas, con lo que desarrolla la primera teoría coherente de la cuantificación; aparece el cálculo proposicional de funciones de verdad, el análisis de la proposición como función y argumento en lugar de sujeto y predicado; por primera vez la distinción entre predicados de primer orden y de segundo; se formaliza la lógica sentencial y se presenta un cálculo deductivo para esta última. La redacción del *Die Grundlagen der Arithmetik* (publicado en 1884) buscaba el esclarecimiento de las nociones de número y una discusión filosófica sobre sus ideas logicistas en torno al carácter de la aritmética. *Die Grundgesetze der Arithmetik* (publicada en dos volúmenes, en 1893 y 1903 respectivamente) era la materialización precisa de su proyecto, la obra que debería dar cuenta definitivamente de la naturaleza lógica de la aritmética.

LA PRIMERA CRISIS



No habiéndose terminado de imprimir el segundo tomo de los *Grundgesetze* uno de sus pocos lectores, Bertrand Russell, descubrió una paradoja en uno de los pilares esenciales del edificio fregeano.

Las clases que no se pertenecen a sí mismas

La paradoja aparece precisamente en su noción de “extensión de concepto”, es decir, una paradoja interna a la caracterización de los conjuntos. Frege, en el apéndice del volumen dos de los *Grundgesetze*, la expresa así:

> “Nadie esperará afirmar que la clase de los hombres es un hombre. Aquí tenemos una clase que no se pertenece a sí misma. Digo que algo pertenece a una clase cuando cae bajo el concepto cuya extensión es la clase. Fijemos nuestra mirada sobre el concepto: clase que no se pertenece a sí misma. La extensión de este concepto (si podemos hablar de su extensión) es entonces

la clase de clases que no se pertenecen a sí mismas. Para acortar vamos a llamarla la clase K. Preguntamos ahora si esta clase K se pertenece a sí misma. Primero, supongamos que sí lo hace. Si algo pertenece a una clase, cae bajo el concepto cuya extensión es la clase. Entonces si nuestra clase se pertenece a ella misma es una clase que no se pertenece a sí misma. Nuestra primera suposición conduce entonces a una auto-contradicción. En segunda lugar, supongamos que nuestra clase K no se pertenece a ella misma; entonces ella cae bajo el concepto cuya extensión es ella misma, y entonces se pertenece a ella misma" 40.

Entre concepto y extensión de concepto aparecía entonces una dificultad que no era fácil de abordar. En el terreno de la teoría de clase ya habían aparecido paradojas antes que la de Russell. Ya en 1895 Cantor mismo había detectado la que se conoce como Burali-Forti y en 1899 la que lleva su mismo nombre. En 1905 J. Richard encontró una nueva y años después aparecieron las de Berry y Grelling. La emersión de las paradojas hicieron cimbrar el proyecto de Frege.

Una visión filosófica en juego

No se trataba para él solamente de un problema técnico, sino de un cuestionamiento de toda la visión que tenía sobre la aritmética. La profundidad de la crisis que se abrió en esta etapa fregeana del logicismo debe entenderse bien. Para Frege, su proyecto era la descripción de verdades absolutas correspondientes a un mundo no tangible pero real. La paradoja cuestionaba no sólo el proyecto sino el sustrato filosófico del mismo. Jean Largeault en su libro *Logique et Philosophie chez Frege* hace un balance global sobre esta situación que merece citarse:

"Un platonismo tan extremo no es de hecho incompatible con el invento de una solución de recambio en el caso en que sugiera una contradicción: en un tal sistema la eventualidad misma de una contradicción es *a priori* impensable ya que las proposiciones primitivas supuestamente deben formalizar relaciones lógicas naturales entre datos lógicos naturales. Sin embargo la contradicción se produce. Estrictamente consecuente con sus premisas realistas, Frege abandona a la vez la lógica y el logicismo cuando constata que la paradoja de Russell pone inexplicablemente en cuestión, no las reglas de deducción ni la deducción misma, sino el fundamento de verdad considerado por él como siendo a la vez objetivo y *a priori*, de donde sale la deducción: es como si la verdad se negara a sí misma, por un fenómeno que debe haber sido en efecto tan enigmático para Frege como lo fue la irracionalidad de Ö2 para los pitagóricos" 41.

Frege sabía que lo que estaba en juego era toda su concepción filosófica. En los mismos *Grundgesetze* lo expresa con claridad:

> "Lo que está en cuestión no es sólo mi camino particular para establecer la aritmética, sino si es posible de dar a la aritmética alguna fundamentación lógica" 42.

No obstante en esta época todavía consideraba que era posible resolver las dificultades. Dice en el Apéndice que aparece en 1903:

> "El primer problema de la aritmética puede ser tomado como el problema de: ¿Cómo aprehendemos los objetos lógicos, en particular los números?. ¿Qué nos justifica al reconocer números como objetos?. Incluso si este problema no está resuelto por ahora en la extensión que yo creí estaba cuando escribí este volumen, no obstante no dudo que el camino hacia una solución ha sido encontrado" 43*.*

Frege no abandonó la lógica y el logicismo de una manera abrupta ante la aparición de las paradojas. Buscó soluciones a las dificultades a partir de modificaciones del axioma V de los *Grundgesetze*. Como reseña Quine en "*On Frege's Way Out*":

> "...Frege está proponiendo, contrario a (3) (se refiere al axioma de comprehensión -añadido) que al menos para algunos atributos ϕ y Ψ tomemos $\hat{x}$ ($\phi\,\hat{x}$) y $\hat{x}$ (Ψ x) siendo una y la misma clase incluso aunque "$\phi\,\hat{x} \cong \Psi\,\hat{x}$" sea falso de un objeto especial $\hat{x}$, viz, esa misma clase" 44.

En 1938 Lésniewski probó la inconsistencia de la propuesta de Frege 45. Una alusión a la sugerencia de Frege sobre la reducción del alcance del axioma V fue incluida por Russell en una nota al apéndice sobre Frege de sus *Principios* 46. Russell, sin embargo, no seguiría en su solución del "factor paradojas" la propuesta que elaboró frege.

Frege siguió afirmando, después de la emersión de las paradojas, la existencia de un mundo de objetos no sensibles e independientes, como lo expresa en "*Der Gedanke*". Pero el proyecto logicista no fue apuntalado otra vez por él. Intentó fundamentar la aritmética en la geometría. La concepción filosófica que lo condujo al proyecto logicista sufrió un tremendo golpe del que, a pesar de los intentos y las incursiones siempre lúcidas que hizo luego, no se recuperó en definitiva.

Frege: Verdad semántica versus verdad sintáctica

El logicismo de Frege retrotrae varias ideas de Leibniz a una época en la que la producción matemática y lógica permiten la aprehensión de un proyecto concreto reduccionista de la aritmética. Frege afirmó, aunque sin caer en el formalismo, el paradigma de lo formal integrado al racionalismo. Lo verdadero va a ser encontrado en la derivación lógica, en la deducción misma.

La aritmética para Frege es conocimiento verdadero *a priori*, desconectado de la realidad física y separada de cualquier intuición. Para Frege la noción de analiticidad que señala Leibniz y Kant se establece en términos *stricto sensu* de derivación lógica. Las proposiciones de la aritmética son entonces analíticas. Esta es una forma de enfatizar su naturaleza separada del mundo real material. Frege a través de los resultados que obtiene en su *Conceptografía* va a apuntalar el cálculo simbólico y sintáctico. También va a apoyar el contenido abstracto y formal en la axiomática de la aritmética. El logicismo de Frege apuntaló un paradigma que enfatiza los aspectos deductivo-formales, no intuitivos ni materiales de la aritmética, pero lo hizo mal, lo hizo a medias.

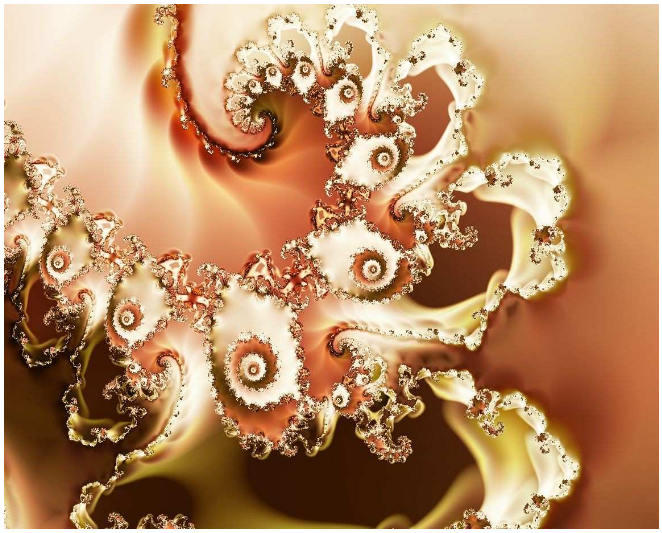
Para Boole y Leibniz un cálculo simbólico debía dar cuenta no de la aritmética, sino de los pensamientos en general; la lógica en Boole es operatoria-calculatoria, por eso es matemática. Para Frege no se trata de lo mismo. El *Begriffsschrift* genera un lenguaje en el que se deberán mover significaciones. Frege quiere dar cuenta de una nueva matemática, pero en ella afirma los fundamentos lógicos; la evidencia no es sintáctica, es semántica.

La verdad no es mera manipulación de signos, corresponde a lo real. Sólo que lo real aquí no es material. La lógica está conectada con lo más profundo de las leyes de la "verdad". La aritmética es verdad. En Frege el logicismo es platonista; afirma entonces alguna realidad, sea cual sea. Esto no es formalismo. El objeto condiciona sus reglas y la descripción de sus relaciones internas. Siempre que se apela a una realidad ésta es determinante. En Frege este mundo real no es material y por eso las totalidades, las entidades y objetos cuya existencia se afirma, no siempre resultan apropiadas en conexión con la naturaleza de las matemáticas. Frege concibe el proyecto logicista sobre la base de una concepción filosófica de la aritmética y la matemática en general.

Su platonismo no es una visión ajena a las condiciones en la abstracción de la "nueva matemática". Pero Frege incluso no va en su reducción logicista más allá de la aritmética. En lo que se refiere a la geometría permanece fiel a Kant; en ella sí es necesario recurrir a una intuición. Frege apuntaló el paradigma de lo formal y *a priori* en matemáticas, pero sus alcances fueron limitados, tanto por la poca repercusión que tuvo en los medios intelectuales de la época, como por la naturaleza de su concepción.

Las paradojas (de las que Frege sólo se dio cuenta al final 47) abrieron las condiciones para intentar redefinir un proyecto logicista. Russell, que había iniciado su vida filosófica en una luna de miel con el idealismo britanizado de Kant y Hegel, había sufrido una "revolución" en sus aproximaciones intelectuales filosóficas. El interés por la lógica matemática lo iba a conducir a iniciar la segunda y más influyente etapa del logicismo moderno.

CAPÍTULO III
RUSSELL: UNA SEGUNDAD ETAPA EN EL LOGICISMO



INTRODUCCIÓN

Cuando las paradojas de la Teoría de clases emergieron, el proyecto logicista de Gottlob Frege entró en una crisis que él mismo fue incapaz de resolver. No se trataba para Frege de un problema técnico, sino de un cuestionamiento de toda la visión que tenía sobre la aritmética. La profundidad de la crisis que se abrió en esta etapa fregeana del logicismo debe entenderse bien: para Frege, su proyecto era la descripción de verdades absolutas correspondientes a un mundo no tangible pero real. Las paradojas cuestionaban el sustrato filosófico del proyecto. Frege pensaba que lo que estaba en juego era la posibilidad de la fundamentación lógica de la Aritmética. Intentó soluciones a las dificultades presentadas por la vía de modificaciones en el "Axioma V" de los *Grundgesetze*, pero este camino no obtendría buenos resultados, como Lésniewski demostraría en 1938. Frege siguió después de la emersión de las paradojas afirmando la existencia de un mundo de objetos no sensibles e independientes, incluso tal vez de una manera radical como se expresó en "*Der Gedanke*". Pero el proyecto logicista no fue apuntalado otra vez por él. Incluso intentó fundamentar la Aritmética en la Geometría. Una etapa en el Logicismo había acabado.

El proyecto logicista de Frege representó un primer intento por dar cuenta teóricamente de la naturaleza de las nuevas matemáticas, partiendo de los resultados en la Lógica y en la rigorización de las matemáticas del siglo XIX. Frege acudió a la filosofía logicista de Leibniz, y apuntaló una nueva versión de un racionalismo axiomatizante que se distanciaba de la filosofía de las matemáticas de Kant. Frege conjuró el paradigma racionalista y la visión lógico-axiomática sobre las matemáticas de una manera técnica extraordinariamente precisa. El apuntalamiento de este modelo tan generalizado de comprensión de las matemáticas no condujo, sin embargo, a defender una visión sintáctico-formalista de las mismas. El platonismo (en una u otra medida) que siempre recorrió su pensamiento representó una importante barrera para impedirle llegar a ese punto. Para Frege, la verdad matemática nunca podía reducirse a la mera manipulación de signos, correspondía a lo real.

En los años en que Frege fracasa en la fundamentación logicista de las matemáticas, no era claro que esta resultaba una empresa imposible en toda circunstancia. En medio de un contexto de incertidumbre en las mismas bases de las matemáticas, un nuevo intento logicista sería realizado buscando dotarlas del fundamento absoluto que aparecía necesario.

EL FACTOR PARADOJAS Y EL LOGICISMO

Para Bertrand Russell no sólo la aritmética era reducible a la lógica, como en Frege; también el resto de las matemáticas 1. En él desaparecía toda alusión a una intuición kantiana en matemáticas. Russell llegó al logicismo de una manera independiente de Frege; su aproximación se establecería en el paso de su reacción frente a una conciencia anterior idealista, y a partir del contacto con los trabajos de Peano en la rigorización de las matemáticas. En la *Evolución de mi pensamiento filosófico* va a reconocer que algunas de las ideas que aparecerán en los *Principios* y en *Principia Mathematica*, habían sido planteadas por Frege por lo menos 16 años antes 2.

La eliminación de las contradicciones

La filosofía de las matemáticas de Russell así como el proceso de la materialización de su proyecto logicista estuvieron determinados por la realidad de las paradojas; Russell abrió una segunda etapa caracterizada por la búsqueda de la solución a éstas. Las preocupaciones de Russell desde que escribió los *Principios* giraron en torno a la solidez y consistencia de las matemáticas. Mientras que Frege escribió durante dos décadas sus principales obras sobre la base incuestionada de la creencia en una aritmética sólidamente anclada en la verdad absoluta e inquebrantable, Russell partió de un mundo matemático sacudido por la emersión de hechos casi tan graves como los irracionales para los pitagóricos.

Esto sería decisivo: la imagen primigenia sobre la matemática de Russell (de un edificio de verdades firme y seguro) interactuaría con las dificultades arrastradas por el “factor paradojas” desde un principio. Esto condicionó la evolución de toda su aproximación teórica sobre las matemáticas.

En el prefacio de *Principia Mathematica* Russell afirmaba que había demostrado “...que es posible construir una lógica matemática que no lleve a contradicciones” 3. Esto encerraba el núcleo de sus pretensiones filosóficas sobre las matemáticas. El logicismo se plantea aquí como la forma fundamental de asentar la coherencia y solidez de las matemáticas. Al igual que en Frege se trataba de exhibir la naturaleza axiomática de éstas en primer lugar, y demostrar cómo las nociones primarias son lógicas. El punto de partida es transparente: al igual que en Frege la lógica es consistente, quedará probado que también la matemática lo es, si se reduce a ésta.

Logicismo y analiticidad

El proyecto logicista en Russell pretende la reducción de toda la matemática, pasando a través de la aritmetización de la misma. Esta pretensión logicista niega la afirmación kantiana de todas las matemáticas (incluyendo la geometría) como conocimientos sintéticos. Russell piensa que el logicismo da el sentido correcto a lo que se debe entender por *a priori* en las matemáticas:

> “El hecho de que todas las constantes matemáticas son constantes lógicas, y que todas las premisas de la matemática se hallan relacionadas con ellas, da, creo, la formulación precisa de lo que los filósofos querían al asegurar que la matemática es *a priori*. El hecho es que, una vez que ha sido aceptado el aparato lógico, se deduce necesariamente toda la matemática” 4.

El proyecto logicista lo explican Putnam y Benacerraf en su *Philosophy of Mathematics* así:

> “El logicismo (Frege-Russell-Whitehead) surge en referencia a otro problema: la naturaleza de la verdad matemática. Los logicistas esperaban mostrar, contra Kant, que las matemáticas no tienen un “objeto”, que trata sólo con relaciones entre conceptos, y que estas relaciones eran “analíticas” 5.

Para Frege, en efecto, la reducción lógica es sinónimo de analiticidad 6. Para Russell la reducción logicista libraba las matemáticas de una intuición subjetiva. Sin embargo, por lo menos en una primera etapa de su evolución filosófica, la lógica era referida al mundo. Carnap, en su artículo de 1931 “*The logicist foundations of mathematics*” precisa el proyecto, reduciéndolo a dos aspectos:

"1. Los conceptos de las matemáticas pueden ser derivados de conceptos lógicos a través de definiciones explícitas. 2. Los teoremas de las matemáticas pueden ser derivados de axiomas lógicos a través puramente de la deducción lógica" 7.

Hempel, en "*On the nature of mathematical truth*", nos dice (lo que será la interpretación positivista de la matemática), como consecuencia de lo que establece el logicismo, que la verdad de las proposiciones matemáticas se establece sólo por virtud de las definiciones matemáticas que intervienen 8. La certeza de las proposiciones matemáticas es entonces "incuestionable" y las matemáticas no poseen "contenido fáctico" alguno: "no transmiten información sobre ningún material empírico" 9.

La derivación logicista

El proyecto logicista no implica que cada símbolo matemático debe tener un equivalente lógico, se trata más bien de una traducción de unos enunciados en otros 10. Eso sí en todo momento se supone que las proposiciones son sustituidas sin alteración del valor de verdad; como dice Ayer: "el sistema es extensional" 11.

El proyecto de Russell (al igual que en Frege) no es realizado sin "intermediarios": la teoría de conjuntos eStá en el camino, y no está claro que ésta sea lógica. En este sentido tampoco está claro que esta reducción logicista sea sinónimo de demostración del carácter analítico de la matemática. De hecho, hay más problemas involucrados, que luego analizaremos 12.

El proyecto logicista se desarrolla en detalle en *Principia Mathematica*. La noción más elemental usada aquí es la de proposición 13. Las oraciones que contienen variables y que al sustituirse por constantes dan proposiciones, se llaman funciones proposicionales. Toda proposición debe tener un valor de verdad.

Las proposiciones primitivas usadas son:

i) : pvp.).p

ii) : q.). pvp

iii) : pvq.). qvp

iv) : pv (qvr).)qv(pvr)

v) : .q)r.):pvq.)pvr

Estas proposiciones deben estar acompañadas de reglas precisas de determinación de “sus propias consecuencias” 14. El camino seguido en *Principia* hace pasar de las proposiciones a las funciones proposicionales. Estas últimas representan clases a través de lo que puede llamarse definiciones intencionales. Como señala Wilder:

> “...la noción de conjunto puede ser reemplazada por la de propiedad, un conjunto es considerado consistiendo de todas las cosas que poseen cierta propiedad dada” 15.

Russell y Frege

Russell en su *Introducción a la Filosofía Matemática* nos describe la esencia del proceso de su derivación logicista. Parte, en primer lugar, de la reducción axiomática de Peano, quien ha partido de las nociones básicas de cero, sucesor, y número. Critica la axiomatización de éste en términos similares a los de Frege 16. La axiomatización de Peano permite que toda progresión sea definida por ella. Russell estima que sólo su teoría supera los problemas 17. Para Russell “Un número es algo que caracteriza conjuntos, a saber, a los que tienen ese número” 18. Es decir, se trata de una propiedad. Contar para él:

> “...consiste en establecer la correlación de “uno a uno” entre el conjunto de los objetos a contar, y el de los números naturales (excluyendo al cero) que se usan en el proceso” 19.

Y además:

> “La noción de coordinación está lógicamente implicada en la operación de contar, y es lógicamente más simple aunque sea menos familiar” 20.

La conexión teórica con Frege es transparente, pero Russell no asimila su noción de número a la de Frege: “El número de una clase es la clase de todas las clases que le son coordinables” 21. ¿Por qué prefiere esta aproximación? Russell lo señala en el mismo libro:

> “A expensas de una pequeña singularidad, esta definición proporciona algo determinado e indubitable; y no es difícil demostrar que los números así definidos gozan de todas las propiedades que esperamos que tengan” 22.

De una manera más extensa y precisa se refiere a ello en *La evolución de mi pensamiento filosófico*:

> “Esta definición tiene varias ventajas. Afronta todos los problemas que habían surgido antes en relación con “0” y “l”. “0” es la clase de aquellas clases que no tienen miembros, es decir, es la clase cuyo único miembro es una clase que no tiene miembros. “l” es la clase de aquellas clases que tienen la propiedad de consistir en cualquier cosa que sea idéntica a algún término x. Una segunda ventaja de la definición es que vence las dificultades relativas al uno y a muchos. (...). Pero mucho más importante que cualquiera de estas dos ventajas es que nos vemos libres de los números como entidades metafísicas. Se convierten, de hecho, en meros convenios linguísticos con no mayor sustancialidad de la que tiene “etcétera” o “por ejemplo” 23.

Esta definición pone de manifiesto que la aproximación de Russell es distinta a la de Frege. Hay una actitud que podríamos considerar “nominalista” que busca hacer desaparecer (como la navaja de Occam) entidades innecesarias. En la segunda edición de los *Principios*, Russell relata que en esa época (1903) su posición era fundamentalmente platonista. Sin embargo, es imposible negar que a lo largo de esta etapa de la evolución de su obra también cohabitará una cierta actitud nominalista. Es la que le llevará a la “teoría de las descripciones” y a la “n*o class theory*”.

Para algunos (como Körner) existen dos vertientes del logicismo: *nominalista* en Russell y *realista* en Frege. Esto se establece a partir del uso diferente de la definición 24.

En mi opinión no es muy adecuada esta separación que establece Körner. Russell no es nominalista, ni su logicismo puede caracterizarse como tal. Como veremos, Russell no sostiene la misma aproximación filosófica de Frege sobre las matemáticas, pero existen muchos puntos de intersección (cuya magnitud en definitiva dependerá también del momento preciso de la obra de Russell que se considere). En los *Principios*, en el apéndice sobre Frege, Russell dice: “Frege da exactamente la misma definición de números cardinales que yo he dado, por lo menos si identificamos su *campo* con mi *clase*” 25. Russell aquí afirmaba las coincidencias de su visión con Frege (aunque un poco después critica como “demasiado física” su noción de objeto 26).

Un aspecto importante del desarrollo que establece Russell en *Introducción a la Filosofía Matemática* es en torno a la inducción matemática. Refiriéndose a algunos comentarios de Poincaré dice:

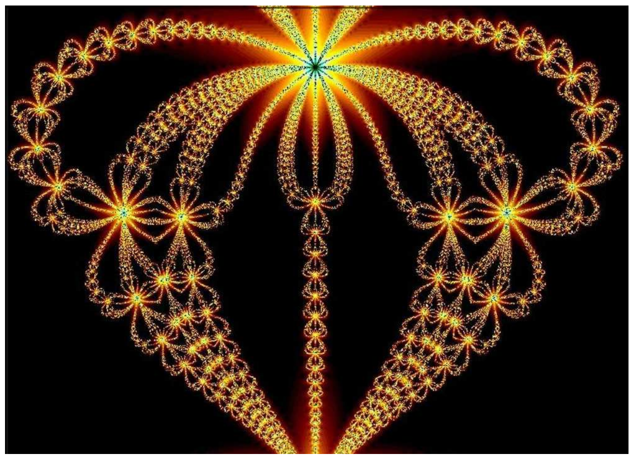
> “Ahora sabemos que todas estas consideraciones son erróneas, y que la inducción matemática es una definición, no un principio” 27.

Los números naturales van a ser definidos como:

> “...aquellos números en los que las demostraciones por medio de la inducción matemática son aplicables, es decir, como aquellos que poseen las propiedades inductivas” 28.

La inducción matemática hace referencia a tal vez la característica más importante de la aritmética. En su definición se encierra lo que será una fuente de dificultades para la aproximación russelliana.

LA TEORÍA DE TIPOS



El “factor paradojas” era tal vez el elemento más decisivo en la motivación de la actitud nominalista en Russell (que he descrito antes). Se trataba de un problema de extraordinaria importancia para la fundamentación de la matemática. Russell pensaba que las paradojas se referían a problemas con la lógica y su expresión; lo que tomaba lugar a partir de las semejanzas que encuentra entre las paradojas de las clases con la de Epiménides. Los primeros intentos para dar cuenta del factor dificultuoso lo expresaba en los *Principios de la Matemática* 29. La forma de abordar el problema era aquí, sin embargo, apenas un ensayo. Establecerá un mejor intento hasta 1908 cuando publica su “*Mathematical logic as based on the theory of types*”. En ese artículo define “tipo” de la siguiente forma:

> “...el campo de significación de una función proposicional, esto es, como la colección de los argumentos para los que la mencionada función tiene valores...” 30.

Establece entonces el principio de lo que se conoce por la “teoría de los tipos”:

> “La clasificación en tipos de los objetos se hace necesaria en razón de las falacias reflexivas que de otro modo surgirían. Estas falacias, como vimos, han de ser evitadas poniendo en práctica lo que podría llamarse el “principio

> del círculo vicioso", esto es: "ninguna totalidad puede contener miembros definidos en términos de sí misma". Dicho principio, formulado en nuestro lenguaje técnico, se convertiría en: "aquello que contenga una variable aparente no debe constituir un posible valor de dicha variable". Por consiguiente, cuanto contenga una variable aparente habrá de ser de diferente tipo que los posibles valores de esta última; diremos que es de un tipo superior. Así pues lo que determina el tipo de una expresión son las variables aparentes contenidas en éste" 31.

La aproximación de Russell partía de una idea que primero expresó J. Richard y después fue desarrollada por Poincaré 32. El mismo año 1908 Zermelo y Brouwer trataron de dar cuenta de las paradojas a través de dos orientaciones totalmente diferentes 33.

En "*The logicist foundations of mathematics*" Carnap nos resume técnicamente la teoría de tipos:

> "...la teoría de tipos consiste en la siguiente clasificación de expresiones en diferentes "tipos": al tipo 0 pertenecen los nombres de los objetos ("individuos") del dominio de discurso (e.g.a.b,...). Al tipo 1 pertenecen las propiedades de estos objetos (e.g.f(a), g(a),...). Al tipo 2 pertenecen las propiedades de estas propiedades (e.g. F(f), E(f),...) (...). Al tipo 3 pertenecen las propiedades de propiedades, y así sucesivamente. La regla básica de la teoría de tipos es que cada predicado pertenezca a un determinado tipo y puede ser aplicado significativamente sólo a expresiones del tipo inmediatamente inferior" 34.

La teoría ramificada de tipos

Esta regla de ordenación daba cuenta de las paradojas; sin embargo, Russell creó también la "Teoría ramificada de tipos" para dar cuenta de las paradojas como la de Epiménides, Berry, etc. Ramsey demostró en 1925 que esta última no era necesaria para resolver las paradojas lógicas. El dividía las paradojas en lógicas y epistemológicas (Ladrière más recientemente las divide en sintácticas y semánticas 35). Para dar cuenta de las lógicas bastaba la teoría simple de tipos, la "ramificada" introducía un axioma extralógico, a saber: el de *reducibilidad*. En el artículo de 1908 Russell establecía la equivalencia para todos los valores de toda función proposicional y una "función predicativa" 36. Esta hipótesis la llamaba "*axioma de las clases o axioma de reducibilidad*" 37. En el mismo artículo Russell hacía una observación sobre la necesidad de este axioma que conecta con lo que hemos señalado característica central de la aritmética:

"Mas si la matemática ha de ser posible, es absolutamente necesario que encontremos un medio de formular enunciados que equivalgan de algún modo a aquello en que pensamos al hablar (impropiamente) de "todas las propiedades de x". **Esta necesidad se pone de manifiesto en relación con la inducción matemática**"(Negrita añadida) 38.

LOS AXIOMAS NO LÓGICOS

El axioma de reducibilidad era un defecto de la Teoría Ramificada de Tipos. En su *Introducción* de 1918 así lo formula:

"Existe un tipo de funciones -a tal que, dada cualquier función a, ella es formalmente equivalente a una función del tipo en cuestión" 39.

En esa obra nos indica la importancia que le atribuía:

"El axioma de reducibilidad implica todo lo que realmente es esencial en la teoría de clases; por este motivo cabe preguntarse si existe una razón para suponerlo verdadero" 40.

Aquí es claro que no se trata de un axioma lógico, pero "podría muy bien ser expresado como una hipótesis cada vez que se lo emplea, en lugar de admitirlo como realmente verdadero" 41. Más aún, se refiere a este axioma como una "forma generalizada de la identidad de los indiscernibles de Leibniz" 42. Ramsey demostró que en las paradojas en las que aparecen términos como "significar", "definir", "nombrar", o "afirmar", éstos no corresponden al terreno de las matemáticas sino a una "meta-teoría"; por lo tanto no es necesario el axioma de reducibilidad 43.

El axioma de elección

Los problemas en relación a axiomas no lógicos no acaban con el de reducibilidad. En *Introducción a la Filosofía Matemática* nos enuncia otro, el "*axioma de multiplicación o elección*":

> "Dada una clase de clases mutuamente exclusivas, de las cuales ninguna es nula, existe por lo menos una clase que tiene exactamente un elemento común con cada una de las clases dadas" 44

Acerca de su verdad o falsedad, Russell afirma que no se sabe 45. El axioma de elección fue aludido por Peano en 1890, fue reconocido por Beppo-Levi en 1902 y "sugerido a Zermelo por Erhardt Schmidt en 1904" 46. El uso explícito del axioma por Zermelo en 1904 ocasionó todo un revuelo en el *Mathematische Annalen* 47. Este axioma incidía sobre una problemática conectada con los fundamentos de la matemática: la noción de existencia en matemáticas. Russell no debatió mucho sobre el axioma, simplemente lo integró en su edificio logicista.

Había otro axioma no lógico muy importante: el de *infinitud*. Lo enuncia en 1918 así:

> "Si n es un número cardinal inductivo cualquiera, existe por lo menos una clase de individuos que tiene n elementos" 48.

Sin este axioma (dice Russell) es imposible obtener los resultados matemáticos de los enteros infinitos y los de los números reales 49. Russell va a aceptar que es imposible saber si el axioma es verdadero o falso.

Sin la validez de los dos últimos axiomas mencionados la fundamentación matemática resulta imposible. Por una parte, la inducción en la aritmética no se podría realizar (con ello no hay aritmética), y sin el otro no hay teoría de los números reales.

Por otra parte, la misma teoría de tipos es una ordenación no lógica. El proyecto russelliano no podía dar cuenta de la matemática sin esos axiomas no lógicos. Pero si se introducen esos axiomas ya no estamos en la fundamentación logicista. Los axiomas no lógicos en el logicismo equivalen al "...abandono del proyecto fregeano" 50.

Esto ponía en evidencia una segunda crisis en el logicismo. Con Frege el proyecto se descalabró con la aparición de las paradojas. Con Russell los nuevos intentos conducen al "abandono" del proyecto.

PROBLEMAS DE LAS CLASES

Russell abandonó antes de *Principia Mathematica* el tratamiento de clases y lo sustituyó por las funciones proposicionales; todo en aras de una descripción “menos platonista” de la matemática. En 1918 decía: “las clases son ficciones lógicas”, “símbolos incompletos” 51. Este proceso de “desplatonización” arrancó con la teoría de las descripciones y culminó en la “*no class theory*”. Gödel piensa, sin embargo, que en la primera Russell seguía siendo realista 52.

Russell va a proponer originariamente (1906) dos caminos para la solución a los problemas que encerraba la suposición de que toda función proposicional engendraba una clase: “la teoría del zig-zag “y” la teoría de la limitación de tamaño” 53. Reseña Gödel:

> ‘‘La segunda establecería que la existencia de una clase o concepto depende de la extensión de la función proposicional (exigiendo que no sea demasiado grande) y la primera establecería la dependencia respecto a su contenido o significado (exigiendo cierto tipo de “simplicidad” cuya formulación precisa constituiría el problema)” 54.

La eliminación de las clases

Russell, sin embargo, no siguió ninguno de los caminos que trazó; en su lugar optó por la “*no class theory*”, que significa simplemente que las clases “no existen nunca como objetos reales” 55. Gödel criticaba a Russell por haber introducido en *Principia* principios sin “mencionar en absoluto su dependencia de la teoría de la inexistencia de clases” 56. Refiriéndose al principio de “círculo vicioso” decía Gödel:

> "*Principia* (en su primera edición) no satisface (....) si "definible significa "definible dentro del sistema", y no se conoce ningún otro método de definir fuera del sistema (o fuera de otros sistemas de matemática clásica) que los que ya involucran totalidades más amplias que las que aparecen en los sistemas" 57.

Detrás de la adopción de esta teoría, en la que apenas se sustituyen las clases por "las nociones igual o más complicadas de propiedades y relaciones" 58, se encuentra cierto nominalismo. Aquí encontramos cierta "degradación" de las clases en "símbolos incompletos" 59.

La noción original de clase estaba conectada a las contradicciones que suponían las paradojas de una manera muy directa. Esta teoría original, según Black:

> "...colapsó a través de inconsistencias internas asociadas con la existencia de clases infinitas, y fue sacudida por muchas teorías alternativas de clases todas menos realistas que la descrita antes, hasta que las clases vinieron a degradarse como símbolos incompletos" 60.

El nuevo carácter que dió Russell a las clases no resolvió los problemas planteados, puesto que (en parte) ellos estaban originados en las dificultades de la definición de símbolo incompleto en *Principia*. Sobre todo por la "vaguedad de la noción de función proposicional" 61.

La crítica de Quine

Las funciones proposicionales encerraban un problema que Quine ha señalado repetidas veces. Para éste, el problema reside en una equivocada identificación entre la relación de pertenencia y la predicación. Nos dice:

> "Dos oraciones abiertas que sean verdaderas exactamente de las mismas cosas no determinan jamás dos conjuntos, pero sí que pueden determinar dos atributos diferentes" 62.

Russell (según Quine) confundió la noción de función proposicional: "... la usó unas veces para referirse a predicados y otras para referirse a atributos" 63. Quine hace una advertencia en el tratamiento de la predicación relacionada con la teoría de conjuntos, y critica la ocultación de las hipótesis de existencia en la misma 64. La crítica es acertada. Con la "*no class theory*" no se está resolviendo los problemas suscitados a partir de las paradojas. Las paradojas cuestionaron el axioma V del *Grundgesetze*; precisamente la conexión entre conjunto y función proposicional es la que sigue siendo insatisfactoria en el tratamiento que hacen Russell y Whitehead en *Principia*. Más aún, el problema de las paradojas se dirige frontalmente contra la noción de clases; no basta una mala traducción del lenguaje para resolver lo que plantea el uso, la existencia de clases es el problema de fondo. Y se trata de uno que se vincula a los problemas fundamentales de la filosofía de la matemática. Se trata de la discusión en torno a la actitud que se debe asumir frente a las entidades matemáticas; es una delicada problemática epistemológica y ontológica. Russell frente a las clases busca una solución "técnica" y además por una vía inadecuada. Gödel tiene razón cuando señala la inconsistencia que aparece en *Principia*. Para éste último, sin embargo, los problemas se van a resolver de manera fácil adoptando el platonismo. En nuestra opinión la indagación epistemológica no puede contentarse con esa opción.

Tanto en Frege como en Russell el proyecto logicista pasa por la teoría de conjuntos, como dice Quine: "...la lógica capaz de albergar esa reducción de la matemática era una lógica que incluía las teorías de conjuntos" [65]. Esto es decisivo, por más que se valore la labor logicista en los fundamentos de la matemática, por más que se aprecien los tecnicismos desarrollados en *Grundgesetze* y en *Principia*, la reducción de la matemática a la lógica no se ha realizado. La matemática se puede reducir a nociones de la teoría de clases. Pero no ésta a la lógica. Más aún, los problemas en torno a la prueba de completitud de la aritmética más bien se pueden transmitir a la teoría de clases [66]. La noción básica de la teoría de clases es la de pertenencia y es precisamente en el uso y función que ésta tenga que debe buscarse, por lo menos en parte, una redefinición. En relación a esta situación cabe decir que todo apunta a una reflexión más profunda sobre la denotación o connotación en la definición de clases. Mientras que la primera refiere a objetos particulares, la connotación expresa una abstracción. ¿Cuáles son los límites válidos de esta abstracción en matemáticas? La reflexión debe conectar esto con los criterios generales epistemológicos sobre la matemática. Las definiciones por comprensión no son necesariamente las más adecuadas; su función debe ser precisamente determinada, y debe de establecerse un dominio (llamémoslo de "contingencia") cuando se usen. La definición de este dominio no es un problema sintáctico o funcional en el discurso. Debe ser establecido a la luz del esclarecimiento teórico sobre la naturaleza de las matemáticas.

PROBLEMAS DE LA TEORÍA DE TIPOS

La teoría de tipos presenta también dificultades en el proyecto logicista. El primero es que tiende a adolecer del mismo problema que le dio origen: nociones como la de “entidad” y tipo aparecen sin restricciones de aplicación. Estas nociones poseen un grado de generalidad ilimitada 67. Pero además la teoría de tipos genera una extraordinaria cantidad de complicaciones: exige, por ejemplo la distinción de una inmensa cantidad de números y conjuntos numéricos 68. Es decir, engendra la imposibilidad de afirmaciones sobre todos los números reales.

Predicativización de las matemáticas

La observación más elemental que se puede hacer sobre la teoría de tipos es que no es lógica. Es un principio de ordenación, en ese sentido no de existencia como el axioma de infinitud, pero aparece no obstante como un “puente artificial” por encima de las contradicciones. Lo más conflictivo de la teoría es que no permite toda una serie de definiciones en la matemática clásica 69. Para salir de estas dificultades es que se tuvo que recurrir precisamente al axioma de reducibilidad. El principio del círculo vicioso es el que está en la base de la teoría de tipos y prohibe el uso de las llamadas funciones impredicativas. Con la teoría de tipos podemos decir que Russell buscaba una predicativización de las matemáticas, pero esto sólo lo logró a medias. El problema medular reside en la pregunta: ¿es la matemática predicativa? Las matemáticas clásicas no parecen serlo, y pretenderlo abre el camino a la introducción de axiomas que son no gratos para el logicismo.

La teoría de tipos, por otra parte, también conecta necesariamente con el axioma de elección 70 y con el de infinitud 71. De nuevo el problema de la fundamentación matemática no lleva a una solución en un marco reducido como al que apunta la teoría de tipos; la predicatividad o no de las matemáticas sólo puede abordarse con una discusión sobre la naturaleza de la matemática. No se puede lanzar por la borda todas las definiciones impredicativas porque algunas de éstas han engendrado paradojas; menos aún cuando gran parte de las matemáticas se van con ellas. Lo que se plantea es entonces la redefinición del carácter de las entidades matemáticas (de las definiciones, que son el lugar privilegiado de su "producción").

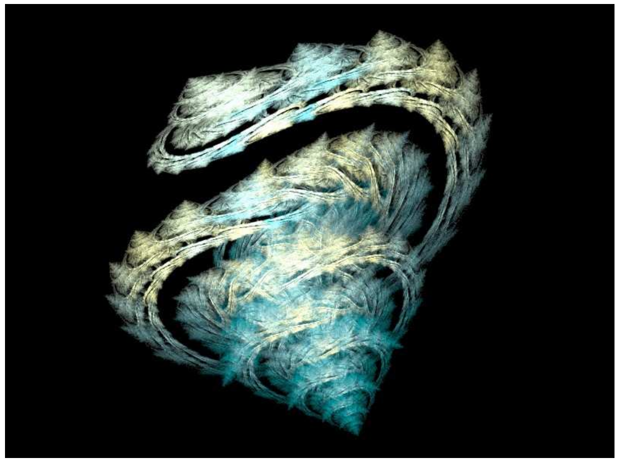
La teoría de tipos y los axiomas no lógicos del logicismo russelliano son la manifestación más elocuente de su fracaso material. Pero las dificultades se siguen las unas a las otras.

El análisis matemático clásico contempla proposiciones infinitas por doquier. Sin la posibilidad de hacer valer este tipo de proposiciones, una auténtica fundamentación no sería posible 72.

El problema del infinito está conectado a la asunción de las totalidades en general. El infinito actual al igual que otras entidades matemáticas es una totalidad. Esta noción entonces está conectada a la de las clases y también a la del continuo.

Es necesario que demos algunas ideas metodológicas. No puede existir para los sentidos o la conciencia actuales de un hombre un número infinito de cosas. Pero un concepto de número infinito actual puede servir dentro de una teoría de la que pueda extraerse un modelo que exprese cierta realidad. A lo que se referiría no sería a un objeto infinito en sí sino a uno que puede ser subjetivizado como tal. Es decir lo infinito puede entenderse como un concepto que en la conciencia puede equivaler a algo ilimitado en lo actual. Determinar, por otra parte, si existe en la realidad material un número infinito de cosas (simplemente lo infinito) no es un problema teórico, sino práctico y, probablemente, irresoluble. No se puede entonces afirmar como hipótesis de lo real, universal y absoluta. Pero si se entiende como una entidad abstracta subjetivizada, reducida a los límites de lo "humano", entonces su validez está en dependencia de la funcionalidad teórica y práctica que de su asunción se obtenga. Para nuestra matemática de hombres limitados, finitos, las nociones del infinito numérico (aritmético o analítico) no son necesariamente inútiles y sin fundamento. El fundamento no está en la realidad en sí (pensar así nos conduciría a un callejón sin salida científica) ni en la subjetividad interior en sí (que nos conduce a la esterilidad). El fundamento tampoco está en inteligentes recursos "técnicos", está en una adecuada interpretación epistemológica, ontológica, de los límites y condiciones del conocimiento humano.

SOBRE EL INFINITO Y EL CONTINUO



El paso de la aritmetización del análisis o la geometría implica la consideración del problema del continuo; implica, en particular, la necesidad de tomar decisiones en torno a totalidades numéricas. Aritmetizar la geometría conduce al mismo tipo de problemas del mismo proceso en el Análisis.

El continuo

El Análisis Real es una de las formas precisas matemáticas a través de la cual se da cuenta de lo que aprehendemos como la continuidad del objeto exterior. El continuo es un concepto para referirnos a una realidad material particular, pero no es en sí. La continuidad de puntos físicos no existe. El vacío -lo discontinuo- todo lo invade, siempre está presente. Es la eterna relación dialéctica entre el ser y la nada. Ahora bien, lo que los hombres detectamos sensiblemente como continuo es relativo. Es totalmente válido plantearlo entonces como concepto teórico, si está conectado a una interpretación, a un marco teórico (y a una utilidad en ellos) en relación con lo real. La definición (como modelo) de lo continuo en un primer momento es el tema del Análisis. Las matemáticas de lo continuo son importantes en la relación del sujeto humano con lo real que le es exterior. Las conclusiones teóricas dentro del modelo de lo continuo (en las matemáticas) no están alejadas del sustrato material del que ha partido. Por eso las matemáticas del continuo pueden dar resultados prácticos. Por otra parte, lo continuo es diverso; lo que debería conducir a varios modelos matemáticos de la diferente continuidad y servir estos en diferentes aplicaciones. En resumen, lo continuo como concepto se refiere a una realidad que aparece en la relación material sujeto-objeto; por lo tanto: “lo continuo en sí no existe”, depende del sujeto. En esta noción existen plasmados diferentes referentes, por lo que es necesario conceptualizar diferentes continuidades; es decir, entonces, diferentes modelos matemáticos.

El infinito

La introducción de las nociones de infinito en los números naturales o los reales, o la referencia al continuo, debe corresponder a criterios epistemológicos generales y a requerimientos teóricos funcionales. La existencia o verdad de totalidades transfinitas no depende de reglas que aseguren consistencia formal, o de simbolizaciones que permitan construcciones en un proceso algorítmico. Tampoco se pueden negar de principio, o inversamente usar sin criterios teóricos claros. La primera actitud (la simple negación) impide avanzar la práctica matemática; la segunda, que es la forma con que las aborda el logicismo, conduce a un camino lleno de incertidumbre. De nuevo la discusión entra en la filosofía. El platonismo está presente en el proyecto logicista de una manera muy profunda. La misma cuantificación se hace sobre totalidades diversas, sin vertir criterios adecuados para la fundamentación de su introducción.

Es difícil saber si la no unificación por parte de los griegos de la geometría y la aritmética no estaba conectada a problemas relacionados con el infinito y el contínuo; lo que a todas luces es innegable es que esta situación les impidió construir el modelo de los números reales, el Análisis. Tal vez, las necesidades de la aplicación científica y técnica griegas no reclamaban un modelo matemático de lo continuo. De todas maneras es probable que existieran diversas condiciones históricas, sociales y culturales, aparte del prejuicio frente al infinito o a lo desconocido, en la determinación de su aproximación. El Análisis Real ha sido un salto progresivo en las ciencias y las matemáticas y su éxito ha sido medido ya en su conexión con el dominio de la naturaleza por los hombres. Sería necesario discutir si esto constituye ya criterio suficiente para su aceptación, independientemente de otros de consistencia, constructibilidad, utilidad, en un sistema formal.

En lo que se refiere al logicismo, la aceptación sin más de totalidades y diversas entidades matemáticas es una seria debilidad epistemológica, que no se puede remediar con la actitud contraria, ni tampoco a través de una inexacta transmutación de lenguaje.

Putnam y Benacerraf

La crítica al platonismo logicista ha sido muy incisiva. Los editores de esta magnífica antología *Philosophy of Mathematics* señalan dificultades a la visión platónica incluso en la introducción misma de la noción de conjunto:

> "El lector tal vez se preguntará: qué hay de malo con nuestra explicación precedente "conjunto arbitrario" significa "cualquier conjunto, ya sea dado por una regla o por el azar". La dificultad es que la noción de azar no tiene sentido en matemática pura, excepto como una manera de hablar. Supongamos, como sea, que tomamos esta explicación literalmente: debemos, por ejemplo, definir una "sucesión arbitraria de enteros" como una sucesión que pueda ser generada por un "mecanismo del azar". Una dificultad es entonces la palabra

> “pueda”. “Pueda” sólo puede significar una posibilidad matemática aquí, puesto que no queremos que las leyes físicas tengan efecto sobre la verdad matemática. Pero “posibilidad matemática” es ella misma una noción disputada en donde están concernidas las estructuras infinitas” [73].
>
> Pero, añaden:
>
> “Y una ulterior dificultad es que, de acuerdo a las matemáticas clásicas, hay otros conjuntos infinitos, por ejemplo el conjunto de todos los conjuntos de conjuntos de números reales, los cuales son tan “grandes” que no pueden ser puestos en una correspondencia uno a uno con el conjunto de todos los enteros o incluso con el conjunto de todos los números reales: tales conjuntos no pueden ser idénticos al “Out put” de ningún proceso físico posible, inclusive si nosotros tomásemos la noción de un “proceso físico posible” (“de hecho infinito) como una noción ella misma clara” [74].

Su opinión es que en el mundo físico no se puede encontrar un “modelo standard” para la teoría de conjuntos [75]. En mi opinión esta afirmación última no es adecuada porque no deja claro lo que realmente se persigue con las matemáticas. En esencia, no se trata de dar modelos de lo que existe en sí, sino modelos que puedan jugar un papel adecuado y útil en la relación hombres realidad. Es la misma metodología con la que abordé la introducción de los infinitos y las nociones de lo continuo la que debe prevalecer también aquí. Pero además hay oraciones (como la “hipótesis del continuo”) que no son susceptibles de un procedimiento de verificación o refutación: esto sólo puede generar dudas sobre la noción de clase [76].

Lo que está claro y se pone de manifiesto en las observaciones de Putnam y Benacerraf es que en el logicismo no encontramos una clara justificación de las nociones fundamentales involucradas en su proyecto y, también, está claro que esto debe obedecer no sólo a una actitud liberal con ellas sino a una actitud filosófica particular. Detrás de una aproximación en unas partes del proyecto y otra diferente en otras, la filosofía está presente. Esto hace muy importante el análisis meticuloso de las premisas filosóficas que se encuentran en la obra de Frege como de Russell. En este caso hemos hecho girar la discusión en torno al platonismo, cuyo defecto más importante tal vez sea precisamente la utilización de nociones y entidades sin una adecuada justificación teórica y epistemológica, aparte del apuntalamiento simple de su existencia. Pero hay, como veremos, más problemas en el logicismo.

PROPIEDAD LÓGICA, CONCEPTOS EMPÍRICOS Y NO EMPÍRICOS

En el proyecto logicista no se demuestra que cuando se pasa de proposiciones matemáticas a propiamente lógicas se conserva la propiedad de ser lógica 77. La crítica conduce a la discusión acerca de si los métodos de la reducción logicista son apropiados. Si la substitución "extensional" de proposiciones y las manipulaciones lógicas son adecuadas en ese proceso. Yo opino que la reducción posee sentido y los métodos usados, en general, también. Lo que el análisis filosófico exige es que se entienda la reducción siempre como un proceso de abstracción, en el cual se generan consecuencias que son necesarias de conocer. Preveer teóricamente que toda abstracción engendra un terreno determinado que posee implicaciones (a veces incognocibles) de una u otra forma. La búsqueda de sus fronteras conecta nuevamente con la epistemología; es parte de una reflexión fundamentadora.

Cuando se argumenta que no es posible en la reducción logicista no señalar ni la propiedad lógica ni la propiedad matemática como idéntica a ella, o no se demuestra como tercera propiedad diferente a las anteriores pero que se hereda en la reducción, estamos reconociendo la oscuridad y debilidad del proyecto. Tiene razón Körner cuando exige al logicismo que demuestre las características que aparecen en la reducción. No basta pensar que se captan intuitivamente, al instante, como sugirió Frege. Russell fue más prudente en esto y Quine ha llegado a reconocer incluso la ausencia de este tipo de demostraciones en el logicismo. Ahora bien, Quine es un logicista "extraño" (por lo menos en la época en que afirmaba la no separación entre lo analítico y lo sintético) 78, puesto que su postura, como señala Körner 79, afecta la aproximación filosófica del logicismo.

Para Frege y para Russell las proposiciones lógico-matemáticas eran *a priori*, analíticas o algo parecido. Lo que se concluye de estas argumentaciones, es, por lo menos, la ausencia de claridad filosófica en el logicismo. La distinción entre lógica y matemática es para ellos casi imposible. Esta es una gran debilidad filosófica.

Körner: Sobre los conceptos empíricos y no empíricos

Körner señala una objeción más al proyecto logicista: la asunción de los axiomas no lógicos genera problemas más allá de las repercusiones que eso tiene en la lógica operatoria; tiene efectos en la "extensión de los diferentes conceptos utilizados" 80.

En efecto, si se usa la totalidad infinita de naturales como base de definición de cada número natural, éste depende en cierta forma de esa totalidad; lo que no sucede si se asume la colección de naturales como finita. La situación se vuelve transparente cuando en lugar de hablar del 2, hablamos de 2 manzanas. Para Körner el logicismo hace una "fusión" indebida de conceptos *a priori y a posteriori,* que él llama no empíricos y empíricos. Para Körner se debe diferenciar claramente las dos cosas y piensa que no tiene por qué existir una correspondencia entre los números empíricos y los no empíricos 81. Afirma que en el logicismo se asume:

> "...primero, que resulta siempre claro si un concepto está o no en una determinada relación lógica con otro, y, en segundo lugar, que las relaciones lógicas posibles entre conceptos matemáticos no son esencialmente distintas de las que pueden subsistir entre conceptos empíricos. Estos dos supuestos son erróneos uno y otro" 82*.*

Es cierto que las reglas de un sistema formal deductivo matemático y abstracto no son iguales a las de su aplicación de una manera absoluta, y que no son identificables puesto que suponen procesos de abstracción intermedios. No es posible, sin embargo, afirmar la gigantesca distancia entre ellos que pone Körner. Para éste la diferencia entre lo *exacto* de unos y lo *aproximado* de los otros basta para definir caracteres diferentes a sus reglas. Esto es muy delicado. Las reglas de la matemática "ideal" corresponden de una manera general al devenir de lo real, al mundo en el que se da la experiencia. No son un reflejo mecánico, es cierto. Sólo pueden aprehenderse como producto de una relación estrecha entre el sujeto y el objeto. La correspondencia así establecida permite la aplicación, aunque a veces no se logre. En esos casos las razones no están sólo en las reglas sino en las nociones primitivas que se han introducido. La descripción teórica precisa de cómo aparece en particular esta correspondencia es una tarea científica esencial.

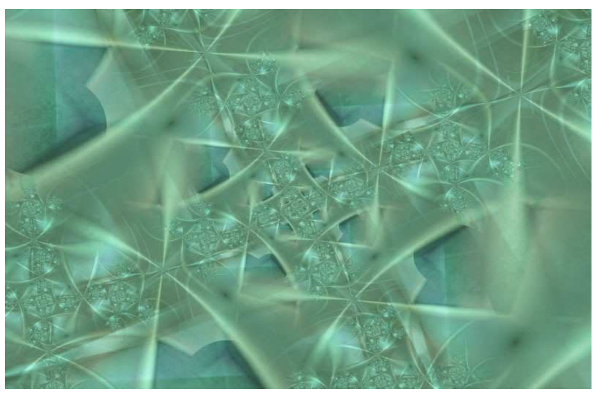
Cuando Körner dice que no existe correspondencia "inclusive en el caso del "Número Natural" 83, refiriéndose a los números engendrados por la suposición en un caso y en el otro no de la infinitud, no hace más que girar sobre sus propios criterios.

Cuando habla de una proposición matemática no empírica como exacta y no aproximada, el que decide esto es él. Aproximado ¿a qué? Decir 2 o decir dos manzanas, decir 2 + 3 = 5, o dos manzanas más tres manzanas dan cinco manzanas, no nos parece que conduce a la dicotomía de lo exacto y lo aproximado. Nos coloca ante una regla abstracta válida en tanto funcione como modelo que expresa cierta realidad. Que sea caracterizada como aproximada no depende de ella misma, sino de nociones y criterios más generales. Toda proposición matemática es abstracta, con un referente inmediato o mediato, por lo tanto: siempre será aproximada.

Lo que sucede es que Körner establece la separación de dos mundos: lo empírico -*a posteriori*, y lo *a priori*. Existen en esa interpretación dos matemáticas, las puras y las aplicadas. Parte de premisas *a priori* sobre la naturaleza de la matemática. Yo no creo en esa separación teórica como tampoco comparto la separación total entre lo analítico y sintético; un dogma que (a diferencia de lo que dice Quine) no ha sido sólo de los empiristas, sino de la mayoría de corrientes de la filosofía de las matemáticas.

Lo que debe quedar claro aquí es que no es indiferente la suposición o no de los axiomas no lógicos del logicismo en la caracterización de los números. También debe quedar claro que las proposiciones de la matemática no están todas a la "misma distancia" del mundo real, pero están entre sí estrechamente conectadas y, en su conjunto, pueden corresponder a sectores de lo real (las nociones de correspondencia, de realidad, deben verse con una óptica en la que el sujeto participa).

ALGUNAS CONCLUSIONES



Es necesario ir sacando conclusiones sobre las materializaciones particulares del logicismo.

De Frege a Russell

El problema de las paradojas fue el motor de la aproximación russelliana, así como había sido la fuente del agotamiento de la de Frege. Pero lo que en Frege no era evidente en Russell sí lo es: el fracaso del logicismo. No en términos técnicos, formales, lógico-matemáticos, sino en términos filosóficos. La segunda etapa del logicismo pone de manifiesto los problemas teóricos de una reducción artificial y abstracta de la matemática. Pone de manifiesto que la relación entre matemática y lógica no era tan estrecha como se suponía; que se trataba de dos cuerpos teóricos distintos, aunque con intersección no vacía. Pero, sobre todo, evidencia que la búsqueda del fundamento de las matemáticas no puede encontrarse en la lógica.

La vieja hipótesis que hacía de la lógica ese lugar tan "cercano al cielo" para ser susceptible de validar los conocimientos que le fuesen acercados, ya no sirve con la matemática. Algún día también desaparecerá aquella premisa que establece esa "cercanía" de la lógica. Para Frege como para Russell la lógica estaba colocada en un lugar muy especial.

Para Frege la aritmética también era el mundo donde las verdades son absolutas, "*timeless*". Digo que es solamente un fracaso filosófico porque, con todo y axiomas no lógicos, con todo y las dificultades que los sistemas del *Grundgesetze* o *Principia* manifiestan, no se deja de alcanzar una coherencia (en la medida de lo teóricamente posible), rigor, y fundamentación de las principales partes de la matemática. Pero el principio logicista se hace pedazos en esta segunda etapa.

Primer llamado a una redefinición epistemología

Las paradojas de la teoría de conjuntos, los problemas derivados de las definiciones circulares impredicativas, no son (como creía Russell) problemas en la lógica de la fundamentación matemática. Que la teoría de clases que requiere la matemática engendre paradojas que a su vez exijan axiomas y principios "extraños", no es problema ni de la lógica ni, opino, de la teoría de clases, sino de la naturaleza de las matemáticas. Y no me refiero a que las matemáticas sean una fuente de contradicciones. Los conceptos y entidades de la matemática deben estar plenamente justificados en la teoría y, en general, en las condiciones de su relación con su objeto. La determinación de los mecanismos que permitan esto deben estar conectados a un tratamiento adecuado de la epistemología.

La producción matemática de los siglos XVIII y XIX (caracterizada por su extraordinaria abstracción) impuso a su vez la búsqueda de mayores recursos teóricos en esa dirección. Las paradojas, al mismo tiempo que expresan las consecuencias de una reducción-abstracción artificial, pusieron de manifiesto dificultades en la introducción de entidades y conceptos matemáticos. Era, en ese sentido, una crítica al platonismo en matemáticas. Un llamado no a la aplicación mecánica de la navaja de Occam, más sí a la "moderación" y a la redefinición de criterios.

En otro orden de cosas, el "factor paradojas" y la gama de consecuencias que trajo debe verse como un primer señalamiento de los límites de la formalización de los cuerpos teóricos.

La inducción

La teoría de tipos y los axiomas de existencia del logicismo dejan una sensación de artificialidad, que no corresponde ni con el proyecto logicista ni con la naturaleza de las matemáticas. Toda esta artificialidad que exige la reducción logicista encuentra un punto de acumulación en la aritmética. Un principio fundamental de ésta es la inducción; éste apunta a aquello que define la esencia de la aritmética. No es extraño entonces que para integrar éste en el sistema logicista se requiera introducir axiomas que no tienen nada que ver con la lógica.

La reducción de un cuerpo teórico a otro (entre los cuales su objeto epistemológico no es el mismo) sólo puede hacerse a partir de una abstracción que involucra nociones y principios diferentes. Toda abstracción arrastra consigo una secuela de implicaciones. La extensión de esta secuela dependerá del tipo de abstracción. Cuando se trata de reducciones entre complejos teóricos dependerá del distanciamiento teorético entre ellos que, a su vez, está conectado a la diferenciación entre sus objetos epistémicos.

Logicismo y racionalismo

La visión logicista de la naturaleza de las matemáticas apuntala los aspectos formales y deductivos, axiomáticos, de las matemáticas. Parte de una clara distinción entre el conocimiento *a priori* y el *a posteriori*. La matemática no está conectada a la realidad de una manera directa. En Russell el camino de su evolución conduce a hacer de las proposiciones matemáticas parte del lenguaje, y, en ese sentido, convenciones introducidas por los hombres. Para éste la matemática va a terminar siendo "verbal". Esta aproximación que enfatiza lo sintáctico no es, sin embargo, uniforme en la conciencia de Russell toda su vida. De hecho, durante bastantes años mantiene Russell que la lógica se refiere a las cosas del mundo.

Sobre la noción de lógica

En 1918 Russell decía que la lógica es formal. Veamos lo que entendía por ello:

> "La "forma" de una proposición es lo que permanece invariable en ella, cuando cada parte constituyente de la proposición es reemplazada por otra" 84.

Entonces, añadía:

> "Las constantes lógicas pueden ser definidas exactamente como definimos a las formas; de hecho son en esencia lo mismo" 85.

Las proposiciones lógicas entonces deben expresarse a través de "constantes lógicas" y "variables" 86. Pero, advierte Russell:

> "...no se deduce de esto que, recíprocamente, todas las proposiciones que se puedan expresar de esta manera sean lógicas" 87.

La lógica entonces es formal por esta reducción a constantes lógicas; ahora bien, como esto no es suficiente debe recurrirse a nombrar una característica propia exclusiva a ésta. Russell dirá:

> "Todas las proposiciones de la lógica tienen una característica que habitualmente se expresaba diciendo que eran analíticas, o que sus contradictorias eran contradictorias en sí mismas. No obstante, esta afirmación no es satisfactoria. La ley de contradicción no es más que una de las proposiciones lógicas; no tiene preeminencia especial y la prueba de que la contradictoria de una proposición es contradictoria en sí misma equivale a exigir otros principios de deducción además del principio de contradicción. Sin embargo, la característica de las proposiciones lógicas que tratamos de encontrar es la que fue considerada y se intentó definir por los que dijeron que ella consistía en su deducibilidad del principio de contradicción. Esta característica, que por el momento podemos calificar de tautología, no proviene, evidentemente, de la afirmación de que el número de individuos del universo es n, cualquiera que sea el número n" 88.

Esta característica que define a la lógica se nombra, pero no está claro aquí qué es exactamente, ¿qué es lo que hace que proposiciones expresadas de manera lógica no sean proposiciones lógicas? Para Russell el terreno de la definición de la matemática está en la noción clásica de "analiticidad" 89 (tal vez un poco reformulada). En 1918 confiesa que no ha encontrado una definición "que me satisfaga completamente" 90. El marco en el que se mueve Russell aquí tiende a llevarlo a las definiciones "linguísticas" de la lógica y la matemática; el sentido de la introducción de lo analítico eso parece indicar. Pero Russell, aún en esta fecha, no había dejado de considerar la lógica como supuestos *a priori* a propósito del mundo de las cosas. Gödel cita la *Introducción a la Filosofía Matemática* de Russell, en un frase que fue suprimida en ediciones posteriores:

> "La lógica trata del mundo real, lo mismo que la zoología, aunque de sus rasgos más abstractos y generales" 91.

Gödel no deja de comentar, sin embargo, que:

> "Es verdad, sin embargo, que esta actitud ha ido disminuyendo gradualmente con el paso del tiempo y también que siempre fue más fuerte en la teoría que en la práctica. Cuando se enfrentaba con un problema concreto, los objetos a analizar (por ejemplo, las clases o las proposiciones) se convertían pronto y en su mayor parte en "ficciones lógicas". Aunque quizá esto no signifique necesariamente (de acuerdo con el sentido en que Russell utilizaba este término) que estas cosas no existan, sino únicamente que no tenemos una percepción directa de ellas" 92.

La diferencia entre teoría y práctica que arriba se señala obedece a la conjunción de actitudes filosóficas distintas en Russell; y donde, en especial, el "factor paradojas" generaba un llamado de auxilio a la navaja de Occam. Gödel comparte con Russell la comparación que éste hace entre las matemáticas y una ciencia natural 93.

El sentido de la lógica del Russell de esta etapa (al igual que en Frege) no es sintáctico, sino semántico. En esta etapa la lógica apunta, si se quiere, a una cosmología 94. Como bien señala Largeault:

> "...reprocha a la caracterización sintáctica el introducir una arbitrariedad y una libertad inadmisibles: no acepta los lenguajes lógicos o postulados variables de Carnap" 95.

La lógica posee entonces dos aspectos: por un lado, uno linguístico, y por el otro, uno ontológico 96. Lo que predomina aquí es el primero. De hecho, la crítica al formalismo pone de manifiesto ese "sentido de la realidad" que interviene en la descripción de su interpretación de la lógica y las matemáticas.

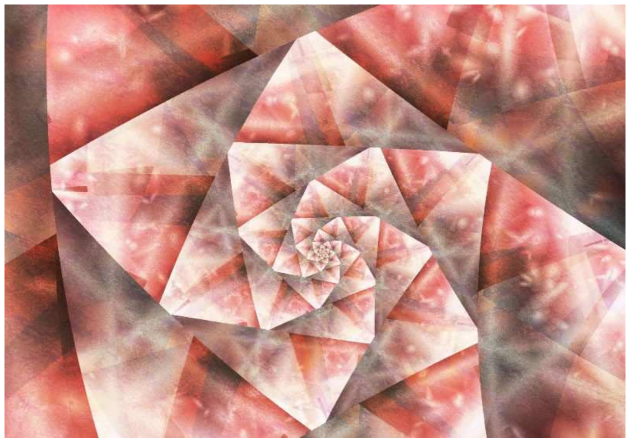
Apuntalamiento de un paradigma

El logicismo de Russell apuntala el paradigma "formalizante" pero (al igual que Frege) a medias. En Frege predomina siempre el reconocimiento de un mundo ideal, lo que determina un fuerte platonismo en su filosofía de las matemáticas. En Russell el mundo ideal también es reconocido en un principio pero a la par de un fuerte sentido de la realidad, así como una inclinación nominalista en la resolución de los problemas teóricos específicos.

Con Russell terminó una nueva etapa en los intentos por brindar una fundamentación logicista a las matemáticas. Es posible afirmar después de los trabajos de Frege y Russell que el Logicismo fracasó. Pero no sólo debido a dificultades "técnicas" o de manipulación lógica, ni siquiera por un supuesto tratamiento inadecuado de los sistemas formales usados. La raíz de los problemas se encuentra en la visión logicista del conocimiento matemático, en la conexión que se plantea de este y la realidad material, en los papeles epistemológicos asignados al sujeto y al objeto en la construcción matemática. La raíz de los problemas se encuentra en el terreno filosófico.

El logicismo va a fracasar en dotar a las matemáticas de un fundamento último. Sin embargo, con ello no se destruiría el paradigma racionalista-axiomatizante de las matemáticas. Para Hilbert y el formalismo los problemas del logicismo podían ser superados en una visión que afirmaba la posibilidad de la demostración de la consistencia en la aritmética, y que hacía de la "intuición del signo" su punto filosófico de partida. El fracaso del logicismo no fue visto antes de la década de los treinta realmente como un cuestionamiento profundo a los sistemas axiomatico-formales y al racionalismo. Serían necesarios los resultados de Gödel para apenas crear condiciones teóricas que permitieran debilitar el racionalismo en matemáticas, y abrir posibilidades para una reconstrucción teorética de la reflexión sobre las metemáticas. En el fracaso del logicismo, y después de los resultados gödelianos de los Treinta, tal vez pueda entonces leerse un fracaso de los intentos por brindar un fundamento absoluto a las matemáticas.

CAPÍTULO IV
LAS ONTOLOGÍAS DE GOTTLOB FREGE



INTRODUCCIÓN

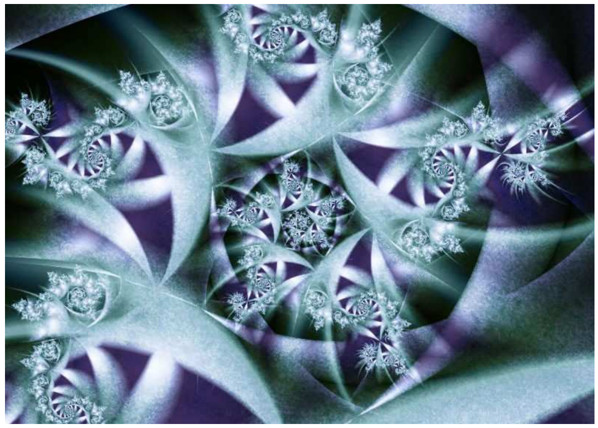
Una de las principales premisas que he sostenido en este libro es que las ideas ontológicas y epistemológicas más generales fueron factores centrales en la determinación del proyecto logicista en Frege y Russell. En ese sentido, resulta altamente rentable para la comprensión intelectual del logicismo pasar revista a las principales ideas ontológicas y epistemológicas de Frege y Russell, particularmente sobre la naturaleza de las matemáticas.

En este capítulo, así como en los dos siguientes, vamos a incidir en la evolución ontológica de Frege y Russell, así como sobre algunos de sus concatenaciones epistemológicas aunque siempre en relación con las matemáticas y su naturaleza.

En este pequeño capítulo nos proponemos hacer una incursión en las ontologías objeto-función y Gedanke-objeto-idea que Frege planteó en diferentes momentos de su vida intelectual. Afirmamos que el platonismo resulta el mejor marco teórico para aprehender las ideas ontológicas de Frege. Al mismo tiempo sugerimos una crítica epistemológica de las categorías empleadas.

En la segunda ontología vamos a poner de manifiesto la importancia de la noción Gedanke en la definición de un “tercer mundo” analítico, a partir del cual se edifica lo esencial de la concepción realista de Frege.

OBJETO Y FUNCIÓN



La ontología de Frege ha sido considerada de una manera tradicional inscrita en el platonismo, con un menor o un mayor "radicalismo". Se trata de una visión que algunos autores encuentran en todos sus escritos 1. Otros sólo en la parte final de ellos 2. Algunos piensan que la interpretación es errónea del todo 3. Es claro que sea cual sea la interpretación escogida eso tiene implicaciones en el análisis de la filosofía de la matemática fregeana.

Es conveniente entonces proceder a recorrer las principales distinciones establecidas por Frege, vinculadas a consideraciones ontológicas, que jugaron papeles centrales en su reflexión en diferentes etapas de su vida: objeto-función, objeto-idea-gedanke. **

No son distinciones contradictorias, ni complementarias. Tampoco su conexión con la ontología y con la epistemología es la misma. Pero reflejan la aproximación del pensamiento de Frege a la problemática ontológica.

La distinción

En su Introducción al libro *Estudios sobre Semántica* de Frege, Jesús Mosterín afirma:

> "Objeto y función son las dos categorías fundamentales de la ontología de Frege (...) Según Frege, todo lo que hay, todo acerca de lo que hablamos, es objeto o función. Hay objetos y hay funciones. No hay nada más. Función es todo lo que no es objeto; objeto es todo lo que no es función" 4.

Esta observación es efectivamente importante para Frege. En su conferencia "*Función y concepto*", dada en la sesión del 9 de enero de 1891 en la Sociedad de Medicina y Ciencias Naturales de Jena, Frege señalaba con precisión:

"Los enunciados afirmativos en general pueden concebirse, lo mismo que las ecuaciones o las expresiones analíticas, descompuestas en dos partes, una de las cuales está completa en sí misma, mientras que la otra precisa de complemento, es no saturada (...); llamo función al significado de esta parte no saturada" 5.

Y más adelante, completa:

"...objeto es todo lo que no es función, la expresión de lo cual, por tanto, no lleva consigo un lugar vacío" 6.

No se trata, para Frege, de una mera separación lingüística, apunta a lo que existe. De hecho, la división se reproduce en el lenguaje. Mosterín informa:

"Un nombre -name- o expresión nominal es una expresión lingüística que designa **algún objeto** determinado. Un mismo objeto puede ser designado por diversos nombres. Todas las expresiones lingüísticas son nombres o expresiones functoriales. Los nombres son completos o saturados y designan un objeto. Las expresiones functoriales son incompletas o no saturadas y designan una función" (Negrita añadida) 7.

Esta división de Frege entre objeto y función fue extraída claramente del concepto de función en la matemática. Las propiedades que poseen las funciones en matemática también están presentes en la división fregeana. Así se explica el sentido de "completitud", "valor de la función", etc. Frege, en la misma conferencia que mencioné, observaba que: "...la función, por sí sola, debe denominarse incompleta, necesitada de complemento o no-saturada" 8. Y además, expresaba que:

"...cuando hablamos por ejemplo, de "la función 2x + x", no hay que considerar que x pertenece a la función, sino que esta letra sólo sirve para indicar el tipo de complementación que le falta, al hacer patente los lugares en los que tiene que entrar el signo del argumento. "(...) llamamos a aquellos en lo que se convierte la función al ser completada por su argumento, el valor de la función para este argumento" 9.

Si se presenta como una dicotomía de categorías ontológicas la distinción objeto-función encierra una dificultad: ¿a qué se refiere "función? Si no se trata sólo de una distinción lingüística, entonces la respuesta a esta pregunta debe encontrarse en lo que existe. En ese sentido: ¿qué tipo de entidad es? Parece que para Frege esto no tiene mucha importancia, como señala John Passmore en *A hundred years of philosophy*:

> "La pregunta, concluye (Frege)" ¿a cuál entidad se refiere una función?" no tiene sentido, puesto que una función no nombra a una entidad, una función no obstante tiene un sentido, un significado, en el contexto de una oración algebraica" [10].

Parece, entonces, que Frege se refiere a un aspecto de lo real cuando establece objeto-función como categorías totalizantes.

Las acciones, la actividad, el movimiento de (o sobre) un objeto son diferentes al objeto mismo. Es una diferenciación en este sentido real, que se puede expresar en el lenguaje. En "César conquistó las Galias", "conquistó las Galias" se refiere a algo distinto que "César". El papel de ambas expresiones es distinto.

Sin embargo, yo no creo que uno posea un referente en el mundo y el otro no. Si se quiere, podríamos argumentar que tanto los objetos -en el sentido fregeano-como las acciones, las actividades, los movimientos, etc., son objetos, entidades de lo real; son partes de diferentes estratos de lo real, ligados y condicionados mutuamente. No quiero con esto invalidar la distinción de Frege, pero me parece que si ésta se introduce en el terreno ontológico aparece como una reducción muy rígida.

La noción de concepto

Frege plantea la división objeto-función en forma general y la aplica a situaciones concretas. Para Frege, los conceptos, que define de una manera muy precisa, son funciones. Dice:

> "...un concepto es una función cuyo valor es siempre un valor veritativo" [11].

Esta definición de hecho excluye todo un conjunto de expresiones que podrían asimilarse a la noción ordinaria de concepto. La definición de Frege de concepto es también bastante reduccionista y, aunque permite avanzar en la precisión de la determinación de la verdad o falsedad de las nociones usadas, no me parece la forma más adecuada para dar cuenta de la situación a la que ésta apunta. El mundo de los objetos aprehensibles por los sentidos, las cosas, los árboles, los hombres... y sus acciones, movimientos, etc., configuran situaciones concretas. Los conceptos, en mi aproximación expresan esas situaciones de una u otra manera. Me parece erróneo trasladar la noción de función en matemáticas al mundo general de todo lo que podemos llamar conceptual; al igual que a partir de ella redefinir la noción de concepto y dotarlo de una referencia que sólo puede ser lo verdadero o lo falso.

Frege señala que la referencia de todo concepto es su valor de verdad. Es correcto tratar de buscar en las nociones conceptuales el asignar un valor de verdad, entendiendo por ello una sanción de su aproximación o no a lo real. Pero combinar las nociones de concepto, función y valor veritativo, de la forma que lo hace Frege, es inadecuado. Un concepto puede describirse simplemente como una función alejada de referentes en el mundo real. La definición de concepto de Frege es reduccionista y rígida. El tratamiento que hace de la noción de referencia también es inadecuada. No es lo mismo decir que existe o existió un referente para "César", que el referente de un concepto es un valor de verdad. Aquí lo "verdadero" o lo "falso" son entes especiales que sirven de referencia casi universal. Gödel comenta sobre esto que:

> "Frege llegó realmente a esta conclusión, y lo entendía en un sentido casi metafísico que recuerda en cierto modo la doctrina eleática del 'Uno' " 12.

La distinción de Frege ha sido cuestionada usando la situación en la que aparecen "conceptos de conceptos". ¿Qué es función? y ¿qué es objeto en este caso?: Frege resuelve el problema con una distinción, la de uso y mención 13.

Frege no deja de afrontar el problema, pero, desde una óptica, en mi opinión, esencialmente lingüística, operativa. Esto se manifiesta, por ejemplo, cuando Passmore comenta que:

> "La diferencia lógica entre "el concepto X" y "X"(donde "X" se refiere a un concepto) aparece en el hecho, piensa Frege, **que ellos trabajan diferentemente en las oraciones**" (Negrita añadida) 14.

En mi opinión no es un problema de cómo funciona el concepto; lo esencial de esta problemática (que no es tampoco sólo lingüística) no es meramente el producto de las deficiencias del lenguaje, lo que está en juego es una aproximación a la relación dialéctica que existe entre los hechos reales, los conceptos y el lenguaje (habló de conceptos en el sentido que yo he explicado). Esta distinción, que si se plantea como ontológica genera el tipo de problemas que he mencionado, obedece a una extrapolación de nociones de la matemática. La distinción posee cierta utilidad en ciertos contextos, pero en otros aparece como un obstáculo para el esclarecimiento.

La generalización del uso de categorías matemáticas, su aplicación en otros campos, encierra un gigantesco peligro. Es un proceso de abstracción, que trae consigo una secuela de implicaciones a veces no adecuadas en una interpretación filosófica. Es importante señalar cómo en esta ocasión en la conexión filosofía y matemáticas la segunda se convierte en un factor dinámico que afecta su concepción ontológica. Por otra parte, es claro que señalar la referencia de un concepto como una categoría (lo verdadero o lo falso), es una muestra del papel y el valor que Frege otorga a ciertos entes abstractos.

La influencia de la lingüística

Por último, esta distinción fregeana parece corresponder más a preocupaciones lingüísticas y lógicas que ontológicas. Si transformamos función-objeto en concepto-objeto, se manifiesta con claridad que función-concepto corresponde (en una versión más general) a una acción predicativa, al tiempo que objeto a un sujeto. Podemos entonces sugerir que la división objeto-función es una forma abstracta y general de aproximar en el terreno de la expresión linguística la misma problemática que subyace en la división clásica sujeto-predicado. Una visión linguística de la división obtiene una mayor utilidad de la misma. De hecho, habría que recordar que las ideas de Frege sobre función y objeto son elaboradas en el mismo período de su vida en que reflexiona sobre la distinción entre sentido y referencia. Existe una gran conexión entre ambas distinciones y están vinculadas a reflexiones sobre la expresión y el lenguaje.

El profesor B.C. Birchall de la University of New England, en *Philosophy and phenomenological research*, manifiesta el mismo criterio que ha vertido en el párrafo anterior:

> "En el caso de la división de Frege entre objetos y conceptos, el problema es el tradicional, disfrazado algo por las peculiaridades terminológicas, de la explicación de la unidad y diferencia de las funciones de sujeto y predicado en la proposición" 15.

El problema reside en hacer de esta distinción de funciones, entidades 16. Según Birchall esto es lo que Frege hace, y con ello la división más que un avance fue un retroceso 17. Para E.D. Klemke en "*Frege's ontology: realism*" de la ontología *Essays on Frege*, también Frege hace entidades de esas funciones 18; con lo cual se introducen las dificultades.

Una visión de la distinción

La ontología que Frege manifiesta en la distinción objeto-función se puede presentar en forma esquemática, como hace Rulon Wells en "*Frege's ontology*" en el mismo libro *Essays on Frege:*

"A. objetos

1. Denotaciones ordinarias
   - a. Valores de verdad
   - b. Rangos
   - c. Función-correlatos
   - d. Lugares, momentos, "time-spans"
   - e. Ideas
   - f. Otros objetos

2. Sentidos ordinarios

B. Funciones

1. Funciones cuyos valores son valores de verdad

a. Con un argumento (concepto)
b. Con dos argumentos (relaciones)

2. Funciones cuyos valores no son todos valores de verdad

a. Con un argumento
b. Con dos argumentos” 19

De este sistema ontológico no sólo es criticable su “extrañeza” 20, sino también la sensación de que todos estos entes que Frege ha inventado simplemente no existen, independientemente de que sea posible demostrar o no una afirmación en ese sentido 21. Todos estos comentarios, añadidos a mis observaciones, revelan que la distinción ontológica objeto-función no resulta la más adecuada para dar cuenta de lo que existe. Tiende a dar la impresión de una gran artificialidad; que, por lo demás, tal vez pueda “asimilarse” mejor si detrás de ella lo que subyace es un mundo no material independiente del sujeto epistémico.

LA FILOSOFÍA DEL GEDANKE

Las observaciones que hemos planteado sobre Frege son coherentes si interpretamos como realista el pensamiento de Frege. Por ejemplo, en el momento en que la división mencionada no sea considerada ontológica (por la vía de otra interpretación general) las observaciones no podrían tener el mismo sentido.

¿Que es un gedanke?

El desarrollo de las consideraciones ontológicas de Frege, por lo menos a partir del tiempo en que establece esta distinción, sigue una misma orientación general que, posteriormente, vamos a ver cristalizada en el famoso artículo "*Der Gedanke*", publicado por primera vez en el *Beitrage zur Philosophie des Deutschen Idealismus* en 1918. En ese artículo Frege definía "*Gedanke*" de la siguiente manera: "...yo llamo un Pensamiento algo para el cual se plantea la cuestión de la verdad" 22 y completa con una nota:

> "De una manera similar se ha dicho tal vez: "un juicio es algo que es verdadero o falso". De hecho, yo uso la palabra "Pensamiento" en aproximadamente el sentido que "juicio" tiene en los escritos de los lógicos" 23.

Así pues:

> "Un pensamiento es algo inmaterial y todo aquello material y perceptible está excluido de esta esfera para la cual se plantea la cuestión de la verdad" 24.

Objeto, idea y gedanke

En el mismo artículo define "idea":

> "Incluso una persona no filosófica encuentra rápido necesario reconocer un mundo interior distinto del mundo exterior, un mundo de impresiones sensoriales, creaciones de su imaginación, de sensaciones, de sentimientos y estados de ánimo, un mundo de inclinaciones, deseos y decisiones. Por brevedad quiero recoger todos esos, con la excepción de las decisiones, bajo la palabra "idea" 25.

Señala Frege que: "Una idea que alguien tiene pertenece al contenido de su conciencia" 26; y enfatiza: "...ideas necesitan un portador. Las cosas del mundo exterior son sin embargo, independientes" 27.

Sigamos con la descripción de las nociones de Frege. Se pregunta si un "pensamiento" es una "idea" y concluye que no, puesto que en caso contrario se llegaría al absurdo de que la verdad no es única; dependiendo de los portadores individuales de ideas las nociones del conocimiento, se llegaría a que no es posible la ciencia como cuerpo teórico intersubjetivo. Porque:

> "Si alguien toma pensamientos como ideas, lo que reconoce como verdadero es, en su propia visión, el contenido de su conciencia y eso no concierne propiamente a ninguna otra gente" 28.

El resultado es: los pensamientos no son ni cosas del mundo exterior ni ideas:

"**Un tercer campo *** debe ser reconocido**. Lo que pertenece a éste corresponde con las ideas en que no puede ser percibido por los sentidos, pero con las cosas en que no necesita ningún portador para los contenidos de cuya conciencia pertenezca" (Negrita añadida) 29.

La división de Frege establece tres mundos diferentes. El desarrollo de su argumentación para justificarlos, así como la división misma, varía dependiendo del mundo en cuestión. Cuando se refiere a las ideas establece su carácter individual; una idea posee un portador único. Por ejemplo: "...es imposible comparar mi impresión sensorial con la de otra persona" 30. Añade:

> "Ninguna otra persona tiene mi dolor" 31.

La noción de idea es definida aquí de una manera muy particular. Las ideas son asimiladas a cuadros-pinturas mentales subjetivos y por lo tanto, ligados al individuo que los tiene.

Frege, por la misma definición, establece un contenido tremendamente subjetivo e individual para esta noción; Frege no se detiene a considerar que en el mundo de las "ideas", sensaciones, representaciones, emociones, etc., existe un sustrato objetivo capaz de ser aprehendido por la conciencia. Frege establece una separación tajante, rígida, entre "pensamiento" e "idea". Si bien esto es comprensible en tanto busca dar un fundamento que permita determinar un contenido veritativo de las nociones cognoscitivas, no es suficiente para describir la situación a la que se refiere. Las representaciones subjetivo-individuales poseen cierta objetividad, aunque no en el mismo sentido que se le puede atribuir a lo que se refiere Frege con la palabra "pensamiento". Lo que señalo es cierto, claro está, siempre que se adopte como punto de partida una visión que no haga de "pensamientos" realidades separadas de un proceso gnoseológico continuo de aproximación a la realidad.

En Frege la distinción radical es coherente con la existencia independiente de estos "pensamientos". Para Frege los hombres que aprehenden un "pensamiento" lo hacen diferentemente pero conservando lo esencial del mismo, pues éste existe separadamente de cada uno que lo aprehenda. Frege señala: "...los cambios que sufre (un pensamiento, A.R.) solamente envuelve propiedades no esenciales" 32.

Los "pensamientos" existentes en este mundo fregeano son el objetivo de la ciencia, la cual no los crea sino que los descubre reconociendo su verdad 33. La verdad de un "pensamiento" no es en Frege un proceso de continua aproximación de la conciencia humana a lo real, proceso transformante en saltos cuantitativos y cualitativos, no está inscrita como una realidad en flujo constante sumergida en la totalidad de la práctica social de los hombres. Para Frege: "...la verdad de un pensamiento es eterna" 34.

Con esta aproximación es muy difícil comprender la dialéctica del descubrir y crear en el conocimiento. Afirmando meramente que la ciencia descubre verdaderos "pensamientos" y no los crea, señala un aspecto importante epistemológicamente: la ciencia se refiere -aproxima- a un objeto independiente de la conciencia particular de los hombres. Es correcto señalar que la posibilidad del conocimiento parte de ello. Sin embargo, plantear la problemática envuelta como un "descubrir" los "pensamientos" significa afirmar la *existencia* de lo que en realidad son productos de la conciencia, los "pensamientos" separados espacio-temporalmente de la conciencia.

Una disgresión

Es necesario una reflexión. La realidad natural, su devenir y su relación con los hombres, trata de ser aprehendida por la conciencia humana, con sus medios, sus instrumentos. Las ciencias intervienen aquí como formas de la aprehensión de lo real por la vía del pensamiento. Ahora bien, los hombres construyen sus formas teóricas para realizar este proceso; éstas no son estáticas y con el decurso de la historia son mejoradas y sustituidas por otras. Lo que los hombres descubren son leyes, reglas del devenir de lo real, pero en una forma aproximada.

Las formas teóricas, pensamientos, conceptos...no se descubren, se construyen para expresar lo real. Los hombres descubren hechos y manifestaciones de procesos que tratan de dilucidar con la explicación y la experimentación. Cuando se parte de la existencia en sí de un tercer mundo de "pensamientos" objetivos, reales aunque no materiales, la división "ideas-objetos-pensamientos" adquiere sentido. El "problema" teórico se plantea cuando se parte de una visión epistemológica como la que, en cierta medida, he expresado.

Las representaciones subjetivas e individuales, que Frege refiere con su noción de "idea", como producto de sensaciones, sentimientos, etc., pueden ser aprehendidas por la razón en cierta forma. La medida precisa, así como los criterios a usar, dependerán de la situación concreta. A lo que yo apunto aquí es a mostrar una vez más la rigidez de la división hecha por Frege, cuya justificación aparece como posible dentro del marco de un realismo ontológico. La división observa una diferenciación auténtica, señala propiedades verdaderas de ciertas partes de los productos de la conciencia histórica y social de los hombres, pero es insuficiente.

Una comprensión global de este aspecto de la observación de Frege exigiría apartarse de la rigidez excesiva que éste tiene, de su mundo en sí de pensamientos, y exigiría se construya sobre una base metodológica y epistemológica que integre teóricamente todos los elementos de lo real, especialmente unificando el conocimiento y la práctica transformadora de los hombres en una sola totalidad. El punto de partida de Frege está en consideraciones epistemológicas y ontológicas diferentes.

Algunos supuestos fregeanos

Rulon Wells señala que existen varios supuestos concretos en la base de la argumentación fregeana: primeramente, la existencia de un mundo objetivo independiente aunque accesible al conocimiento humano; en segundo lugar, que conocemos parte de esa realidad, en donde se integra la matemática; que nuestro conocimiento lo es de verdades objetivas, independiente del tiempo, y que éstas son el objeto tanto de las ciencias naturales como de la lógica y la matemática [35].

Estos supuestos ya colocan a Frege suficientemente cercano al realismo. En esta interpretación de Frege la noción de "Concepto" que usa es una "referencia", y éstas son "entidades", "unidades ontológicas últimas" [36].

Para Klemke los conceptos de Frege son "universales" porque: si los objetos son particulares entonces se tiene que las propiedades son "universales"; al ser los conceptos propiedades, la conclusión es inmediata [37]. Los conceptos de Frege son universales y ontológicamente anteriores a los objetos [38].

Existen dos argumentaciones importantes en este terreno de las que parte Frege. Señala Richard Eldridge en *Review of Methaphysics* (marzo 1982) que una de ellas está basada en el análisis de las "propiedades de la verdad", donde la verdad y falsedad son propiedades de los "pensamientos" [39]. Y la otra argumentación consiste en "...una crítica explícita de la epistemología tradicional basada en las "ideas" [40]. Ambas argumentaciones conducen en Frege a la conclusión de que pensar es "aprehender un pensamiento", "el cual es verdadero o falso" [41].

Los razonamientos de Frege no son demostraciones incuestionables sino que parten de supuestos en lo que quiere probar: Frege asume que la verdad y falsedad son propiedades de los "pensamientos", así como asume que una epistemología de "ideas" conduce al escepticismo del conocimiento de cosas separadas [42].

El "Tercer Mundo" y Der Gedanke

"*Der Gedanke*" para Frege es una noción central que es la base de la definición de ese supuesto que es el tercer mundo real no sensible.

Para definirlo ha tenido que contraponerse a las "ideas" y a los "objeto" materiales de una manera radical. Cuando un sujeto aprehende un "pensamiento" se conecta con el hilo que lo conduce a "lo verdadero" o a "lo falso", pero estos a su vez caracterizan al "pensamiento".

Lo que es importante de determinar en el carácter de los "pensamientos" es el grado de influencia que estos pueden tener para los hombres. Si se trata de una entidad que puede o no afectar la evolución de la mente y los otros mundos aparte al suyo propio. Si los "pensamientos" pueden tener efectos sobre el mundo sensible y sobre la mente, indiscutiblemente, el platonismo de Frege es radical. Claro está que si esto se da, lo es al nivel de la cognición 43.

Para algunos esta visión radical del platonismo de Frege es la única coherente y significativa para todo el espectro platonista. Si las entidades independientes reconocidas por el pensador platónico no afectan el mundo sensible, ¿qué sentido pueden tener esas existencias?" 44. Las ontologías de Frege están íntimamente ligadas a consideraciones epistemológicas. La *Conceptografía* de 1879 fue escrita como un medio para "evitar malentendidos" y dotarse de un aparato lógico capaz de asegurar el rigor.

En otro orden de cosas, la discusión sobre los "pensamientos" pone de manifiesto la relación íntima entre ontología y epistemología en Frege. La discusión se puede establecer en torno a cuál dimensión se debe enfatizar en la comprensión de la evolución intelectual de Frege. En todo momento, ya sea que se enfatice la epistemología (*Conceptografía Ygrundlagen*), o la ontología ("*Der Gedanke*"), en la aproximación teórica fregeana estaba afirmada la premisa del conocimiento *a priori*.

Es decir, la mente que "produce" conocimiento verdadero, obtiene verdades independientes del tiempo y del espacio, infalibles. Aunque su visión no es de influjo agustiano como en Descartes, Pascal y Leibniz (esto representa una "ruptura" intelectual), no logró escapar del racionalismo. De hecho, su filosofía de las matemáticas, sin llegar a las posiciones que afirman la "evidencia sintáctica" de las matemáticas, apuntaló el paradigma formal-axiomatizante que ha sido una de las características de parte de la conciencia racionalista occidental de los últimos siglos.

Las dos ontologías de Frege se entienden muy bien si se incluyen en el marco general de sus intentos por obtener una fundamentación de las matemáticas. Especialmente su noción de *Gedanke* y la afirmación de la existencia de un mundo "objetivo" y "actual", no físico, constituye una base ontológica especial para su caracterización teórica de los números. La reflexión sobre las matemáticas representó en Frege un motor intelectual a partir del cual es posible comprender buena parte de su pensamiento filosófico.

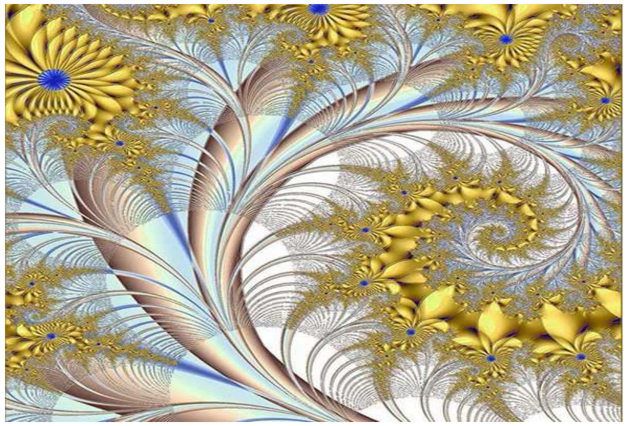
CAPÍTULO V
EPISTEMOLOGÍA Y ONTOLOGÍA EN LA FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS DE FREGE

INTRODUCCIÓN

Vamos a realizar un análisis acerca del significado de la epistemología y la ontología en la reflexión de Frege sobre la naturaleza de las Matemáticas. Para ello introducimos aproximaciones teóricas sobre Frege que enfatizan el papel de la epistemología, para intentar debilitar la interpretación usual de éste como realista. En este capítulo se establece como esencial la premisa de la necesidad de estudiar la filosofía de la matemática de Frege sin anular la epistemología o la ontología en su determinación.

Las aproximaciones particulares de Hans Sluga, Gregory Currie y de Philip Kitcher sirven aquí como puente teórico para introducir las posiciones y consideraciones del autor. En particular, introducimos una discusión en torno a la validez de la consideración de Frege como kantiano. Finalmente afirmamos como raíz teórica del pensamiento fregeano su vinculación con el racionalismo.

LA IMPORTANCIA DE LA EPISTEMOLOGÍA EN FREGE



Sin duda la filosofía del *Gedanke* expresa el nudo teórico central de la aproximación de Gottlob Frege en la comprensión de las matemáticas. La noción de *Gedanke* es la base de ese “tercer mundo” no físico pero real que sirvió para definir su filosofía, y como punto central para caracterizar a Frege como platonista.

Ahora bien, las consideraciones ontológicas de Frege no están separadas de otras de orden epistemológico. Cuál es el peso de la epistemología en la resultante vectorial del pensamiento de Frege, sólo puede comprenderse en el análisis concreto histórico de su evolución intelectual. No es el mismo en la *Conceptografía* que en “*Der Gedanke*” (publicado por primera vez en el *Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus* en 1918).

Las asunciones de Frege en torno a los “pensamientos” (es decir, su “aprehensión” como característico del conocimiento) y, de hecho, el reconocimiento de la importancia de la indagación epistemológica, está presente en la tarea de la construcción de un lenguaje ideal [1].

Conceptografía, grundlagen y epistemología

Podría argumentarse, entonces, que la *Conceptografía* de 1879 obedeció a motivaciones epistemológicas. Sin embargo, esto debe relativizarse. La *Conceptografía* fue escrita como:

> “...un medio para evitar malentendidos con otros y, a la vez, para evitar fallas en el pensamiento propio, ambos defectos tienen su origen en la imperfección del lenguaje” [2].

Esta opinión la expuso Frege en “Sobre la justificación científica de una Conceptografía”, que apareció en *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik* en 1882. En su *Grundlagen* de 1884 señaló la misma motivación en relación a los fundamentos de la matemática:

> "Es insoslayable el requerimiento de evitar todo salto en las deducciones. Que cumplir esto es difícil, lo muestra la duración de un proceso que ha de realizarse paso a paso. Cada prueba, aunque sólo sea algo complicada, amenaza con tomar una dimensión exorbitante. A ello se añade que la enorme variedad de formas lógicas acuñadas por el lenguaje, dificulta aislar un conjunto de modos de injerencia suficientes para todos los casos y fáciles de abarcar de una mirada. Para evitar este inconveniente he ideado mi *Conceptografia*" 3.

Las motivaciones epistemológicas están presentes pero no, de una manera particular, más allá de la búsqueda del rigor y el mejor medio para la transportación de significaciones.

Gedanke y epistemología

La discusión sobre los "pensamientos" pone de manifiesto la relación íntima entre ontología y epistemología en Frege. En el marco mismo de la interpretación clásica de Frege como realista, la incidencia sobre determinantes epistemológicas es imposible de evitar. La discusión se puede centrar a partir del énfasis que se le brinde a los términos de la pareja ontología-epistemología.

Para Eldridge, Frege es realista, pero de una manera muy precisa:

> "Como los tradicionales epistemólogos racionalistas y realistas, Frege se preocupa por negar que nuestro conocimiento y lenguaje son fundamentalmente artificiales o convencionales; más bien, algo en el orden de las cosas nos hace comprender y usar el lenguaje como lo hacemos y nos permite conocer algunas cosas como son. Pero, para Frege (...) las cosas que nos permiten entender y usar el lenguaje como lo hacemos no son ideas innatas implantadas puestas en nosotros por Dios, sino pensamientos aprehensibles a través de la construcción y empleo de un lenguaje ideal. Parece que, de acuerdo con Frege, si nosotros solamente pudiésemos hablar un lenguaje del ser cuasi-platónico, entonces porciones considerables de nuestro mundo y en particular la naturaleza del conocimiento, se volverían puramente inteligibles para nosotros" 4.

Aquí Frege es visto en el terreno de la epistemología realista, la diferencia estriba en la noción "*Gedanke*" y los mecanismos para aprehender los pensamientos. Frege escapa del esquema epistemológico cartesiano por la vía de subordinar la investigación epistemológica al análisis del significado 5. El conocimiento (para Frege) no depende de tener ideas (Descartes),sino de la validez del razonamiento. La "aprehensión de pensamientos" es la respuesta que Frege exhibe.

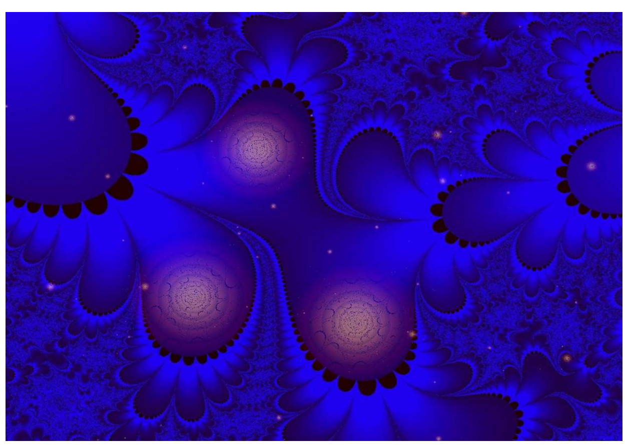
Para Frege el tener ideas es subjetivo, lo objetivo son los “pensamientos” (es evidente que la respuesta a la visión cartesiana sin embargo no alude a la noción de “idea” que participa en su ontología). Aunque Frege no se refirió todo el tiempo en su obra a los problemas epistemológicos explícitamente, las motivaciones epistemológicas en toda ella son centrales.

La introducción de Frege en el mundo de los fundamentos de la matemática no fue una continuación lineal de los trabajos de rigorización emprendidos en el siglo XIX. Se concentró en estos temas como parte de una visión que buscaba la fundamentación de la matemática, a través de lo que creía está conectado a la verdad absoluta, la lógica. Su proyecto de validación de la matemática era un proyecto epistemológico, y es el que recorrió toda su obra.

En ese sentido, en la pareja epistemología-ontología es el primer término el que debe enfatizarse en la evolución de los trabajos de Frege. Este sentido epistemológico nos permite comprender el sentido de lo que E. Currie dice al comentar que: “son los argumentos de Frege por la objetividad de los pensamientos los que son importantes y duraderos, no sus argumentos por su realidad” [6]. Objetividad, como veremos, no es asimilable con realidad; está más conectado con la certeza y la validez. Sobre la noción de objetividad hay toda una discusión que abordaremos en las siguientes páginas.

Frege hace descansar la validez de la aritmética en las reglas de la lógica, en la derivación lógica; pero cuando se pregunta por la justificación de la verdad de estas últimas no es claro. Lo único que hace es dar un método de validación. En el *Grundlangen* la validación última lógica reside en la Razón en sí, en las leyes más generales de ésta.

UNA VISIÓN HETERODOXA: SLUGA



Si bien la interpretación que enfatiza la epistemología es fundamental, no por ello las consideraciones en torno a la ontología deben desaparecer. No es posible comprender el pensamiento de Frege de una manera completa si no se incide sobre el conjunto de premisas y actitudes filosóficas. Su realismo no es una consideración exclusivamente epistemológica, sino ontológica. Y, como dice Michael Dumment, esta interpretación precisa es necesaria, cualquier otra sólo puede generar “confusión y malentendidos” 7.

El análisis sobre Frege ha vuelto a ser objeto de atención en los últimos años. A propósito de él una interesante discusión se desarrolló: ¿Es adecuada la clásica interpretación de Frege como realista? ¿No se habrá exagerado mucho con lo del metafísico tercer mundo de Frege? Siempre se ha separado a Frege de Kant: ¿Cuán cierta es esa visión sobre la filosofía de Frege?

Los límites de la interpretación de Frege como realista

Una de las interpretaciones últimas más “heterodoxas” ha sido la de Hans D. Sluga, que conviene reseñar. Para él, la interpretación clásica de Frege como realista conduce a no leer importantes hechos de la doctrina de Frege, entre los que señala el “principio del contexto” 8. Para éste es un abuso identificar la “revuelta” de Russell y Moore frente al hegelianismo con otra similar de Frege 9. Tanto Frege como Kant objetaban el idealismo subjetivo, pero no desecharon un idealismo trascendental 10. El verdadero enemigo de Frege no era el idealismo sino en general lo que se podría llamar escepticismo positivista 11.

En resumen, su posición sobre Frege es la siguiente: Para Frege se trataba de mostrar que la lógica matemática era objetiva, su oposición era a la psicología fisiológica y al idealismo subjetivo, al formalismo y al psicologismo, y sobre todo su crítica incidía en el naturalismo y la negación de verdades a priori; Frege criticaba al empirismo y para ello utilizaba métodos kantianos.

Para justificar esta aproximación, Sluga se concentra en la noción de “objetividad”: aquí encuentra, según él, el punto medular para su rechazo de la interpretación clásica realista 12. Sluga replantea esta noción no en términos ontológicos sino epistemológicos; conecta a Frege con la tradición de Lotze-Kant 13, con lo cual hace de la noción de objetividad una noción que no se refiere a la realidad sino a la validez. Afirma Sluga: “Lotze es explícito en mantener que llamarlos (se refiere a los sentidos de expresiones-añadido) objetivos no es hacer un reclamo ontológico” 14. Y además:

> “Mi objetivo ha sido hacer plausible que Frege pueda ser entendido perteneciente a la tradición Lotze-Kant. Ni Lotze ni Kant son considerados generalmente como realistas y conectando a Frege con ellos yo quería socavar la interpretación universal realista de su pensamiento” 15.

En su interpretación Sluga critica las nociones de objetividad y de realismo en términos de “validez independiente de oraciones”, usadas por Dumment en su famoso libro *Frege: The Philosophy of language* 16. Las conclusiones de Sluga conectan a Frege con Kant de una forma que, sin embargo, no resulta muy convincente. Dice:

> "La posición de Frege parece más cercana al idealismo kantiano que al realismo entendido en la forma usual. Lo objetivo existe para él no separado de o fuera de la Razón, sino que constituye su estructura incambiable. Frege difiere de Kant al sostener que esta estructura no está compuesta sólo de conceptos, sino también de objetivos *a priori.* En este respecto está completamente de acuerdo con Lotze (Logik, p. 532). **En este sentido la doctrina de la objetividad de números, conceptos y pensamientos no es ontológica para Frege"** (Negrita añadida) 17.

Sluga sugiere que, al igual que la "*Filosofía crítica*" de Kant, Frege rechazó las cuestiones ontológicas por considerarlas "metafísica dogmática" 18.

Por último, Sluga señala que Frege no puede ser considerado realista en un sentido fuerte cuando llega a admitir que "...espacio y tiempo son intuiciones *a priori* y que las proposiciones geométricas y temporales son, entonces, sintéticas *a priori*" 19. También vincula Frege a Kant el hecho de que para el primero no existe una relación directa con los objetos, están los "pensamientos" vía interpuesta; en Kant son las categorías del entendimiento. Estos dos últimos hechos no conducen, sin embargo, necesariamente a las conclusiones de Sluga, como explicaré más adelante.

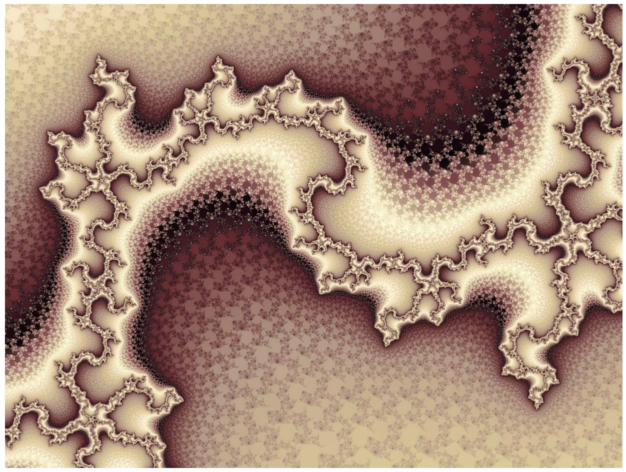
La reducción de la ontología

La palanca argumentativa de Sluga es la de hacer desaparecer prácticamente la ontología en Frege y dotar a todas las consideraciones fregeanas, adecuadamente, de un carácter epistemológico. Su línea de argumentación, como señala G. Currie, está referida al sentido general de la filosofía de Frege 20.

Ahora bien, es una actitud metodológica tremendamente difícil de sostener en el análisis de la filosofía de Frege. Es un poco grueso afirmar que "los pensamientos" en "*Der Gedanke*" de 1918 jueguen un papel similar al de las "categorías" kantianas del entendimiento. Es también muy difícil sostener que, independientemente de lo que haya dicho Lotze, cuando Frege hablaba de "número uno" como un nombre lógicamente propio, pensara que no había un objeto propio para él 21. Por otra parte, tampoco es concluyente que Frege haya creído en el carácter "intuitivo" de la geometría, al igual que Kant.

La filosofía de Frege no es un cuerpo teórico axiomático, homogéneo y coherente en todas sus partes; es más bien, una resultante de premisas, métodos y actitudes teóricas. En algunas partes encontramos la influencia de Kant, en otras no. La parte central de los trabajos de Frege reside precisamente en "desterrar" la "intuición" kantiana de la aritmética y demostrar la analiticidad de la misma.

EPISTEMOLOGÍA Y ONTOLOGÍA



La clave para comprender la filosofía de Frege se encuentra en dos actitudes metodológicas. Por un lado, entendiendo su filosofía como una resultante de diversas componentes teóricas, es preciso exhibir esas componentes, el papel que juegan y trazar la dirección del vector que a su vez se transforma y evoluciona en el tiempo.

La evolución de la epistemología en Frege

En Frege hay varios elementos presentes, imbricados y activos: la presión del marco epistemológico kantiano, la extraordinaria valoración de la lógica y la aritmética, la preocupación por el rigor, la consistencia y el fundamento lógico, el énfasis en lo axiomático y formal contrapuesto al mundo empírico, etc. y una poderosa actitud realista frente a las entidades abstractas. Esta última en toda su obra ocupó un papel decisivo; sin embargo, es necesario colocarla siempre en el lugar concreto que ocupó, lo que exige también el análisis concreto.

Por otra parte, en un sentido distinto pero complementario a lo anterior, es necesario hacer el análisis de la evolución de la relación entre epistemología y ontología en Frege. En ésta no es posible enfatizar a la primera o a la segunda simplemente, es necesario recorrer la producción filosófica de Frege en sus diferentes etapas y, aunque se comprenda la unidad recíproca de los términos de esta relación, analizar el papel que cada uno de ellos jugaba en cada momento. Frege no mantuvo toda su vida la misma interpretación epistemológica ni ésta pesó de igual manera en todos los proyectos que estableció. De igual forma, no mantuvo siempre ni la misma ontología ni ésta ocupó el mismo papel en su filosofía. Yo creo que está libre de duda suponer que las preocupaciones epistemológicas en el Frege de la *Conceptografía* y del *Grundlagen der Arithmetik* fueron las decisivas en la elaboración de sus proyectos de fundamentación, mientras que la ontología estaba en un plano secundario. Al igual, se puede considerar el contenido de su "*Der Gedanke*" cargado especialmente de ontología.

Podemos coincidir en este sentido con los especialistas que, en un grado mayor o menor, afirman el “arranque” epistemológico de Frege; podemos coincidir también, en particular con Currie, en su consideración del “objetivismo” de Frege con una teoría epistemológica sobre el tipo de conocimiento que podemos tener y que no puede ser explicado por el contenido subjetivo de la mente 22. También pareciera lo más razonable suponer que entre el *Grundlagen* y el *Grundgesetze* haya habido variaciones en la ontología de Frege.

El realismo de Frege: Una interpretación

Currie sugiere que el realismo no se da en el *Grundlagen,* sino que se desarrolla luego en respuesta a problemas de la psicología filosófica, y que la tesis de un reduccionismo exclusivamente epistemológico es insuficiente:

> “La explicación que yo ofrecí pretendía lanzar luz sobre los comentarios de Frege sobre la actualidad (*Wirklichkeit*) de los Pensamientos. Pero hay otros aspectos del realismo de Frege: su insistencia en la existencia de funciones, números, extensiones y, más en general, recorridos de valores, o lo que él llamó “objetos lógicos”. Este aspecto específicamente matemático del realismo de Frege no puede ser explicado por completo sobre la hipótesis de que él estaba tratanto de resolver problemas acerca de la naturaleza de la cognición; a no ser que digamos simplemente que una disposición a favorecer objetos abstractos en una área lo hizo más receptivo para ellos en general” 23.

Para Currie el platonismo matemático de Frege aparece en el momento en que decide introducir una categoría de objetos para fundamentar la aritmética, cuando éste no podía construir los números sólo sobre la base de conceptos 24. Fue entonces para garantizar la existencia de suficientes objetos lógicos que Frege sacó la existencia de sus “recorridos de valores”, lo que está sancionado en el *Grundgesetze* por el Axioma V 25. Este axioma no señala lo que son los recorridos; brindan sólo algunas de sus condiciones. El status metafísico de la noción es poco claro 26.

Para Currie, esta situación contrasta con la del *Grundlagen*, en donde los números están claramente determinados en una teoría como “productos de nuestra estructura cognoscitiva más básica” 27.

La certeza apodíctica de la Aritmética en los *Grundlagen* descansa en la claridad como se aprehenden las verdades sobre los números y esto es “...porque son creación de la misma razón” 28. Es la supuesta pérdida de esta claridad cuando se conecta recorridos con números en el *Grundgesetze*, lo que conduce a Currie a concluir acerca del origen del realismo de Frege. En ese mismo artículo traza algunas consideraciones sobre la epistemología en Frege; reafirma el papel de los “pensamientos” como las “...únicas entidades abstractas que entran en contacto con nosotros” y “a las que Frege les adscribe *Wirklichkeit* (actualidad)" [29]. En Frege (según éste) no existe un "platonismo epistemológico" si por ello se entiende lo que dice Michael Resnick (es decir, una identificación de la relación del sujeto con los objetos físicos y la existente con los números).

En realidad, es necesario aclarar esto mejor. En mi opinión, los objetos físicos son aprehendidos a través de la experiencia, aunque se "introducen" en su conocimiento los "pensamientos"; esto último también sucede con los números. En esto sí habría coincidencia. Sin embargo, la forma precisa de llegar a unos y a otros es diferente.

El sujeto se relaciona con los objetos físicos de manera directa, en cambio con las entidades matemáticas el sentido de "directo", que aparece antes aportado por la percepción, no está presente. Esto es apenas natural; de alguna forma el sentido de la realidad de lo material se introduce en la visión realista.

Independientemente de que se admita la hipótesis particular de Currie en torno a la forma como se gestó el realismo en Frege, es indiscutible que se detecta un cierto cambio filosófico entre los *Grundlagen* y los *Grundgesetze* y, más aún, entre el primero y "*Der Gedanke*". La conexión de números y recorridos se entiende mejor con una interpretación no sólo epistemológica, sino ontológica, en concreto realista. De igual forma sucede con la descripción del "tercer mundo" de "pensamientos" que aparece en 1918.

Si bien en el *Grundlagen* y en toda esta etapa del pensamiento de Frege las motivaciones descansan especialmente en el dominio epistemológico, yo considero inadecuada una visión que no haga intervenir el vínculo ontológico. En la pareja epistemología-ontología no se puede prescindir de uno de los términos.

Ontología y objetividad

En Frege la noción de "objetividad" del Grundlagen no puede ser asimilada a un criterio de validez, independiente de consideraciones ontológicas (esto es así aunque la epistemología constituya una base esencial de su trabajo). Tampoco basta buscar una conexión con Lotze para justificar una aproximación interpretativa sobre Frege.

En el *Grundlagen* dice Frege:

> "Yo distingo lo objetivo de lo tangible, de lo espacial, de lo real. El eje de la Tierra, el centro de masa del sistema solar son objetivos, pero no los llamaría reales a la manera en que lo es la Tierra misma. Frecuentemente se dice que el ecuador es una línea imaginaria; pero resultaría falso llamarla una línea ficticia; no surge del pensamiento, no es el resultado de un proceso anímico, sino que sólo es reconocida o aprehendida por medio del pensamiento. Si el ser reconocido fuera un ser creado, no podríamos predicar nada positivo de ella en relación a un tiempo anterior a su pretendida creación" [30].

Lo objetivo para Frege, distinto de lo real, debe entenderse entonces en una forma muy precisa: no “a la manera que lo es la Tierra misma”. Es decir, real es asimilable a lo material, lo sensible, lo espacial, de una forma directa. Lo real es una noción que aparece en Frege “muy física”, como dijo Russell del “objeto” fregeano en los *Principios*. Esta noción no parece que se refiera exclusivamente a condiciones de validez, lo objetivo aquí apunta a una categoría de cosas que no son creadas, sino que existen en sí, son entonces descubiertas. Para Frege la rígida separación entre “pensamientos”, “ideas” y “objetos”, se realiza para apuntalar las condiciones de los primeros.

La “objetividad” no es mera apelación a una consistencia lógica, es si se quiere un reclamo ontológico de verdad. Veamos como Frege usa la noción de objetividad en el *Grundlagen*:

> “Cuando a la nieve se le llama blanca, se quiere expresar una propiedad objetiva que a la luz habitual del día se reconoce en una cierta sensación (...). De esta suerte, las palabras para los colores no señalan con frecuencia nuestras sensaciones subjetivas, de las que no podemos saber si concuerdan con las de otros pues patentemente esto de ninguna manera garantiza la misma denominación, sino que señalan una propiedad objetiva. Así por objetividad entiendo una independencia de nuestro tener sensaciones, de nuestro intuir e imaginar, del construir imágenes internas a partir de los recuerdos de sensaciones anteriores; pero no una independencia de la razón, ya que responder a la pregunta de qué cosa es independiente de la razón, sería como juzgar sin juzgar, como lavar una pelliza sin tener que mojarla” 31.

Cuando Frege se refiere aquí a una no “independencia de la razón”, no parece que esto lo entienda como que la razón crea, lleva integrada en sí misma las propiedades objetivas: más bien, se refiere a la capacidad de la razón para aprehenderlas. En el *Grundlagen*, el sustrato que aparece mejor sancionado en el “tercer mundo” de “*Der Gedanke*” no está planteado ni formulado de idéntica manera, pero existe bastante continuidad en las consideraciones de Frege sobre el problema. Encontramos desde un principio una actitud platonista que introduce entidades abstractas, separadas de un proceso de construcción psico-social, aunque aprehensibles por la razón a través de mecanismos que se van precisando con la evolución de su pensamiento. Esta actitud es el factor determinante en la resultante de su filosofía, es un marco de condiciones básicas en la concepción y desarrollo de los proyectos de fundamentación matemática. Ahora bien, su teoría del conocimiento no puede estudiarse como una consecuencia mecánica de esa descripción, la ontología no contiene toda la filosofía, evidentemente. La aproximación epistemológica de Frege, que también varía históricamente, es una palanca motriz en la determinación de su filosofía.

FREGE Y KANT

Es necesario en este punto hacer incidir el análisis en las condiciones de la epistemología en Frege y, en particular, su relación con Kant.

La herencia de Kant según Kitcher

Para Philip Kitcher, Frege heredó el marco epistemológico kantiano. Señala:

> "Yo espero mostrar que Frege encajó el concepto tradicional de prueba dentro del marco epistemológico que derivó de Kant Específicamente, Frege tomó de Kant una respuesta a una pregunta que surge para cualquier proponente de la concepción tradicional de prueba: ¿cómo obtenemos conocimiento certero de los primeros principios de donde empiezan nuestras deducciones matemáticas? Creyendo que el recuento general kantiano de fuentes de conocimiento es correcto, Frege mantuvo que Kant había previsto los materiales para responder esta pregunta pero que había aplicado mal ese recuento en el caso de la aritmética" 32.

La tesis de Kitcher encuentra sustento en el *Grundlagen*. Frege reconoce aquí los méritos de Kant en la distinción de lo análitico y sintético, e incluso dice:

> "Si Kant se equivocó respecto a la aritmética, creo que esto no hace mella esencial en su trabajo. Llegó a la conclusión de que hay juicios sintéticos *a priori*; si estos aparecen únicamente en la geometría o también en la aritmética, resulta de una menor importancia" 33.

En efecto, sin salir del marco epistemológico kantiano, Frege lo que propuso fue una corrección precisa en relación a la aritmética. Colocaba ésta en un nivel "superior" al de la geometría, asimilada a las leyes de las leyes de la Razón, no podía entonces ser producto de una intuición, aunque fuese *a priori*. Esto es claro y decisivo en la filosofía de Frege. Nos dice:

> “¿No yace la base de la aritmética a mayor profundidad que la de la misma geometría? Las verdades aritméticas gobiernan el campo de lo numerable. Este es el más comprehensivo, puesto que a él pertenece no sólo lo real, no sólo lo intuitivo, sino todo lo pensable; las leyes de los números, así, no deberían estar en íntima unión con las del pensamiento?” 34.

La aritmética es privilegiada y determinante, su fundamentación es posible por su naturaleza. Es esta valoración de la aritmética la base de su “corrección” a Kant.

Kant, Frege y lo analítico

Frege intentó una redefinición de la noción de analítico para poder con ella dar cuenta de la aritmética 35. “Analítico” se asimila a derivable de leyes lógicas, esto lo hace porque la fuente del conocimiento analítico como aparece en Kant es oscura. Frege quiso ponerle un parche, pero sin tocar el resto de la estructura epistemológica. Esta es la visión de Kitcher 36.

Frege critica a Kant, le dice que “... ha subestimado como consecuencia de una conceptuación estrecha el valor de los juicios analíticos” 37. Frege critica a Kant sobre la base de condiciones lógicas diferentes que la tradición de los Boole, De Morgan, etc., ha engendrado. Dice Frege:

> “El piensa en el caso del juicio universal afirmativo (...) Pero, ¿qué pasa si el sujeto es un objeto individual? y, ¿si se trata de un juicio existencial? En este sentido, pues no se puede hablar de un concepto del sujeto” 38.

Frege piensa que su corrección hace avanzar la profundidad teórica en la aproximación a este problema. Refiriéndose a las proposiciones aritméticas dice:

> “De hecho están contenidas en las definiciones, pero a la manera en que las plantas lo están en las semillas, y no como las vigas lo están en una casa” 39.

La fuente que encuentra Frege para las verdades analíticas es la derivación lógica, conectada con la Razón misma. Sin embargo, cuando se suceden los fracasos del proyecto logicista Frege abandona esta pretensión y busca fundamentar la aritmética en la geometría, con lo cual tampoco sale del marco definido por Kant.

Se podría argumentar que los lazos de Frege con Kant son menores, accediendo, por ejemplo, a las críticas que realiza el primero contra el psicologismo y el intuicionismo en la lógica y la matemática. Pero también se puede precisar mejor la naturaleza de la crítica anti-psicologista que realiza. Se trata, sobre todo, de criticar la identificación de la lógica con los procesos mentales, de criticar el consenso acerca de lo verdadero como criterio de verdad y de criticar que el significado de una expresión es la idea que ésta genera en nosotros y la identificación de números con entidades mentales 40. De hecho, sin sobrestimar los procesos psicológicos en el conocimiento válido, puede sugerirse que la noción de prueba que usa Frege no está en contradicción con la que maneja Kant; en donde la prueba escrita es una expresión literal de un proceso mental que produce conocimiento 41.

Lo original de Frege frente a Kant

Es claro que Frege en su vida hizo un viaje por la epistemología y que pasó por varias estaciones. En todas ellas la terminología kantiana aparece. Pero esto no es suficiente para acentuar exageradamente la relación de las filosofías de Frege y Kant.

Frege reconoció en la evolución de su filosofía la existencia independiente de entidades abstractas, al mismo tiempo que asumió el marco epistemológico (a veces "corregido") de Kant.

Pero no es posible describir en general la filosofía de Frege como una continuación adaptada del kantiano. Vamos a explicar por qué no puede ser así.

La búsqueda de la salida de los problemas de la epistemología cartesiana por la vía de la subordinación de la investigación epistemológica al análisis del significado, el proyecto de la construcción de un lenguaje ideal, el sentido preciso de la teoría de los "Gedanke" en el conocimiento, así como, sobre todo lo anterior, su valorización especial de la lógica y de la aritmética, en su conjunto ya definen (sin siquiera introducir las consideraciones ontológicas que he también abordado) una filosofía diferente a la kantiana. El marco epistemológico kantiano es si se quiere un punto de partida para Frege, pero es incapaz de definir su filosofía. De hecho, no es el marco epistemológico kantiano el que determina el logicismo en Frege; son consideraciones filosóficas particulares las que (inscritas tal vez en ese marco general) le dan origen al proyecto logicista, que condensa lo mejor de su filosofía. Aunque no niego la existencia de una importante conexión epistemológica con Kant, es absolutamente necesario esclarecer en concreto su función filosófica auténtica.

Frege en lo fundamental de su filosofía (le reconociera méritos o no a Kant) se colocó contra Kant en el análisis de la aritmética. Esto es más importante que su acuerdo en relación a la geometría. Frege se apoyó en la tradición leibniziana, que separa la aritmética de la geometría 42; interpretó a Leibniz en favor de su consideración de las leyes de los números como analíticas: "...para él lo *a priori* coincide con lo analítico" 43. Se colocó de lleno en las tradiciones lógicas y matemáticas del siglo XIX que habían abandonado la filosofía kantiana del XVIII. Sobre la base de esto es que valoró a la aritmética por encima del resto de las matemáticas, la colocó con un cetro a la par de la lógica, en donde la razón preside. A partir de aquí se define la filosofía de la matemática de Frege, no a partir de su acuerdo con el carácter sintético *a priori* de la geometría.

Si la conexión de una filosofía con el marco epistemológico de Kant fuera suficiente para su caracterización, muchos infieles entrarían ya en la categoría de kantianos. Es acertado conectar Frege a Kant y descubrir en su análisis las relaciones entre sus filosofías; pero es insuficiente, más aún, no es lo esencial, en la caracterización de su filosofía de la matemática.

EL CONOCIMIENTO A PRIORI COMO PARADIGMA

Lo que sí es necesario en el marco epistemológico general del que parte Frege en su aproximación y lo que es común no sólo a éste y a Kant, sino a la mayoría de pensadores occidentales, es la premisa del conocimiento *a priori* (aunque la noción de *a priori* no sea idéntica).

Lo a priori y el platonismo en matemáticas

La mente "produce" conocimiento verdadero, genera verdades independientes o no del tiempo. Esto se realiza ya sea por la vía de la "intuición pura", del oscuro develar conceptual, o por la vía de la reducción lógica...hasta las leyes más profundas de la razón. Sea cual sea la fuente epistémica escogida, la premisa es la posibilidad de lo *a priori* en el conocimiento. Esto constituye la parte medular del paradigma racionalista en torno a la verdad, considerada como cerrada en sí misma y no como un proceso continuo, polifacético, siempre inacabado, aproximativo.

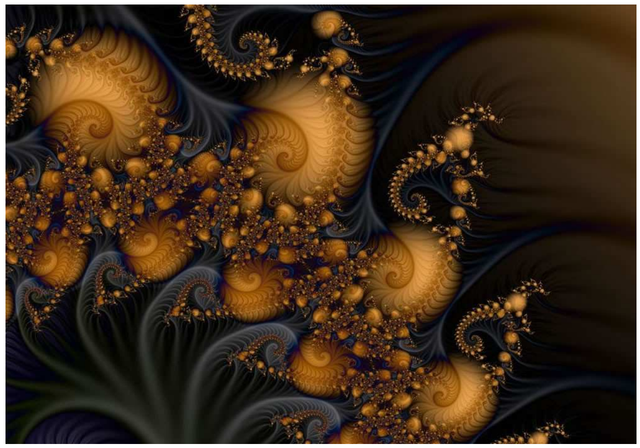
Estas presuposiciones filosóficas contribuyen a apuntalar actitudes ontológicas platonistas, así como epistemológicas subjetivistas. Es coherente con esta visión de la verdad referirse a "verdades", a "pensamientos", con un contenido veritativo siempre determinado...dotándolos, si es el caso, de existencia, de valor ontológico. Es claro que en la raíz de la "aprehensión" de los "*Gedanke*" subyace este sustrato primitivo.

Cuando la mente es así elevada a la categoría de productora de conocimiento *a priori*, se han engendrado las condiciones no sólo para explicar la aritmética, sino el conocimiento en general y toda la realidad. Para Kant, para Boole, para Descartes, y para Frege, la mente es una palanca creadora o aprehendedora de verdades que, casi siempre, son previamente caracterizadas como absolutas, inmutables (aunque sus nociones de verdad, de *a priori*, etc., no sean idénticas). Todos ellos han compartido el paradigma racionalista de las matemáticas, enfatizando a veces unos métodos y a veces otros. Sus visiones sobre la verdad tienen mucho en común.

Es necesario hacer aquí una pequeña disgresión. Cuando la noción de verdad se relativiza, se devuelve al corazón de lo terrenal; cuando la verdad se transmuta en apenas conjeturas falsables (aunque no se sepa muy bien cómo hacerlo) muchas de las actitudes clásicas de la filosofía occidental quedan girando en el vacío. Esta tal vez sería una forma útil de actualizar los buenos usos de la navaja de Occam.

En Frege no se afirma una concatenación de las matemáticas con las ciencias naturales y la realidad material. No se sostiene como contenido central de la naturaleza de las matemáticas las *aplicaciones* en ciencia, técnicas, etc. En Frege se apuntala lo a priori y lo deductivo, axiomático y formal. Como ya lo hemos mencionado, el logicismo de Frege se desarrolla sobre la base de una actitud platonista radical en casi todos sus aspectos. Este platonismo aparece íntimamente ligado al racionalismo. En algunos racionalistas no encontramos un platonismo muy radical, a veces no aparece del todo. Pero en el caso de Frege se trata de dos posiciones intelectuales que se refuerzan mutuamente. Esta fusión recíprocamente condicionada es un nudo central de su filosofía de las matemáticas.

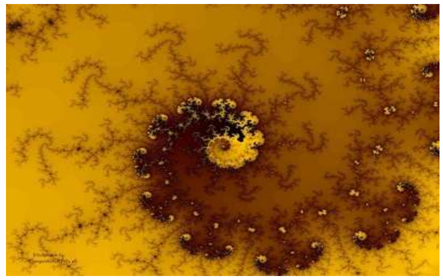
CAPÍTULO VI
EVOLUCIÓN DE LA FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS DE BERTRAND RUSSELL



INTRODUCCIÓN

El punto de partida de Bertrand Russell para apuntalar el Logicismo debe buscarse al igual que con Frege en la Filosofía: en la Ontología, pero también especialmente en la Epistemología. En su *Evolución de mi pensamiento filosófico*, las primeras frases con las que inicia este libro de 1959 enfatizaban esa "preocupación constante" por "descubrir cuánto puede decirse que conocemos y con qué grado de certeza o de duda" 1. Esta necesidad de encontrar algo "seguro" lo condujo a hacer de la Lógica y las Matemáticas esa fuente reconfortadora. Frente al escepticismo el edificio de la Matemática aparecía "inmovible e inexpugnable ante todas las armas de la duda cínica" 2. Aunque en Matemática (según él) no sabemos nunca de lo que estamos hablando ni si lo que decimos es cierto 3, se ha llegado en la modernidad a saber realmente cuál es su naturaleza 4. Este gran "triunfo", que, sin embargo, las siguientes décadas oscurecerían, era la bandera a levantar por Russell, a la que se aferraba con fe casi religiosa.

FRENTE AL IDEALISMO SUBJETIVO



La evolución del pensamiento de Russell es tal vez lo más importante de su elaboración intelectual como un todo; no tanto lo que pensaba, sino el proceso de avanzar de unas ideas a otras en pos de lo que aparecía como verdadero.

La influencia de Bradley

En 1897 Russell todavía estaba profundamente influenciado por la tradición en suelo británico del hegelianismo y el kantismo. En sus *Foundations of Geometry* Russell admitía la aproximación kantiana sobre la geometría, sólo que el *a priori* antes de la experiencia espacial no era la Geometría euclidiana sino la proyectiva 5. En esta ocasión Russell descartaba la aplicación de las geometrías no euclídeas en la experiencia; propuesta desafortunada que la formulación de la teoría de la relatividad invalidaría pocos años después. Russell en esta obra aunque no escapaba de las posiciones filosóficas de Bradley introducía algunas precisiones en torno a la noción del *a priori*: en particular, la separación de este frente a la noción de lo subjetivo, que, como él mismo señalaba , en Kant son "casi intercambiables" 6.

La aproximación propiamente idealista no duró mucho en Russell. Cómo él mismo ha establecido, el escepticismo relativista y el subjetivismo de Hegel y Kant no satisfacían las necesidades de ese tronco intelectual seguro al cual requería asirse. A finales del siglo XIX la revolución del "atomismo lógico" y la "lógica matemática" 7 establecieron el terreno filosófico sobre el que caminaría en adelante. En cada nuevo paso, sin embargo, Russell siempre arrastró los anteriores, de una u otra forma.

La crítica a Kant

La ruptura con el idealismo condujo a la refutación del subjetivismo kantiano en las Matemáticas. En los *Principios de la Matemática* de 1903 señalaba:

> "Gracias al progreso de la lógica simbólica, especialmente tal cual la trata el profesor Peano, puede darse ahora refutación final e irrevocable a esta parte de la filosofía kantiana" 8.

Y esto ya aparece desde entonces vinculado al Logicismo; sigue la cita :

> "Con la ayuda de diez principios de deducción y de otras diez premisas de naturaleza lógica general (por ejemplo, "la implicación es una relación") puede deducirse toda la matemática estricta y formalmente, y todas las entidades que figuran en Matemática pueden definirse en función de las que figuran en las veinte premisas anteriores. Bajo esta formulación la Matemática no sólo incluye la Aritmética y el Análisis sino también la Geometría, euclidiana y no euclidiana. La dinámica racional y un número indefinido de otros estudios aún no comenzados o en su infancia. El hecho de que toda la Matemática sea Lógica simbólica es uno de los descubrimientos más importantes de nuestro tiempo; y una vez establecido este hecho, lo que queda de los principios de la Matemática consiste en el análisis de la propia lógica simbólica" 9.

La crítica iba dirigida contra la "intuición" kantiana, nos dirá en la *Introducción a la Filosofía Matemática* de 1918:

> "...habiendo observado (Kant, añadido A.R.) que los geómetras de su tiempo no podían demostrar sus teoremas únicamente por el razonamiento, sino recurriendo a la figura" 10.

Según Russell:

> " Toda la orientación de la matemática moderna, con su creciente insistencia en el logro del rigor, se rebeló en contra de esta teoría kantiana" 11.

Esto era así porque la Matemática es deductiva y no se verifica "empíricamente, a través de los sentidos" 12. En *Los Problemas de la Filosofía* de 1911 la crítica de la epistemología kantiana es precisa. Para Russell el problema del conocimiento *a priori* no se resolvía señalando que es el sujeto quien lo pone 13. La Aritmética y la Geometría consideradas como contribuciones del sujeto encierran una concepción que afecta la certeza absoluta:

> "Si Kant tuviera razón, podría ocurrir que mañana nuestra naturaleza cambiase de tal modo que dos y dos llegaran a ser cinco. Esta posibilidad no parece habérsele ocurrido; sin embargo, es suficiente para destruir totalmente la certeza y la universalidad que deseada recabar para las proposiciones aritméticas" 14

Por otra parte, Russell señalaba también que Kant "limita indebidamente el objeto de las proposiciones *a priori* 15, porque para él las "creencias matemáticas deben aplicarse a las cosas lo mismo que si pensamos que si no pensamos en ellas" 16

La reacción de Russell frente a Kant (en su *Filosofía de la Matemática*) fue de un grado cualitativamente superior a la manera como Frege lo abordó. Este último nunca se desprendió del marco epistemológico kantiano y, en la última etapa de su producción intelectual, buscó en la Geometría y entonces en la intuición la fundamentación de la Aritmética. Para Russell el *Principia Mathemática* era una "antítesis de las doctrinas de Kant" [17]. Se trataba de:

> "Un paréntesis en la refutación de "aquel sofístico filisteo", según lo decribía George Cantor, añadiendo en gracia a una mayor exactitud, que sabe tan poco de matemáticas" [18]

Russell en su "cruzada" contra Kant y Hegel se adhirió a la orientación filosófica de su amigo G.E. Moore. Es esta filosofía la que aparece en las cuestiones fundamentales de los *Principios*. De hecho, así lo reconoce en el Prefacio del libro. [19]

El camino hacia la lógica

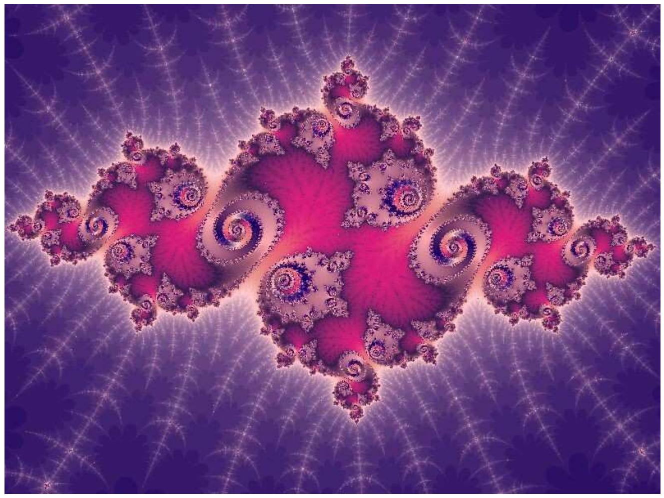
Para Russell su separación de Kant y Hegel, aparte de buscar romper con la teoría de las "relaciones internas" y de asentar la independencia de la realidad y el conocimiento, lo orientó, a diferencia de Moore, a las cuestiones lógicas [20].

El proceso de ruptura, sim embargo, no condujo a Russell a adoptar una posición empirista a lo Mill. Russell quería encontrar la verdad y la realidad y ésta parecía estar en las Matemáticas; pero las Matemáticas no podían ser simplemente empíricas, había que encontrar un terreno intermedio para la Matemática entre lo subjetivo y lo objetivo material. La crítica a Mill nos dirá en *Los Problemas de la Filosofía* se concentra en la imposibilidad de probar la validez del principio inductivo por inducción, y porque las proposiciones matemáticas no necesitan la enumeración de casos particulares, basta con sólo uno [21]. Es necesario establecer la distinción, y ésta se realiza por la diferencia en la demostración [22].

Mill no podía satisfacer la mentalidad filosófica de Russell. De hecho, Russell conocía muy bien la tradición empirista británica y a Mill en particular cuando abrazó el idealismo continental en Cambridge. La reacción frente a Hegel y Kant lo condujo a dotar de realidad a los conceptos, las categorías, las entidades de la Matemática, "cualquier cosa que no pudiese ser refutada" [23]. Se trataba entonces de un "edificio de verdades" real. Un mundo independiente de los objetos, no material [24]. Para Russell, como reconoce en la Introducción a la Segunda Edición de sus *Principios*:

> "Los números eran inmutables y eternos, como los cuerpos celestes; los números eran inteligibles; la ciencia de los números era la llave del universo (...). Cuando escribí los *Principios*. compartía con Frege la creencia en la realidad platónica de los números, que, en mi imaginación personificaban el dominio eterno del Ser" [25]

EL PLATONISMO DE RUSSELL



El Platonismo de Russell fue clásico. Los objetos ideales poseían una realidad que es aprendida por el sujeto de una forma directa. En el artículo de 1905 "Sobre la Denotación" nos decía:

> "En la percepción adquirimos conocimiento directo de los objetos de percepción, y en el pensamiento **de los objetos de carácter lógico mas abstracto**"(Negrita añadida) 26

El conocimiento directo es importante en su epistemología de entonces pues "todo pensamiento ha de partir del conocimiento directo" 27. La noción de conocimiento de Russell aquí no era exactamente igual a la de Frege. Para Frege solamente había conocimiento a través de los *Gedanke*. La formulación "conocimiento directo" sin categorias *a priori* intermedias expresaba un platonismo en Russell en el cual el *a priori* kantiano ya no tiene lugar.

Platonismo y universales

El platonismo de Russell persistió durante toda la etapa previa a su encuentro con Wittgenstein, sólo que de maneras distintas. El tratamiento de los universales en 1911 no desconocía la influencia platónica. El conocimiento de las verdades "implica el conocimiento directo de universales" 28 en donde universal se identifica con la "idea" de Platón 29; un universal se opone a lo particular; puede compartirse por diferentes particulares 30. Estos universales que son "necesarios" no son "mentales" 31. Por eso se entiende que son *independientes* de que sean "pensados o aprendidos en algún modo por el espíritu" 32. Russell aquí consideraba a los universales como entidades que no están en el espacio ni en el tiempo, no son materiales ni mentales, pero son "algo" 33. El mundo de los universales era independiente del sujeto. Un universal, nos decía no es un "acto de pensamiento" 34; una "idea", en el mismo sentido que Frege argumentaría en

"*Der Gedanke*" de 1918. En este mundo los universales no existen sino "*subsisten*" o tienen una esencia y se contrapone al de la existencia. Ambos son reales, pero el primero no es pasajero o impreciso sino "*inalterable*", "*rígido*", "*exacto*". 35

Este mundo "real" que aquí define Russell es muy similar al "Tercer Mundo" de Frege en "*Der Gedanke*". Esta persistente referencia al edificio de verdades y a un mundo de objetos inmutables, separados de los sujetos, está en el fundamento filosófico más profundo de la asunción del proyecto logicista. La Matemática es vista reducida a una estructura piramidal de verdades perfectamente definida, todo a partir de unas cuantas nociones *a priori*, todo libre del acecho de la duda cínica y escéptica. Este mundo de los universales está exento de lo "fugaz, de lo "vago", de la vida. No se trata de nociones que el sujeto epistémico crea para aprehender la realidad que lo opone y de la que es a su vez parte; por lo tanto, imposibles de separar de él, (aunque entiendo esta inseparabilidad no en los términos que impiden el conocimiento mismo).

La aproximación de Russell a los universales es también epistemológica; no se trata de a partir de ese mundo "inmutable" reducir la realidad al nuevo mundo. Para Russell el universal está conectado a la posibilidad del conocimiento. Para él: "*Todo conocimiento a priori se refiere exclusivamente a las relaciones entre universales*" 36. Los números son entonces universales y entonces lo que "parecía misterioso" ahora ya no lo es: "tenemos en ocasiones el poder de descubrir tales relaciones entre universales y de conocer por lo tanto proposiciones generales *a priori* como las de la aritmética y la lógica" 37. El platonismo de Russell aquí está entonces conectado a la justificación del conocimiento *a priori* y de la existencia de una certeza absoluta. Esta visión es común a las filosofías de Frege y Russell.

La referencia al mundo cohabita con el platonismo

La actitud platonista de Russell en la Filosofía de las Matemáticas no conduce al reduccionismo ontológico platónico. Las proposiciones de la Lógica y de la Matemática, va a asegurar durante esta etapa Russell, no están desconectadas de la realidad material; sus principios se refieren al mundo. En *Problemas de la Filosofía* dice explícitamente:

> "... el principio de contradicción mismo se refiere a cosas y no meramente a pensamientos; y aunque la creencia en el principio de contradicción sea un pensamiento, el principio de contradicción mismo no es un pensamiento, sino un hecho que concierne al mundo. Si lo que creemos, cuando creemos en el principio de contradicción, no fuera verdad de las cosas del mundo, el hecho de que nos viéramos compelidos a pensarlo como verdadero, no impediría que el principio de contradicción fuese falso. Esto prueba que el principio de contradicción no es una ley del pensamiento" 38

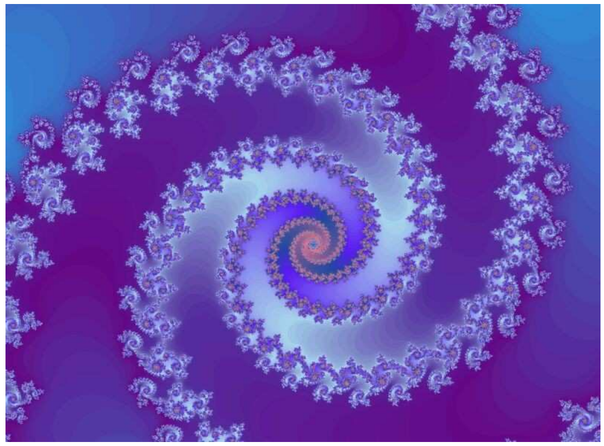
Y, un poco despúes, generaliza el análisis anterior: “Un argumento análogo se puede aplicar **a todos los juicios *a priori*”** (Negrita añadida) 39. Esta actitud que no parece corresponder con el Platonismo clásico, está presente, cohabita, en el Russell de estos años. En este mismo libro separa conocimiento de verdades y conocimiento de cosas 40 y desarrolla un teoría de la verdad en la que dice: “...los espíritus no **crean** la verdad ni la falsedad” 41 y **“*...*la correspondencia con un hecho constituye la naturaleza de la verdad”** 42. Cuando se refiere al conocimiento de lo que “existe” establece que ésta “se halla limitada a lo que podemos aprender de la experiencia” 43. La conexión de lo *a priori* y lo empírico es entonces resumida y establecida así:

> “... nuestro conocimiento intuitivo, que es la fuente de todo nuestro conocimiento de verdades, es de dos clases: el conocimiento puramente empírico, que nos da cuenta de la existencia y de algunas propiedades de las cosas particulares de las cuales tenemos un conocimiento directo, y el conocimiento puramente *a priori* que nos da la conexión entre los universales y nos permite sacar inferencias de los hechos particulares que nos da el conocimiento empírico. Nuestro conocimiento derivado depende siempre de algún conocimiento puramente *a priori*, y usualmente depende también de algún conocimiento puramente empírico” 44.

Es evidente que la posibilidad de la fusión de las dos componentes del “conocimiento intuitivo” reside aquí en el carácter de *a priori* en tanto referido a las cosas. Esta no va a ser la aproximación que Russell sostendrá años después. Pero es una aproximación que posee mucha influencia en su filosofía de la matemática.

La crítica al Formalismo de Hilbert se basa en ese sentido de realidad que le da a la Lógica y a la Matemática: Esto lo señala como nitidez en la Introducción a la Segunda Edición de los *Principios*. 45

LOS PROBLEMAS DEL PLATONISMO



En la etapa que va desde la ruptura con el Idealismo continental al acercamiento de las tendencias filosóficas de Wittgenstein, encontramos en Russell varias actitudes filosóficas: una predominante platonista (combinada con un cierto empirismo) y a la vez una constante aproximación al Nominalismo. La evolución resultante de su pensamiento en esta etapa señala al último factor como el activo dominante, pero no es posible indicar la presencia de un proceso lineal y siempre creciente durante esos años en esa dirección. El describe el proceso en su *Evolución de mi pensamiento filosófico* como "un apartamiento gradual de Pitágoras" 46. El mismo describe el proceso de separación del misticismo pitagórico y el Platonismo en la Segunda Edición de los *Principios* a través primero de la Teoría de las Descripciones y luego de la "*no class theory*" 47. La segunda vía se emprendió en *Principia*. Es esta evolución hacia el Nominalismo la que permite explicar mejor sus consideraciones sobre las clases.

Clases y funciones proposicionales

Las clases que juegan el papel central en las nociones usadas en los *Principios*, en *Principia* devienen funciones proposicionales. En la *Introducción a la Filosofía Matemática* su posición es clara:

> "...los símbolos para las clases son meras conveniencias, que no representan los objetos llamados "clases" y las clases son, en efecto, como las descripciones, ficciones lógicas, o (como decimos) "símbolos incompletos" 48

Y añade más adelante:

> "Sostengo que en este conjunto de símbolos no-definidos, no estará incluido ningún símbolo aplicable a las clases en general o a las clases particulares" 49

Sigue:

> “.. las clases no pueden ser consideradas como especies de individuos, a causa de la contradicción relativa a las clases que no son elementos de sí mismas (explicada en el artículo XIII), y porque podemos probar que el número de las clases es mayor que el número de los individuos” 50

Es aquí cuando afirma el carácter intensivo de las clases frente al extensivo 51. En este libro los números que en *Problemas de la Filosofía* habían sido considerados universales, son considerados ficciones lógicas. 52

De nuevo las paradojas

El motor intelectual de la aceptación del Platonismo fue en cierta medida la reacción frente al idealismo subjetivo. Ahora, en esta etapa, el motor que golpea sobre la actitud platónica de Russell es el “factor paradojas”. El edificio de verdades ha dejado de ser el deseado bastión del conocimiento verdadero; la actitud platónica radical ya no funciona (como ya señalaba Paul Bernays en su conferencia “*On platonism in mathematics*” dada en Ginebra en 1934) 53. Un camino en cierta forma constructivista es al que se ve en la práctica obligado Russell. Esto es lo que expresa Kurt Gödel en su famoso artículo “La lógica matemática de Russell”:

> “... las paradojas han creado una tendencia pronunciada a construir la lógica sin recurrir, en la medida de lo posible, a aceptar la existencia objetiva de entidades como clases y conceptos. Esto conduce a la formulación de la ya mencionada “teoría de la inexistencia de clases”, según la cual se introducen las clases y los conceptos como una *façon de parler*” 54.

La crítica de Gödel

Para Gödel, Russell en *Principia* no puede distinguir claramente entre “concepto” y “clase” 55. Y por eso:

> “... tomó el camino de considerar como inexistentes tanto las clases como los conceptos (excepto los predicados primitivos, que carecen de interés lógico) y de remplazarlos por nuestras propias construcciones” 56

Gödel consideraba que aunque el procedimiento constructivista aporta interesantes ideas reduce la Lógica-Matemática excesivamente 57. Proponía en su lugar un camino “más conservador” que supone la clarificación del “significado” de los términos “clase” y “concepto” 58 y “establecer una teoría consistente de clases y conceptos como entidades objetivamente existentes” 59 Según Gödel este camino es el que “ha tomado la Lógica-Matemática” y ha tenido “éxito”, permitiendo la “derivación de las Matemáticas modernas”, evitando las paradojas 60.

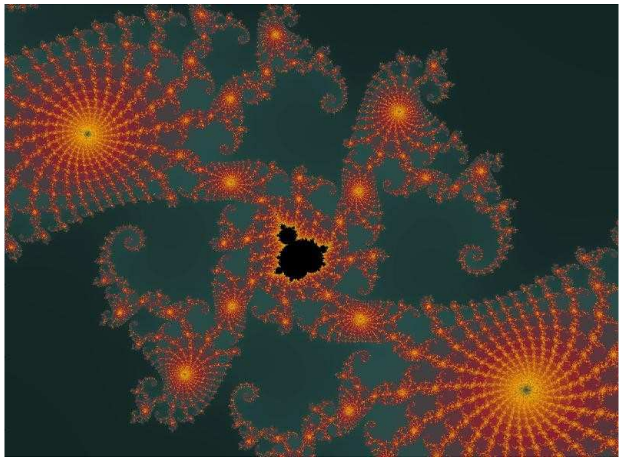
Gödel criticaba a Russell por abandonar el Platonismo (las causas no son oscuras en Gödel: para él la solución es el Platonismo sin más) 61. Para él, sin embargo, Russell no pudo abandonar el Platonismo. En la *Teoría de las Descripciones* la referencia a la verdad y la falsedad y la no reducción a una discusión lingüística constituía una señal 62. Pero además: *Principia* no cumple con el principio del círculo vicioso 63. Y, en la primera edición de este libro:

> “... se abandonó en su mayor parte la actitud constructiva, pues el axioma de reducibilidad para tipos superiores al primero junto con el axioma de infinitud hacen que sea absolutamente necesaria la existencia de predicados primitivos de tipos arbitrariamente altos” 64

Aquí es necesario hacer un comentario. Es cierto que Russell no esclareció las nociones de clases y conceptos, y que por la vía de la “*no class theory*” evadió el asunto. Lo que no parece adecuado en la visión de Gödel es que eso conduzca simplemente al apuntalamiento del platonismo. Estoy de acuerdo en que una actitud excesivamente constructivista no es totalmente coherente con la naturaleza de las Matemáticas; pero sus métodos no son solamente “interesantes”, sino que tremendamente fértiles. Russell no se desprendió en ésta etapa de su pensamiento del Platonismo, en eso Gödel tenía toda la razón. Las ideas que hemos señalado, escritas en 1911, nos revelan sin duda eso. Pero es necesario entender que esta etapa se caracteriza precisamente por la convivencia de puntos de referencia y actitudes filosóficas distintas. El “factor paradojas” fue incidiendo cada vez más en la evolución filosófica del Logicismo de Russell. Desde un principio la obra de Russell en el Logicismo partió de las paradojas. Russell entró a la Filosofía de la Matemática con una visión metafísica, abstracta e irreal, que, con la vitalidad de la reacción al idealismo subjetivo, adquirió un corte platónico. Las paradojas son para Russell en un primer momento señales de la insuficiencia de la Lógica y el lenguaje o de las limitaciones humanas. El edificio inquebrantable e inexpugnable de las Matemáticas siempre permanecía firme. El “factor paradojas” siguió, sin embargo, su camino en el deterioro de la visión aprendida y generó el impulso de nuevos derroteros filosóficos, pero sin dejar totalmente lo andado en cada paso nuevo. Russell intentó salirse de las dificultades de las clases con una teoría que les negaba referentes y buscaba una reducción lingüística. Esto empero, a la larga, ha demostrado ser insuficiente y, más aún, su uso del término “función proposicional” ha resultado ser “inconsistente” y “confuso” 65.

Ahora bien, los cuestionamientos de Gödel no afirman necesariamente al Platonismo; lo que afirman -en mi opinión- es la necesidad del esclarecimiento epistemológico de las nociones de la Matemática. Nada se resuelve asumiendo la actitud de rechazar todas las entidades matemáticas como reales, o la actitud de aceptarlas todas.

PLATONISMO Y NOMINALISMO



Las Matemáticas para Russell en esta etapa que hemos venido señalando pasaron de ser proposiciones conectadas al mundo (de una forma que permite descubrir cierto empirismo) a otra etapa en la que se convierten en “ficciones lógicas”. La noción de la Matemática en *Los Problemas de la Filosofía* no era la misma de la *Introducción a la Filosofía Matemática*. El camino nominalista había avanzado. En este último las clases y los números eran ficciones lógicas, aunque se afirmaba que las proposiciones lógicas “... son las que podemos conocer *a priori*, sin la investigación del mundo real” 66. Aquí se decía que “... forman una clase totalmente diferente de la de las proposiciones que conocemos empíricamente” 67, y: “Todas ellas tienen la característica que, hace un instante, hemos convenido en llamar Tautología” 68. No se afirmaba que son proposiciones cuya verdad es convencional o que sólo encuentran sentido como reglas del lenguaje. Russell establecía que:

> “...la definición de “lógica” o de la “matemática” debe ser buscada tratando de dar una nueva definición de la antigua noción de las proposiciones analíticas” 69.

Pero no llegaba a decir que las proposiciones analíticas sólo sirven para llamar: “... la atención sobre usos lingüísticos, de los que de otro modo, podríamos no ser conscientes...”; como sí señalaría, por ejemplo, Ayer en *Lenguaje, verdad y lógica.* 70

En la Introducción de la Segunda Edición de los *Principios*, Russell señalaba que “... la lógica resulta ser mucho más lingüística de lo que creía en la época en que escribí los *Principios*”. Con lo que se acercaba más a la “posición lingüística”.

El camino hacia la verdad sintáctica

En *La evolución de mi pensamiento filosófico* manifestó lo que fue un cambio sustancial:

> "**Ya no pienso que las leyes de la lógica sean leyes de las cosas; por el contrario, las considero ahora como puramente lingüísticas"** (Negrita añadida) 71

En su *Historia de la Filosofía Occidental* de 1945 también expresó un pensamiento al respecto:

> "En este sentido, el conocimiento matemático no es empírico. **Pero tampoco es un conocimiento *a priori* acerca del mundo. Es de hecho, un conocimiento meramente verbal**. "3" significa "2+1", y "4" significa "3+1". de aquí se sigue (aunque la prueba es larga) que "4" significa lo mismo que "2+2". Así, pues, el conocimiento matemático deja de ser misterioso. Es de la misma naturaleza que la "gran verdad" de que hay tres pies en una yarda" (Negrita añadida) 72

Cuando Russell atribuye un carácter lingüístico a las leyes de la Lógica y la Matemática, su Filosofía de la Matemática ha dado un salto cualitativo en otra dirección a la mantenida desde su ruptura con el Idealismo. Es muy posible que la influencia de Wittgenstein haya contribuido enormemente a profundizar la evolución del factor nominalista que afectó a Russell durante toda esta etapa. La noción de tautología en la *Introducción a la Filosofía Matemática* por lo menos así lo atestigua. Para Wittgenstein en el *Tractatus*, es necesario recordar, tanto la Matemática como la Lógica se fundamentan en la sintaxis lógica: la sintaxis lógica de cualquier lenguaje basta para determinar todas las fórmulas válidas de la Matemática.

El logicismo no es empirista

El logicismo de Russell en la *Introducción a la Filosofía Matemática* y los ulteriores comentarios de éste sobre la naturaleza de la Lógica y la Matemática, no pueden conducir a juzgar el logicismo como un proyecto empirista que, aunque "falla", buscaba demostrar el carácter tautológico-lingüístico de la Matemática. Russell no se colocó al asumir el Logicismo en la disyuntiva que, por ejemplo, Ayer impone supuestamente a todo empirista sobre la Matemática:

"... tiene que decir que no son verdades necesarias, y en ese caso tiene que refutar la universal convicción de que lo son; o tiene que decir que no poseen contenido factual alguno, y entonces tiene que explicar cómo una proposición carente de todo contenido factual puede ser verdadera y útil y sorprendente". 73

El logicismo de Russell (como el de Frege) no arranca de las tiendas del empirismo. Tampoco se puede plantear como la posición intelectual que luego sería la visión clásica del positivismo lógico y el Círculo de Viena. Se trata más bien de una combinación de actitudes de aproximación sobre la Matemática entre las que el misticismo pitagórico y el platonismo son decisivos. La especial valoración de la Lógica como auto-evidente, con la capacidad de transmitir la fuerza de su autoevidencia a las Matemáticas en pos de la certeza absoluta, también es central. La confianza en un modelo reduccionista axiomático así como la sobreestimación de los métodos del cálculo formal que también se había desarrollado ampliamente. El Logicismo como vía de fundamentación de las Matemáticas buscaba proporcionar un conocimiento seguro de la devastadora duda cínica. Fue la lucha contra el escepticismo la que condujo a apuntalar lo que siempre había aparecido como el conocimiento más seguro, el a priori.

El influjo del logicismo

La sensación platonista de estar describiendo una realidad auténtica, independiente del sujeto, al incidir en las Matemáticas es un factor poderoso que como dice Barker en su *Filosofía de las Matemáticas*:

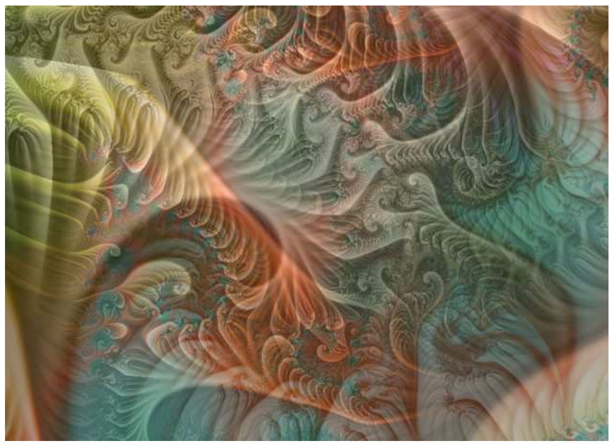
"... proporcionó el impulso intelectual motivador que hay tras la obra de Frege y Russell, y si estos hubiesen sido devotos del nominalismo, del conceptualismo kantiano o de alguna filosofía no literal del número, es menos probable que hubiesen desarrollado la tesis logística" 74

Es necesario, finalmente, hacer una pequeña disgresión y abordar algunos aspectos del Platonismo. Las paradojas de la Teoría de Conjuntos fueron el primer cuestionamiento del platonismo. Bernays en una conferencia en 1934 decía que éstas demostraban que no era posible combinar "totalidades de objetos matemáticos con las nociones de conjunto y función, porque las primeras podrían ser parte del dominio de las segundas" 75. Las paradojas establecieron el terreno para una nueva etapa logicista, más madura y de mayor influencia, pero al mismo tiempo el cuestionamiento de una tradicional actitud platonista en el racionalismo. Sin embargo, este cuestionamiento era todavía insuficiente. Bernays mismo señalaba que éstas no afectarían a un platonismo moderado 76. Su total eliminación sería según él muy radical 77. Para Bernays bastaba un proceso de eliminación del Platonismo en dos pasos: primero se establecen los conceptos constructivamente 78, y luego se anula la idea de totalidades de enteros 79.

Bernays en esta conferencia trató de quedarse entre el Platonismo radical y el constructivismo intuicionista. De hecho, decía que el Platonismo y el intuicionismo eran tendencias complementarias 80. Bernays concluyó con un "moderado" apoyo al formalismo hilbertiano 81.

La actitud platonista ha estado muy arraigada en las Matemáticas desde hace mucho tiempo. Su razón de existencia se vincula a la naturaleza misma de la producción matemática. Todavía (con o sin paradojas) no es posible establecer un juicio filosófico concluyente sobre el asunto.

ALGUNAS CONCLUSIONES



Con el cisma de las paradojas y las dificultades teóricas del Logicismo el constructivismo emergió como un fácil camino de solución. Sin embargo, los resultados de Gödel en los 30 no dejaron en pie ni siquiera éstas aspiraciones constructivistas. Gödel demostró que no era posible tener procedimientos efectivos para probar todas las proposiciones de la teoría de números. Es decir, se requerirían para ello procedimientos no constructivos: "...que nos requieren realizar un número infinito de operaciones en un tiempo finito" 82. (Esto pareciera justificar la aproximación platonista, como Gödel mismo expresa en su "*Russell's mathematical logic*"). Las implicaciones globales de los resultados gödelianos son sin embargo mucho mas determinantes, abren las posibilidades para una nueva visión de las Matemáticas.

En cuanto a las definiciones, el Logicismo comparte con el Intuicionismo "una tendencia constructivista" 83. Aquí son reconocidas sólo aquellas expresiones a las que se puede llegar por un proceso finito de pasos. La diferencia con el Intuicionismo se establece en la aceptación de "...las operaciones del así llamado "cálculo funcional extendido" 84 .

Logicismo y formalismo

El Logicismo por otra parte, está conectado con el formalismo por el uso de un cálculo formal independiente del "significado de los símbolos primitivos" 85. El logicismo condensa todos los principales métodos en el tratamiento formal de la Matemática. Representa un modelo paradigmático sobre la Matemática basado, aparte de las consideraciones propiamente filosóficas, en el carácter formal de la misma; no de igual manera que lo hace el formalismo, al cual ya me he referido, inscrito en un terreno general común.

El Logicismo original de Frege y Russell tiene un sentido de la realidad que, sin embargo, no posee el formalismo desarrollado por Hilbert. El Platonismo de Frege y Russell está conectado con una visión de la naturaleza de la Matemática que incide sobre lo real. Existe la convicción interior de que se trata de un mundo objetivo no material, pero relacionado con la realidad exterior, influyente sobre el mundo material. El carácter "radical" del Platonismo que se ha asignado a Frege hace alusión de alguna forma a esa actitud. La crítica de Russell al Formalismo está basada en esa premisa que adjudica a la naturaleza de las Matemáticas.

El Logicismo y el Platonismo que se encuentra en su base, no corresponden filosóficamente a una interpretación sintáctica de la Matemática. Sin embargo, este camino nominalista dentro de un paradigma que enfatiza lo formal, sólo podía conducir a esa interpretación. El problema central no reside en la utilización de los sistemas formales, ni en la superación del Platonismo. El punto neurálgico que señalo es la sobreestimación de la función y el status asignados a lo formal, que lleva, por ejemplo, a un Haskell Curry a decir que la Matemática es la "ciencia de los sistemas formales" 86. O, por otra parte, como Gödel señala, a alejarse del Platonismo como una vía de escape ante una problemática no abordada.

El sentido de realidad del Logicismo, para no haber terminado en la visión que criticaba, tenía que haber ascendido a una reinterpretacion epistemológica y ontológica de la naturaleza de la Matemática. El énfasis necesario se debía haber establecido en ese mismo sentido de realidad.

El derrotero seguido por Russell en la *Filosofía de la Matemática* condujo al Logicismo a un terreno no muy lejano del Formalismo; muy adecuado para permitir interpretar la Matemática en el seno de lo lingüístico y lo convencional, en donde sus proposiciones son del mismo tipo que "hay tres pies en una yarda" 87. Russell no llegó a establecer la Matemática como resultante de reglas de trazos vacíos de contenido, pero, ¿no es este convencionalismo una versión muy cercana de lo mismo?

Balance pragmático del platonismo

El platonismo en la Filosofía de las Matemáticas no puede ser rechazado o aceptado sin un previo examen teórico. Es necesario establecer consideraciones metodológicas para abordarlo adecuadamente. En primer lugar, la existencia o no existencia de entidades matemáticas (problemas que según Russell no debe preocupar a la Matemática) 88 es importante en la medida de que la decisión asumida engendre una edificación teórica útil y ésta pueda, a través de procesos y resultados específicos, ser "refrendada" por la práctica. Creo que la construcción de entidades matemáticas es esencial en esta ciencia; las proposiciones de existencia no sólo no pueden ser eliminadas sino que los intentos en esa dirección entorpecen su desarrollo. Todo reside en la funcionalidad teórica y metodológica que estas exhiban.

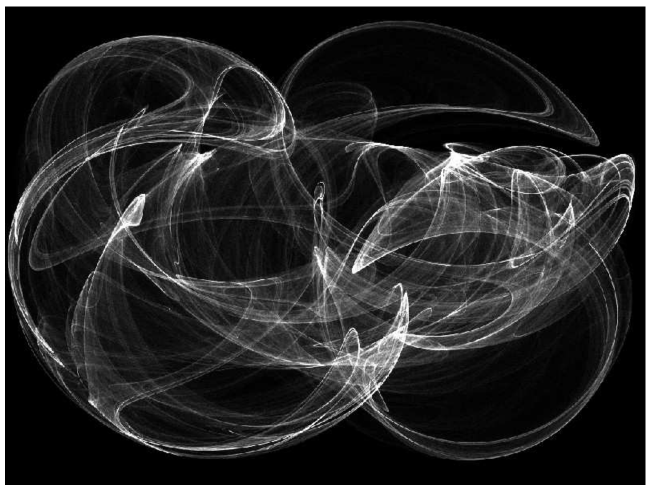
En segundo lugar, la discusión se extiende al terreno general de la Epistemología y la Ontología. Aquí se trata de establecer el papel de las entidades abstractas en el conocimiento y el carácter asignado a su existencia o "subsistencia". Estas son construcciones mentales realizadas por los sujetos; existe una intersubjetividad a partir de las condiciones de la relación sujeto-objeto, entendido éste último sujeto de forma general. Afirmo, entonces, un conceptualismo, en donde enfatizo la relatividad de las entidades abstractas en sí como la posibilidad de su construcción y aprehensión en el objeto y en la relación material sujeto-objeto.

Si lo que se afirma con el Platonismo se entiende como separación de las entidades de procesos constructivos o definitorios por la mente, se trata entonces de una consideración ontológica en general sobre la existencia de entes no materiales independiente de la realidad humana. Algo así como si no existieran los seres humanos las entidades matemáticas aún existirían.

Ahora bien: si lo que se afirma en su lugar es la independencia de las entidades del acto de pensamiento de un individuo y no las condiciones subjetivas y particulares de construcción y aprehensión de la mente de los hombres, se trata de una visión epistemológica que simplemente apunta a la intersubjetividad epistémica. Yo privilegio esta segunda posición, pero añadiendo que: las entidades abstractas se refieren a una diversidad a la que se le asigna algún sustrato común; y, además, que estas entidades no son aprehendidas de igual forma por cada individuo. Es decir, ni se refieren a lo mismo, ni son lo mismo en cada sujeto. Las causas últimas de su "realidad" residen en la relación material sujeto objeto y su sentido en la funcionalidad que sostenga en esta misma relación. Todo el conocimiento humano, de una u otra forma, en diferentes niveles, se ve sometido a esto.

El análisis del Logicismo debe establecerse en última instancia sobre la base de los criterios expresados en lo anterior; la comprensión de las nociones de clases, conjuntos, totalidades, etc., no puede darse si no es a partir de una interpretación de ellas teórica, epistemológica y metodológica. Los criterios no pueden reducirse a procedimientos técnicos o formales. La fundamentación de la Matemática no puede decretarse a partir de la definición de métodos constructivos o no, de algoritmos de validez y consistencia, o de reglas de ordenación de las categorías involucradas. El “factor paradojas” puso en evidencia, lo que la era gödeliana establecería, la necesidad de una reestructuración epistemológica de la visión sobre la Matemática, el cambio y reformulación de los viejos paradigmas.

CAPÍTULO VII
LA FILOSOFÍA DEL FORMALISMO Y EL INTUICIONISMO



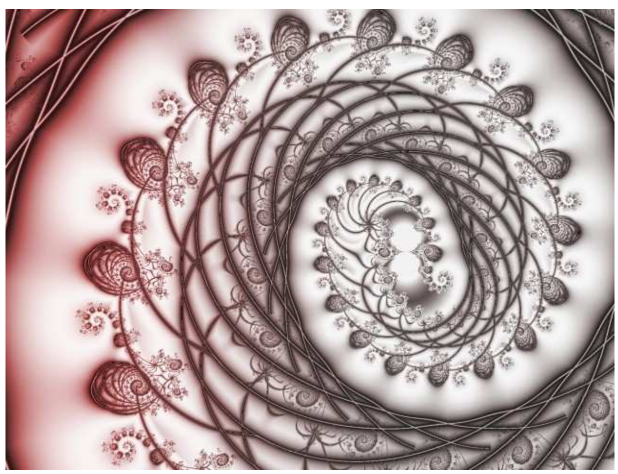
INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a hacer una descripción analítica del formalismo y del intuicionismo como filosofías de la Matemática centrales en los Fundamentos de las Matemáticas. Se establece, entonces, una crítica filosófica de los supuestos teóricos presentes en ellas. Hemos realizado hasta ahora un análisis sobre el Logicismo de una manera más completa que el que pretendemos mostrar sobre el Formalismo y el Intuicionismo en este capítulo. Esto no obedece a una situación fortuita. En nuestra opinión, el Logicismo constituye el proyecto fundacional de las matemáticas con mayor influencia en el desarrollo de las tendencias modernas en la filosofía de las matemáticas. No quiere decir esto que sea el dominante. Pero sí el que ha generado una mayor reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas. y trascendencia. De hecho, en buena medida, el Intuicionismo y el Formalismo han pretendido dar respuesta a problemas planteados por el Logicismo. No son estos otros proyectos fundacionales que se pueden considerar “derivaciones alternativas” del Logicismo, pero históricamente (y teóricamente) es imposible de negar su íntima relación.

El análisis de estos proyectos lo hacemos en sus dimensiones filosóficas exclusivamente. Creemos que es en este territorio donde podemos encontrar las claves para realizar el balance teórico más profundo y general. Mencionamos esto porque para nadie resulta un secreto que tanto el formalismo como el intuicionismo generaron importantes campos teóricos en la lógica y en las matemáticas modernas.

Por otro lado, la introducción de las filosofías del Intuicionismo y el Formalismo nos permiten abordar aspectos del Logicismo que no pudimos abordar en los capítulos anteriores. Esto nos permite completar mejor nuestro estudio del Logicismo clásico, pero, además, entrar de lleno -aunque de manera general- en la problemática de los Fundamentos de la Matemática en su globalidad. Las comparaciones, identificaciones y contraposiciones, nos permitirán realizar una radiografía intelectual del conjunto de la problemática fundacional tal y como fue planteada en las primeras décadas de este siglo; y pavimentar el camino hacia lo que reevaluaremos como extraordinariamente significativo en la búsqueda de una nueva filosofía de las matemáticas: los teoremas de Gödel.

LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA



El problema de los fundamentos de la matemática no puede verse simplemente como aquél cuyos determinantes giran en torno a las paradojas y contradicciones de finales del siglo pasado y de principios de éste. Como señala Max Black, el análisis filosófico debe exhibir la estructura de la matemática, tanto hacia su interior como hacia su relación con otros conocimientos no matemáticos [1].

Sin embargo, históricamente los trabajos de fundamentación se pueden distinguir por lo menos en dos etapas, antes y después de las paradojas. *Antes*, de lo que se trataba era de la búsqueda del rigor, la precisión, y las condiciones de validez de un cuerpo teórico que cada vez más apelaba a la lógica como criterio. Los trabajos de Dedekind, Weierstrass y los de Frege, estaban orientados por los requerimientos de una "nueva matemática" que ya no podía ser aprehendida, por lo menos de una manera tan evidente, por su relación con la predicción y el mundo físico. En Frege se conjugó no sólo la búsqueda del rigor, sino, sobre todo, la solidez lógica que éste entendía como propiedad intrínseca de las matemáticas. *Después*, la preocupación se centró en lo que aparecía como un duro golpe al edificio sólido e inconmovible que con los trabajos de rigorización y fundamento anteriores se exhibía seguro a los cuatro vientos.

El factor paradojas

Las paradojas fueron la señal de que había grietas en el edificio. Los esfuerzos se iban a dedicar entonces a dar cuenta sobre todo de la consistencia amenazada. Esto va a ser el motor de la etapa fundamental de los llamados "fundamentos de la matemática".

El factor "paradojas" no era un enemigo despreciable; no sólo era visto como un problema parcial, ligado a una temática apenas particular del conocimiento, sino que, amenazando la consistencia de las matemáticas, ponía en jaque el modelo más apreciado de la ciencia occidental. El esquema de un cuerpo teórico euclidiano que inyecta la infalible verdad *a priori* desde la cúspide hasta la base, era el prototipo de la visión racionalista, que había dominado durante tantos años. Eso le daba la importancia al "problema" de los fundamentos de la matemática. Lo que estaba en juego conectaba con las concepciones filosóficas que habían determinado la esencia de las matemáticas en la generación de verdades infalibles, en lo absoluto de la deducción y en los aspectos formales y más abstractos de la misma. El "problema" se refería no sólo a las necesidades internas al desarrollo práctico, a las orientaciones teóricas de las matemáticas, sino, también a las externas de la reflexión sobre la misma. Esta situación hizo posible la conexión entre filosofía y matemática de una forma tremendamente estrecha.

En esta segunda etapa se comprende mejor el significado del intuicionismo de Brouwer. Se trata trambién de explicar las limitaciones principales que los estudios fundacionales han manifestado sobre la comprensión formal de la naturaleza de las matemáticas.

La relación con los universales

La discusión entre intuicionismo, formalismo y logicismo se puede poner en relación con la vieja discusión de los universales [2]. Para Quine esto es posible porque:

"La matemática clásica, como ilustra claramente el ejemplo de los números primos mayores que un millón, está comprometida hasta el cuello en una ontología de entidades abstractas. Por ello la controversia medieval de los universales ha vuelto a encenderse en la moderna filosofía de las matemáticas" [3].

Para éste (al igual que para S. Barker) es posible conectar el realismo de las entidades abstractas con el logicismo, el conceptualismo con el intuicionismo, y el nominalismo con un formalismo en el que se "...concibe la matemática clásica como un juego de notaciones no significantes" 4.

Dos actitudes hacia las matemáticas

Sin embargo, no todos están de acuerdo con esta interpretación. Para Ladrière es posible detectar dos grandes actitudes en los fundamentos. Por un lado la platonista, que enfatiza la existencia independiente de las entidades matemáticas; y otra empírica, que las considera un resultado de la construcción. Ladrière se inclina por pensar que: "La primera actitud es la de Hilbert y los *axiomáticos*; la segunda, la de Brouwer y los *logicistas*" 5. Es difícil pensar, sin embargo, que los logicistas se colocan como dice Ladrière.

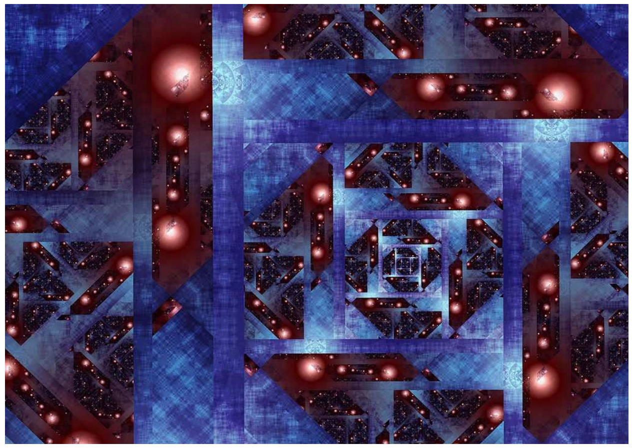
En el logicismo existe una reiterada actitud de sostén de la existencia de entidades abstractas, actitud que incluso es fuente de los problemas de esta corriente en los fundamentos. La división de Quine (y otros) no es, sin embargo, suficientemente adecuada para englobar la visión filosófica particular de Hilbert, que, como veremos, se adhiere a la primera actitud que señala Ladrière, y para el cual el formalismo es un instrumento que busca evidenciar-demostrar una consistencia que es inherente a las matemáticas.

La actitud intuicionista es un rechazo a admitir la existencia de entidades abstractas separadas de la constructibilidad (definida en sus términos). La verdad y la existencia matemáticas están entonces en dependencia de la exhibición de pruebas constructivistas. Este punto de partida implica una gigantesca transformación del análisis y la lógica clásicos. Señala Ladrière:

"La exigencia de constructibilidad le lleva a rechazar toda consideración de un infinito actual y a admitir solamente el infinito potencial (...). Desde el punto de vista lógico, esta exigencia se traduce en el rechazo de la "exclusión del tercero" (para los conjuntos infinitos).No se puede afirmar "*a priori*" que la solución de un problema matemático deba ser del tipo A o del tipo no A, mientras no se haya establecido un procedimiento efectivo que permita obtener esta solución" 6.

Estas premisas que usa el intuicionismo conducen a sacrificar una buena parte de la matemática clásica. Esta consecuencia bastante desagradable lo hacía poco atractivo para la mayoría de matemáticos, para aquellos incluso que eran conscientes del carácter insatisfactorio del logicismo. Hilbert intentaría un camino intermedio que sin abandonar el análisis clásico apuntara a la consistencia.

LA FILOSOFÍA DEL FORMALISMO



La primera observación general necesaria de hacer sobre las ideas de Hilbert es que este parte de Kant.

Los objetos de la matemática

La matemática no es reducible a nociones y principios lógicos, sino que posee objetos que describe. Hilbert plantea las cosas así:

“...algo que se presupone al proceder a inferencias lógicas y en la ejecución de operaciones lógicas está ya dado en la representación (Vorstellung), esto es, ciertos objetos concretos extralógicos, que están intuitivamente presentes en forma de experiencia inmediata y se hayan en la base de todo pensamiento. Si el pensamiento lógico ha de estar seguro, estos objetos han de ser susceptibles de examinarse a fondo, en sus componentes, y la exhibición, la distinción, el orden de sus partes y la disposición de éstos en el espacio, han de estar dados en los objetos mismos, como algo que no puede reducirse a nada más ni necesita por lo demás en modo alguno semejante reducción” 7.

Se trata evidentemente de una referencia a objetos no lógicos, al igual que en Kant aparecen ligados a la percepción interior “en forma de experiencia inmediata y se hallan en la base de todo pensamiento”. Hilbert apela a una intuición interior, a una evidencia no lógica en las matemáticas. Ahora bien, mientras que para Kant esta evidencia residía en la intuición mental *a priori* del espacio y el tiempo, en Hilbert las cosas son más simples. Se trata de la intuición del signo. Dice en 1922:

> “Para mi -y en esto me opongo totalmente a Frege y a Dedekind- los objetos de la teoría de números son los signos mismos, de los cuales podemos reconocer la forma en todas sus generalidades y con toda seguridad, independientemente de las circunstancias de lugar y de tiempo, de las condiciones particulares de su presentación y de las diferencias insignificantes

que pueden afectar a su trazado. El punto de vista filosófico sólido que considero como indispensable para el fundamento de las matemáticas puras -como para cualquier tipo de pensamiento, de comprensión y de comunicación científicos- se puede resumir de esta forma: en el principio -y así nos expresaremos aquí- era el signo" 8.

La eliminación de la intuición

Para Hilbert el fracaso del logicismo es el fracaso de los intentos por eliminar las intuiciones y las evidencias previas a los procesos lógicos. No se trata de eliminarlos, se trata de explicar en concreto cuáles son y cómo actúan. Ahora bien, la exhibición de estos objetos concretos, para Hilbert, es la base de la posibilidad de la consistencia de la matemática. Porque, señala Körner:

> "Si la matemática ha de restringirse -por completo y sin calificación- a la descripción de objetos concretos de cierta clase y a las relaciones lógicas entre tales descripciones, entonces, ninguna contradicción puede producirse en ella, ya que las descripciones precisas de objetos concretos son siempre mutuamente compatibles" 9.

Con esta filosofía es entonces posible trazar un programa para intentar garantizar la coherencia lógica de las matemáticas.

Hilbert afirma que la matemática no se puede reducir a la lógica, que otros axiomas y principios no lógicos deben añadirse. En este sentido aunque parte del tratamiento axiomático -formal del logicismo, no está preocupado por las condiciones que imponen un reduccionismo logicista. La presencia de axiomas extra-lógicos no son fuentes de problemas en su filosofía. Más aún, para él la presencia de nociones y elementos "ideales" que no representan percepciones intuitivas no es contradictorio con la consistencia de la matemática, para lo cual se basa en la tradición clásica de las matemáticas (irracionales, complejos, etc).

Es importante para Hilbert la simbolización de todas las nociones. Las proposiciones son combinaciones o cadenas de símbolos.

Para Hilbert las nociones de las matemáticas son entonces de un contenido perceptible, no perceptibles o "ideales". El busca la fusión de ambas y las introduce en un programa que pretende probar la consistencia del cuerpo teórico así construido. Para lograr esos efectos se requiere entonces hacer una diferenciación de niveles: por un lado, la teoría propiamente, que él la expresa con números-trazos y las operaciones entre ellos; y, por el otro, una *metateoría,* que está compuesta por las fórmulas que corresponden a los trazos y sus proposiciones y a las reglas formales que corresponden a las de la teoría.

Una teoría de la aritmética se refiere entonces a la construcción de resultados con los trazos, mientras que la que se refiere a la construcción de fórmulas se llama metateoría. Una vez construido un sistema formal (de fórmulas) a partir de una teoría el proyecto parte de la siguiente hipótesis: la consistencia lógica de la teoría es equivalente a la consistencia formal del sistema formal.

Los sistemas formales

Los sistemas formales son la pieza de toque de Hilbert en la búsqueda de demostración de la consistencia de la matemática. Ahora bien: en el formalismo existen dos orientaciones aparentemente encontradas. Para Hilbert, como hemos dicho, el formalismo es un *medio*; pero, para otros, es un fin. Para Curry, por ejemplo, la matemática es la "ciencia de los sistemas formales" 10. En el formalismo a ultranza hay una transmutación del objetivo de la construcción matemática. Este aquí es la fundamentación en sí; no se establecen realmente diferencias entre la teoría y la metateoría, todo es parte de lo mismo.

Describe Ladrière de una manera muy acertada esta última posición:

> "Construir las matemáticas no es retrotraer los conceptos matemáticos a conceptos más fundamentales, extramatemáticos, sino practicar el análisis de tales conceptos con tal precisión que en adelante su significado quede definido sin ambigüedad. El verdadero trabajo de fundamentación es pues un trabajo de purificación, y su herramienta es el formalismo. Gracias a él se puede reducir la parte de intuición a una suerte de mínimo absoluto: descifrar determinadas configuraciones de símbolos" 11.

Para Körner la visión radical está más cercana a "la doctrina de Kant en la *Estética Trascedental*" 12, que la posición de Hilbert; puesto que en ambos las proposiciones de la matemática poseen construcciones para su objeto, aunque en Kant limitadas por las intuiciones, y en los formalistas por "los límites dentro de los cuales la percepción es posible". O visto de otra forma: "...los enunciados a propósito de las construcciones matemáticas son enunciados empíricos que entrañan el menor riesgo posible de error" 13. Pero, sigamos adelante.

Trazos, fórmulas y matemáticas

Para Hilbert el objeto de la matemática estaba en los trazos y sus relaciones; para Curry en las fórmulas, los símbolos de éstas y sus reglas. La actitud metodológica es, sin embargo, la misma. No se trata de buscar el objeto de la matemática en la realidad material en sí, en ese devenir que fluye independientemente de nosotros, pero que, de diversas formas, y, a partir de nuestros límites, aprehendemos por la vía del pensamiento.

En el formalismo el objeto es los trazos o las fórmulas. En aras de demostrar una premisa, la posibilidad de la prueba de consistencia, se busca una conexión artificial, inadecuada, con la realidad. Esta actitud metodológica borra de un plumazo la existencia real de la matemática, elimina los objetos reales de la misma; no por la vía de la negación sino por la de la sustitución.

¿Cuál es la justificación de esta aproximación? Pareciera que la única que brindan los formalistas es que así, con los trazos, símbolos o fórmulas, percibimos un objeto perfectamente determinado; así el análisis es supuestamente más concreto y real. Ya no se trata de juicios sintéticos *a priori* solamente, sino, incluso, *¡hasta a posteriori!* El método es erróneo. Confunde la simbolización y manejo de objetos visibles con la matemática propiamente. La matemática tiene como objetos partes de lo real determinadas por una relación material sujeto-objeto. Las simbolizaciones son representaciones visuales de las abstracciones hechas por la conciencia de los hombres. Las operaciones de símbolos o trazos matemáticos están determinadas por el objeto de la matemática, por las condiciones más generales de su naturaleza. Cuando hablamos de los símbolos 1,2,3, etc. (numerales) estamos refiriéndonos a representaciones útiles de conceptos y abstracciones. Los números no son esos numerales, como tampoco otra representación (1,11,111,1111,etc.).

Un conjunto de trazos y símbolos en el mejor de los casos se puede ver, una vez estructurado, como un “modelo” de lo que es la aritmética. Este modelo puede ser conveniente o no dependiendo de muchos factores. Puede ser útil puesto que estando en una correspondencia con las nociones matemáticas es posible obtener resultados, a partir de un desenvolvimiento con reglas precisas que están en correspondencia también con ellas. Un sistema formal no es sólo la representación de una teoría, sino una ulterior abstracción de ella.

Por más precisión y “concretización” de las reglas y objetos que intervienen en un sistema formal, estos no pasan de ser más que una representación con además una abstracción adicional de por medio. En cuanto tales no pueden asimilarse los sistemas formales a la categoría de rasgo distintivo definitorio de las matemáticas. Esto sería vaciar a la matemática de su verdadero contenido.

Hermann Weyl en *Philosophy of mathematics and natural Science* nos dice:

> “La matemática de Hilbert puede ser un bonito juego con fórmulas, más entretenido incluso que el ajedrez; pero, ¿qué acción tiene sobre la cognición, cuando sus fórmulas admitidamente no tienen un sentido material por virtud del cual ellas pueden expresar verdades intuitivas? 14.

Para Weyl (como para el Russell de la segunda edición de los *Principios*) la matemática se refiere al mundo y, más aún, debe estar al servicio de las ciencias naturales. La pretensión formalista es que: “La concepción formalista de las matemáticas está entonces libre de prejuicios metafísicos y es compatible entonces con prácticamente cualquier tipo de filosofía” 15. Sin embargo, el costo de lo que apenas llega a un supuesto es una matemática vaciada de su contenido auténtico.

Kant y el formalismo

En otro orden de cosas, es erróneo suponer que la visión del formalismo extremo está más cerca de Kant. No se puede asimilar lo que Kant entendía como objeto y construcción matemática, que estaba conectado a una intuición espacio-temporal, aunque fuese de fuente subjetiva para él, con las fórmulas y los trazos de los formalistas. La coincidencia con Kant se encuentra en el reclamo de presentación de objetos en la construcción matemática; los objetos que exhiben formalistas moderados o radicales traicionan el espíritu kantiano. En este terreno, quién está más cerca de Kant, Hilbert o Curry, es intrascendente (pero, en todo caso, no parece ser que lo esté la visión más abstracta y alejada de la “verdadera” matemática).

Es posible ahora hacer algunas observaciones: el formalismo representa una vuelta a Kant, en tanto afirma la no analiticidad de las matemáticas y busca darle un objeto a estas aprehensible por la intuición. Sin embargo, el carácter sintético de éstas no se busca en la realidad exterior independiente al sujeto, sino en un producto del sujeto que representa abstracciones: los signos. Con esta actitud el formalismo no lleva las matemáticas a la realidad del mundo, sino que, creando un estrato intermedio, se separa de él. Sale entonces de “una matemática que, en su mejor comprensión, no dice nada sobre el mundo” (analítica), a una matemática también desconectada de la realidad, aunque no del mundo semiótico. No llega al empirismo clásico. Pero no solamente hace eso, afirma también el carácter formal de la matemática. No se reduce la matemática a la lógica o a las leyes del pensamiento, sino que a la manipulación de símbolos en menor o mayor grado de abstracción; no sobre la base de ciertos criterios o sentido de la realidad (como en “cierto” Russell) sino a la larga sobre decisiones convencionales. El sentido fundamental de lo que apuntaba el formalismo es nuevamente, a pesar de todos los objetos exhibidos, una matemática sin contenido, que tampoco dice nada sobre lo real.

Formalismo y convencionalismo

El camino inevitable a partir de las principales premisas formalistas es el de afirmar el convencionalismo en la naturaleza de las matemáticas y, si existe evidencia, ésta sólo puede terminar siendo sintáctica. La matemática es un lenguaje simbólico (o varios) en donde podemos escoger sus reglas con base en nuestras conveniencias más diversas.

El formalismo rompe con el logicismo, habla de intuición y de objetos de la matemática; crea la ilusión de que se escapa por la “puerta” del paradigma racionalista y formal clásico de las matemáticas, pero vuelve al mismo, regresa por la ventana y, además, lo reafirma en toda su extensión.

Es poco útil desde un punto de vista filosófico riguroso que después de definir a la matemática como la “ciencia” de los sistemas formales” y se le vacíe de su contenido material verdadero, luego se diga que la escogencia y aplicación de estos sistemas reside en lo “empírico” 16.

Lo que epistemológica y filosóficamente es importante es el establecimiento de la conexión entre las nociones y conceptos de la matemática con la realidad material. Es poco adecuado decir que la matemática debe estar libre de asunciones metafísicas 17, cuando, primeramente, es una asunción metafísica exhibir como sus objetos a los trazos o fórmulas; y, en segundo lugar, cuando de hecho esta posición es la manifestación de una impotencia para aprehender la naturaleza de las matemáticas.

LA FILOSOFÍA DEL INTUICIONISMO

Para el intuicionismo las cosas son bien diferentes al formalismo. La matemática según él no es referida a un objeto exterior. Dice Heyting en *Intuicionism, an Introduction*:

> “La característica del pensamiento matemático es que no transmite verdad acerca del mundo externo, sino que concierne sólo a construcciones mentales” 18.

El constructivismo

El programa de Brouwer consistía en :

> "...la investigación de la construcción mental matemática como tal, sin referencia a preguntas acerca de la naturaleza de los objetos construidos, como si estos objetos existen independientemente de nuestro conocimiento de ellos" 19.

El objetivo de los intuicionistas no son los aspectos formales de la matemática, sino el "tipo de razonamiento que aparece en la matemática" 20. Es decir, se refiere a procesos constructivistas. Esto es muy importante de enfatizar:

> "...el intuicionismo procede independientemente de la formalización la cual sólo puede seguir después de la construcción matemática" 21.

Con lo anterior se separa de la concepción que enfatiza la estructura formal de la matemática: el sustrato del formalismo (ya presente en el logicismo). Pero además se separa del logicismo radicalmente: "...la lógica es parte de las matemáticas y no puede de ninguna manera servir como un fundamento de ella" 22.

No se trata entonces tanto de un proyecto de fundamentación en términos de la consistencia de las matemáticas, se trata de una manera de hacer matemáticas. "Es más un fenómeno de la vida, una actividad natural del hombre abierta al estudio por métodos científicos" 23.

El intuicionismo parte de la noción de número natural:

> "En la percepción de un objeto concebimos la noción de una entidad por un proceso de abstracción de cualidades particulares del objeto. También reconocemos la posibilidad de una repetición indefinida de la concepción de entidades. En estas nociones descansa la fuente del concepto de números naturales" 24.

La intuición

Lo que importa en el intuicionismo no es ni lo formal, ni lo deductivo, ni lo axiomático, sino la evidencia intuitiva. Es un rechazo de ciertos aspectos de paradigma racionalista y formal clásico. Podríamos conectar con esta actitud hacia las matemáticas a muchos pensadores que van desde Descartes y Pascal (en parte), Krönecker, Poincaré, Borel, Lebesque y Baire. Es, sin embargo, Brouwer quien fundó esta filosofía en los tiempos modernos.

Desde el punto de vista filosófico buscó una alternativa al paradigma basado en la evidencia lógica y formal, a partir de una vuelta también a Kant. La matemática para el intuicionismo tampoco es analítica, es sintética; pero no se preocupa, a diferencia de Hilbert, de exhibir un objeto sensible o no para la matemática.

Para Brouwer la matemática es sintética sobre todo en el sentido de que no se deriva tautológicamente, sino que produce un contenido cognoscitivamente nuevo. Las proposiciones de la matemática aparecen como el producto de una construcción en la intuición temporal. Mientras que para Kant lo que establece las proposiciones de la matemática es la estructura mental de lo espacio-temporal, en Brouwer sólo lo temporal es retomado. Es el movimiento que en la mente hace pasar de 1 a 2 lo que determina a las matemáticas. Es esto lo que le da su carácter no análitico 25.

El lenguaje y la lógica

La matemática para los intuicionistas no se puede asimilar ni al lenguaje ni a la lógica (un duro golpe en su visión a la “evidencia” sintáctica). El lenguaje y la lógica son sobre todo instrumentos necesarios exclusivamente en la transmisión y comunicación, no en la construcción matemática. Para esta última lo único que prevalece es una intuición interior, una *autoevidencia.* No se busca la estructura de la construcción matemática hacia afuera, sino hacia adentro en una inspección directa. Para Brouwer ésta es la filosofía de la matemática. Las paradojas y demás problemas que atormentan a los logicistas y formalistas, tienen su origen en los abusos y extralimitaciones del lenguaje y de la lógica, cuando éstos han dejado de corresponder a la verdadera matemática.

No se trata para el intuicionismo de probar la consistencia de la matemática (como Hilbert) sino de hacer matemática verdadera, apegada a esa intuición introspectiva. Esta matemática determinada filosóficamente así establece, según Brouwer, un programa práctico centrado en la noción constructivista. Es esto lo que en el fondo determina las reglas usadas, a saber: el lenguaje y la lógica. Dependerá de ella también el tratamiento de las nociones infinitas. La verdad y la existencia matemática aparecen fundidos en la construcción.

En mi opinión es totalmente correcto señalar la futilidad formalista extrema de hacer de los sistemas formales la matemática, así como la demostración de la consistencia su tarea central. Es transmutar el objeto de la misma. Sin embargo, la fundamentación de la matemática es un problema real. No se puede evadir. Brouwer no se compromete a buscar caminos teóricos de fundamentación de la matemática existente. En su lugar pretende partir de cero, sacrificar gran parte de lo que existe y levantar una nueva matemática (con una amputación de las intuiciones kantianas) haciendo de la intuición temporal el sustrato de su evidencia. Es correcto criticar el objeto formalista de la matemática de los trazos, símbolos y fórmulas, que es en realidad una escapatoria a abordar los problemas de la epistemología matemática que no podía resolver el logicismo. Las nociones y conceptos de la matemática son abstracciones, representables, en alguna medida, en el papel o donde sea, pero abstracciones. Sólo pueden ser aprehensibles por la mente. Son construcciones de la mente y están por así decirlo, en una relación íntima con el sujeto. Pero estas abstracciones y construcciones no se hacen en el vacío de la mente. Aparecen en el seno de una relación mutuamente condicionante sujeto-objeto. Los objetos de la matemática aparecen aquí. El camino de la búsqueda de la naturaleza de la matemática no se dirige ni al sujeto en sí, ni al objeto en sí, sino a las determinaciones de esta relación y realidad. Pero además este camino está orientado vectorialmente (sobre todo) hacia afuera, hacia el objeto exterior y no al revés.

Una teoría de la verdad en la matemática requiere establecer un programa preciso que evidencie la conexión de los elementos y enunciados y estructuras matemáticas con la realidad material.

Así, pues, depositar los criterios de verdad en una intuición interior es una vuelta al subjetivismo estéril. No es raro entonces que en el intuicionismo subjetivista se prescinda del lenguaje y la lógica. El sujeto individual vive en sí y para sí la experiencia de la intuición interior, de la construcción mental de la matemática, alejado del lenguaje y la lógica. Se trata de un mundo de pensamientos, ideas, exclusivo, íntimo.

El lenguaje como instrumento

Yo estoy totalmente de acuerdo en que la matemática ni es un lenguaje, ni es lógica. Precisamente afirmar la preeminencia en sí de estos últimos es parte de los paradigmas que hemos venido señalando. Creo además que es necesario establecer una diferenciación radical entre estas tres nociones. Pero no puedo aceptar la ausencia de una estrecha relación entre construcción matemática y lógica, entre la primera y el lenguaje; más aún, con una combinación adecuada de estos tres elementos y la realidad material debe tejerse una concepción filosófica sobre las matemáticas.

El lenguaje es el instrumento a través del cual viajan los razonamientos por la conciencia, pero, más que eso, es parte de esos razonamientos. La conciencia es lenguaje interiorizado. No es posible el pensamiento sin alguna forma de lenguaje, oral, escrito, visual, etc... Este elemento en particular manifiesta un contenido social en los productos de la conciencia de los hombres. No es entonces el lenguaje mera necesidad de comunicación, es parte esencial de la construcción matemática. La subestimación de Brouwer, que tal vez se puede entender como reacción en un contexto histórico en el que las “mayorías” afirman un paradigma lógico o “lingüístico”, expresa, sin embargo, un carácter extraordinariamente subjetivo.

Por otra parte, consideraciones similares se pueden hacer sobre la lógica. Esta no interviene en la matemática como compendio que constituye o al que se reduce ésta. No es la mención de reglas tampoco lo que está presente, sino el uso de la lógica. No se reduce la matemática a ella, pero interviene decisivamente en la construcción matemática. Las reglas de la inferencia que se usan están integradas en la conciencia como producto de la relación de los hombres con la naturaleza y por razones hasta de contenido biológico. Es parte de la matemática aunque no es ni se reduce a ésta. Estas reglas intervienen en las matemáticas incluso cuando se introducen lógicas “polivalentes”.

La reducción de las matemáticas

Al intuicionismo no le preocupa mucho que se lance por la borda una gran parte de las matemáticas clásicas:

> "Sobre la mutilación de las matemáticas que usted me acusa, debe ser tomada como una consecuencia inevitable de nuestro punto de vista. Puede verse como también la escisión de ornamentos nocivos, bellos en su forma, pero huecos en substancia, y es al menos parcialmente compensado por el atractivo de agudas distinciones y métodos ingeniosos a través de los cuales los intuicionistas han enriquecido el pensamiento matemático 26.

Brouwer con una visión unilateral constructivista, con una sola bandera programática y con unas cuantas formulaciones filosóficas pretende reconstruir la matemática. Logra con la estrechez de su método reducir enormemente las posibilidades de la práctica matemática. No se puede reducir los métodos de la matemática a exclusivamente los constructivistas intuicionistas. Aparte del subjetivismo que eleva la intuición temporal a una categoría metafísica, sus métodos son insuficientes y limitados.

Varios intuicionismos son inevitables

Existen más problemas con el intuicionismo. ¿Qué se entiende exactamente por constructivismo? ¿Hasta dónde se corta de la matemática clásica? Este es un problema que ha engendrado varios intuicionismos. Señala Kline:

> "Algunos decidieron eliminar todas las nociones de la teoría de conjuntos y limitar ellas a conceptos que pueden ser definidos efectivamente o construidos. Menos extremistas son los constructivistas que no cuestionan la lógica clásica y más aún la usan toda. Algunos admiten una clase de objetos matemáticos y después insisten en procedimientos constructivos. Entonces hay muchos que admiten al menos una clase de números reales (la cual, sin embargo, no se extiende al continuo entero de los números reales); otros admiten sólo los enteros y entonces toman en consideración sólo conceptos tal como números y funciones que son computables. Lo que es considerado computable también varía de un grupo a otro" 27.

Esta es una señal de la existencia de problemas en el sustrato filosófico del intuicionismo y en donde no puede estar ajeno su profundo carácter subjetivo.

Intuición temporal e intersubjetividad

Mientras que Hilbert-Curry toman de Kant la necesidad de exhibir un objeto en las matemáticas, Brouwer toma la intuición temporal *a priori*. Levantando la bandera del apriorismo kantiano se coloca contra el paradigma de lo deductivo, axiomático y formal, que termina apuntalando lo lingüístico y lógico en la matemática al punto que ésta se desvanece en ellos. Pero el subjetivismo que enfatiza (de Kant) no es suficiente para responder esto. Tampoco es suficiente el exclusivo método que escoge para dar cuenta de las matemáticas. Ofrece, frente al paradigma del énfasis en lo formal y sintáctico, el énfasis en la intuición, en una sola intuición.

Los teoremas del intuicionismo plantean una dificultad evidente: ¿Cuál es la posibilidad de la intersubjetividad en situaciones que dependen del individuo? Si se admite esta intersubjetividad ¿cuáles son los criterios para revelarla? Las preguntas apuntan a las dificultades inherentes a toda interpretación del conocimiento o de la verdad basada en la evidencia interior.

Como con el clásico cartesianismo cuya noción de evidencia se expresa en lo “claro” y “distinto”, la posibilidad de experiencias distintas y contradictorias sólo puede minar la noción de “autoevidencia”. Precisamente Frege buscaba una respuesta a esto con su filosofía platonista. La condena de toda autoevidencia es su conducción ineludible a un subjetivismo radical, al solipsismo. La ausencia de criterios objetivos susceptibles de verificarse por la vía práctica condenan al intuicionismo a alienarse de las ciencias naturales. No es posible en el intuicionismo probar por la vía de la intuición la existencia de la intersubjetividad, base de cualquier conocimiento científico. Por último, una crítica en su propio terreno: una gran parte de resultados intuicionistas están lejos de ser de los que aparecen evidentes o cercanos a la intuición (sea cual sea) 28.

Se puede añadir, además, que los resultados intuicionistas no han encontrado prácticamente posibilidades de aplicación en las ciencias (esto, de cualquier forma, no es significativo para su visión).

Las críticas al intuicionismo se han concentrado históricamente en el subjetivismo, como es natural. Esto los ha conducido a tratar de definir criterios más objetivos por la vía de formalizar la matemática intuicionista; pero esto es, como señala Körner, una declaratoria de admisión en el formalismo y el abandono de sus principios filosóficos básicos 29.

Un balance

La vuelta a Kant por los formalistas y los intuicionistas representa un auténtico fracaso desde el punto de vista filosófico. Los formalistas exhiben objetos inapropiados, transmutan el carácter de la matemática y, a pesar del reclamo kantiano, apuntalan fuertemente al paradigma de lo deductivo y formal. Los intuicionistas, por otra parte, frente al logicismo y al formalismo (evidencia lógica y sintáctica) apuntalan la intuición subjetivista conjurada con el rechazo al platonismo y un obsesivo constructivismo. Vuelven a Kant en dos sentidos diferentes, pero con ello no contribuyen filosóficamente a abrir una ruta hacia una nueva interpretación alternativa y viable frente al paradigma formal.

El intuicionismo trató de escapar del paradigma de la evidencia lógica y formal, pero siguió participando del paradigma racionalista sobre las matemáticas, de las verdades infalibles y absolutas, de la mente generadora de conocimiento *a priori*. Intuicionistas y formalistas parten todos de la premisa de que el objeto o el fundamento de las matemáticas está separado del mundo material. Se enfatiza lenguaje, lógica o intuición en las matemáticas, pero nunca su contenido empírico.

En los años veinte las diferentes escuelas filosóficas en los fundamentos de la matemática sentían un futuro libre de las crisis teóricas del pasado. Las paradojas habían sido el último “desastre”. El formalismo prometía, el constructivismo, estrecho y complejo, pero podía servir. EL logicismo con los axiomas extralógicos no parecía recuperarse, pero la esperanza no se disipaba. La matemática seguía siendo un edificio inconmovible y las teorías de la verdad infalible aparecían triunfantes. El empirismo renunciaría en pocos años a reconocer a la matemática como algo más que lenguaje y reglas convencionales. La década de los treinta cambiaría esta visión optimista de manera abrupta y radical para todo aquel que lo quisiera ver. Daba inicio a una nueva era: la gödeliana.

CAPÍTULO VIII
A MANERA DE CONCLUSIÓN: LOS TEOREMAS DE GÖDEL Y EL RACIONALISMO

INTRODUCCIÓN

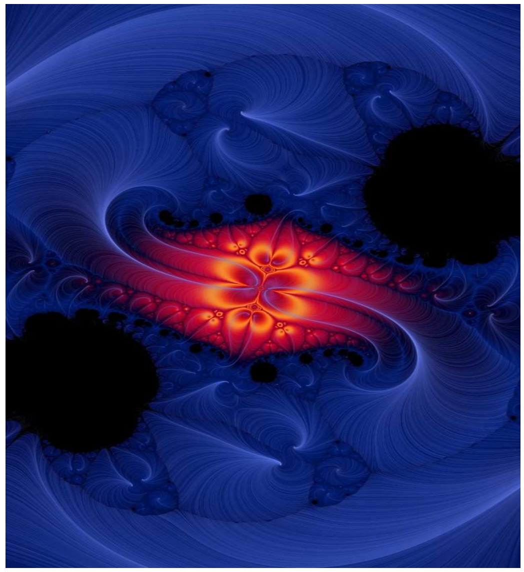
En los pasados capítulos hemos afirmado las dificultades existentes en las filosofías del Logicismo, el Formalismo y el Intuicionismo. Hemos visto una solución decisiva entre estas filosofías y una actitud metodológica (en sentido general) racionalista. Es decir, hemos visto en un sustrato epistemológico la base común para comprender lo que hemos planteado como debilidades filosóficas en estas corrientes de pensamiento sobre los Fundamentos de las Matemáticas. Pero en ningún momento hemos mostrado, para usar lenguaje matemático, un “punto de acumulación” histórico que señale elementos en la perspectiva de nuestro análisis. Esto es, precisamente, el objetivo de este pequeño capítulo.

En nuestra opinión los Teoremas de Gödel en los años Treinta representan un buen punto de partida histórico-conceptual en la búsqueda de una estrategia de definición para una nueva concepción de las matemáticas. Vemos en los Teoremas de Gödel consecuencias filosóficas que el mismo Gödel probablemente no captó, o, por lo menos, no asumió como tales. Integramos estos importantes resultados como una señal significativa en el agotamiento de los paradigmas clásicos en la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas. El fracaso del Logicismo no aparece, entonces, como un hecho aislado. Se trata de un prolegómeno de una crisis mucho más profunda en el pensamiento occidental que con mayor claridad se puede develar sobre la base de los resultados gödelianos.

Se trata de resultados teoréticos que tal vez por su extraordinario valor lógico y matemático, no se han sabido interpretar en el terreno de la filosofía, que es donde más significaciones podrían transportar.

La revaloración filosófica que hacemos persigue dotar de una significación renovadora e histórica lo que hemos constatado, por la vía del análisis y las experiencias prácticas, en relación con las matemáticas de nuestro siglo.

DESARROLLO



Anatomía de un sistema formal

En *Los elementos* de Euclides se estableció una estructuración de los resultados matemáticos que se ha adoptado usualmente como el modelo axiomático. Se trata en éste de escoger unas cuantas nociones y enunciados a partir de los cuales, rigurosamente, deducir otros; es una encadenación precisa de los enunciados, que busca disminuir los elementos subjetivos o intuitivos en la expresión del razonamiento matemático.

Ahora bien, un sistema formal no es simplemente una axiomática: es una abstracción mucho más grande a partir de lo axiomático. Mientras que en la axiomática es importante cuales axiomas primarios se escogen, en un sistema formal no, es relativo y determinado por convención o comodidad. Se puede presentar un sistema formal distinguiendo entre “ideas primitivas” y “teoremas primitivos” de la siguiente forma:

1. Ideas primitivas:
   a) Componentes primitivos
   b) Operaciones

2. Teoremas primitivos:
   a) Axiomas
   b) Reglas [1].

Se puede establecer una correspondencia entre una axiomática y un sistema formal:

> "La noción de proposición (en el sistema formal) es análoga a la de enunciado (en la teoría intuitiva). La de derivación es análoga a la de demostración. La noción de proposición derivable es análogo a la de enunciado cierto, y la de proposición refutable análoga a enunciado falso. Finalmente, los teoremas del sistema formal son evidentemente análogos a los de la teoría intuitiva" 2.

El programa del formalismo

El programa hilbertiano establecía una correspondencia así entre la Aritmética y un sistema formal. Se trataba de, a través de reglas precisas bastante "intuitivas" en la metateoría, demostrar la consistencia de la teoría. En la metateoría las fórmulas válidas tenían que ser obtenidas a través de una secuencia de fórmulas de tal manera que cada una de ellas o fuese un axioma o fuese derivada a través de las reglas debidamente establecidas. Se podría entonces determinar si una fórmula o conjunto de símbolos es válida o no a través de un proceso "efectivo"; esto sería cuestión de cálculo y chequeo mecánico.

Con la filosofía que ya hemos analizado y este programa Hilbert afirmaba que podía dar cuenta de sus objetivos, los que resumía en 1925 de esta forma:

> "1. Donde exista una esperanza de salvamento, deberemos cuidadosamente investigar las definiciones fructíferas y los métodos deductivos. Los cuidaremos, fortaleceremos y los haremos útiles. Nadie nos sacará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros.
>
> 2. Debemos establecer a través de toda la matemática la misma certeza para nuestras deducciones como existe en la teoría elemental de números, la cual nadie duda y donde las contradicciones y paradojas surgen solamente a través de nuestra propia falta de cuidado" 3.

Hilbert no tenía dudas del éxito de su programa. En la misma fecha decía:

> "Es también una placentera sorpresa descubrir que, al mismo tiempo, hemos resuelto un problema que ha plagado a las matemáticas por un largo tiempo, viz., el problema de probar la consistencia de los axiomas de la aritmética" 4.

Y concluía entonces:

> “Lo que hemos experimentado dos veces, una vez con las paradojas del cálculo infinitesimal y otra con las paradojas de la teoría de conjuntos, no será experimentado una tercera vez, nunca jamás” 5.

Los teoremas de Gödel

En su artículo llamado “Sobre sentencias formalmente indecidibles de *Principia Mathemática* y sistemas afines” de 1931, Gödel destruirá de un plumazo toda la seguridad e ilusiones de Hilbert; pero, más aún, brindaría elementos para intentar una nueva visión de las matemáticas.

En su pequeño resumen de sus resultados que aparece bajo el título *Diskussion zur grundlegung der mathematik* y que fue publicado también en 1931 en la revista *Erkenntnis*, establecía Gödel.

> “En el trabajo anteriormente citado se muestra que no hay ningún sistema formal con un número finito de axiomas que sea completo ni siquiera respecto de las sentencias aritméticas. Aquí entendemos por “sentencias aritméticas” aquellas en que no aparecen más nociones que +, = (adición, multiplicación e identidad, referidas a números naturales), además de los conectores lógicos y los cuantificadores universal y existencial, aplicados sólo a variables de números naturales (por lo cual en las sentencias aritméticas no aparecen más variables que las de los números naturales). Incluso para los sistemas formales con un número infinito de axiomas hay sentencias aritméticas indecidibles, con tal de que su esquema axiomático cumpla ciertas condiciones (muy generales). De lo dicho se sigue, en especial, que hay sentencias aritméticas indecidibles en todos los sistemas formales conocidos de la matemática -por ejemplo, en *Principia Mathematica* (con axioma de reducibilidad, de elección y de infinitud), en la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo- Fraenkel y en la de Von Neumann, y en los sistemas formales de la escuela de Hilbert” 6.

Las consecuencias de los resultados de Gödel son extraordinarias. Por un lado implican que cualquier formalismo, suficientemente fuerte para expresar partes básicas de la teoría elemental de números, es incompleto. La conclusión es que las matemáticas no admiten una formalización absoluta, y en las partes formalizables no se puede garantizar consistencia. Por otro lado, los métodos finitistas que usaba Hilbert podían ser codificados en una teoría que daba lugar a los mismos resultados. Dice Gödel:

> "...una demostración de la consistencia de uno de estos sistemas S sólo puede llevarse a cabo con ayuda de modos de inferencia que no son formalizables en S. Por tanto, sería completamente imposible obtener una prueba finitaria de consistencia (como buscan los formalistas) para un sistema formal en el que estén formalizados todos los modos finitarios (es decir, intuicionísticamente aceptables) de prueba" 7.

Gödel contra el formalismo y el racionalismo

Gödel demostró que las pretensiones hilbertianas no podían tener éxito, que la prueba de la consistencia a través de los métodos hilbertianos no era posible y, más aún, ponía en cuestión los verdaderos límites de los sistemas formales en las matemáticas. Ladrière resume estas limitaciones:

> "...no es posible formalizar completamente una teoría matemática cuando ésta ha llegado a un cierto nivel de complejidad. En determinados casos, el modelo simbólico no consigue representar de manera adecuada los nexos deductivos que existen en el seno de la teoría bajo su forma intuitiva, no formalizada. En otros casos, en modelo fracasa cuando se trata de representar ciertos conceptos intuitivos de la teoría. En cualquier caso, no se puede hacer abstracción de la relación de significación que liga el modelo simbólico al dominio matemático que trata de representar. Llega un momento de la interpretación que no puede ser puesto entre paréntesis. El recurso a la pura intuición del signo, tal como la entendía Hilbert, no es suficiente. La utilización del método formal marca un progreso evidente, y ha permitido obtener un cierto número de precisiones de largo alcance sobre la estructura de las teorías matemáticas, pero no dispensa a la matemática de mantener el contacto con ciertas intuiciones previas a la formalización y que ésta sólo puede ayudar a clarificar" 8.

El objetivo de la formalización siempre fue eliminar la intuición, cualquiera que ésta fuera, ligada a los procedimientos con los que el hombre se relaciona con las cosas materiales o ligadas a indeterminadas "intuiciones" subjetivas innatas.

Hilbert admitía como premisa la intuición del signo, pero en la formalización radical ya ni ésta podía ocupar un lugar. La noción de un sistema formal corresponde a la existencia de condiciones deductivas-formales en las teorías matemáticas, a la racionalidad interior de las mismas. En su apuntalamiento se buscaba encontrar el sentido más profundo de la naturaleza de las matemáticas. En esta visión de las cosas la pareja formalismo-intuición busca devenir solo el primer término, en un sistema cerrado, completo.

Los resultados de Gödel establecen que la intuición se niega a ser desterrada hasta en lo que parecía más propio de lo formal. La intuición no puede entonces desaparecer. Esto nos obliga a incidir en el esclarecimiento de esta noción y en la necesidad de un nuevo planteamiento teórico-filosófico sobre el carácter de las teorías matemáticas.

Gödel conduce a romper el esquema del sistema absoluto y cerrado para todo discurso, conduce a romper la continua pretensión del racionalismo de dar cuenta a partir de la razón de toda la realidad. Ningún sistema racional puede comprehender la totalidad de lo real. Esto establece una verdad epistemológica, la recurrencia inevitable a la intuición no es la apelación a la interioridad subjetiva, manifiesta la necesidad del contacto material del sujeto con el objeto material. Las condiciones básicas de la intuición residen en aquellas de lo sensible y la experiencia (la intuición a la que me he referido de una manera metodológica y general por supuesto incluye aquella que surge en la experiencia de la práctica teórica matemática. Esta noción alude al conjunto de rasgos psicológicos que intervienen en el conocimiento y cuyo origen (aunque es diverso) se encuentra en la relación del sujeto con el mundo que se le opone y del que es parte).

Los límites de los sistemas formales son los límites de lo racional en el conocimiento, es el reclamo de la práctica empírica, de la vida.

Los resultados de Gödel son un duro golpe a la visión racionalista del conocimiento que había hecho de las matemáticas su reducto fundamental.

En torno a la fundamentaron de las matemáticas: Lakatos

Lakatos en un artículo de 1962 hacía un agudo y sano comentario a la visión racionalista que se encuentra detrás de las principales filosofías modernas de la matemática:

> "La matemática, al igual que la lógica russelliana, tiene su origen en la *crítica* de la intuición; ahora bien, los meta-matemáticos -como hicieron los logicistas- nos piden que aceptemos su intuición como prueba "última". De aquí que ambos caigan en el mismo psicologismo subjetivista que en otro tiempo atacaron. Pero. ¿Por qué empeñarse en pruebas "últimas" y autoridades "decisivas"? ¿Por qué buscar fundamentos, si se acepta que son subjetivismos? **¿Por qué no admitir honestamente la falibilidad matemática e intentar defender la dignidad del conocimiento falible contra el escepticismo cínico, en lugar de hacernos ilusiones de que podemos reparar, hasta que no se note, el último rasgón del tejido de nuestras intuiciones "últimas?"**(Negrita añadida) 9.

El “dogmatismo” que encierran las filosofías modernas de la matemática es producto de una larga tradición racionalista que ha hecho siempre de las verdades matemáticas zonas “liberadas” infalibles. La base epistemológica ha sido la verdad absoluta incuestionable. En el logicismo las verdades son analíticas, “derivables de la lógica”, se conectan a las leyes de la Razón, o se refieren a las cosas, pero en cualquiera de las aproximaciones son infalibles. Las verdades matemáticas se refieren a un “tercer mundo” ideal de objetos o constituyen un lenguaje sin relación a ningún mundo (son verbales), pero son infalibles.

En el formalismo la infalibilidad se encuentra en la intuición de los signos, los trazos o las fórmulas; pero además los sistemas formales lo invaden y lo controlan todo, dan cuenta de la esencia de la matemática, de su racionalidad.

En el intuicionismo la fundamentación se hace a partir de una intuición temporal que se engendra en el “paso del uno al dos”; el sujeto es el que hace infalible las verdades matemáticas.

En el formalismo y en el intuicionismo se priorizan los métodos finitistas, constructivistas, se constituyen en el método cuasi-universal a través del cual lo que se toca se vuelve infalible.

En el fondo, se enfatize la lógica, el lenguaje, o la intuición, se parte de una misma premisa filosófica: la verdad absoluta. Esta sólo es posible a partir de ese poder de la razón para producir y crear verdades *a priori*. Lo que es tocado por lo empírico parece que se “contamina”. Como señala Lakatos, frente al escepticismo, el racionalismo ha buscado la evidencia de lo infalible donde fuese posible y no lo ha encontrado.

El factor Gödel en la historia de las matemáticas

Las implicaciones de los resultados de Gödel en los paradigmas sobre las matemáticas son decisivas. Las matemáticas no pueden ser vistas ya a través de la interpretación clásica axiomática, deductiva y formal. El paradigma formal recibió un golpe extraordinario. Pero también lo recibió el paradigma de las verdades infalibles producidas por la mente: el racionalismo. Con la caída del primero recibieron un golpe no sólo las filosofías racionalistas que lo habían integrado, sino también el positivismo lógico que había creído reducidas las matemáticas a un sistema sintáctico alejado de toda intuición.

En las matemáticas hay intuición, existe “contaminación” empírica. Ni lo formal ni lo racional pueden dar cuenta completa de ellas. Al igual que con las otras ciencias se trata de disciplinas teóricas abiertas, donde fluye el aire fresco de la vida.

Con el deterioro del segundo paradigma, la epistemología moderna ha recibido un precioso instrumento para intentar una auténtica revolución.

Al igual que el “factor paradojas” nos servía para dividir la historia de las matemáticas, el “factor Gödel” ahora nos permite completar nuestro cuadro. Este factor teórico determinante representa un punto de partida para una auténtica ruptura epistemológica en la reflexión sobre las matemáticas; la posibilidad de una mejor comprensión de las mismas. Pero además; representa la posibilidad de unas nuevas matemáticas.

No ha transcurrido tal vez suficiente tiempo para que lo uno y lo otro se desarrollen a cabalidad, establezcan un nuevo espectro para las matemáticas y, entonces, para las ciencias en general.

Estamos probablemente en una fase transitoria en busca de nuevas definiciones y categorías hacia la constitución de un nuevo paradigma. Es un período en el que se afirman al mismo tiempo las críticas de las ideas anteriores como las cristalizaciones de los nuevos elementos conceptuales.

NOTAS DEL CAPÍTULO I

* Este capítulo está basado en los artículos: “Boole y la Matemática del siglo XIX”, *Rev. de Filosofía* de la UCR, XV(61), 1987.

1. Cf. Beth, E. & Piaget, J. *Epistemología, matemática y psicología*. Trad. Víctor Sánchez de Zavala. Barcelona: Editorial Crítica, 1980. P.15.

2. Cf. Kline, Morris. *Mathematics. The loss of certainty*. New York: Oxford University Press, 1980. P. 48.

3. Cassirer. Ernst. *El problema del conocimiento*. Trad. W. Roses. México: Fondo de Cultura Económica, 1965. P.488.

4. Brunschvicg, Leon. *Les etapes de la philosophie mathematique*. Paris: A. Blanchard, 1981. P. 103.

5. Cf. *Ibid*. p. 104. Ampliemos esta idea: “La aritmética, dice Vieta, es un método operatorio sobre los números, *logística numerosa;* El *Álgebra* es un método operatorio sobre las especies o formas de las cosas: *logística especiosa*”.

6. Cf. Germain, Paul. en Le Lionnais, F. (comp.). *Las grandes corrientes del pensamiento matemático.* Trad. Nestor Míguez. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1965. P. 248.

7. Cf. Brunschvicg. *Op. Cit.* P. 107. La cita completa es la siguiente:

> “Queda por conocer cuál es exactamente, tomándolo en sí mismo, el alcance de esta matemática universal (...); la respuesta será diferente, según se considere la obra de Descartes en la filosofía general, es decir la extensión del método matemático a la universalidad de problemas cosmológicos, o que se detenga únicamente a la obra que Descartes realiza en el dominio propio de la matemática por la reducción de los problemas de la geometría a los problemas del álgebra.”

8. Cf. *Ibid*. P. 106. La cita completa también es interesante:

> “... el análisis de los antiguos y el álgebra de los modernos habían sacrificado a la amplitud de los resultados la simpleza y la pureza de los principios; ellos deben reorganizarse, ellos se fundirán de manera que constituyan un método universal. El principio de este método consiste en elevarse por encima de la representación de figuras, y a despejar lo que es común a todas estas ciencias particulares que se llaman comúnmente matemáticas... aunque sus objetos sean diferentes, no dejan de

concordar todas, en el hecho de que no consideran otra cosa que la diversas relaciones o proposiciones que en ellas se encuentran."

9. *Idem*.

10. Cf. *Ibid*. P. 108. "La idea fundamental es que la ciencia es esencialmente unidad porque ella es la inteligencia humana en actividad y no hay más que una forma de comprensión. El método es único porque dispone los datos complejos de un problema siguiendo un orden inteligible de manera de no tener más que una cadena de relaciones simples entre elementos simples".

11. Buchdahl, Gerd. *Metaphysics and the philosophy of science*. Cambridge-Massachussetts: The MIT Press, 1969. P.85.

12. *Ibid*. PP. 89-90.

13. Brunschvig. *Op. Cit.* P. 114.

14. Cf Kline *Op. Cit.* P.60.

15. Beth. *Op. Cit.* P. 31.

16. *Ibid*. P. 53.

17. Cf Bourbaki, N. *Elementos de historia de la matemática.* Trad. Jesús Hernández. Madrid: Alianza Editorial, 1976. P. 18.

18. Cf *Ibid*. P.19, 20.

19. *Ibid*. P. 20.

20. Cf Kline. *Op. Cit.* P. 174-175.

21. Cf *Ibid*. P. 177.

22. Cf *Ibid*. P. 178-179.

23. Boole, George. *Análisis matemático de la lógica*. Trad. Armando Astí Vera. Buenos Aires: Universidad Nacional de la Plata, 1960. P.9.

24. *Ibid*. P.13.

25. Boole, George. *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. New York: Dover Publications Inc., 1958. P.24.

26. Boole. Análisis matemático de la lógica. P.10.

27. *Ibid*. P.13.

28. Boole. *Laws of thought*. P.1.

29. *Ibid*. P.5.

30. Boole. Análisis matemático de la lógica. P.25.

31. *Ibid*. P.12.

32. Cf Boole. *Laws of thought*. P.11.

33. Kneale, Martha y William. *El desarrollo de la lógica*. Trad. Javier Muguerza. Madrid: Editorial Tecnos, 1972. P.374.

34. Boole. *Análisis matemático de la lógica.* P. 12.

35. *Ibid*. P. 18.

36. Kneale. *Op. Cit.* P. 384.

37. Boole. *Laws of thought*. P. 46.

38. Bourbaki. *Op. Cit.* P. 21.

39. *Ibid*. P. 21.

40. CfKline. *Op. Cit.* P.185.

41. Cf*Ibid*. P. 186.

42. Cf*Idem*.

43. Cf*Ibid*. P. 187.

44. CfBabini, José. *Historia sucinta de la matemática*. Madrid: Espasa Calpe, 1969. P. 121.

45. CfBourbaki. *Op. Cit.* P.41.

46. Wilder, Raymond. *Introduction to the foundations of mathematics.* New York: John Wiley and sons, 1956. P. 190.

47. CfBabini. *Op. Cit.* P.123.

48. CfKline. *Op. Cit.* P.179.

49. Bell, E.T.. *Historia de las matemáticas*. Trad. R. Ortiz. México: Fondo de Cultura Económica, 1949. P.291.

50. Cf*Ibid*. P.307.

51. CfWilder. *Op. Cit.* P.195.

52. Bell. *Op. Cit.* P.289.

53. CfBabini. *Op. Cit.* P.130.

54. Cf*Ibid*. P.131-132.

55. Bourbaki. *Op. Cit.* P.46.

56. Cf*Ibid*. P.47.

57. Cf*Ibid*. P.49.

58. Cf*Ibid*. P.50-51.

NOTAS DEL CAPÍTULO II

* Este capítulo está basado en el artículo "La Aritmética en Frege: una introducción al Logicismo", *Rev. Ciencia y Tecnología* de la UCR. Vol VIII(1), III-145, Marzo 1984, San José, C.R.

1. Frege, Gottlob. *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética*. *Otros estudios filosóficos*. Trad. Hugo Padilla. México: UNAM, 1972. P.109.

2. *Ibid*. Pp. 124-125.

3. *Cf*. Kneale, William y Marta. *El desarrollo de la lógica*. Trad. Javier Muguerza. Madrid: Editorial Tecnos, 1972. Vamos a hacer la cita completa para beneficio de nuestros lectores:

> "...no niega la posibilidad de que, dentro de su propio sistema deductivo, quepa dar todos los pasos necesarios para la derivación de una fórmula sin necesidad de tener en cuenta para nada los significados de los símbolos que se manejan; pero no obstante advierte que, lejos de conducir a una notable significación, la negativa a interpretar aquellos símbolos complicaría más el problema, ya que el interés de las fórmulas matemáticas radica en la posibilidad de su aplicación, seamos francos con nosotros mismos y admitamos que nuestras reglas de cálculo no de eligen arbitrariamente, si no dependen de los significados asignados a nuestros símbolos. Si ideáramos un juego para jugar a él sobre un papel con trazos desprovistos de significados y de acuerdo con reglas arbitrarias, es obvio que ese juego no merecería ser considerado como una rama de la matemática". P.418-419.

4. Frege. *Op. Cit.* P.140.

5. *Ibid*. P. 142.

6. Frege, Gottlob, en "*The thought: a logical inquiry*" en el libro: Strawson, PF. (Edit). *Philosophical logic*. Oxford: Oxford University Press, 1967. P.35.

7. *Cf.* Passmore, John. *A hundred years of philosophy*. Great Britain: Penguin, 1968. En una traducción mía:

> "Los filósofos han sido forzados a una u otra de estas teorias insatisfactorias, él piensa, porque ellas han supuesto equivocadamente que lo que es objetivo debe existir en el espacio. Entonces se vieron compelidos a escoger entre tratar a los números como espaciales (ya sea como grupos de objetos o como marcas sobre páginas) o como subjetivos. Pero esto, de acuerdo con Frege, es una antítesis falsa: 'los números no son ni espaciales ni físicos ni subjetivos como las ideas, son no sensibles y objetivos'". P.148.

8. *Cf.* Frege. *Conceptografía*. P.141. Es en la parte del *Grundlagen*.

9. *Ibid*. P.142.

10. Frege, Gottlob. *Estudios sobre semántica*. Trad. Ulises Moulines. Barcelona: Ed. Ariel P.7. 1973

11. Passmore. Op.cit. P.148.

12. Frege. *Estudios sobre semántica*. P.127-128.

13. *Cf.* Frege. *Conceptografía*. P.136.

14. Frege. "*The thought: a logical inquiry*". P. 17.

15. *Ibid*. P.18.

16. *Ibid*. P.19.

17. Frege, Gottlob en "*Negation*" en: Geach, Peter: Black, Max (Editors and translators). *Translations from the philosophical writings of Gottlob Frege*. Oxford: Blackwell, 1952. P.126.

18. Frege. *Estudios sobre semántica*. p.30.

19. *Cf.* Lakatos, Imre. *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Trad. Diego Ribes Nicolás. Madrid: Alianza Editorial, 1981. P. 16.

20. Kneale. *Op. Cit.* P.414.

21. Frege. *Estudios sobre semántica*. P.30.

22. Kneale. *Op. Cit.* P.417.

23. Frege. *Conceptografía*. P.8.

24. *Cf*. Kneale. *Op. Cit.* P.437.

25. *Cf*. *Ibid*. P.439.

26. Sobre esta diferencia se puede consultar a Gödel, Kurt, en la "*Lógica matemática de Russell*", que está incluida en sus *Obras completas*. Trad. Jesús Mosterín. Madrid: Alianza Editorial, 1981. Véase la página 297 y siguientes.

27. *Cf*. Kline, Morris. Mathematics. *The loss of certainty*. New York: Oxford University Press, 1980. P.217.

28. *Cf*. *Idem*.

29. Beth, E. W. *Les fondements logiques des mathematiques*. Paris: Louvain, 1955. P.119-120.

30. Frege. *Estudios sobre semántica*. P.129.

31. *Ibid*. P.161.

32. Frege. *Conceptografía*. P. 179-180.

33. *Cf*. Kneale. *Op. Cit.* P.425.

34. Beth, E.W. *Mathematical thought*. Dordresht-Holland: D. Reidel, 1965. P.38.

35. Quine, Willard van Orman. En "On Frege's way out", en Klemke, E. (edit.) *Essays on Frege*. Illinois: University of Illinois Press, 1968. P.488.

36. *Cf*. Kneale. *Op. Cit.* Kneale lo pone así:

> "...la correlación de uno a uno de que Frege nos habla no es sino aquella relación entre conjuntos que Cantor llama equivalencia, y las novedades contenidas en la obra del primero podría ser fácilmente comprendidas en el lenguaje del segundo por medio de los dos siguiente enunciados: (I)El número cardinal de un conjunto es el conjunto de todos los conjuntos equivalentes al primero. (II)Para cada uno de los números naturales 0, 1, 2, 3, etc., considerados como conjunto de conjuntos equivalentes, podremos tomar como ejemplares o miembros paradigmáticos ciertos conjuntos definidos en términos puramente lógicos, a saber, el conjunto de las cosas no idénticas a sí mismo para 0, el conjunto cuyo único miembro es el número 0 para 1, el conjunto cuyos miembros son los números 0 y1 para el 2, el conjunto cuyos miembros son los números 0, 1, 2 para 3, y así sucesivamente." P.431.

37. *Cf*. Beth. *Mathematical thought*. La cita vale la pena:

> "Aunque el mismo Frege (y, por lo mismo Cantor) disputaría esta opinión, vemos hoy en día una fuerte afinidad entre su logicismo y cantorismo; la principal diferencia es que, de acuerdo al segundo, la lógica pura debe hacer camino para la teoría pura (abstracta) de conjuntos". P.32.

38. Kneale. Op.cit. P.409.

39. Frege. *Conceptografía*. P.11.

40. Frege, Gottlob. "*On Russell paradox*", en: Geach, Peter; Black, Max. *Op. Cit.* P.235.

41. Largeault, Jean. *Logique et philosophie chez Frege*. Paris: Editions Nauwelaerts, 1970. P.460-461.

42. Frege. "*On Russell paradox*". P.334.

43. *Ibid*. P.244.

44. Quine. *Op. Cit.* P.491.

45. *Cf*. *Ibid*. P.492. Aquí Quine reproduce la demostración de la inconsistencia de la salida de Frege.

46. *Cf*. Russell, Bertrand. *Los principios de la matemática*. Trad. Juan Carlos Grimberg. Madrid: Espasa Calpe, 1967. P.593.

47. Kline. *Op. Cit.* P.218.

NOTAS DEL CAPÍTULO III

* Este capítulo, con algunas modificaciones, apareció como parte de "Russell y los Problemas del Logicismo", Rev. MATHESIS (publicación de la UNAM), Nº1(Feb.), Vol. IV, 1988, México

1. Barker, Stephen F. *Filosofía de las matemáticas*. Trad. Carlos Moreno Cañadas. México: UTEHA, 1965. P. 126.

2. *Cf*. Russell, Bertrand. *La evolución de mi pensamiento filosófico*. Trad. Juan Novella. Madrid: Aguilar, 1964. P. 71. Sin embargo, Russell desconocía los trabajos de Frege durante la mayor parte de esos años. Para la publicación de *Los Principios* añadió un apéndice sobre Frege, pero el grueso de esta obra ya estaba escrito. Russell no llega al proyecto logicista por Frege (y le hace correcciones). Su asunción es

motivada por su propia evolución filosófica.

3. Russell, Bertrand. *Escritos básicos* 1903-1959. (Comp. Robert Egner y Lester Denonn). Trad. varios, México: Aguilar, 1969. P. 231.

4. Russell, Bertrand. *Los principios de la matemática*. Trad. Joaquín Xirau. Barcelona: Editorial Labor, 1928. P. 33.

5. Putnam, Hilary; Benacerraf, Paul (Edit). *Philosophy of mathematics*. *Selected readings*. New Jersey: Prentice Hall, 1964. P. 9.

6. Frege, Gottlob. *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos*. Trad. Hugo Padilla. México: UNAM, 1972. P. 191-192.

7. Putnam, Hilary; Benacerraf, Paul. *Op. Cit.* P. 31.

8. *Cf*. Hempel, Carl. "*On the nature of mathematical truth*", en: Brody, Boruch; Capaldi, Nicholas (Edit). *Science: Men, methods, goals, and a reader*. New York: WA Benjamin, Inc., 1968:

> "En este sentido puede ser dicho que las proposiciones del sistema de las matemáticas como ha sido delimitado aquí son verdaderas en virtud de las definiciones de los conceptos matemáticos involucrados, o que ellos hacen explícitas ciertas características con las cuales hemos dotado nuestros conceptos matemáticos por definición" P. 288-289.

9. *Cf. Ibid*: Hagamos la cita completa:

> "Las proposiciones de la matemática tienen, entonces, la misma certeza incuestionable, que es típica de proposiciones tales como 'Todos los solteros son no casados', pero ellas también comparten la falta completa de contenido empírico asociado con esa certeza. Las proposiciones de la matemática están vaciadas de todo contenido fáctico; no transmiten información sobre ningún material empírico". P. 289.

Esta visión es la típica de los filósofos del Círculo de Viena (expresa la renuncia teórica a dar cuenta de la naturaleza y la verdad en las matemáticas).

La visión de Hempel del logicismo no es la misma que afirmaban Frege o Russell; es una visión que surgió después del desarrollo logicista, pero que conectó éste a una aproximación sobre la naturaleza de la lógica y la matemática. De hecho la evolución del logicismo en esta segunda etapa, condujo a la larga a una visión similar por parte del mismo Russell, pero no es así en el principio.

10. *Cf.* Quine, W. O. *Desde un punto de vista lógico*. Trad. Manuel Sacristán. Barcelona: Ediciones Ariel, 1962. P. 125.

11. *Cf.* Ayer. A. J. *Russell*. London: Fontana Modern Masters (Editor Frank Kermode), 1972. P. 44.

12. *Cf.* Putnam, Hilary; Benacerraf, Paul. *Op. Cit.* P. 10.

13. Wilder, Raymond L. *Introduction to the foundations of mathematics*. New York: John Wiley & Sons, 1956. P. 211.

14. *Ibid*. P. 215.

15. *Ibid*. P. 224.

16. *Cf.* Russell, Bertrand. *Introducción a la filosofía matemática*. Trad. Juan B. Molinari. Buenos Aires: Losada, 1945.

> "Tal procedimiento no es ilusorio y, en verdad, en ciertos casos permite una valiosa generalización. Pero por dos razones es incapaz de dar una base adecuada para la aritmética. En primer lugar, no nos hace conocer si hay una sucesión de términos que verifican los axiomas de Peano; igualmente no nos da ninguna sugestión para descubrir si existe tal sucesión. En segundo lugar, como ya hemos notado, necesitamos números que podamos emplear para contar los objetos comunes, y esto requiere que los números tengan un significado preciso, y no solo que tengan algunas propiedades formales" P. 23.

17. *Cf. Idem*.

18. *Ibid*. P. 25.

19. *Ibid*. P. 32.

20. *Ibid*. P. 33.

21. *Ibid*. P. 35.

22. *Ibid*. P. 36.

23. Russell. *La evolución de mi pensamiento filosófico*. P. 72.

24. *Cf.* Körner, Stephan. *Introducción A la filosofía de la matemática*. Trad. Carlos Gerhard. México: Siglo XXI, 1969.

> "La diferencia entre las dos ramas del logicismo, la nominalista de Russell y la realista de Frege, reside ante toso en sus dos concepciones distintas de la definición. Y si bien la diferencia reviste pequeña

importancia desde el punto de vista de la manipulación matemática, tienen en cambio gran trascendencia filosófica, según lo subrayan tanto Frege como Russell” P.177.

25. Russell. *Los principios de la matemática.* P. 589.

26. *Cf. Ibid*. P. 589.

27. Russell. *Introducción a la filosofía matemática*. P. 47.

28. *Idem*.

29. *Cf*. Russell. *Los principios de la matemática*.

“Toda función proporcional y (x) -así se sostiene- tiene, además de su rango de verdad, un rango de significado, es decir, un rango dentro del cual debe estar x si y (x) ha de ser una proposición, ya sea verdadera o falsa. Este es el primer punto e ña teoría de los tipos; el segundo es que los rasgos de significado forman tipos, es decir, si x pertenece al rango de significado de y (x), entonces hay una clase de objetos, el tipo de x, todos los cuales deben pertenecer también al tango de significado de y (x), aunque y puede variar; y el rango de significado es siempre. O bien de un solo tipo, o una suma de varios tipos completos” P. 594.

30. Russell, Bertrand. *Lógica y conocimiento.* Trad. Javier Muguerza. Madrid: Taurus Ediciones, 1966. P. 102.

31. *Ibid*. P. 102-103.

32. Bourbaki, Nicolás. *Elementos de historia de las matemáticas.* Trad. Jesús Hernández. Madrid: Alianza Editorial, 1976. P. 55-56.

33. *Cf. Ibid*. P. 52.

34. Carnap. Rudolf. “*The logicist foundations of mathematics*”. en: Putnam Hilary; benacerraf, Paul. Op. Cit. P. 35.

35. Ladrière, Jean. *Limitaciones internas de los formalismos*. Trad. José Blasco. Madrid: Editorial Tecnos, 1969. P. 80.

36. *Cf*. Russell. *Lógica y conocimiento*.

“No admitiré, por consiguiente, de cuanto pudiera parecer que se halla envuelto en la admisión de las clases por parte del sentido común, nada que no se esto: que toda función proposicional es equivalente, para todos sus valores, a alguna función predicativa” P. 112.

37. *Ibid*. P. 112-113. La cita completa puede ser ilustrativa:

> "En esta suposición parece resumirse la esencia de la hipótesis usual acerca de las clases; en cualquier caso, retiene de las mismas todo cuanto pudiera sernos de alguna utilidad, mas lo bastante poco como para evitar las contradicciones que podrían derivarse de una aceptación de las clases menos pródiga en reservas que la nuestra. Llamaremos a dicha suposición axioma de las clases o axioma de reductibilidad".

38. *Ibid*. P. 110-111.

39. Russell. *Introducción a la filosofia-matematica*. P. 266.

40. *Idem*.

41. *Ibid*. P. 267.

42. *Cf. Idem*.

43. Díaz-Estevez, Emilio. *El teorema de Gödel.* Pamplona: Ediciones Universidad de Navarra, S.A., 1975. P. 88-89.

44. Russell. *Introducción a la filosofia-matematica*. P. 187.

45. *Ibid*. P. 186.

46. Kline, Morris. *Mathematics. The loss of certainty*. New York: Oxford University Press, 1980. P. 210.

47. *Cf. Idem*.

48. Russell. *Introducción a la filosofia-matematica*. P. 187.

49. *Cf. Ibid*.

> "… mientras nos conformemos con la aritmética de los números enteros finitos, y no introduzcamos ni los números enteros infinitos, ni las clases infinitas, ni las sucesiones de enteros o el conjunto de los racionales (razones), será posible obtener todos los resultados deseados sin el axioma del infinito. Es decir, que podemos tratar la adición, la multiplicación y potencialización de los números enteros finitos y de los racionales, pero no podemos hacerlo con los enteros infinitos o con los irracionales. De este modo la teoría del transfinito y la de los números reales fallarían" P. 189.

50. Kneale, William y Martha. *El desarrollo de la lógica.* Trad. Javier Muguerza. Madrid: Editorial Tecnos, 1972. P. 622.

51. Russell. *Introducción a la filosofia-matematica*. P. 253.

52. Gödel, Kurt. *Obras completas*. Trad. Jesús Mosterín. Madrid: Alianza Editorial, 1981. P. 303.

53. *Ibid*. P. 304.

54. *Idem*.

55. *Ibid*. P. 305.

56. *Ibid*. P. 306.

57. *Ibid*. P. 308.

58. Barker. *Op. Cit.* P. 124.

59. *Cf.* Black, Max. *The nature of mathematics*. London: Routledge ú Kegan Paul Ltd. 1950. En donde se esclarece la noción de símbolo incompleto; dice tratarse de:

> "... uno cuya definición consiste de una regla para transformar cualquier expresión en la que aparece, en una expresión conteniendo solamente símbolos completos, siendo dependiente la forma en la cual esto se efectúa del contexto del símbolo incompleto" P. 77.

60. *Ibid*. P. 80.

61. *Ibid*. P. 83.

62. Quine, W. O. *Filosofía de la lógica*. Trad. Manuel Sacristán. Madrid: Alianza Editorial, 1977. P. 120.

63. *Ibid*. P. 121.

64. *Cf. Idem*

65. *Ibid*. P. 118.

66. Cf. Quine, W. O. Los métodos de la lógica. Trad. Manuel Sacristán. Barcelona: Editorial Ariel, 1969. P. 239.

67. *Cf*. Kneale. *Op. Cit.*

> "... parece imposible formular la teoría sin violar de algún modo sus propios requisitos, dado que términos como "función", "entidad" y "tipo" han de permanecer en ella invariablemente libres de restricciones en cuanto a su tipo. Cuando decimos, por ejemplo, que ninguna función puede ser significativamente aseverada de todas las entidades sin distinción de tipo, nuestro propio enunciado envolverá la ilimitada generalidad cuya

imposibilidad proclama”, pp. 622-623.

68. *Cf*. *Ibid*.

> “... la teoría de tipos introduce considerables complicaciones en nuestra presentación de la lógica, complicaciones que no serían menores en relación con lo que hayamos de decir acerca de los números naturales, enteros con cualificación de signo, racionales; reales enteros o complejos, sino que habría que distinguir entre números naturales aplicables a conjuntos de tipos diferentes”, p. 621.

69. *Cf*. Kline. Op.Cit.:

> “El extremo superior está definido como el más pequeño de todas las cotas superiores. Entonces el extremo superior está definido en términos de un conjunto de número reales. Debe entonces ser de un tipo superior que el de los número reales y entonces no es él mismo un número real”, p. 222.

70. *Cf*. *Ibid*. P. 223.
71. Barker. *Op. Cit.* P. 136.
72. Körner. *Op. Cit.* P. 57.
73. Putnam, Hilary: Benacerraf, Paul. *Op. Cit.* P. 16.
74. *Idem*.
75. *Cf*. *Ibid*. P. 17.
76. *Cf*. *Ibid*.

> “La presencia de oraciones (como la hipótesis del continuo) de acuerdo a la cual no existe un procedimiento de verificación o refutación (excepto la búsqueda por una prueba lo cual no nos va a hacer certeramente ningún bien, si ‘prueba’ significa ‘prueba en la teoría de conjuntos de nuestros días’), es, tal vez, una razón para por lo menos sospechar no claridad en nuestra noción de un ‘conjunto’ ”, p. 16.

77. *Cf*. Körner. Op. Cit.:

> “Si examinamos el sistema logicista de Quine, por ejemplo, no encontramos asunto alguno, y mucho menos demostración alguna, en el sentido de que las premisas del sistema lógico-matemático posean una característica general L, la cual, como resultado de deducciones y

definiciones, aunque no prima facie, se observa estar poseída por las proposiciones de la aritmética pura. Las premisas no hacen más que enumerarse. Son miembros de una lista y no poseedoras obvias de la característica general L. El sistema de Quine intenta realizar y podemos suponer que realiza, una tarea matemática, pero no apoya en absoluto la tesis logicista de que la matemática pura se deje reducir a la lógica, toda vez que no pretende haber explicado la noción de una proposición lógica.", p. 66.

78. *Cf*. Quine. *Desde un punto de vista lógico*. P. 10.

79. *Cf*. Körner. *Op. Cit.* P. 68.

80. *Cf*. *Ibid*. P. 71-72 ss.

81. *Cf*. *Ibid*. P. 73.

82. *Ibid*. P. 73.

83. *Idem*.

84. Rusell. *Introducción a la Filosofía Matemática*. P. 277.

85. *Ibid*. P. 279.

86. *Ibid*. P. 281.

87. *Idem*.

88. *Idem*.

89. *Cf*. *Ibid*. P. 283.

90. *Ibid*. P. 284.

91. Gödel. *Op. Cit.* P. 299.

92. *Idem*.

93. *Cf*. *Ibid*.:

"Compara los axiomas de la lógica y las matemáticas con las leyes de la naturaleza, y la evidencia lógica con la percepción sensible, de modo que los axiomas no tienen que ser necesariamente evidentes por sí mismas, sino que su justificación estriba (como en la física) en el hecho de que permiten que estas "percepciones sensibles" sean deducidas; y esto no excluiría, por supuesto, que tuviesen también una suerte de plausibilidad intrínseca similar a la que se da en la física. Creo (en el supuesto de que "evidencia" se entienda de un modo suficientemente estricto) este punto de vista ha sido ampliamente justificado por posteriores desarrollos y se puede esperar que aún lo sea más en el futuro", p. 300.

94. *Cf*. Largeault, Jean. *Logique et philosophie chez Frege*, Paris: Editions Nauwelaerts, 1970. P. 69.

95. *Ibid*. P. 65.

96. *Ibid*. P. 68.

NOTAS DEL CAPÍTULO IV

* Basado en el artículo "Las Ontologías de Gottlob Frege", Rev. de Filosofía de la UCR, XXV(62), 195-200, 1987, San José, Costa Rica.

** Traduzco "gedanke" como pensamiento.

*** Traduzco realm por campo

1. *Cf*. Eldridge, Richard "Frege's realist theory of knowledge. The construction of an ideal language and the transformation of the subject", *Review of methaphysics,* March, 1982. Vol. XXXV, No.3.

2. *Cf*. Currie, Gregory. "Frege on thoughts", *Mind*, April 1980. Vol. 89, No. 354; o "The origin of frege's realism", *Inquiry*, December 1981. Vol. 24, No. 41; o "Frege's realism", *Inquiry,* Summer 1978, Vol. 21, No. 2.

3. *Cf*. Sluga, Hans D. "Frege's alleged realism", *Inquiry*, Summer 1977, BCVd. 20, No. 2-3.

4. Mosterín, Jesús en la Introducción de Frege, Gottlob. *Estudios sobre semántica.* Trad. Ulises Moulines. Barcelona: Editorial Ariel, p. 10.

5. Frege. *Estudios sobre semántica* p. 32.

6. *Ibid*. p. 34

7. *Ibid*. p. 11.

8. *Ibid*. p. 22.

9. *Ibid*. p. 259.

10. Passmore, John. *A hundred years of philosophy*. Great Britain: Penguin, 1972. p. 150.

11. Frege. *Estudios sobre semántica*. p. 150.

12. Godel, Kurt. *Obras completas*. Trad. Jesús Mosterín. Madrid: Alianza Editorial, 1981. p. 301.

13. *Cf*. Passmore. Ob. cit. p. 154.

14. *Idem*.

15. Birchall, B.C. "Frege's objects and concept: revolutionary or reactionary", *Philosophy and phenomenological research*, June 1982, Vol. XLII, No. 4, p. 356.

16. *Cf*. *Idem*

17. *Cf*. *Ibid*. p. 357.

18. Klemke, E.D. "Frege's ontology: realism", en Klemke, E.D. *Essays on Frege* (Comp.). Illinois: University of Illions Press, 1968. p. 160

19. Wells, Rulon. "Frege's ontology", en Klemke, E.D.Ob.cit. pp. 8,9.

20. *Cf*. *Ibid*. p. 28

21. *Cf*. *Ibid*. p. 29

22. Frege, Gotlob. "*The thought: "A logical inquiry"* en el libro: Strawson, P.F. (Edit.). *Philosophical Logic*. Oxford: Oxford University Press, 1967, p. 20.

23. *Idem*.

24. *Idem*.

25. *Idem*. p. 26.

26. *Ibid*. p. 27

27. *Idem*.

28. *Ibid*. p. 29

29. *Idem*.

30. *Ibid*. p. 27

31. *Ibid*. p. 28

32. *Ibid*. p. 38

33. *Ibid*. p. 35

34. *Idem*.

35. *Cf*. Wells, Rulon, en Klemke, E.D.Ob.cit. p. 30.

36. Klemke (Edit). Ob.cit. pp. 158-159

37. *Ibid*. p. 161

38. *Ibid*. p. 163

39. *Cf*. Eldridge. Ob. cit. pp. 500, 501.

40. *Ibid*. p. 503.

41. *Cf*. *Ibid*. pp. 501 y 504.

42. *Cf*. *Ibid*. pp. 501 y siguientes.

43. *Cf*. Currie, “Frege on thoughts”. p. 244.

44. *Cf*. *Ibid*. pp 247, 248.

NOTAS DEL CAPÍTULO V

* Versión ligeramente modificada de “Epistemología y Ontología en la Filosofía de las matemáticas de Frege”, Rev. Venezolana de Filosofía, N.21, 80-106, 1986, Caracas, Venezuela.

1. *Cf*. Eldridge, Richard, “Frege's realist theory of knowledge. The construction of an ideal language and the transformation of the subjet”, *Review of methaphysics*, March 1982, Vol. XXXV, No. 3, Issue No. 139. p. 506.

2. Frege, Gottlob. *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos.* Trad. Hugo Padilla. México: UNAM, 1972. p. 209.

3. *Ibid*, p. 194.

4. Eldridge. *Op. Cit*. p. 507.

5. *Ibid.* p. 508.

6. Currie, Gregory. “Frege on thoughts”, *Mind,* April 1980. Vol. LXXXIX. No. 354. p. 245.

7. *Cf*. Dummett, Michael. “Frege as a realist”, *Inquiry,* Winter 1976, Vol. 14, No. 4.

8. *Cf*. Sluga, Hans D. “Frege's alleged realism”, *Inquiry*, Summer 1977, Vol. 20, No. 2-3. p. 227.

9. *Cf*. *Ibid.* p. 229.

10. *Cf*. *Idem.*

11. *Cf. Ibid.* p. 230.

12. *Cf. Ibid.* p. 231.

13. *Cf. Ibid.* p. 235.

14. *Ibid.* p. 233.

15. *Ibid.* p. 235.

16. *Cf. Idem.*

17. *Ibid.* p. 236.

18. *Idem.*

19. *Idem.*

20. *Cf.* Currie, Gregory. "Frege's realism", *Inquiry*, Summer 1978, Vol. 21, No. 2 p. 220.

21. Dummett, *Op. Cit*. p. 457.

22. Currie. "Frege on thoughts", p. 234.

23. Currie, Gregory. "*The origin of Frege's realism", Inquiry*, December 1981, Vol. 24, No. 4 p. 448.

24. *Cf. Ibid.* pp 448 y siguientes.

25. *Cf. Ibid.* p.p 449.

26. *Cf. Idem.*

27. *Cf. Idem.*

28. *Ibid* p. 450.

29. *Ibid* p. 451.

30. Frege, *Conceptografía*. P. 140.

31. *Ibid.* pp. 141-142.

32. Kitcher, Philip. "Frege's epistemology"; *Philosophical review*, April 1979, Vol. LXXXVIII, No. 2. p. 248.

33. Frege. *Conceptografía*. P. 193.

34. *Ibid.* p. 130.

35. *Cf. Ibid.* p. 117.

36. *Cf.* Kitcher. *Op. Cit*. p. 252, 253

37. Frege. *Conceptografía*. P. 192.

38. *Ibid.* p. 192.

39. *Ibid.* p. 193.

40. *Cf*. Kitcher. Op.cit. p. 248.

41. *Cf*. *Ibid.* p. 245.

42. *Cf*. Frege, *Conceptografía*. P. 127.

43. *Ibid.* p. 130.

NOTAS DEL CAPÍTULO VI

1. Russell, Bertrand. *La evolución de mi pensamiento filosófico*. Trad. Juan Novella Domingo. Madrid: Aguilar, 1964. p.9.

2. Russell, Bertrand. "The study of mathematics" *En mysticism and logic*. New York: W.W. Norton ú co. Inc., 1929, p.71.

3. *Cf*. Russell, Bertrand: "*Los metafísicos y las matemáticas*", en Newman, James R. *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Trad. varios. Barcelona: Grijalbo, 9, p.369. Este artículo es, tal vez, el lugar donde mejor expresa Russell ese platonismo y esa ingenuidad en la certeza absoluta de las matemáticas.

4. *Cf*. *Ibid.* p.341.

5. *Cf*. Russell, Bertrand. *An essay on the foundations of geometry*. New York: Dover Publications, 1956. cap. III y IV.

6. *Ibid.* p.2

7. Russell, Bertrand. *La evolución de mi pensamiento filosófico*. p.9.

8. Russell, Bertrand. *Los principios de la matemática*. Trad. Juan Carlos Grimberg. Madrid: Espasa-Calpe, 1967. p.29.

9. *Ibid.* p.29.

10. Russell, Bertrand. *Introducción a la filosofía matemática*. Trad. Juan B. Molinari. Buenos Aires: Losada, 1945. p.205.

11. *Idem*.

12.*Ibid.* pp. 205, 206.

13.

13. *Cf.* Russell, Bertrand. *Los problemas de la filosofía.* Trad. Joaquín Xirau. Barcelona: Editorial Labor, 1928. P. 102.

14. *Ibid.* p. 103.

15. *Ibid.* pp. 103, 104.

16. *Ibid.* p. 103.

17. Russell, Bertrand. *La evolución de mi pensamiento filosófico*. P.77.

18. *Idem*.

19. *Cf.* Russell. *Los principios de la matemática*.

> "He aceptado de él la naturaleza no existencial de las proposiciones (excepto de aquellas que expresan justamente existencia) y su independencia de cualquier mente consciente; y también el pluralismo que considera al mundo, tanto el de lo existente como el de las entidades, como compuesto de un número infinito de entidades independientes entre sí, con relaciones últimas y no reducibles a adjetivos de sus términos o del todo que ellas componen", p.22.

20. Russell, Bertrand. *La evolución de mi pensamiento filosófico*. p.10.

21. *Cf.* Russell, Bertrand. *Los problemas de la filosofía*. Pp.99-100.

22. *Cf. Ibid.* :

> "La diferencia entre una proposición general *a priori* y una generalización empírica no proviene del sentido de la proposición, sino del género de prueba en que se fundan", p. 126.

23. Russell, Bertrand. *La evolución de mi pensamiento filosófico*. P.11.

24. *Cf. Ibid.* p.240.

25. Russell, Bertrand. *Los principios de la matemática*. p.12.

26. Russell. *Lógica y conocimiento*. Trad. Javier Murgueza. Madrid: Taurus Ediciones, 1966. p. 55.

27. *Idem*.

28. *Cf.* Russell, Bertrand. *Los problemas de la filosofía*. p.111.

29. *Cf. Ibid.* p.109.

30. *Cf. Ibid.* :

> "... un universal será algo que puede ser compartido por varios particulares y tiene los caracteres que, como hemos visto, distinguen la justicia y la blancura de los actos justos y de las cosas blancas", p.110.

31. *Cf. Ibid.* p.115.

32. *Ibid.* p. 115.

33. *Cf. Ibid.* p. 116.

34. *Cf. Ibid.* p. 117.

35. *Cf. Ibid.*:

> "...donde el "esencia" se opone a "existencia" como algo intemporal. Por consiguiente, el mundo de los universales puede ser definido como el mundo de la esencia. El mundo de la esencia es **inalterable, rígido, exacto, delicioso para el matemático, el lógico, el constructor de sistemas metafísicos, y todos los que aman la perfección más que la vida**. El mundo de la existencia es fugaz, vago, **sin límites** precisos, sin un plan o una ordenación clara, pero contiene todos los pensamientos y los sentimientos, todos los datos de los sentidos, y todos los objetos físicos, todo lo puede hacer un bien o un mal, todo lo que representa una diferencia para el valor de la vida y del mundo.
>
> "(....) la verdad es que ambos tienen el mismo derecho a nuestra parcial atención, ambos son reales y **ambos son importantes para el metafísico**".(Negrita añadida), p.118.

36. *Ibid.* p.123.

37. *Ibid.* p.125.

38. *Ibid.* p.105

39. *Idem*.

40. *Cf. Ibid.* p.140.

41. *Ibid.* p.152

42. *Ibid.* p.145

43. *Ibid.* p.173

44. *Ibid.* p.174

45. *Cf*. Russell. *Los principios de la matemática.*

> "La definición lógica de los números se relaciona con el mundo de los objetos contables que llega a nuestro entendimiento; la teoría formalista no". p.8.

46. Russell, *La evolución de mi pensamiento filosófico*. p.238.

47. Russell, Bertrand. *Los principios de la matemática*. p.13.

48. Russell, Bertrand. *Introducción a la filosofía matemática*. p.384.

49. *Ibid.* p.254.

50. *Ibid.* p.255.

51. *Cf. Idem*.

52. *Cf. Ibid.* p.196

53. *Cf*. Bernays, Paul. "On platonism in mathematics", en Putnam, Hilary; Benacerraf, Paul (Edit). *Philosophy of mathematics. Selected readings*. New Jersey: Prentice-Hall, 1964. p.276 y siguientes. En esta conferencia Bernays tenía esperanza en el programa hilbertiano.

54. Gödel, Kurt. *Obras completas*. Trad. Jesús Mosterín. Madrid: Alianza Editorial, 1981.p.314.

55. *Ibid.* p.325

56. *Idem*.

57. *Cf. Idem*.

58. *Idem*.

59. *Ibid.* pp. 325, 326.

60. *Cf. Ibid:*

> "Este es el camino que ha tomado el desarrollo actual de la lógica matemática y en el que el mismo Russell se ha visto forzado a entrar en partes más constructivas de su obra. Los mayores intentos realizados en esta dirección (algunos de los cuales han sido citados en este ensayo) son la teoría simple de los tipos (que es el sistema de la primera edición de *Principia* interpretado apropiadamente) y la teoría axiomática de conjuntos, y ambos han tenido éxito, al menos hasta el punto de que

permiten la derivación de las matemáticas modernas y evitan al mismo tiempo todas las paradojas conocidas". p.326.

61. Cf. *Ibid:*

> "...pueden concebirse las clases y los conceptos como **objetos reales,** a saber, las clases como "pluralidades de cosas" o como estructuras que consistan en una pluralidad de cosas, y los conceptos como las propiedades y las relaciones de las cosas que **existen independientemente** de nuestras definiciones y construcciones" (Negrita añadida).Pp.309-310.

62. *Cf. Ibid.* p.303.

63. *Cf. Ibid.* p.308.

64. *Ibid.* p.310.

65. *Cf.* Geach, Peter. "Frege's grundlagen" en: Klemke, E.D. (Edit). *Essays on Frege*. Illinois: University of Illinois Press, 1968. p.473.

66. Russell, Bertrand. *Introducción a la filosofía matemática*. p.283.

67. *Idem*.

68. *Idem*.

69. *Idem*.

70. Ayer, A.J. *Lenguaje, verdad y lógica*. Trad. Marcial Suárez. Barcelona: Ediciones Martínez Roca, S.A., 1971. p.91.

71. Russell. *La evolución de mi pensamiento filosófico*. p.110.

72. Russell, Bertrand. *Escritos básicos* 1903-1059. (comp. Robert Egner y Lester Denonn). Trad. varios. México: Aguilar 1969. p.445.

73. Ayer, A.J. *Lenguaje, verdad y lógica.* Trad. Marcial Suárez. p.84.

74. Barker, Stephen F. *Filosofía de las matemáticas*. Trad. Carlos Moreno Cañadas. México: UTEHA, 1965. p.126

75. *Cf.* Bernays. Op. Cit. p.277

76. *Cf. Ibid.* pp. 276, 277 y siguientes.

77. *Cf. Idem*:

> "El primer paso es el de reemplazar por conceptos constructivos los conceptos de un conjunto, una sucesión o una función, que yo he llamado cuasicombinatoria. La idea de un infinito de determinaciones infinitas es rechazado. Una enfatiza que una sucesión infinita o una fracción decimal puede estar dada sólo por una ley aritmética, y uno considera el continuo como un conjunto de elementos definido por esas leyes"

78. *Idem*

79. *Cf.* Ibid: El segundo paso consiste en:

> "...renunciar a la idea de totalidad de enteros. Este punto de vista fue defendido primeramente por Krönecker y luego desarrollado sistemáticamente por Brouwer". p. 278.

80. *Cf. Ibid.* p.284.

81. *Cf. Ibid.* pp. 284, 285.

82. Putnam, Hilary; Benacerraf, Paul. *Op. Cit*. p.17.

83. Carnap. Rudolf. "*The logicist foundations of mathematics*", en: Putnam Hilary; Benacerraf, Paul. *Op. Cit*. p.41.

84. *Idem*.

85. *Idem*.

86. Curry, Haskell B. *Outlines of a formalist philosophy of mathematics.* Amsterdam: North-Holland, 1970. p. 56.

87. Russell, Bertrand. *Escritos básicos* 1903-1959. p.445.

88. Russell, Bertrand. *Introducción a la filosofía matemática*. p.87.

NOTAS DEL CAPÍTULO VII

* Basado en el artículo "El factor «paradojas» y el factor «Gödel» en los Fundamentos de la Matemática". Rev. de Ciencia y Tecnología de la UCR, Vol. IX(1-2), 97-108, 1985, San José, Costa Rica.

1. *Cf.* Black, Max. *The nature of mathematics*. London: Routledge and Kegan Paul Ltd, 1950. p. 4.

2. *Cf*. Barker, Stephen F. *Filosofía de las matemáticas*. Trad. Carlos Moreno Cañadas. México: UTEHA, 1965. pp. 107 ss.

3. Quine, Willard van Orman. *Desde un punto de vista lógico*. Trad. Manuel Sacristán. Barcelona: Ediciones Ariel, 1962. p. 40.

4. *Ibid*. p. 42

5. Ladrière, Jean. *Limitaciones internas de los formalismos*. Trad. José Blasco. Madrid: Alianza Editorial, 1981. p. 47.

6. *Ibid*. p. 44.

7. Hilbert, David, en: Körner, Stephan. *Introducción a la filosofía de la matemática*. Trad. Carlos Gerhard. México: Siglo XXI, 1969. p. 88.

8. Hilbert, David, en: Ladrière. *Op. Cit.* p. 27.

9. Körner. *Op. Cit.* p. 88.

10. Curry, Haskell B. *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*. Amsterdam: North-Holland, 1970. p. 56.

11. Ladrière. *Op. Cit.* pp. 49.

12. Körner. *Op. Cit.* p. 105.

13. *Ibid*. p. 106.

14. Weyl, Hermann. *Philosophy of mathematics and natural science*. Princeton: Princeton University Press, 1949. p. 61.

15. Curry. *Op. Cit.* p. 58.

16. *Ibid*. p. 62.

17. *Ibid*. p. 5.

18. Heyting, A. *Intuicionism. An introduction*. Amsterdam: North-Holland, 1956. pp. 8,9.

19. *Ibid*. p. 1.

20. *Ibid*. p. 4.

21. *Ibid*. p. 5.

22. *Ibid*. p. 6.

23. *Ibid*. p. 9.

24. *Ibid*. p. 13.

25. *Cf*. Weyl. *Op. Cit.* p. 63.

26. Heyting. *Op. Cit.* p. 11

27. Kline, Morris. *Mathematics. The loss of certainty*. New-York: Oxford University Press, 1980. p. 240.

28. *Ibid*. p. 241.

29. *Cf*. Körner. *Op. Cit.* p. 178.

NOTAS DEL CAPÍTULO VIII

1. Ladrière, Jean. *Limitaciones internas de los formalismos*. Trad. José Blasco. Madrid: Alianza Editorial, 1981. p.47.

2. *Ibid*. p. 55.

3. Hilbert, David. "On the infinite", en Benacerraf, Paul-Putnam, Hilary (Edit.) *Philosophy of mathematics*. Selected readings. New Jersey: Prentice Hall, 1964. p. 141.

4. *Ibid*. p. 149.

5. *Ibid*. p. 150.

6. Gödel, Kurt. *Obras completas*. Trad. Jesús Mosterrín. Madrid: Alianza Editorial, 1981. p. 476.

7. *Ibid*. p. 100.

8. Ladrière. *Op. Cit.* p. 30.

9. Lakatos, Imre. *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Trad. Diego Ribes Nicolás. Madrid: Alianza Editorial, 1981. Pp. 40-41.

BIBLIOGRAFÍA

Aristóteles. *Obras.* Trad. Francisco de P. Samaranch. Madrid: Aguilar, 1964.

Aristóteles. *Tratados de lógica*. Trad. Francisco Larroyo. México: Editorial Porrúa, 1979.

Ayer, A.J. *Lenguaje, verdad y lógica*. Trad. Marcial Suárez. Barcelona: Ediciones Martínez Roca, S.A., 1971.

Ayer, A.J. *Russell*. London Fontana/Collins, 1972.

Babini, José. *Historia sucinta de la matemática*. Madrid: Espasa-Calpe, 1969.

Barker, Stephen F. *Filosofía de las matemáticas.* Trad. Carlos Moreno Canadas. Mexico: UTEHA, 1965.

Bell, E.T. *Historia de las matemáticas.* Trad. R. Ortiz. Mexico: Fondo de Cultura Económica, 1949.

Benacerraf, Paul; PUTNAM, Hillary (Edit). *Philosophy of mathematics. Selected Readings*. New Jersey: Prentice-Hall, 1964.

Beth, E.W. *Les fondements logiques des mathématiques.* Paris: Louvain. 1964.

Beth, Evert W. *Mathematical thought*. Dordresht-Holland: D. Reidel, 1965.

Birchall, B.C. "Frege's objects and concepts: revolutionary or reactionary", *Philosophy and phenomenological research,* June 1982, Vol. XLII, Nº 4.

Black, Max. *The nature of mathematics.* London: Routledge & Kegan Paul. Ltd. 1950.

Boole, George. *Análisis matemático de la lógica*. Trad. Armando Asti-Vera. Buenos Aires: Universidad Nacional de la Plata, 1960

Boole, George. *An investigation of the lows of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. New York: Dover Publications Inc. 1958.

Bourbaki, Nicolás. *Elementos de historia de las matemáticas.* Trad. Jesús Hernández. Madrid: Alianza Editorial, 1976.

Boyer, Carl B. *A history of mathematics*. New York: John Wiley & Sons Inc., 1968.

Brody, Boruch A. CAPALDI, Nicholas (Edit). *Science: Men, method, goals. A reader.* New York: W.A. Benjamín, Inc. 1968.

Brunschvicg, Leon. *Les étapes de la philosophie mathématiques.* Paris: A. Blanchard, 1981.

Buchdahl, Gerd. *Metaphysics and the philosophy of science.* Cambridge-Massachussetts: The Mit Press, 1969.

Cajori, Florian. *A history of mathematics.* New York: The Mac Hillan Co. 1961.

Camacho, Luis. *Introducción a la lógica.* Cartago: Editorial Tecnológica de Costa Rica, 1983.

Cassirer, Ernst. *El problema del conocimiento.* Trad. W. Roces, México: Fondo de Cultura Económica, 1965.

Copleston, Frederids. *A history of philosophy*. (Vol.1) New York: Image Books, 1962.

Currie, Gregory. "Frege on thoughts"*, Mind*, April 1980, Vol. LXXXIX, Nº. 354.

Currie, Gregory. "Frege's realism"*, Inquiry*, Summer 1978, Vol. 21, Nº. 2.

Currie, Gregory. "The origin of Frege's realism"*, Inquiry*, December 1981, Vol. 24, Nº. 4.

Curry, Haskell B. *Outlines of a formalist philosophy of mathematics.* Amsterdam: North-Holland, 1970.

Desanti, Jean Toussaint. *La philosophie silencieuse.* Paris: Editions du Seuil, 1975.

Descartes, Renato. *Discurso del método.* Meditaciones Metafísicas. Trad. Manuel García Morente. Madrid: Espasa-Calpe, 1968.

Diaz-estevez, Emilio. *El teorema de Gödel.* Pamplona: Ediciones Universidad de Navarra, S.A., 1975.

Dummett, Michael. "Frege as a realist"*, Inquiry*, Winter 1976, Vol. 19, Nº. 4.

Eldridge, Richard. "Frege's realist theory of knowledge. The construction of an ideal language and the transformation of the subject"*, Review of metaphysics,* March 1982, Vol. XXXV Nº. 139.

Feyerabend, Paul K. *Contra el método.* Trad. Francisco Hernán. Barcelona: Editorial Ariel, 1974.

Frege, Gottlob. *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos.* Trad. Hugo Padilla. México: UNAM, 1972.

Frege, Gottlob. *Estudios sobre semántica.* Trad. Ulises Moulines. Barcelona: Editorial Ariel.

Geach, Peter; BLACK, Max (Editors and translators) *Translations from the philosophical writings of Gottlob Frege.* Oxford: Blackwell, 1952.

Gödel, Kurt. *Obras completas.* Trad. Jesús Mosterín. Madrid: Alianza Editorial, 1981.

Goldstein, R.L. *Essays in the philosophy of mathematics*. Leicester: Leicester University Press, 1965.

Heyting, A. *Intuitionism. An introduction.* Amsterdam: North-Holland, 1956.

Kant, Manuel. *Crítica de la razón pura.* Trad. José del Perojo. Buenos Aires: Losada, 1973.

Kant, Manuel. *Prolegómenos.* Trad. Julián Besteiro. Buenos Aires: Aguilar Argentina, S.A., 1971.

Kitcher, Philip. "Frege's epistemology"*, Philosophical review,* April 1979, Vol LXXXVIII, Nº. 2.

Klemke, E.D. (Edit). *Essay on Frege.* Illinois: University of Illinois Press, 1968.

Kline, Morris. *Mathematics in Western Culture.* New York: Oxford University Press, 1966.

Kline, Morris. *Mathematics. The loss of certainty.* New York: Oxford University Press, 1980.

Kneale, William y Martha. *El desarrollo de la lógica.* Trad. Javier Muguerza. Madrid: Editorial Tecnos, 1972.

Körner, Stephan. *Introducción a la filosofía de la matemática.* Trad. Carlos Gerhard. México Siglo XXI, 1969.

Körner, Stephan. *La matemática Gödeliana y sus implicaciones filosóficas.* México: Publicaciones de la UNAM, 1972.

Ladrière, Jean. *Limitaciones internas de los formalismos.* Trad. José Blasco. Madrid: Alianza Editorial, 1969.

Lakatos, Imre. *Matemáticas ciencia y epistemología.* Trad. Diego Ribes Nicolás. Madrid: Alianza Editorial, 1981.

Largeault, Jean. *Logique et philosophie chez Frege.* Paris: Editions Nauwelaerts, 1970.

Leibniz, G.W. *Sistema nuevo de la naturaleza*. Trad. Enrique Pareja. Buenos Aires: Aguilar, 1963.

Le Lionnais, F. (Comp*). Las grandes corrientes del pensamiento matemático.* Trad. Néstor Míguez. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1965.

Malherbe, J.E. *Epistémologies anglo-saxonnes.* Namur: Presses Universitaieees de Namur, 1981.

Mouloud, Nöel. *Les structures, la recherche et les savoir*. Paris: Payot, 1968.

Newman, James R. *Sigma. EL mundo de las matemáticas*. Trad. Varios. Barcelona: Grijalbo, 1969.

Novac, George. *Empiricism and its evolution.* New York: Pathfinder Press Inc., 1973.

Pap, Arthur. *Teoría analítica del conocimiento*. Trad. F. Gracia Guillén. Madrid: Editorial Tecnos, 1964.

Passmore, John. *A hundred years of philosophy*. Great Britain: Penguin, 1972.

Piaget, Jean. *Biología y conocimiento*. Trad. Francisco González Aramburu. México: Siglo XXI, 1980.

Piaget, Jean; Beth*,* E.W. *Epistemología matemática y psicología.* Trad. Víctor Sánchez de Zavala. Barcelona: Editorial Crítica, 1980.

Piaget, Jean. *Introducción a la epistemología genética.* Trad. María Teresa Carrasco-Víctor Fischman. Buenos Aires: Editorial Paidós, 1979.

Platon. *Obras completas*. Trad. Varios. Madrid: Aguilar, 1966.

Quine, Willard van Orman. *Desde un punto de vista lógico*. Trad. Manuel Sacristán. Barcelona: Ediciones Ariel, 1962.

Quine, Willard van Orman. *Filosofía de la lógica.* Trad, Manuel Sacristán. Madrid: Alianza, 1977.

Quine, Willard van Orman. *La relatividad ontológica y otros ensayos.* Trad. Manuel Garrido y Joseph Blasco. Madrid: Editorial Tecnos, 1974.

Quine, Willard van Orman. *Los métodos de la lógica*. Trad. Manuel Sacristán. Barcelona: Ediciones Ariel, 1969.

Rouse ball, W.W. *A short account of the history of mathematics*. Bew York: Dover Publications, 1956.

Russell, Bertrand. *An essay on the foundations of geometry*. New York: Dover Publications, 1956.

Russell, Bertrand. *Escritos básicos 1903-1959*. (Comp. Robert Egner y Lester

Denonn). Trad. Varios. México: Aguilar, 1969.

Russell, Bertrand. *Introducción a la filosofía matemática.* Trad. Juan B. Molinari. Buenos Aires: Losada, 1945.

Russell, Bertrand. *La evolución de mi pensamiento filosófico.* Trad. Juan Novella Domingo. Madrid: Aguilar, 1964.

Russell, Bertrand. *Lógica y conocimiento*. Trad. Javier Muguerza. Madrid: Taurus Ediciones, 1966.

Russell, Bertrand. *Los Principios de la matemática*. Trad. Juan Carlos Grimberg. Madrid: Espasa-Calpe, 1967.

Russell, Bertrand. *Los problemas de la filosofía*. Trad. Joaquín Xirau. Barcelona: Editorial Labor, 1928.

Russell, Bertrand. *Mysticism and logic*. New York: W.W. Norton & Co. Inc., 1929.

Schilpp, Paul Arthur (Edit). *The philosophy of Bertrand Russell*. Evanston and Chicago: Northwestern University, 1944.

Sluga, Hans D. "Frege's alleged realism", *Inquiry*, Summer 1977, Vol. 20, Nº 2-3.

Splenger, Osvaldo. *La decadencia de occidente.* Trad. Manuel García Morente. Madrid: Espasa-Calpe, 1958.

Stegmuller, Wolfgang. *Teoría y experiencia.* Trad. C. Ulises Moulines. Barcelona: Editorial Ariel, 1979.

Strawson, P.F. (Edit). *Philosophical logic.* Oxford: Oxford University Press, 1967.

Van Heijenoort, Jean. *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic. 1879-1931.* Cambridge, Massachusets: Harvard University Press, 1967.

Varios. (Comp). *Epistemología y marxismo.* Trad. M. Bofill y E. Petit. Barcelona: Ediciones Martínez Roca, 1974.

Varios. *The historical roots of elementary mathematics.* New Jersey: Prentice-Hall, 1976.

Weyl, Hermann. *Philosophy of mathematics and natural science.* Princeton: Princeton University Press, 1949.

Wilder, Raymond L. *Introduction to the foundations of mathematics*. New York: John Wiley & Sons, 1956.

Williams, Donald Cary. *Principles of empirical realism*. Springfield-Illinois: Charles C. Thomas Publisher, 1966.

Este libro fue distribuido por cortesía de:

Free-eBooks.net

Para obtener tu propio acceso a lecturas y libros electrónicos ilimitados GRATIS hoy mismo, visita:
http://espanol.Free-eBooks.net

Comparte este libro con todos y cada uno de tus amigos de forma automática, mediante la selección de cualquiera de las opciones de abajo:

Para mostrar tu agradecimiento al autor y ayudar a otros para tener agradables experiencias de lectura y encontrar información valiosa, estaremos muy agradecidos si
"publicas un comentario para este libro aquí".

INFORMACIÓN DE LOS DERECHOS DEL AUTOR

Free-eBooks.net respeta la propiedad intelectual de otros. Cuando los propietarios de los derechos de un libro envían su trabajo a Free-eBooks.net, nos están dando permiso para distribuir dicho material. A menos que se indique lo contrario en este libro, este permiso no se transmite a los demás. Por lo tanto, la redistribución de este libro sín el permiso del propietario de los derechos, puede constituir una infracción a las leyes de propiedad intelectual. Si usted cree que su trabajo se ha utilizado de una manera que constituya una violación a los derechos de autor, por favor, siga nuestras Recomendaciones y Procedimiento de Reclamos de Violación a Derechos de Autor como se ve en nuestras Condiciones de Servicio aquí:

http://espanol.free-ebooks.net/tos.html