República de Costa Rica
Ministerio de Educación Pública

PROYECTO DE ÉTICA, ESTÉTICA Y CIUDADANÍA

Programas de Estudio MATEMÁTICAS

I, II y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado



mep
Ministerio de Educación Pública






San José, Costa Rica

Mayo, 2012

REPÚBLICA DE COSTA RICA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN PÚBLICA

REFORMA CURRICULAR EN ÉTICA, ESTÉTICA Y CIUDADANÍA

PROGRAMAS DE ESTUDIO DE MATEMÁTICAS

I y II Ciclo de la Educación Primaria,
III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada

San José, Costa Rica

PROGRAMAS DE ESTUDIO DE MATEMÁTICAS

Contenidos

LOS NUEVOS PROGRAMAS DE MATEMÁTICAS: UNA REFORMA INDISPENSABLE

Leonardo Garnier Rímolo

Históricamente, la enseñanza de las Matemáticas ha sido problemática en nuestro país. A pesar de muchos esfuerzos, es la asignatura en la que tenemos más fracaso escolar a todo nivel: en los cursos, en las pruebas diagnósticas de sexto y noveno, en bachillerato... pero también es donde salimos más débiles en pruebas internacionales como las de SERCE o PISA.

No es un problema solamente costarricense, es – al menos – un problema iberoamericano: nuestros países parecen arrastrar problemas importantes en la enseñanza de las Matemáticas. Son problemas serios, pero no insuperables, como lo han demostrado países que, en períodos relativamente cortos, pasaron de una situación similar a una completamente distinta en la que sus estudiantes logran desarrollar una elevada comprensión, conocimientos y destrezas matemáticas.

Si bien este problema tiene muchas causas, una de ellas – y una muy importante – tiene que ver con la forma en que se enseñan las Matemáticas y con los programas propiamente dichos. Por ello, a lo largo de casi dos años, el MEP ha contado con un equipo dedicado intensamente a proponer una reforma de nuestros programas de matemática.

Contamos con el apoyo externo de un equipo de expertos coordinado por Ángel Ruiz, que venían trabajando en las universidades y desde hace varios años en el tema de la enseñanza de las Matemáticas, que conocían bien las fortalezas y debilidades del sistema costarricense y que habían estudiado diversas experiencias exitosas en el mundo. Este equipo trabajó en conjunto con asesores nacionales y docentes de matemática en preparar una reforma integral de nuestros programas de matemática. Fue un trabajo minucioso, sistemático y muy responsable.

A mediados del año pasado presentamos al Consejo Superior de Educación esta propuesta de reforma integral de los programas de matemática, de primer grado de primaria hasta el último año de secundaria. La propuesta fue acompañada con detallados documentos de apoyo curricular diseñados para favorecer la implementación del currículo en las aulas nacionales.

El Consejo realizó una amplia consulta sobre la propuesta. Se consultó a docentes y se consultó a nuestras universidades públicas, las cuales respondieron con detallados análisis, críticas, sugerencias y recomendaciones. La propuesta, además, se colocó en Internet para que todos los interesados pudieran conocerla y valorarla. En el seno del Consejo Superior de Educación existe, además, representación de las organizaciones magisteriales, que conocieron por tanto la propuesta desde mediados del 2011.

En marzo de 2012 el Consejo recibió del MEP una nueva versión de la propuesta, en la que se incorporan una gran cantidad de las recomendaciones recibidas, se aclaran algunas confusiones y se aportan además otros documentos relativos a la valoración de los programas actuales. Finalmente, cuando los programas estaban a punto de ser aprobados, la APSE manifestó su desacuerdo y pidió más tiempo para presentar sus objeciones. Se les dio ese tiempo, se consideraron y se respondieron sus objeciones – también existe un documento sobre esto – para, finalmente, proceder a aprobar los nuevos programas el lunes 21 de mayo de este año.

Los nuevos programas buscan contribuir significativamente a que Costa Rica supere los problemas que por muchos años han caracterizado – como en otros países – la enseñanza de las Matemáticas. Esto requerirá, por supuesto, un esfuerzo muy importante en capacitación de nuestros docentes, la producción de recursos educativos, el uso de recursos tecnológicos y, posteriormente, la adecuación de los programas universitarios para responder a estos nuevos programas.

¿Cuáles son las principales características de los nuevos programas?

Lo primero, es un cambio de visión, de estilo: los programas quieren contribuir a romper el mito de que las Matemáticas son áridas, feas, imposiblemente difíciles y algo de lo que los estudiantes tienen que sentir miedo. Esta visión de las Matemáticas como “el coco” ha sido tradicional en Costa Rica y en casi todo el mundo, y es uno de los prejuicios que hay que superar para lograr un cambio significativo en nuestra capacidad de enseñar y aprender Matemáticas. Se trata de familiarizar al estudiante con las Matemática, de hacérsela cercana, agradable, emocionante.

Una de las estrategias para esto – como han hecho con éxito otros países – es promover procesos que en lugar de partir de lo abstracto, de la teoría, del teorema, para llegar algún día (si es que llegan) a lo concreto... se hace lo contrario: se enfatiza la participación activa de los estudiantes en la resolución de problemas asociados a su propio entorno, el entorno físico, social, cultural... o problemas que puedan ser fácilmente imaginados por las y los estudiantes. A partir de ese primer acercamiento a lo concreto, lo sensible, a los problemas, se trabaja en su resolución y – algo fundamental – esa construcción es la que lleva a los procesos de abstracción, a los teoremas, a los modelos matemáticos, a la teoría. Lo que se pretende en última instancia es la construcción de capacidades para la manipulación de objetos matemáticos cuya naturaleza es abstracta. La estrategia de los nuevos programas se propone fundamentar pedagógicamente el paso desde lo concreto hacia lo abstracto, y la experiencia mundial muestra que esta puede ser una poderosa fuente para la construcción de aprendizajes en las Matemáticas.

Para lograr esto, la mediación pedagógica es fundamental. Se plantea para ello el uso de varias estrategias que, entre otras, incluyen cinco procesos básicos:

- Razonar y argumentar
- Plantear y resolver problemas
- Conectar, establecer relaciones
- Representar de diversas formas (gráficas, numéricas, simbólicas, tabulares, etc.)
- Comunicar, expresar ideas matemáticas formal y verbalmente

Esto permitirá que nuestros estudiantes puedan realizar operaciones y procesos matemáticos de una mayor complejidad, en lugar de realizar meras operaciones mecánicas. Se trata de desarrollar el rigor y la capacidad matemática para la resolución de problemas, para la aplicación, matematización o modelización de diversas situaciones, así como de lograr mayores niveles analíticos en la justificación y argumentación matemática. Esto no se logra por medio de la “amplitud”, abarrotando los programas de contenidos, sino seleccionando bien cuáles son los contenidos necesarios para lograr “rigor y profundidad” en el manejo de los procesos y el lenguaje matemático.

Para lograr esto, los nuevos programas utilizan cinco ejes:

- La resolución de problemas como estrategia metodológica principal.
- La contextualización activa como un componente pedagógico especial.
- El uso inteligente de tecnologías digitales.
- La potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las Matemáticas.
- El uso de la Historia de las Matemáticas.

A su vez, para lograr una actitud distinta de los estudiantes hacia las matemáticas, desarrollando actitudes y creencias positivas sobre las matemáticas, desarrollando el gusto por las matemáticas, se plantean cinco actitudes a desarrollar:

- Perseverancia.
- Confianza en la utilidad de las Matemáticas.

- Participación activa y colaborativa.
- Autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas.
- Respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas.

Finalmente, en cuanto a los “temas” de los nuevos programas, la propuesta se puede resumir de la siguiente forma:

a. Dar un lugar relevante al desarrollo del sentido numérico, a los cálculos y aproximaciones, y a la utilización de múltiples representaciones en la resolución de problemas.

b. Dar a las medidas un sentido renovador de conexión entre áreas matemáticas, aprovechando la relación con otras asignaturas y el desarrollo de un papel de contextualización a las Matemáticas escolares.

c. La introducción de la *Geometría* con visualización espacial, movimiento de objetos, coordenadas y relación con el Álgebra, con una perspectiva de estímulo al razonamiento y la argumentación y a la comprensión y manipulación dinámica de los objetos geométricos.

d. La introducción temprana y gradual de *Relaciones y Álgebra*, la edificación de un fundamento pedagógico para el aprendizaje de las funciones, una visión integradora de lo funcional y simbólico, y el cultivo de un sentido en el aula que favorezca la modelización de situaciones en diversos contextos.

e. El fortalecimiento de la *Estadística y Probabilidad* en todos los años lectivos, áreas orientadas a la organización de la información en entornos diversos y una preparación para tomar decisiones en situaciones de incertidumbre.

Sabemos que no existe un “programa perfecto” ni de matemáticas ni de ninguna asignatura. La educación – como la vida – solo puede ser entendida como un proceso evolutivo en el que, en cada paso, buscamos mejorar. Para ello aprendemos de nuestra propia historia, de nuestros errores y nuestros aciertos; aprendemos también de otras experiencias, de cómo lo han hecho otros para mejorar (o qué cosas no han funcionado bien en otras partes). Con base en ello, y gracias al trabajo de un equipo de lujo de expertos externos al MEP – pero muy cercanos a los procesos de la enseñanza de las Matemáticas – junto con nuestros propios asesores y docentes de aula, hoy contamos con una propuesta que, sin duda, representa un salto muy importante en la enseñanza de las Matemáticas en Costa Rica. A todas y todos ellos, mi agradecimiento.

INTRODUCCIÓN GENERAL

Las Matemáticas siempre han ocupado un lugar relevante en el conocimiento y la cultura de los pueblos. Junto a otros saberes y prácticas humanas han sido privilegiadas para la definición de modelos de lo real, estructuras del conocimiento y para la propuesta de significados culturales. El vertiginoso progreso de las Ciencias y las tecnologías modernas ha visto una participación más intensa de las Matemáticas, y a la vez ha sido factor poderoso de su avance. Las Matemáticas están presentes en las Ciencias de la Información y la Comunicación, en la Física, la Química, en las tecnologías espaciales, la nanotecnología, la predicción meteorológica y el cálculo de riesgos y beneficios de las entidades financieras. Las Matemáticas son pieza clave tanto de los dispositivos intelectuales para escudriñar el origen del universo y de la vida, así como de la construcción de los artefactos sofisticados que usamos de manera cotidiana. Las Matemáticas, también, han sido un elemento fundamental en la formación de espíritus racionales y críticos, baluarte de la argumentación lógica y la justificación de los razonamientos. El rigor mental y la agudeza intelectual han sido destrezas cultivadas por medio de las Matemáticas.

Ha existido una relación íntima entre las construcciones matemáticas y la enseñanza de éstas, pues de múltiples maneras la naturaleza de las Matemáticas se exhibe, se fundamenta y se incluye en aquellas acciones relacionadas con su enseñanza y aprendizaje. La enseñanza de las Matemáticas sin embargo posee un sentido y características propias independientes de las Matemáticas, que tienen que ver con los propósitos específicos que posee. La Educación Matemática[1] que se brinde en las aulas escolares debe encontrar su significado general en el desarrollo de las capacidades de los individuos para intervenir de una mejor manera en la vida.

La resolución de problemas: enfoque principal del currículo

Este currículo asume como su objetivo principal la búsqueda del fortalecimiento de mayores capacidades cognoscitivas para abordar los retos de una sociedad moderna, donde la información, el conocimiento y la demanda de mayores habilidades y capacidades mentales son invocadas con fuerza. Desarrollar este propósito supone al menos dos cosas: por un lado, que cada estudiante asuma un compromiso con la construcción de sus aprendizajes, y por el otro, que haya una acción docente crucial para generar aprendizajes en las cantidades y calidades que implica el escenario actual. Aprender a plantear y resolver problemas y especialmente usarlos en la organización de las lecciones se adopta como la estrategia central para generar esas capacidades. El desafío intelectual le es consubstancial, un nutriente para una labor de aula inteligente y motivadora.

En este currículo se enfatizará el trabajo con problemas asociados a los entornos reales, físicos, sociales y culturales, o que puedan ser imaginados de esa manera. Se asume que usar este tipo de problemas es una poderosa fuente para la construcción de aprendizajes en las Matemáticas. Al colocarse en contextos reales, el planteo y resolución de problemas conlleva directamente a la identificación, uso y construcción de modelos matemáticos.

La resolución de problemas como estrategia pedagógica se subrayará aquí como sustrato de un estilo de acción de aula. Para el aprendizaje de conocimientos dentro de la lección se propone una introducción de los nuevos tópicos que tome en cuenta cuatro pasos o momentos centrales:

(1) propuesta de un problema,
(2) trabajo estudiantil independiente,
(3) discusión interactiva y comunicativa,
(4) clausura o cierre.

Esta secuencia puede realizarse dentro de una lección o una colección de ellas de acuerdo al tema o al año lectivo. Este estilo se contrapone a aquel que trabaja los tópicos matemáticos en abstracto, ofrece ejemplos y prácticas rutinarias y al final, como apéndice, ejercicios o problemas contextualizados. No se trata de una prescripción a seguirse mecánicamente, pues su diseño y realización depende de las condiciones donde se plantee el aprendizaje.

Usar problemas se propone como una constante en todas las fases de la acción de aula, incluyendo aquella del reforzamiento, movilización y aplicación de los conocimientos aprendidos.

Si bien se promueve el uso de problemas en contextos reales, los abstractos se consideran muy importantes. Y más aún: lo que se pretende en última instancia es la construcción de capacidades para la manipulación de los objetos matemáticos cuya naturaleza es abstracta. La estrategia asumida se propone fundamentar pedagógicamente el paso desde lo concreto a lo abstracto.

Conceptos básicos: habilidades, competencia y procesos

La organización del programa de estudios se realiza por medio de cinco áreas matemáticas: *Números*, *Geometría*, *Medidas*, *Relaciones y Álgebra* y *Estadística y Probabilidad*.

Los conocimientos matemáticos son la base de estos programas. No obstante se adopta un enfoque basado no solamente en contenidos matemáticos. Lo que se pretende es el desarrollo de mayores capacidades del ciudadano para enfrentarse a los retos del mundo del que forma parte. El desarrollo vertiginoso del conocimiento y su ritmo de cambio acelerado conducen a una reformulación de programas, materiales, textos, recursos materiales y humanos que transforman con fuerza la acción docente y la organización de la lección. Se impone una lógica del saber en contexto, del aprender a aprender. Las capacidades se asumen como centrales. En primer lugar aquellas de corto plazo y asociadas a las áreas matemáticas que se seleccionaron; estas capacidades se denominan aquí *habilidades específicas*. En segundo lugar la generalización de estas habilidades específicas a desarrollar en un ciclo educativo: *habilidades generales*. En tercer lugar y solamente como una perspectiva general la *competencia matemática*. Para realizar esos propósitos dentro del plan de estudios se deben modular la cantidad y calidad de los contenidos educativos en función del progreso de esas capacidades.

La competencia matemática se interpreta aquí como una capacidad de usar las matemáticas para entender y actuar sobre diversos contextos reales, subraya una relación de esta disciplina con los entornos físicos y socioculturales y también brinda un lugar privilegiado al planteamiento y resolución de problemas. En esta visión la competencia matemática está definida por un poderoso sentido práctico. Adoptar el significado de la competencia matemática de esta manera posee implicaciones importantes para este currículo escolar.

La competencia matemática, sin embargo, no organiza los planes de estudio. La competencia matemática y las capacidades cognitivas superiores se desarrollan a partir de las actividades cotidianas en el aula para el logro de las habilidades específicas y generales (asociadas a las áreas matemáticas). Los conocimientos matemáticos y las expectativas de aprendizaje sobre ellos son el punto de partida en cada ciclo y año lectivo; constituyen el contacto inmediato docente con el plan de estudio de cada año escolar. Esto es fundamental pues permite no distanciarse de la preparación actual de docentes en el país y la tradición dominante en cuanto al currículo: hay plena familiaridad con las áreas matemáticas.

El dominio de las habilidades en un área matemática y el desarrollo de la competencia matemática se propone realizar a partir de la mediación pedagógica: la organización de las lecciones y de las tareas matemáticas y la acción directa docente en el aula. Son varias las estrategias que se pueden desarrollar en esa dirección. Entre ellas, el procurar que en la acción de aula se realicen *procesos matemáticos*, es decir actividades transversales que se asocian a capacidades presentes en cada área para comprender y usar conocimientos, apoyando el desarrollo de la competencia matemática.

Se plantean aquí cinco procesos centrales: *Razonar y argumentar, Plantear y resolver problemas, Conectar, Comunicar* y *Representar*. Son formas de acción cognitiva que pueden generar capacidades. La selección y conceptuación de estos procesos ordena y define el papel que se desea dar a las capacidades matemáticas (por ejemplo asociar estrechamente la resolución de problemas y la modelización), y facilitan la implementación en la acción de aula de acciones cognitivas transversales de alto nivel. Se acepta como premisa que su realización constante en todos los años lectivos permite generar el progreso de la competencia matemática. En el plan de estudios se señalan acciones para su realización en cada ciclo educativo.

Matemáticas de calidad con profundidad

Es una creciente demanda social que las personas puedan realizar operaciones y procesos matemáticos de una mayor complejidad. Eso refiere a capacidades matemáticas asociadas a la resolución de problemas, a la aplicación de conceptos y procedimientos, a la matematización o modelización, así como a mayores niveles en la justificación y argumentación matemática. El manejo de conceptos, procesos o actividades matemáticas simples, procedimientos sencillos o rutinarios y de una exigencia mental menor, debe ser parte subordinada de las acciones matemáticas de nivel superior. Tanto en la etapa de aprendizaje como en la de movilización y aplicación de los aprendizajes se aboga por trabajar con problemas que posean niveles distintos de complejidad.

El dominio en profundidad de algunos tópicos genera capacidades para poder aprender otros temas con mayor facilidad (incluso sin el concurso docente). Por el contrario, el contacto superficial con muchos tópicos no permite aprendizajes significativos y más bien se convierte en obstáculo para el progreso de los aprendizajes.

Además de trabajar con problemas con distintos niveles de complejidad es necesaria la introducción de contenidos matemáticos que juegan un papel crucial en la formación escolar moderna. Por ejemplo, tópicos de geometría de coordenadas y de transformaciones que, además de incluir una visión moderna de la Geometría, favorecen el tratamiento de otros conceptos y procedimientos matemáticos, brindando instrumentos para poder usar las Matemáticas en diversos contextos. Un tratamiento adecuado de las relaciones y funciones es otro propósito que debe enfatizarse y cultivarse adecuadamente desde el inicio de la formación escolar, pues éstas resultan centrales para la formación matemática moderna. La Estadística y Probabilidad son parte obligatoria de los conocimientos que debe tener un ciudadano en nuestro escenario.

Privilegiar la profundidad en el tratamiento de los contenidos escolares sobre la amplitud de los mismos requiere brindar tiempos adecuados para los aprendizajes. Y eso posee consecuencias sobre el número de los contenidos en los planes de estudio. Es frecuente el desacierto de pensar que cuando un plan de estudios exhibe una amplia colección de contenidos se ofrece el mejor instrumento educativo al país. Se incurre en el error en dos sentidos: ni se provoca dominio de los mismos ni se afirman las capacidades matemáticas, que no sólo son esenciales para vidas profesionales asociadas a las ciencias sino para la construcción de una ciudadanía crítica y racional. En esa forma, se vuelve un mal instrumento, alejado de la realidad de aula y de las posibilidades efectivas de incidir positivamente en los aprendizajes.

Potenciar la amplitud por sí misma al margen de la profundidad es un error, pero otro error casi simétrico sería la reducción de los contenidos a mínimos indeseables que sólo pueden perjudicar la formación que debe aportar el país a su ciudadanía.

El propósito de ofrecer matemáticas de calidad persigue brindar a la ciudadanía los mejores instrumentos formativos para potenciar sus condiciones de vida en este contexto histórico. En ese sentido, se busca dar a todos los sectores sociales y culturales un programa de matemáticas moderno y sólido que promueva la *equidad social*. En todo el país se debe poder implementar este currículo. El Estado deberá asumir las acciones requeridas para asegurar esta equidad en todas partes.

Integración vertical de los planes de estudio

Los conocimientos y expectativas de aprendizaje sobre ellos se organizan en el plan de estudios de manera integrada desde el primero al último año.

Existe sustento epistemológico y pedagógico para esa decisión: las Matemáticas no son una colección dispersa y desarticulada de conceptos y procedimientos específicos, éstos se integran a partir de ideas y métodos generales cuya construcción y ampliación han sido el resultado de los quehaceres matemáticos. En cada área matemática se pueden señalar ideas generales fundamentales y se pueden describir las diferentes dimensiones asociadas o reconstrucciones que sobre las mismas se han dado a lo largo de los distintos momentos históricos. De igual manera, nuevas ideas y métodos se construyen cada día por medio de las comunidades matemáticas. Sin embargo, no todas las ideas y los métodos matemáticos generales son pertinentes para introducirse en los programas escolares; lo que se debe introducir son las ideas básicas que fundamentan el edificio matemático y cuyo dominio genera las capacidades para acceder a otras, y aquellas que al introducirse pueden propiciar condiciones relevantes para el ciudadano. En estos programas se incluyen estas ideas y métodos con precisión. Este carácter básico y general hace que sea importante que estén presentes en los distintos niveles del plan de estudios escolar, lo que debe hacerse en distintas modalidades, profundidades y aproximaciones.

Hay otras razones elementales: con esta perspectiva se puede brindar más flexibilidad pues es conveniente que los fines curriculares específicos no se establezcan con base en fronteras rígidamente marcadas por niveles o ciclos educativos.

Esta aproximación al mismo tiempo permite enriquecer el significado de muchos de los tópicos, fines y potencialidades de los mismos, al visualizarlos en toda su dimensión desde el inicio de la vida escolar. De esta manera los tópicos en cada año se pueden ver como casos particulares o preliminares de ideas más generales: por ejemplo, introducir regularidades y patrones para preparar las funciones, manipulación de símbolos para preparar el manejo de expresiones algebraicas, representaciones en coordenadas más tempranamente para evidenciar significados de las figuras geométricas, etc.

Esta perspectiva, por lo tanto, ofrece fundamento al docente para tomar decisiones estratégicas sobre los momentos cruciales en los que se introducen algunos elementos que van a favorecer el aprendizaje de los mismos en años posteriores. Puesto de otra manera más práctica: plantea el diseño de tareas matemáticas con una visión distinta nutrida por el largo plazo. Además, así se ofrecen mejores oportunidades para la coordinación y colaboración entre docentes de distintos ciclos y niveles educativos sobre los tópicos a desarrollar.

Con esta visión, se decidió distribuir los conocimientos y habilidades del plan de estudios en áreas matemáticas para todos los años desde el primero al último. De igual manera, los procesos matemáticos y los ejes disciplinares o énfasis transversales que se adoptan aquí intervienen en todo el plan de estudios.

Finalmente, aunque se potencia aquí una aproximación integradora vertical, para definir sus fines se toman en cuenta las diferencias de los distintos ciclos educativos, en particular la diferencia entre el segundo y el tercero. La organización detallada de los programas, para su implementación operativa, se hace por medio de los ciclos que tiene el sistema educativo costarricense.

Sentido histórico y adecuación al contexto educativo nacional

El currículo escolar es apenas un medio para alcanzar un fin: mejores aprendizajes. Posee un sentido histórico, o sea es *temporal* y se debe concebir para una etapa histórica precisa.[2] Cuando las condiciones sean otras debidas a muchos factores (incluso no educativos), deberá transformarse.

Esto se asocia también al enfoque que se asume aquí, si éste estuviera basado estrictamente en contenidos, su lógica no se vería condicionada tanto por el contexto y sus protagonistas. Las decisiones en cuanto a número y calidades de los conocimientos, la selección de habilidades y los métodos y gestión deben tomarse con base en esos elementos.

No se puede dejar de tener en la mira que el currículo debe ser implementado (enseñado y aprendido), y esto remite a los protagonistas principales que lo llevan a la práctica: docentes y estudiantes, así como a las instituciones que participan. Un alejamiento de sus realidades sólo puede contribuir al vacío y la esterilidad.

No todos pueden aprovechar un currículo de la misma manera, y aunque el Estado debe ofrecer uno de calidad para todos bajo un criterio de equidad, debe poseer la versatilidad suficiente para ofrecer opciones distintas.

La existencia de diversas inteligencias y talentos debe ser atendida por un currículo nacional flexible. Con el correr del tiempo, el Estado costarricense deberá generar instrumentos alternativos para compensar las debilidades extraeducativas que pueden existir y a la vez animar la formación de estudiantes talentosos en distintas áreas. Si bien al currículo no le corresponde dar respuesta plena a esas necesidades sí trata de integrarlas de alguna manera; el lugar que se ha seleccionado para hacer eso es precisamente en el trabajo con distintos niveles de profundidad de los contenidos a aprender. De esta manera, se pueden modular los contenidos matemáticos de acuerdo a los diferentes talentos.

Debe subrayarse que en el número, calidades y lógica de los contenidos seleccionados y su presentación en el plan de estudios hay implícitas decisiones curriculares, que toman en cuenta las condiciones del contexto nacional.

Un buen currículo es necesario pero no es suficiente.

Ejes disciplinares

Aquí se adoptan cinco ejes disciplinares que atraviesan de forma transversal el plan de estudios y fortalecen el currículo:

- La resolución de problemas como estrategia metodológica principal.
- La contextualización activa como un componente pedagógico especial.
- El uso inteligente y visionario de tecnologías digitales.
- La potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las Matemáticas.
- El uso de la historia de las Matemáticas.

Los dos primeros ejes se asumen como articuladores, con lo que se quiere decir que no sólo permean todos los programas sino que sirven para vertebrar y articular los otros ejes y las diferentes actividades que supone la implementación del mismo.

La resolución de problemas corresponde a la necesidad de asumir estándares cuya conveniencia para la Educación Matemática ha sido ampliamente comprobada en la escala internacional. La contextualización que se propone busca fortalecer un papel estudiantil activo y comprometido con su aprendizaje, recalcando la identificación, uso y diseño de modelos matemáticos adecuados para cada nivel educativo. Se da una asociación entre estos dos ejes que obedece precisamente al enfoque principal de este currículo: la resolución de problemas en contextos reales. Y es consistente con la selección y conceptuación del proceso matemático *Plantear y resolver problemas*.

El uso de la tecnología asume las tendencias contemporáneas de expansión intensa de los instrumentos digitales y la necesidad de configurar una utilización lúcida y adecuada de la misma. El uso de la historia de las Matemáticas responde a propósitos para brindar un rostro humano a las Matemáticas y lograr una acción sinérgica de los otros ejes.

La incorporación explícita de la búsqueda de actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas se sintoniza con la premisa de que los espacios actitudinales y socioafectivos son cruciales para los aprendizajes. Se plantean aquí cinco actitudes a desarrollar:

- Perseverancia.
- Confianza en la utilidad de las Matemáticas.
- Participación activa y colaborativa.
- Autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas.
- Respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas.

Estos ejes participan en el plan de estudios de distintas maneras y énfasis de acuerdo al área matemática y los niveles educativos. Estos ejes disciplinares se operacionalizan en la malla curricular de manera precisa mediante contenidos, diversas indicaciones y sugerencias.

El currículo de matemáticas y los fines de la educación costarricense

Este currículo se inscribe dentro de fines más generales de la educación costarricense:

> a) La formación de ciudadanos amantes de la patria, conscientes de sus deberes, de sus derechos y de sus libertades fundamentales, con profundo sentido de responsabilidad y de respeto a la dignidad humana.
> b) Contribuir al desenvolvimiento de la personalidad humana.
> c) Formar ciudadanos para una democracia en que se concilien los intereses del individuo con los de la comunidad.
> d) Estimular el desarrollo de la solidaridad y de la comprensión humana.
> e) Conservar y ampliar la herencia cultural, impartiendo conocimientos sobre la historia del hombre, las grandes obras de la literatura y los conceptos filosóficos fundamentales.

Se pretende afirmar una vocación de la competencia matemática especialmente asociada a la construcción de capacidades ciudadanas esenciales para el progreso de la nación. No se trata de formar las mentes para poder realizar exclusivamente propósitos limitados como el dominio de técnicas sofisticadas de demostración o la edificación de estructuras tremendamente abstractas alejadas del entorno, o para el disfrute etéreo y privado del conocimiento. Se busca por medio de las Matemáticas apoyar la comprensión e intervención ciudadana sobre diversos contextos físicos, sociales, profesionales, científicos, culturales, y por lo tanto brindarle a los individuos condiciones para poder contribuir al progreso de la patria, dentro de un espíritu de responsabilidad y respeto.

Se asume explícitamente el fortalecimiento de actitudes, creencias y valores positivos sobre las Matemáticas como eje disciplinar transversal, lo que no sólo contribuye al desenvolvimiento de la personalidad individual de quien participa en la acción educativa, sino que ensancha el espacio de los valores y las actitudes en general, como la solidaridad y la acción cooperativa.

El uso de la historia de las Matemáticas ofrece oportunidades valiosas para robustecer la herencia cultural de la especie humana, establecer conexión con las humanidades y entrar en contacto con perspectivas filosóficas más generales. Estas perspectivas buscan darle a las Matemáticas un rostro humano necesario no sólo para captar el interés estudiantil sino para fortalecer las posibilidades de que esta disciplina como un todo aporte más al progreso colectivo del país.

La resolución de problemas como estrategia pedagógica hace converger principios esenciales del constructivismo, una premisa filosófica de la política educativa nacional, como la construcción estudiantil autónoma de aprendizajes, pero de una manera aun más vigorosa y eficaz, pues resulta fundamental una acción independiente y comprometida del sujeto en la acción de aula. La utilización de problemas como generadores de la organización de las lecciones ofrece oportunidades valiosas para conectar con las necesidades de nuestro país, para cultivar la razón y para desarrollar una visión humanista. Asociar matemáticas a contextos reales, promover actitudes y creencias positivas, ensanchar el lugar de la razón y potenciar una visión histórica y social de las Matemáticas apuntalan una formación integral donde convergen las dimensiones propiamente técnicas de las Matemáticas con aquellas socioafectivas influidas por los entornos personales y culturales.

En acuerdo con la política educativa costarricense se han incorporado aquí ejes transversales a las materias escolares:

- Cultura Ambiental para el Desarrollo Sostenible
- Educación Integral de la Sexualidad
- Educación para la Salud
- Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz

La manera en que se han introducido es por medio de problemas y diversas actividades de aprendizaje que se han seleccionado para la acción de aula; sin embargo, no en todas las áreas matemáticas se pueden introducir de la misma manera. También las estrategias pedagógicas que se plantean permanentemente en la construcción colaborativa de aprendizajes matemáticos y del rigor en el pensamiento favorecen la formación de una ciudadanía socialmente responsable y crítica, que constituye un nutriente de la vida democrática.

El propósito de incorporar estos ejes transversales se ve favorecido fuertemente por este enfoque curricular que apuntala la relación de la enseñanza aprendizaje de las Matemáticas con los entornos sociales y culturales, los que se incorporan de una forma natural en los planes de estudio.

La estructura del currículo

Este currículo posee varias partes:

I. Fundamentos
II. Ejes
III. Gestión y planeamiento pedagógicos
IV. Metodología
V. Evaluación
VI. Programas de estudio para cada ciclo educativo
VII. Otros elementos

En *Fundamentos* se consignan los principales términos y conceptos que sostienen el currículo y en *Ejes* se describen los ejes disciplinares curriculares. *Gestión y planeamiento pedagógicos* incluye indicaciones generales para todos los ciclos sobre estos temas. *Metodología* incluye numerosas indicaciones generales para todos los ciclos educativos sobre estilos para la organización de las lecciones, sobre las áreas y los procesos, sobre las actitudes y creencias, sobre el uso de la tecnología y la historia de las Matemáticas. En *Evaluación* se aportan indicaciones y principios generales.

Los programas de estudio están organizados por medio de los ciclos educativos del sistema educativo costarricense. En esta parte se encuentran los conocimientos y habilidades matemáticas así como numerosas indicaciones puntuales adicionales que acompañan de manera inmediata conocimientos y habilidades específicas sobre método, gestión y evaluación. Además se incorporan sugerencias (siempre por ciclo) sobre procesos matemáticos, usos de tecnologías y fortalecimiento de actitudes positivas hacia las Matemáticas. Estas indicaciones más específicas son esenciales para delimitar y ejemplificar estos contenidos. Finalmente se introducen algunas indicaciones de evaluación para cada ciclo en cada área.

La última parte, *Otros elementos*, incluye una propuesta de secuencia temática para la implementación de los tópicos de las áreas matemáticas para cada año lectivo (donde es pertinente), un glosario (con términos clave que se usan), una tabla de conocimientos (que permite visualizar globalmente el plan de estudios en cuanto a contenidos) y la bibliografía general que se utilizó.

Con el propósito de crear un documento funcional y práctico, de fácil lectura, se decidió no incluir a lo largo del texto la gran cantidad de referencias de resultados o experiencias que fueron usadas en este diseño curricular, no obstante los documentos consultados pertinentes son incluidos en la bibliografía final y además se colocan algunas notas al final con referencias para uso de docentes o investigadores.

Este currículo exhibe una profunda integración de sus distintos componentes (teóricos, pedagógicos y prácticos), coherencia entre fundamentos y malla curricular, así como una vocación expresa de apoyo al docente. Se asume la visión de que con estos elementos se ofrecen mejores posibilidades para su implementación, para nutrir así el progreso de la Educación Matemática del país.

I. FUNDAMENTOS

La perspectiva más general que se busca en este currículo es proporcionar a la juventud de Costa Rica una preparación matemática que le permita abordar con inteligencia, pertinencia, responsabilidad y éxito los retos que enfrenta en el escenario actual, creando medios para potenciar una sociedad más culta, más inclusiva y más democrática.

El enfoque principal que asume este currículo es el cultivo de la resolución de problemas en contextos reales. Se trata de una mediación pedagógica que adopta premisas fundamentales constructivistas[3], en concordancia con la política educativa aprobada por el país, especialmente aquella que subraya la construcción activa por el sujeto de sus aprendizajes. Este enfoque persigue el desarrollo de capacidades estudiantiles asociadas directamente a las áreas matemáticas para generarse en cortos periodos, así como otras de alto nivel cognitivo de naturaleza transversal con una perspectiva de plazos medianos y largos.

La descripción del sentido de este enfoque se desarrolla en varias secciones:

- El plan de estudios se organiza por medio de áreas matemáticas y habilidades.
- Una perspectiva: competencia matemática.
- Procesos matemáticos.
- La mediación pedagógica: clave para el desarrollo de capacidades cognitivas superiores.
- Resolución de problemas.

El plan de estudios se organiza por medio de áreas matemáticas y habilidades

Este currículo se separa de las aproximaciones basadas estrictamente en contenidos. Sin embargo, no se subestima el papel de los contenidos. Por el contrario: la base que organiza los planes de estudio en cada ciclo y año lectivo son los conocimientos matemáticos y las habilidades en torno a ellos que se espera sean aprendidos. Se plantean aquí cinco áreas matemáticas[4]:

- *Números*
- *Medidas*
- *Geometría*
- *Relaciones y Álgebra*
- *Estadística y Probabilidad*

La primera introduce los números, los sistemas numéricos, las operaciones y cálculos. Se estudian las propiedades de los mismos pero dentro de una perspectiva eminentemente pragmática que enfatiza la acción estudiantil: el cálculo y utilización de los números en la representación y manipulación del mundo.

Geometría refiere al estudio de las características de las figuras geométricas y las relaciones entre ellas, la modelización geométrica y la visualización espacial, que permiten potenciar los procesos de visualización, clasificación, construcción y argumentación. Se desea subrayar el movimiento de las formas geométricas.

Medidas plantea la comprensión y manipulación de unidades, sistemas y procesos de medición del espacio y el tiempo, el uso de herramientas y fórmulas para efectuar las medidas. Esta área juega un papel muy importante, que ha sido confinado tradicionalmente a la educación Primaria. Con eso, se le había quitado espacio en la Secundaria a un mayor dominio en los cálculos, aproximaciones y estimaciones en la medición, y al tratamiento contextualizado de temas matemáticos por ejemplo en Geometría, Estadística y funciones.

Estadística y Probabilidad. Esta área incluye aquí dos grandes temas: por un lado la identificación, organización y presentación de la información, lo que se asocia a la Estadística descriptiva y por el otro la Probabilidad que refiere al estudio de la incertidumbre y el azar.

Relaciones y Álgebra refiere a varios temas como el estudio de patrones y relaciones de distinto tipo (numéricas, geométricas), las funciones (vistas como relaciones entre variables), así como al manejo de expresiones y relaciones simbólicas, ecuaciones e inecuaciones, como medio de potenciar procesos de generalización y simbolización. El Álgebra no se ve sólo como manipulación de expresiones simbólicas o procedimientos para resolver ecuaciones sino como un poderoso medio para representar situaciones numéricas y geométricas. Las ecuaciones e inecuaciones, por ejemplo, se pueden apreciar mejor como representaciones de relaciones de variables cuyos recorridos (o dominios de aplicación) pueden ser muchos; a veces pueden ser números enteros, racionales o reales, formas geométricas o bien propiedades del espacio. De esta forma, expresiones algebraicas pueden representar regularidades y patrones en muchas circunstancias.

La participación de las mismas áreas desde el principio de Primaria hasta el final de la Secundaria fortalece especialmente la integración vertical del plan de estudios.

Aquí se usa el término de “habilidad específica” como una capacidad o un *saber hacer* en relación con un objeto matemático (concepto o procedimiento); por ejemplo:

- Reconocer cantidades menores que 100.
- Conocer los nombres de los números menores que 100.
- Realizar sumas de números naturales, sin agrupar, con totales menores que 100.

En esta aproximación las habilidades siempre están asociadas a un área matemática (habilidades aritméticas, habilidades geométricas, habilidades algebraicas, etc.); están asociadas a conocimientos matemáticos. Las habilidades específicas se plantean para desarrollarse en tiempos relativamente cortos. No se deben ver como capacidades que se tienen o no (u fines logrados o no) sino como *expectativas de aprendizaje* que se pueden lograr gradualmente. Las habilidades específicas se podrían visualizar como objetivos curriculares específicos, aunque no de la manera propuesta por el conductismo (“objetivos operativos” observables, medibles, cuantificables). Estas habilidades alrededor de conocimientos se pueden agrupar, de manera que se trabajen de esa manera tanto en la acción de aula como en la evaluación. Esta característica, que se busca potenciar explícitamente en este currículo, distancia el sentido de “habilidad” de lo que se suele considerar como “objetivo operativo”.

Las habilidades específicas se pueden ver como casos particulares de “habilidades generales” (por ejemplo, “efectuar sumas con números naturales” es una generalización de “sumar con números naturales hasta 100”).

En el plan de estudios las habilidades específicas se han colocado como expectativas de aprendizaje para cada año escolar, mientras que las habilidades generales como expectativas de aprendizaje para cada ciclo educativo. En ambos casos están asociadas a las áreas matemáticas.

Una perspectiva: competencia matemática

Durante mucho tiempo se plantearon currículos educativos que en esencia eran listados de tópicos sin mucha relación con los aprendizajes o con las condiciones de la acción de aula. Desde hace varias décadas se ha dado un notable desarrollo curricular en el mundo que ha ido progresivamente abandonando ese enfoque por contenidos. Una vía que busca romper con esos esquemas es la perspectiva de la competencia. La idea de fondo ha sido la de colocar como el propósito más general la generación de capacidades en plazos diversos estrechando su conexión con la vida social. En esta perspectiva los aprendizajes de contenidos se ven en función de esas capacidades.

En la comunidad internacional se ha usado de diversas maneras el concepto de competencia. En este currículo se acepta el sentido que usa el *Programa Internacional de Evaluación de los Aprendizajes* de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (PISA y OECD, respectivamente, por sus siglas en inglés). El marco teórico que sostiene ese programa constituye una referencia central en el escenario mundial para los propósitos educativos. En este currículo se asume como conveniente su utilización en lo que es pertinente.

Se entenderá por competencia[5]:

> (…) la capacidad de los alumnos para aplicar conocimientos y habilidades, y para analizar, razonar y comunicarse con eficacia cuando plantean, resuelven e interpretan problemas relacionados con distintas situaciones.
> Se mide de un modo continuo, no como algo que una persona tiene o no tiene.
> (…) el carácter variable es un rasgo fundamental. Una persona instruida posee varias capacidades, y no existe ningún límite claro entre alguien que es totalmente competente y alguien que no lo es. (OECD, 2005, p. 23).

De igual manera se selecciona la siguiente definición de competencia matemática:

> (…) una capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las Matemáticas en una variedad de contextos. Incluye razonar matemáticamente y usar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel de las Matemáticas en el mundo y hacer juicios bien fundados y decisiones necesarias para ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. (OECD, 2010, p. 4).

Esta definición establece que la *competencia matemática*[6] se formula en relación con el uso de las Matemáticas para describir, comprender y actuar en diversos contextos de su realidad (personales, físicos, sociales, culturales).

Esta forma de comprender la competencia permite contribuir a los fines más generales de la educación costarricense en el “desenvolvimiento de la personalidad humana”, en la participación de los ciudadanos con “sentido de responsabilidad”, comprensión y “respeto”, que permita conciliar “los intereses con la comunidad” (un fundamento de la vida democrática) y cultivar una reflexión que apoye el entendimiento racional de los diversos contextos culturales y sociales, de las ideas y realizaciones que constituyen la historia humana.

La formación matemática afirma aquí el propósito de generar la competencia matemática con esas características, esto condiciona los programas escolares. No sólo apuntala una relación privilegiada de las Matemáticas con los entornos reales (busca que incidan en el mundo), sino además se asocia con la resolución de problemas en el sentido general de esa expresión: favoreciendo capacidades estudiantiles para plantear y diseñar estrategias para resolver problemas, lo que es posible de impulsar también en varias otras materias educativas. De distintas maneras cada individuo se enfrenta a problemas en diversos contextos existenciales, y todas las asignaturas escolares podrían tener la resolución de problemas como una estrategia, aunque por supuesto con instrumentos diferentes. En el caso de las Matemáticas, el alcance de lo abstracto y la preeminencia o densidad de los problemas obligan a una estrategia educativa y curricular de otra magnitud.

Se trata aquí de una visión específica del significado de la competencia matemática, pues podría ser otra la perspectiva; por ejemplo, podría asumirse que la competencia matemática que se busca provocar en la educación escolar es el dominio de las estructuras o de los formalismos matemáticos. También podría asumirse que una persona es más competente matemáticamente que otra si conoce un mayor número de contenidos matemáticos, lo que dentro de los planes de estudio daría otra perspectiva particular (por ejemplo buscar siempre introducir el mayor número posible de contenidos). Esto aquí no se considera así. La competencia matemática posee en esta perspectiva un sentido práctico muy importante. La dirección escogida aquí se basa en el propósito general de una formación matemática que busca dotar al ciudadano de medios que contribuyan a su participación en su entorno de manera positiva, inteligente, reflexiva, crítica y responsable.

Esta competencia matemática dará sentido a muchas decisiones globales que se encuentran de manera explícita o implícita en el currículo. En primer lugar aporta sentido y coherencia a las diversas partes del mismo, es un poderoso instrumento para establecer sus fines generales y sus fronteras, lo nutre y le da dirección. Es un medio para establecer ejes disciplinares curriculares estratégicos, ofrece criterios para la presencia o ausencia de contenidos y motiva un enfoque para la acción de aula que privilegia la resolución de problemas, especialmente en contextos reales, fortalece la participación de la identificación, construcción y uso de modelos, da sentido al fortalecimiento de áreas como Estadística y Probabilidad, nutre el papel de las tecnologías.

Procesos matemáticos

Los *procesos matemáticos*[7] se entienden aquí como actividades cognitivas (o tipos de actividades) que realizan las personas en las distintas áreas matemáticas y que se asocian a capacidades para la comprensión y uso de los conocimientos. La realización sistemática de estos procesos transversales en la acción de aula apoya el progreso de diversas dimensiones[8] de la competencia matemática.

Vale decir que estos procesos matemáticos no son capacidades pero apoyan su desarrollo, y además tienen numerosas intersecciones entre sí.

Cinco procesos

Se han seleccionado como centrales los siguientes procesos:

- *Razonar y argumentar*
- *Plantear y resolver problemas*
- *Comunicar*
- *Conectar*
- *Representar*

La descripción de esos cinco procesos se realiza a continuación.

Razonar y argumentar

Se trata de actividades mentales que aparecen transversalmente en todas las áreas del plan de estudios y que desencadenan formas típicas del pensamiento matemático: deducción, inducción, comparación analítica, generalización, justificaciones, pruebas, uso de ejemplos y contraejemplos. Busca desarrollar capacidades para permitir la comprensión de lo que es una justificación o prueba en matemática, para desarrollar y discutir argumentaciones matemáticas, para formular y analizar conjeturas matemáticas, para usar fórmulas o métodos matemáticos que permitan la comprensión o desarrollo de informaciones presentes.

Plantear y resolver problemas

Refiere al planteamiento de problemas y el diseño de estrategias para resolverlos. Aquí se dará un lugar privilegiado a los problemas en contextos reales.

Se busca potenciar capacidades para identificar, formular y resolver problemas en diversos contextos personales, comunitarios o científicos, dentro y fuera de las Matemáticas. Se trata de capacidades para determinar entonces las estrategias y métodos más adecuados al enfrentar un problema, para valorar la pertinencia y adecuación de los métodos disponibles y los resultados matemáticos obtenidos originalmente, además de la capacidad para evaluar y controlar el desarrollo de su trabajo en la resolución de problemas.

El énfasis que se desea dar a los contextos reales también impulsa una asociación con el desarrollo de capacidades cognitivas para identificar, formular, diseñar, desarrollar y contrastar modelos matemáticos del entorno con complejidad diversa.

Comunicar

Es la expresión y comunicación oral, visual o escrita de ideas, resultados y argumentos matemáticos al docente o a los otros estudiantes.

Este proceso busca potenciar la capacidad para expresar ideas matemáticas y sus aplicaciones usando el lenguaje matemático (reglas de sintaxis y semántica) de manera escrita y oral a otros estudiantes, docentes y a la comunidad educativa. Pretende que se desarrollen capacidades para consignar y expresar con precisión matemática las ideas, los argumentos y procedimientos utilizados así como las conclusiones a las que se hayan arribado, así como para identificar, interpretar y analizar las expresiones matemáticas escritas o verbales realizadas por otras personas.

Por la gran presencia de simbolizaciones en las Matemáticas en ocasiones se piensa que no es relevante la comunicación verbal y escrita, es común que no se incluya en la acción de aula ni tampoco en las formas de evaluación. No obstante, es un proceso central para la generación de la competencia matemática, pues permite esclarecer ideas matemáticas, compartirlas, revelar dimensiones distintas y ampliar la participación estudiantil activa.

Conectar

Este proceso transversal pretende el entrenamiento estudiantil en primer lugar en la obtención de relaciones entre las diferentes áreas matemáticas, lo cual se deriva de las características centrales de los quehaceres matemáticos: el carácter integrado de los mismos. Los matemáticos profesionales aplican métodos y objetos matemáticos de unas áreas en otras. Aunque las Matemáticas han evolucionado en distintas disciplinas o áreas, han llegado a integrarse con el correr del tiempo. Esta integración es de tal nivel y el flujo de relaciones de un lado a otro es tan grande que no insistir en esas conexiones y ese carácter unificado haría perder la comprensión adecuada de lo que son las Matemáticas.

Con esta multiplicidad de conexiones se comprenden mejor los límites y el significado de muchos de los objetos matemáticos. En el contexto escolar, entrenar y desarrollar la capacidad para hacer conexiones puede hacerse en todos los niveles educativos sin gran dificultad.

Este proceso busca que se cultiven las relaciones entre las distintas partes de las Matemáticas escolares, además del desarrollo de acciones para identificar dentro de situaciones no matemáticas aquellas en las cuales es posible un tratamiento matemático. Y de igual manera persigue motivar conexiones con otras asignaturas y con los distintos contextos.

Representar

Pretende fomentar el reconocimiento, interpretación y manipulación de representaciones múltiples que poseen las nociones matemáticas (gráficas, numéricas, visuales, simbólicas, tabulares).

El proceso busca favorecer la capacidad para elaborar y usar representaciones matemáticas que sirvan en el registro y organización de objetos matemáticos, para interpretar y modelar situaciones propiamente matemáticas, para manipular distintas representaciones de objetos matemáticos. Propone también desarrollar capacidades para poder traducir una representación en términos de otras, comprendiendo las ventajas o desventajas (o los alcances) de cada representación en una situación determinada.

¿Cómo actúan los procesos?

Por el sentido que se brinda aquí a la competencia matemática, se buscará que la mayoría de las actividades desarrollen el proceso Plantear y resolver problemas. El lugar del proceso Razonar y argumentar es también muy amplio pues está vinculado a otras características centrales del pensamiento matemático. Los otros procesos Conectar, Comunicar y Representar, siempre importantes, se integran al concurso potente de los dos primeros; esto hace que sea más evidente el lugar de los dos primeros procesos. Los cinco procesos plantean una acción docente explícita en su labor profesional dentro del aula.

Los procesos matemáticos poseen distintas intersecciones entre ellos y por eso actúan de manera coligada. En circunstancias específicas de aula, una actividad que enfatice Plantear y resolver problemas puede apelar a Razonar y argumentar, Representar, Conectar y Comunicar en distintas maneras. Es difícil plantear las Matemáticas separadas del razonamiento y la argumentación matemática. La forma precisa en que se asocia un proceso con otros no es la misma en cada circunstancia matemática. En ocasiones, Plantear y resolver problemas se activará más ligado a Conectar, en otras a Comunicar todo depende de la tarea matemática.

Cada proceso central señalado aquí se podría ver como una síntesis de procesos de otros niveles de especificidad o dominios de acción, pues en el sujeto todos los procesos (ya sean generales o menos generales) no se activan de forma aislada. Por ejemplo, en el momento de realizar el proceso Representar pueden participar otros procesos más generales (o básicos) como identificar, listar, ordenar, clasificar, etc.

La mediación pedagógica para desarrollar capacidades cognitivas superiores

En estos programas, por un lado, se plantean habilidades asociadas a las áreas matemáticas, y por el otro, se proponen procesos que apoyan la generación de capacidades cognitivas transversales que se evidenciarán poco a poco y sobre todo en el mediano y largo plazos. Estas dimensiones están íntimamente asociadas: los procesos matemáticos adoptados se introducen a partir de tareas para el aprendizaje en las que se persigue el desarrollo de habilidades específicas.

Las mediaciones entre el desarrollo de la habilidad específica, capacidades cognitivas y la competencia matemática son complejas, difíciles de identificar y aun más de medir. El dominio de una habilidad específica puede darse en diferentes grados o niveles.

Los conocimientos matemáticos o las habilidades específicas no generan por sí mismos capacidades cognitivas más amplias que nutran la competencia matemática. Lo puede lograr la manera como se genera el dominio de esas habilidades, es decir, la forma en que se realiza la acción de aula, la mediación pedagógica. Es fundamental cómo se organice la lección o secuencias de lecciones, la acción directa docente en las actividades del aula y la calidad de las exigencias cognitivas que se provoque. Aquí la realización de los procesos es central. Si las lecciones se organizan siempre de manera magistral y sin participación activa de cada estudiante, o si no se proponen tareas para el aprendizaje que desafíen su inteligencia, no se provoca interés y compromiso activo, con lo que se debilitan las posibilidades para motivar acciones mentales de mayor nivel. Se trata, entonces, de diseñar lecciones con tareas para el aprendizaje que permitan la realización de procesos. Si de entrada en la lección se plantea identificar, formular y resolver un problema, se apoyará la realización del proceso matemático Plantear y resolver problemas. A partir de éste, se podrán introducir los otros.

Debe entenderse, sin embargo, que la realización de un proceso es a veces una labor compleja y que no se puede aplicar en todo momento; el lugar y tiempo se debe seleccionar con cuidado. Por otro lado, se debe tener en cuenta que en una sola tarea para el aprendizaje es posible realizar varios procesos a la vez, o formulado de otra manera: la realización de un proceso interseca con otros.

No sólo el diseño de tareas matemáticas es importante. También lo es la acción directa docente durante las actividades propuestas. Su intervención en cada fase de la lección apoyará el desarrollo de procesos. No logrará realizarlos adecuadamente si se extralimita en su participación (por ejemplo, resuelve los problemas en la pizarra ante la menor duda, o da indicaciones improcedentes), se ausenta indebidamente de la actividad, o si no aporta correctamente el conocimiento necesario que completaría un proceso de trabajo estudiantil. La acción docente directa es crucial.

En medio de una actividad de aprendizaje dirigida a la consecución del dominio de una habilidad específica, se puede de manera dinámica introducir los procesos matemáticos que sean pertinentes. Por ejemplo, con preguntas adecuadas que provoquen más implicaciones o derivaciones para así impulsar el razonamiento y la argumentación, mediante conexiones con otras áreas matemáticas, con la generación de la expresión y comunicación de las ideas en varios planos, o con una motivación para que las entidades matemáticas que entran en juego se puedan representar de distintas maneras. Es un asunto a determinar de manera específica y práctica: no todos los procesos matemáticos poseen el mismo peso en el desarrollo de una tarea, y a veces ni siquiera aparecen algunos.

El diseño de la tarea matemática y la conducción docente en el aula son instrumentos clave para que se realicen esos procesos matemáticos. Eso implica una planificación y un diseño cuidadosos de la lección. Hay mejores tareas que otras para esta superposición de habilidades y procesos. No sólo las investigaciones didácticas pueden aportar ejemplos y resultados pedagógicos sobre cómo realizar estas acciones en el aula sino también y sobre todo la investigación que realizan los profesores en las distintas entidades educativas de manera sistemática y continua permite proporcionar medios para seguir esta estrategia. De una manera general: con una perspectiva adecuada, cierta experiencia y preparación, se pueden activar procesos matemáticos en casi cualquier tarea matemática orientada a la generación de una habilidad específica o un conjunto de ellas.

La mediación pedagógica es la clave para que en las actividades se logre el dominio de habilidades específicas y de esta forma se desarrollen capacidades y la competencia matemática. Es necesario que se tenga en mente la realización de los procesos matemáticos.

Un ejemplo de cómo podría funcionar esto en el aula: por medio de un problema se puede buscar la generación de una habilidad específica como la siguiente

Identificar patrones o regularidades en sucesiones y en tablas de números menores que 100.

Se ofrece tiempo para aportar soluciones o estrategias, y luego se pide que se comuniquen. Éste puede empujar a que esto se haga de diversas maneras y que se contrasten las soluciones. Al hacer eso se realiza el proceso matemático Comunicar y en esa contrastación poner en juego otras actividades asociadas a procesos (Razonar y argumentar). Se puede pedir que se vincule esta situación con alguna otra área matemática, y se podría pedir además que justifiquen varios pasos o interrogarles sobre lo que pasaría al modificarse alguna condición apropiada de la situación inicial. Al hacer esto, se realizan también otros procesos matemáticos.

Al llevarse a cabo este tipo de procesos en las distintas áreas matemáticas, se va aumentando la capacidad estudiantil para comunicar y argumentar matemáticamente de una manera adecuada.

Resolución de problemas

Es como parte de esta mediación pedagógica donde la resolución de problemas encuentra un sentido esencial para la enseñanza aprendizaje de las Matemáticas: un instrumento poderoso para lograr el dominio de habilidades, la realización de procesos así como el progreso de la competencia matemática.

Resolución de problemas: propósitos en el currículo

La resolución de problemas está asociada sustancialmente a la naturaleza de las Matemáticas, sean problemas del entorno o abstractos. Intuir, describir, plantear, resolver y generalizar problemas matemáticos define la actividad de estos profesionales en contextos sociohistóricos donde existen criterios y métodos de comunicación y validación. Debe existir una explícita relación entre esta naturaleza y las acciones de enseñanza y aprendizaje. No establecer estas conexiones en la acción de aula significaría la incomprensión de un sentido central de las Matemáticas. Sin embargo, pasar de la actividad de resolución de problemas en los quehaceres matemáticos más generales a la acción de aula no se puede realizar de una manera mecánica: debe haber adaptación al entorno escolar.

Colocada ya en contexto educativo, la resolución de problemas[9] debe integrar al menos dos propósitos:

- aprendizaje de los métodos o estrategias para plantear y resolver problemas,
- aprendizaje de los contenidos matemáticos (conceptos y procedimientos) a través de la resolución de problemas.

En el primer propósito se enfatizan los medios (estrategias, heurísticas, métodos) que requiere un problema (una acción matemática). El aprendizaje de técnicas de resolución de problemas no garantiza que una persona pueda resolver problemas nuevos y distintos, sin embargo el entrenamiento en las mismas favorece el desarrollo de esa capacidad. Sin embargo, no sería apropiado concebir el papel de la resolución de problemas reducido a entrenar y lograr destrezas en esas técnicas y métodos, por más ricos que éstos puedan ser.

En el segundo propósito lo que se plantea es una acción de aula que permita generar aprendizajes matemáticos en un contexto específico; esto apela al diseño de tareas que sirvan para la construcción de aprendizajes dentro de una lección (o una secuencia de ellas), promoviendo así la realización de los procesos matemáticos.

Se adopta aquí una premisa esencial: juegan un papel crucial los problemas reales, en los que aparecen los entornos físicos y socioculturales. Usar problemas extraídos de la realidad o que se puedan imaginar como reales promueve acciones cognitivas requeridas para el aprendizaje de las Matemáticas.[10] Esto sucede por varias razones. Por un lado porque es posible despertar un mayor interés, provocar actitudes positivas sobre las Matemáticas, involucrar más a las personas en la construcción de sus aprendizajes y entonces estimular diversas actividades cognitivas y el cultivo de la competencia matemática. Pero no es solamente un asunto de motivación en la acción por encontrar, usar o aplicar las Matemáticas dentro de contextos reales (bien seleccionados) se promueve el contacto con los objetos matemáticos en su relación privilegiada con la realidad de donde emergieron. Trabajar en estos contextos diversos favorece una matematización (usar matemáticas para representar o modelar situaciones del entorno) que -aunque debe ser adaptada al medio escolar- corresponde a aquellas actividades similares realizadas en los quehaceres matemáticos más generales.

En el enfoque que se beneficia aquí, la escogencia de un problema para el desarrollo de una lección debe estar establecida por los propósitos de aprendizaje de un conocimiento matemático y el desarrollo educativo que se realiza, y no, por ejemplo, por las estrategias o técnicas que supone para su solución. Aunque, sin duda, existe relación entre un problema rico en posibilidades de solución y los fines de un buen aprendizaje.

Uno de los aspectos que se desea subrayar en esta visión es la importancia de descubrir, plantear y diseñar problemas (y no sólo resolverlos), pues en su vida las personas se verán más expuestas a circunstancias en las que los problemas no están formulados o las Matemáticas posibles que pueden intervenir no son visibles o evidentes.

Aunque aquí se dará énfasis a la organización de la lección, el propósito de desarrollar competencia en los recursos y métodos para resolver problemas también se incorpora en las distintas áreas matemáticas que organizan estos programas.

Problemas

Los contextos donde un problema puede emerger pueden ser diversos. Una situación de salud en el país, asuntos económicos, ambientales, culturales. Contextos escolares, familiares, comunitarios, profesionales, científicos. Pero también un problema puede diseñarse a partir de pasajes de la historia de las Matemáticas, de una representación artística donde es posible encontrar matemáticas, incluso un juego, un rompecabezas, un video, etc.

Un problema es un planteamiento o una tarea que busca generar la interrogación y la acción estudiantil utilizando conceptos o métodos matemáticos, implicando al menos tres cosas:

- que se piense sobre ideas matemáticas sin que ellas tengan que haber sido detalladamente explicadas con anterioridad,
- que se enfrenten a los problemas sin que se hayan mostrado soluciones similares,
- que los conceptos o procedimientos matemáticos a enseñar estén íntimamente asociados a ese contexto.

Un problema debe poseer suficiente complejidad para provocar una acción cognitiva no simple. Si se trata esencialmente de acciones rutinarias, no se conceptuarán como problemas. Se puede poner en los siguientes términos: una tarea matemática constituye un problema si para resolverla el sujeto debe usar información de una manera novedosa. En el caso que el individuo pueda identificar inmediatamente las acciones necesarias se trata de una tarea rutinaria. Si una tarea matemática propuesta no tiene esas características, se consignará aquí como un ejercicio. Una tarea puede ser un ejercicio o un problema en dependencia de varias circunstancias educativas. Una suma con números de cuatro dígitos puede ser un problema en 1er y 2° Año, y un ejercicio en tercero.

La escogencia de problemas planteados en un entorno real permite potenciar la aplicación de los conceptos y métodos matemáticos, acoplándose así con la competencia matemática que se ha definido como la capacidad para describir, comprender y actuar en contextos diversos (o situaciones) usando matemáticas. La resolución de problemas en entornos reales apoya una percepción de utilidad de las Matemáticas.

También existen problemas que por su naturaleza no admiten una solución en poco tiempo y otros que tal vez no tengan. Este tipo de problemas ofrece oportunidades para mostrar algunas características de la construcción matemática: que las Matemáticas no son verdades absolutas, que hay procesos constructivos que pueden durar mucho tiempo, etc.

Resulta conveniente subrayar la importancia de problemas de final abierto, es decir aquellos que admiten varias soluciones y aproximaciones, y que pueden ofrecer oportunidades muy valiosas para introducir conceptos y procedimientos, para organizar la lección o para trabajos extraclase por medio de proyectos. Cuando se colocan en contextos reales, hay muchas oportunidades para trabajar con problemas de este tipo.

Favorecer problemas en contextos reales no implica dejar de lado problemas abstractos. Es una orientación general y flexible que debe adaptarse con lucidez. Hay áreas matemáticas y tópicos donde no tiene sentido el trabajo en contextos reales. Pero además, no se debe olvidar nunca que las Matemáticas refieren a dimensiones generales y abstractas de lo real. En esencia, es una práctica que cultiva lo abstracto. De lo que se trata en la acción educativa es de construir los objetos abstractos con base en una estrategia que permita asociaciones con los entornos en ciertos momentos para favorecer los aprendizajes.

Los problemas abstractos son cruciales para poner en juego distintas habilidades y procesos. En los abstractos se entrena, por ejemplo, la justificación y demostración, el uso de lenguaje matemático, el razonamiento riguroso abstracto. En los quehaceres desarrollados por las comunidades matemáticas profesionales la mayoría de los problemas que se abordan son abstractos.

En el aula, el momento y la forma para introducir un problema deben constituir parte de la planificación docente. No siempre un problema debe ocupar un papel central en la organización de la lección, a veces puede introducirse solamente en ciertas fases de la acción de aula. En otras ocasiones un problema puede servir para reforzar aprendizajes. Lo que se propone aquí es el uso de problemas como una orientación general a aplicar de manera flexible.

En cuanto a las técnicas generales o métodos para el diseño de estrategias para resolver problemas, se consignarán, como guía, cuatro pasos que se sintetizan en la tabla siguiente.

Tabla 1. Pasos en la resolución de problemas

Pasos o fases	**Acción**
Paso 1. Entendimiento del problema	Tener claridad sobre lo que trata el problema antes de empezar a resolverlo.
Paso 2. Diseño	Considerar varias formas para resolver el problema y seleccionar un método específico.
Paso 3. Control	Monitorear el proceso y decidir cuándo abandonar algún camino que no resulte exitoso.
Paso 4. Revisión y comprobación	Revisar el proceso de resolución y evaluar la respuesta obtenida.
Fuente: elaboración propia.	

Hay varias dimensiones que participan en este procedimiento y que son relevantes: recursos, heurísticas, creencias y la metacognición o control. Los primeros refieren a los elementos aprendidos (correctos o no) con los que parte la persona, las heurísticas son las estrategias formales o informales que se dan o pueden darse para resolver un problema, y están las creencias sobre diferentes dimensiones involucradas. La evolución o monitoreo del progreso durante la resolución de problemas y el estar consciente de las propias capacidades y limitaciones son fundamentales en esta etapa y se identifican con las estrategias denominadas metacognitivas. En este sentido, la metacognición se refiere al conocimiento de nuestro propio proceso cognitivo y al control activo de las decisiones y de los métodos utilizados en la resolución de un problema. Estos pasos generales deben ajustarse cuando se trabaja con problemas en contextos reales, pues requieren modelos.

Modelización

La identificación, uso y construcción de modelos matemáticos es parte sustancial del enfoque que se propone trabajar con problemas en contextos reales. Los modelos emergen siempre que se deba acudir a la realidad. Un modelo[11] es en esencia un conjunto de elementos matemáticos conectados que representan una realidad específica (explican, describen, permiten hacer predicciones). Pueden existir varios modelos sobre una realidad con distintos grados de representación de la misma. Identificar, construir o usar un modelo de una situación real es una manera de matematizar esa realidad.

En este enfoque se conceptúa modelo de una forma amplia y flexible: puede ser un diagrama con flechas, un manipulable, una tabla, una gráfica. Un modelo refiere a una situación específica, pero al mejorarse con acciones cognitivas deberá ser capaz de poder usarse en otros contextos.

Lo que se propone aquí no es solamente un entrenamiento de estudiantes en las estrategias para el planteamiento y construcción de modelos en sí mismos, sino esencialmente utilizar los modelos matemáticos y las acciones que supone su construcción y utilización para generar o reforzar aprendizajes. Conocimientos y habilidades específicas se pueden construir o aplicar a través de las acciones que ofrece la modelización. Esta matematización escolar no busca dar un modelo final y acabar la acción allí. Trata de la creación y uso sucesivo de modelos que se refinan, adecúan y amplían su rango de acción. Refiere al aprendizaje, a una acción estudiantil constructiva en la que también hay intervención docente.

Un trabajo de reelaboración y abstracción de un modelo convoca actividades matemáticas más generales y abstractas. Se podría hablar de dos maneras de matematización: la primera que establece y usa un modelo (se pasa del mundo físico o social al simbólico matemático); la segunda, que refina y generaliza de manera teórica los resultados de la primera (trabaja en el mundo simbólico y abstracto de las Matemáticas). La modelización siempre aparecerá de manera integrada al proceso Plantear y resolver problemas.

El grado de complejidad de los modelos que se generen dependerá de las circunstancias a las que refiere, así como de los conceptos y procedimientos matemáticos implicados, lo cual debe ajustarse en cada nivel educativo.

El espíritu de la modelización reside en la identificación, manipulación, diseño y construcción de modelos matemáticos sobre situaciones auténticas del entorno. Este sentido de realidad es esencial para los aprendizajes. En términos muy generales, esta acción se puede resumir en algunos pasos, que se consignan en la tabla siguiente.

Tabla 2. Pasos en la modelización.

Pasos	**Descripción**
Paso 1. El Problema.	Un problema que describe una situación de la realidad que debe ser modelizada.
Paso 2. Sistematización.	Una selección de los objetos, la información y las relaciones relevantes del problema que le permitan obtener una posible representación o idealización matemática.
Paso 3. Modelo Matemático.	Una traducción de los objetos y las relaciones del paso anterior en lenguaje matemático, de tal forma que obtenga un modelo que represente lo que ocurre en la realidad.
Paso 4. Solución.	Uso de los conocimientos matemáticos previos para poder encontrar la solución o soluciones del modelo planteado en el paso anterior, de esta forma se podrá obtener una aproximación de la solución del fenómeno que se está idealizando en el paso 1.
Paso 5. Interpretación.	Análisis de los resultados y las conclusiones considerando los conocimientos previos que se tienen del problema.
Paso 6. Evaluación.	Verificación a la luz de los resultados matemáticos de la validez del modelo y el poder predictivo que dicho modelo tiene sobre el problema original. Para este proceso puede utilizarse la comparación con datos observados y/o el conocimiento teórico o por experiencia personal que se tenga del problema.
Fuente: elaboración propia.	

El uso de tecnologías

El trabajo con problemas adquiere una perspectiva vigorosa cuando se realiza en contextos reales y se usa la modelización. El uso de tecnologías digitales juega en la misma dirección, pues no sólo ofrece medios que intervienen como apoyo (calculadoras o computadoras para simplificar cálculos, valorar aproximaciones, entornos virtuales), las cuales permiten visualizar dimensiones que de otra manera sería muy difícil de incorporar en la acción educativa (como el movimiento en Geometría), pero también para modificar el significado de algunas fases y objetivos de la resolución de problemas. Con tecnología es posible simular situaciones reales y reorganizar las demandas cognitivas que plantea un problema; redefinir las estrategias que se pueden diseñar.

El sentido de la contextualización y la manipulación con los entornos reales se puede alterar con los medios tecnológicos. En la resolución de problemas donde puede intervenir la tecnología se requiere incluir otras habilidades y procesos que están asociados a la relación interactiva entre conocimiento, pedagogía y tecnología, condiciones que son parte cada vez más de las generaciones de estudiantes que asisten a la escuela (la manipulación de artefactos, relación especial con procesos visuales, multitarea, “conectividad social”, etc.). Y esto no refiere solamente a artefactos, las posibilidades que ofrece Internet para la comunicación (donde la distancia se relativiza) permiten trabajar con problemas (y con proyectos) de una forma enteramente distinta a la que se realizaría sin esos medios.

Por este tipo de consideraciones, el uso de tecnologías debe asumirse como un componente muy importante para un enfoque curricular basado en la resolución de problemas.

Diferentes niveles de complejidad de los problemas

Es sustancial que se promueva la confrontación estudiantil con diferentes niveles de complejidad en los problemas matemáticos, pues existe una relación directamente proporcional entre niveles de complejidad y las oportunidades para realizar procesos matemáticos y nutrir el progreso de la competencia matemática. La filosofía a seguir en el aula varía a favor de acentuar acciones cognitivas de mayor nivel. Una acción de aula encaminada a la confrontación progresiva con complejidades mayores no es consistente con estilos educativos que enfatizan las acciones simples, repetitivas o de poca exigencia mental. De esta forma, la organización de la lección se debe repensar a la luz de esta visión.

Esta orientación, por supuesto, no se plantea al margen de consideraciones pedagógicas; no se trata de buscar lo complejo por lo complejo en sí mismo, pues no todo asunto complejo es relevante. De lo que se trata es que con temas pertinentes (matemática y educativamente) se confronten problemas matemáticos cada vez más complejos de manera escalonada. Por medio de una mayor profundidad en los tópicos se forjan mayores destrezas para aprender otros contenidos.

Aquí se proponen tres niveles de complejidad[12]:

- Reproducción. En esencia se refiere a ejercicios relativamente familiares que demandan la reproducción de conocimientos ya practicados. Apelan a conocimiento de hechos y representación de problemas comunes, reconocimiento de cosas equivalentes, recolección de objetos matemáticos o propiedades, procedimientos rutinarios, aplicación de algoritmos estándar, manipulación sencilla de expresiones que poseen símbolos, fórmulas y cómputos sencillos.

  Por ejemplo, en el final de la educación general básica:

  Resolver la ecuación $8x - 2 = 15x + 9$.
  Encuentre el promedio de los números 8, 13, 6, 15, 7.
  Si se deposita en una cuenta de ahorro 3000 colones y el banco ofrece un 8 por ciento de interés anual, calcular cuánto dinero en intereses ganará esa cantidad depositada al cabo de un año.

- Conexión. Se basa en capacidades que intervienen en el nivel de reproducción, pero va más lejos. Remite a la resolución de problemas que no son rutinarios pero se desarrollan en ambientes familiares al estudiante, la interpretación con exigencias mayores que en el grupo de representación, y algo que lo define: la conexión entre los diversos elementos, en particular, entre distintas representaciones de la situación.

  Por ejemplo, en el final de la educación general básica:

  > Una pastelería vende queques en forma circular y con el mismo grosor en 2 tamaños: unos con diámetro de 20 cm. a 8000 colones, otros con diámetro de 30 cm. a 12 000 colones. ¿Con cuáles queques se obtiene una mejor oferta? Explique.

- Reflexión. El elemento significativo es la reflexión, realizada en ambientes que son más novedosos y contienen más elementos que los que aparecen en el otro nivel de complejidad. Se plantea aquí la formulación y resolución de problemas complejos, la necesidad de argumentación y justificación, la generalización, el chequeo de si los resultados corresponden a las condiciones iniciales del problema y la comunicación de esos resultados. Se exige la participación de varios métodos complejos para su solución.

  Un ejemplo, adaptado de la prueba PISA del 2003:

  > Un documental televisivo incluía un debate sobre la posibilidad de predecir los terremotos. El Dr. Morales, un especialista en sismología, afirmó: en los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Santa Eulalia es dos de tres. ¿Cuál de las siguientes opciones refleja mejor el significado de la afirmación del sismólogo?
  > A) $2/3 \times 20 = 13{,}3$ por lo que entre 13 y 14 años a partir de ahora habrá un terremoto en la ciudad de Santa Eulalia.
  > B) 2/3 es más que ½, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la Ciudad de San Eulalia en algún momento en los próximos 20 años.
  > C) La probabilidad de que haya un terremoto en la ciudad de Santa Eulalia en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.
  > D) No se puede decir lo que sucederá, porque nadie puede estar seguro de cuándo tendrá lugar un terremoto.

Un énfasis curricular que asume la resolución de problemas como su enfoque principal no puede privilegiar solamente la realización de problemas de reproducción. Los problemas de conexión o reflexión son los que pondrán en movimiento más capacidades. No se trata de proponer la mayoría de problemas en estos dos niveles, sino que éstos se introduzcan de acuerdo a las características de la clase, el momento en la secuencia de lecciones o el tópico. Este tipo de problemas provoca más procesos. En la enseñanza y aprendizaje se debe diseñar una estrategia formativa que use problemas en los diferentes niveles de complejidad, de una forma equilibrada y apegada a su contexto. Hay que tener en cuenta además que un problema posee una complejidad de acuerdo al estudiante. Para un grupo de estudiantes puede resultar de conexión, pero para otros de reflexión. Es necesario interpretar el contexto específico en el que se encuentra.

Problemas, memorización y reflejos intelectuales

Mediante la resolución de problemas, enriquecida y redimensionada por contextos reales y el uso de tecnologías, se motiva la construcción de aprendizajes. Este es un enfoque que asume esa premisa de la visión constructivista que sustenta la política educativa costarricense.

El aprendizaje de las Matemáticas se realiza de una manera progresiva a partir de conocimientos anteriores. El dominio y recuerdo de unos conocimientos deben ser base para los siguientes; sólo así se puede formar en la mente un cuerpo coherente y estructurado. Para poder enfrentar problemas nuevos son necesarios ciertos reflejos intelectuales que sirvan como conocimiento asimilado y automatizado sobre procedimientos, algoritmos o ciertos razonamientos recurrentes. Esto es indispensable para que proponga hipótesis, formule estrategias, identifique los mejores procedimientos y rutas de trabajo e imagine los caminos para enfrentar un problema. Y aquí precisamente se requiere la memorización y el fortalecimiento de reflejos en varias dimensiones. Esto no debe verse como una forma simplificada para construir el aprendizaje de conceptos o métodos, sino como una forma eficaz de acceder a lo que ya se ha comprendido.

Se deben promover oportunidades para realizar síntesis, entrenar algoritmos y procurar la memorización de procedimientos o razonamientos comunes. Por ejemplo, los algoritmos de suma, resta, multiplicación, división de números diversos, las tablas de sumar y multiplicar, las fórmulas notables, entre otras.

Es necesario que los diversos tópicos se repasen a lo largo de los distintos años. Pero esto no debe hacerse por medio de sistematizaciones generales artificiales, sino por medio de nuevos problemas que hagan recordar inteligentemente los conocimientos adquiridos en el pasado y planteen así otras expectativas de aprendizaje.

II. EJES

Cinco ejes disciplinares

Se asumen cinco ejes transversales específicos a las Matemáticas que potencian algunas dimensiones curriculares relevantes para la enseñanza efectiva de esta materia:

- La resolución de problemas como estrategia metodológica principal.
- La contextualización activa como un componente pedagógico especial.
- El uso inteligente y visionario de tecnologías digitales.
- La potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las Matemáticas.
- El uso de la Historia de las Matemáticas.

Estos ejes significan aquí prioridades, por lo que deben influir todos los elementos del currículo. Estas prioridades se manifiestan en la selección de tópicos, en las indicaciones generales de gestión y de método, en las indicaciones y sugerencias que acompañan conceptos y habilidades, en la propuesta de planeamiento. Se busca que al implementarse esta propuesta curricular se brinde importancia especial a cada uno de estos ejes, aunque no todos estos ejes generan impacto de la misma forma en cada área o en cada año escolar.

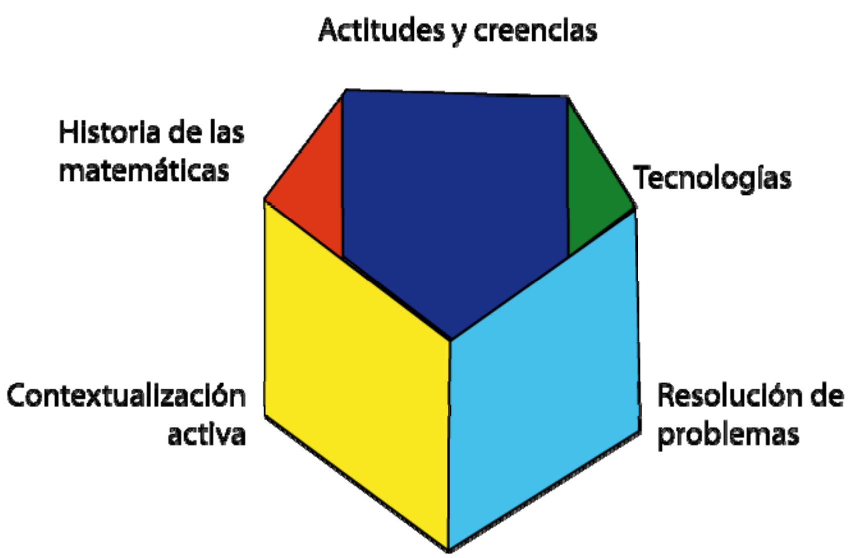


Figura 1. Ejes disciplinares

La selección de estos ejes responde a condiciones del contexto educativo nacional:

- En Costa Rica la resolución de problemas ha tenido hasta ahora un papel muy reducido y cuando se ha planteado se ha hecho de manera abstracta sin llevarse efectivamente a la acción de aula y en la mayoría de las ocasiones con una aproximación inadecuada (un apéndice del discurso pedagógico o simples colecciones de estrategias para resolver problemas).[13]
- Aunque se ha considerado acudir al entorno para la enseñanza, sin embargo se ha hecho de forma artificial, sin provocar un compromiso estudiantil activo.
- De igual manera, la tecnología ha ocupado en los documentos oficiales un lugar muy débil y en la práctica educativa se han dado distorsiones serias en su uso.[14]

- El tema de actitudes-creencias y el del uso de la historia han estado prácticamente ausentes de los programas y de la práctica educativa.

Los ejes buscan responder a debilidades existentes pero también posicionar la Educación Matemática que se desarrolla en el país con estándares internacionales. La acción de los cinco ejes en todos los años educativos contribuye a la integración vertical del currículo, especialmente por medio de la resolución de problemas y la contextualización activa que buscan articular todo el plan de estudios. El efecto sinérgico de estos ejes disciplinares busca favorecer una formación matemática de calidad que ayude a generar personas competentes, racionales, responsables y críticas para la construcción de una sociedad culta, justa y democrática.

Resolución de problemas y contextualización activa

El enfoque principal de este currículo es la resolución de problemas en contextos reales. La manera más conveniente de promover la implementación del mismo es colocar en el currículo como ejes disciplinares el resolver problemas, hacerlo en contextos reales y además darle a estas acciones el mayor relieve.

La formulación que se selecciona para realizar eso es por medio de dos énfasis:

- La resolución de problemas como estrategia metodológica principal.
- Una contextualización activa como un componente pedagógico especial.

Este eje es consistente con el proceso matemático Plantear y resolver problemas.

Se pretende que estos ejes disciplinares dominen la enseñanza de los conceptos y habilidades y el diseño de las tareas matemáticas. El uso intenso y apropiado de tecnologías, el uso de la Historia de las Matemáticas y el cultivo de actitudes positivas sobre la materia debe hacerse favoreciendo problemas y una contextualización activa. A eso se refiere el usarlos como ejes articuladores.

Aquí se propone que los dos propósitos centrales de la resolución de problemas ocupen un lugar preponderante. Eso significa motivar la organización de la acción de aula por medio de problemas y también promover el aprendizaje de estrategias de resolución de problemas en las distintas áreas matemáticas. Se plantea una contextualización activa que estimule la acción estudiantil, lo que requiere el uso importante de modelos sobre la realidad cercana.

El elemento esencial de la contextualización activa es la modelización. Se pueden contextualizar los objetos matemáticos de varias maneras. Por ejemplo puede ofrecerse una introducción contextual para abordar algunos conceptos o procedimientos matemáticos ("fíjense que en esta sala de clase tenemos distintas figuras, hoy vamos a estudiar los triángulos"). Otra manera: contextualizar una situación matemática (si Juan tenía 400 colones y gastó 200 en caramelos, ¿cuántos colones le quedan?). Esas contextualizaciones son útiles en muchas circunstancias educativas, pero no activan intereses y acciones cognitivas de nivel superior ni procesos matemáticos: no generan un involucramiento estudiantil activo. Al contrario, para despertar el interés y la participación, se propone usar problemas en contextos reales que provoquen la construcción o uso de modelos. Se trata de diseñar problemas sacados de las informaciones de prensa, de la escuela, de la comunidad, de la clase, de Internet. Los mismos "problemas" tradicionales que aparecen en muchos libros de texto (como apéndice) pueden ser enriquecidos si se colocan en la perspectiva de la modelización y usados para construir capacidades cognitivas superiores.[15]

Una contextualización activa no se puede realizar de la misma manera en todas las áreas, algunas se prestan mucho, como Estadística y Probabilidad o Medidas. De igual manera, las situaciones reales pueden permitir usar tópicos de varias áreas. No se trata de que todos los problemas de aula sean de modelización, pero que éstos sean una parte importante de la acción educativa. Resolver problemas en contextos reales ofrece significados, sentido de utilidad y medios diversos para poner en juego las capacidades y habilidades matemáticas, y permite andamios para la construcción de los aprendizajes desde lo concreto hacia lo abstracto.

Tecnologías

Las tecnologías digitales han tenido un extraordinario impacto tanto en la práctica como en la investigación en Educación Matemática. Algunos de estos recursos son instrumentos de construcción y experiencias geométricas, de análisis de datos, modelación y simulación, de cálculo algebraico, "tutores" inteligentes y cada vez más los espacios virtuales. Las calculadoras, por ejemplo, ofrecen posibilidades de disminuir los cálculos rutinarios y concentrar los esfuerzos en los procesos de razonamiento o de aplicación más significativos para el dominio de las Matemáticas. Las computadoras permiten la representación de conceptos y procedimientos matemáticos (objetos matemáticos que acuden fácilmente al mundo de los sentidos). Estas tecnologías no sólo favorecen la representación matemática múltiple, sino también recursos extraordinarios en la interacción estudiante-conocimiento, permitiendo un involucramiento activo del sujeto en su aprendizaje. La Internet, además, es uno de los más poderosos vectores que directa o transversalmente amplifican potencialidades de los diferentes instrumentos tecnológicos; ella misma abre entornos cualitativamente distintos para la enseñanza y el aprendizaje, recursos valiosos para la construcción de múltiples estratégicas pedagógicas. Estas tecnologías configuran en gran medida la realidad contemporánea de la educación.

Todo apunta a poderosos cambios en el futuro de los tópicos y los enfoques educativos. Muchos de los problemas y tareas educativas que se planteaban antes de estas tecnologías se han visto transformados cualitativamente, a la vez que han aparecido nuevos retos y escenarios didácticos. Las tecnologías de la comunicación han favorecido métodos cooperativos en el aula y fuera de ella, construyendo espacios virtuales de comunicación y de interacción, lo que puede transformar mucho el significado de la labor de aula.

Las tecnologías pueden ser un poderoso aliado para potenciar el pensamiento matemático. Y es precisamente en la resolución de problemas en entornos reales donde éstas pueden aportar sus beneficios de la mejor manera, en contextos de aprendizajes que fortalezcan las habilidades y capacidades matemáticas. En ese sentido refuerzan la implementación de los ejes disciplinares articuladores y añaden medios para conectar la Educación Matemática local con tendencias educativas y culturales dominantes en el mundo. La dinámica histórica actual pronostica una penetración más intensa de todas las tecnologías en la vida social del país y del mundo. Los programas de estudio deben preparar a la población para esta perspectiva.

La utilización de tecnologías, sin embargo, no conduce necesariamente al mejoramiento de los aprendizajes en las Matemáticas, peor aún: un mal uso puede debilitarlos. La tecnología debe entonces introducirse de forma pertinente y precisa en los distintos niveles educativos y de acuerdo a las condiciones materiales y humanas existentes en el contexto educativo nacional.

Actitudes y creencias

En el aprendizaje son decisivas la motivación y el interés y en general todas las dimensiones afectivas, por lo que se adopta aquí una visión integral y humanista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. No se pueden generar actitudes y creencias positivas hacia la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas sin que los programas las incorporen de forma explícita y ofrezcan medios pedagógicos en esa dirección.

¿Cuáles son disparadores de actitudes negativas?

- Matemáticas con un bajo nivel de demanda de la acción inteligente y creativa. Los énfasis en repeticiones mecánicas de procedimientos simples, en la memorización sin sentido o en actividades mentales poco exigentes no provocan en la mayoría de estudiantes empatía con las Matemáticas.
- La separación de los entornos estudiantiles.
- Una organización de la lección que no favorece la participación activa y colaborativa de estudiantes y docentes.
- La enseñanza separada de las realidades culturales y los medios tecnológicos de la sociedad moderna.
- El fracaso en ejercicios, problemas y pruebas que generan una estela de baja autoestima y confianza.

Las actitudes están estrechamente ligadas a las creencias, que incluso se toman de los ámbitos familiares y culturales de la sociedad. Conocer estas creencias y revertirlas hacia otras de mayor positividad hacia las Matemáticas debe ser un propósito a incorporar en todos los niveles educativos. Identificar y transformar las percepciones negativas en positivas debe ser parte de los fines de una educación anclada en los requerimientos de la sociedad en que vivimos.

Las actitudes que se desea promover son:

Perseverancia. Una de las principales actitudes que se busca potenciar es aquella que hace del trabajo, la dedicación y la persistencia el medio para abordar las Matemáticas. Lejos de ser un asunto para personas superdotadas, lo cierto es que las destrezas matemáticas se entrenan y desarrollan.

Confianza en la utilidad de las Matemáticas. Es constante el reclamo por visualizar la utilidad de estos aprendizajes para la vida. Con la contextualización activa se ofrece una valiosa oportunidad para permitir de forma perspicaz un vínculo con la realidad estudiantil. El uso de tecnologías digitales diversas resultará también un instrumento para favorecer esta comprensión del contexto y su cercanía con el entorno. De la misma manera, el progreso en la competencia matemática general para resolver problemas permite fomentar esta percepción y actitud.

Participación activa y colaborativa. Lograr que cada estudiante se comprometa en la construcción de su propio aprendizaje es una condición básica. La organización de la lección debe ofrecer oportunidades para la participación estudiantil activa e interactiva.

Autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas. Muchas personas sienten que fracasan al no poder abordar con éxito tareas matemáticas. Con la presencia de escaleras pedagógicas apropiadas y la existencia de niveles de profundidad distintos se tendrá la posibilidad de dar forma a las exigencias personales para buscar el desarrollo de esta autoestima.

Respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas. Si bien no todas las personas van a relacionarse con las Matemáticas de la misma manera en sus vidas ni todos van a tener las mismas habilidades para su manejo, es importante que se desarrolle un respeto del lugar que ocupa en el conocimiento y la cultura de la humanidad. Para eso resultan sustanciales los elementos que se aporte a la reflexión, recurriendo a múltiples medios como la historia, la filosofía, la ingeniería, las artes y otras disciplinas en las que las Matemáticas son parte fundamental.

Al igual que sucede con las capacidades matemáticas, el progreso de las actitudes y creencias positivas hacia las Matemáticas se debe promover en la acción de aula a través de la intervención docente, se deben tener en mente estos propósitos en las diversas tareas matemáticas. De la misma manera, la contextualización, resolución de problemas, tecnología y la historia amplían las posibilidades para apreciar el papel de las Matemáticas.

Historia de las Matemáticas

Otro de los ejes disciplinares es el uso de Historia de las Matemáticas en la enseñanza.

Como los objetos matemáticos corresponden a las formas o instrumentos mediante los cuales los seres humanos organizan los fenómenos de su entorno o responden a sus retos, es relevante conocer cómo ese proceso se ha desarrollado. Aquí se subrayan los aspectos constructivos, activos y dinámicos de los objetos matemáticos; son producciones influidas por contextos sociales y como respuesta a las condiciones de su medio.

Es relevante para la perspectiva de este currículo: el trabajo con problemas en contextos reales busca que en el aula se reinventen o reconstruyan los conceptos y procedimientos matemáticos que se estudian. Entrar en contacto con la historia de la construcción de esos objetos matemáticos favorece su aprendizaje.

La Historia de las Matemáticas permite romper con el esquema de que las Matemáticas son una colección de axiomas, teoremas, pruebas y donde lo esencial es la claridad lógica de sus argumentos. Al colocar los objetos matemáticos en contextos socioculturales se permite visualizar la participación de heurísticas, dudas, errores, concepciones equivocadas e incluso la existencia de retrocesos cognoscitivos en algunos campos. Muchas de las ideas matemáticas han dependido siempre de situaciones contextuales y del momento en la historia, como por ejemplo el significado de prueba, rigor, evidencia, etc. La Historia de las Matemáticas apuntala una visión humanista de las Matemáticas en cuanto subraya su carácter de construcción sociocultural. Fortalecer esta aproximación contribuye a una formación en concordancia con fines de la educación costarricense.

Se deben tener en cuenta muchas más dimensiones que aquellas asociadas sólo a los resultados o desarrollos matemáticos abstractos, también son relevantes las motivaciones individuales o colectivas, las condiciones materiales y sociales de una realidad específica; en la acción pedagógica se deben incluir las Matemáticas en su contexto, y esto apela a la Historia.

No se propondrá aquí la Historia como contenido a evaluar, para así ofrecer flexibilidad al gestionar su introducción, en un medio educativo nacional donde el uso de la historia de las Matemáticas no ha formado parte relevante de los programas escolares ni de las tradiciones pedagógicas.

El uso de la Historia de las Matemáticas complementa los otros ejes y permite reforzarlos. Hay una sinergia. El impacto más importante del uso de esta disciplina, sin embargo, no se puede observar en relación con habilidades específicas sino más bien en el mediano y largo plazos, pues es poco a poco que se van comprendiendo sus límites y perspectivas.

La Historia de las Matemáticas no sólo ofrece recursos muy valiosos para la acción de aula sino que potencia una perspectiva y una valoración sobre la disciplina, que es relevante para el aprendizaje efectivo y, más aún, para una comprensión culta de las Matemáticas, un imperativo para toda persona en el escenario en que vivimos.

III. GESTIÓN Y PLANEAMIENTO PEDAGÓGICOS

La forma como se interpreta y desarrolla el currículo en el aula se llama gestión curricular, en la que intervienen varios factores. Por una parte, las condiciones socioeconómicas y culturales, individuales y colectivas, con fortalezas y debilidades; por otro lado intervienen los medios, normas y recursos generales que aportan las instituciones educativas nacionales además del entorno propiamente educativo (docentes de otras materias, administrativos, personal de apoyo). En ese contexto es que se desarrolla la implementación, cuya parte central está en el estilo con que se organiza la acción de aula.

Este capítulo abordará la gestión y el planeamiento educativo en varias secciones:

- La organización de las lecciones.
- Indicaciones generales.

La organización de las lecciones

Como se ha enfatizado, la mediación pedagógica es decisiva para el logro de los propósitos educativos que se plantea, por eso aquí se sugieren opciones para gestionar pedagógicamente la acción en las aulas costarricenses.

Un estilo para organizar las lecciones

Aquí se sugiere un estilo para organizar las lecciones donde se apoye la multidireccionalidad de los aportes estudiantiles y docentes, donde haya una participación activa y una construcción colectiva de significados, para así activar procesos matemáticos que hagan progresar la competencia matemática.

En el desarrollo de las lecciones hay dos etapas que se pueden distinguir por los propósitos de la enseñanza y aprendizaje:

- Etapa 1: el aprendizaje de conocimientos.
- Etapa 2: la movilización y aplicación de los conocimientos.

La primera etapa es aquella en la que se va a realizar el aprendizaje de conocimientos nuevos, la segunda ocurre una vez realizada la primera y busca reforzar y ampliar el papel de los aprendizajes realizados. Esta última etapa puede realizarse en cualquier momento posterior, no necesariamente de forma inmediata a la primera. En la primera etapa sí resulta conveniente que se realice en una lección o en una secuencia de lecciones.

Se propone aquí un estilo de organización de la lección[16] donde se promueve la introducción y el aprendizaje de los nuevos conocimientos siguiendo cuatro pasos o momentos centrales:

1. Propuesta de un problema.
2. Trabajo estudiantil independiente.
3. Discusión interactiva y comunicativa.
4. Clausura o cierre.

1. *Propuesta de un problema.*

En esta primera fase se coloca como un punto de partida un problema (contextualizado cuando resulte pertinente), un desafío inicial o una actividad para provocar la indagación.

Esta propuesta supone una escogencia apropiada con base en el lugar que ocupa el contenido y las expectativas de aprendizaje dentro de la programación del curso y las condiciones específicas del grupo de estudiantes con el que se trabaja.

2. *Trabajo estudiantil independiente.*

En esta fase se ofrece tiempos para el trabajo individual, en parejas o en subgrupos.

En la misma se dan varias subfases:

- apropiación del problema,
- formulación de estrategias-hipótesis-procedimientos,
- resolución del problema o investigación estudiantil.

Esta fase se consigna como una "*fase independiente*" en cuanto que no hay una intervención docente directamente y se deja a la persona enfrentar el problema por sí misma. No hay aprendizaje significativo sin esta etapa de confrontación con el problema. Al realizarse en el aula, sin embargo, es necesaria una acción docente apropiada, precisa y activa.

En esta fase la persona debe conocer alguna estrategia que le permita resolver el problema, pero no aquella que se base en el conocimiento que se desea enseñar. Por otra parte, conviene que el problema pueda permitir el uso de varias estrategias.

3. *Discusión interactiva y comunicativa.*

Con la guía docente, este tercer momento permite espacios para la valoración y contrastación de resultados, soluciones o elaboraciones aportadas, entrando en juego la argumentación y la comunicación.

4. *Clausura o cierre*

Esta *clausura* o *cierre* permite una actividad que "concluye" pedagógicamente el tema o los contenidos trabajados. Se trata de una síntesis cognoscitiva fundamental para el aprendizaje: por medio de esta acción docente se ofrece un "vínculo" con el saber matemático que ha construido la comunidad profesional de matemáticas. Es importante que esta clausura no sea artificial o alejada del proceso recién vivido.

Se trata de la adquisición y estructuración de conocimientos (conceptos, procedimientos, métodos) que se usaron a lo largo del proceso. Se confronta con el saber conocido aunque de manera accesible. Aquí se puede incidir sobre las estrategias si hubiera varias, introducir un análisis crítico de las acciones realizadas y proponer actividades complementarias que fortalezcan la comprensión de los conocimientos trabajados. Resulta conveniente que se reformulen por escrito los nuevos conocimientos adquiridos, siempre con la ayuda docente.

En la etapa 2 (de movilización y aplicación de los conocimientos aprendidos) se trata de obtener que se trabajen de forma mecánica algunos de los procedimientos aprendidos, que amplíen su dominio de las formas de expresión o representación de los conocimientos como fórmulas, símbolos, gráficas y diagramas. Y también incluye la aplicación de los nuevos conocimientos en contextos diferentes. Es una etapa en la que se puede realizar conexión con otras áreas y alguna reflexión adicional. En esta etapa se plantea la evaluación de los conocimientos aprendidos. Es importante que no se incurra en repeticiones excesivas y desarrollo de actividades sin interés, deben ser tareas para reforzar un conocimiento aprendido, ya que siempre es posible encontrar problemas y acciones que complementen, señalando aspectos poco desarrollados o mostrando caminos motivadores de aplicación de estos conocimientos.

El desarrollo y la combinación de estas etapas 1 y 2 e incluso las cuatro fases de la primera etapa son parte del planeamiento docente. No deben verse de manera lineal ni como una secuencia obligatoria. Es conveniente comenzar una lección por medio de un problema, pero antes de ir a un tema nuevo puede empezarse con la movilización y aplicación de conocimientos aprendidos que se juzguen necesarios para avanzar en los nuevos aprendizajes. Siempre se dependerá de la naturaleza de los tópicos y de las condiciones en el aula.

Este estilo de organización de las lecciones es transversal en la enseñanza de los temas matemáticos que componen el programa escolar. Pero es más que eso: se puede desarrollar en otras materias. El entrenamiento en la metodología propuesta promueve además el desarrollo de capacidades para realizar investigación en otras Ciencias naturales o sociales y en las humanidades. Eso es así porque el método seguido es similar al que domina en la construcción de conocimiento, es decir en la investigación: problema, planteo-hipótesis-conjetura, resolución, contrastación de soluciones, consignación de resultados en relación con el saber.

Consideraciones sobre el estilo para organizar las lecciones

En este enfoque los problemas debidamente contextualizados constituyen una fuente de la que parte el proceso de aprendizaje. Estos problemas sirven como situaciones no sólo para aplicar conceptos o procedimientos matemáticos sino también para construirlos. De lo que se trata es que se puedan desarrollar las Matemáticas necesarias en el problema además de la comprensión de las acciones que realizan. Se realiza una actividad en la cual se pasa de establecer estrategias muy cercanas al contexto específico usado hacia otras de mayor generalidad. Cuando esto sucede se apela a un modelo que puede ser usado en otras situaciones, para resolver otros problemas (diferentes aunque parecidos). Mayores niveles de generalización y abstracción ofrecerán posibilidades matemáticas más amplias.

En este estilo de organización de las lecciones se dan interacciones tanto entre estudiantes y docentes como entre estudiantes: se presentan diálogos matemáticos. Es relevante proporcionar la información suficiente para que cada estudiante tenga a su disposición los antecedentes y la indagación que plantea el problema, para luego clasificar, interpretar y construir.

Es medular una intervención docente en términos de guía, asesoramiento y formulación de preguntas apropiadas pero con plena conciencia del momento en que debe actuar y en el que se debe dejar confrontar el problema. No conviene ofrecer la respuesta o la ruta de solución al problema, pues se quita la posibilidad de activar las acciones cognitivas que son las que van a provocar aprendizaje y desarrollo de capacidades matemáticas. Sin embargo, en ciertos casos se tendrá que ofrecer soluciones y respuestas (cuando la o el estudiante no pueda actuar de manera autónoma). De lo que se trata es de tener una perspectiva general donde se busque generar esta acción independiente.

Conviene que las indicaciones sean apenas las necesarias para que se siga la actividad; estas indicaciones deben ser ajustadas individualmente. Se busca crear una cultura diferente a la que es frecuente entre estudiantes, docentes y padres de familia: el trabajo docente no se debe ver como el de “resolverle” los problemas a cada estudiante. Este estilo promueve u “obliga” a comprometerse en el aprendizaje y a tener una actitud participativa.

Un asunto importante: un mismo problema puede servir a fines distintos según las condiciones estudiantiles, si ya se dominan los conceptos y procedimientos matemáticos que involucra el problema se trata más bien de un ejercicio de reforzamiento o de la aplicación sencilla de un contenido. Los problemas en la afirmación de aprendizajes ponen en movimiento aprendizajes logrados previamente. Por eso es fundamental una acción docente que identifique con precisión el papel que un problema puede jugar con base en el contexto estudiantil.

Los problemas que se presentan deben tener cierta complejidad, suponiendo que no se poseen todos los medios (conceptos o procedimientos) para resolverla. Precisamente en esa confrontación se podrá acceder o elaborar los recursos teóricos que den solución al problema planteado.

En este estilo las personas se ven confrontadas a distintos tipos de tareas y exploraciones, con la acción docente se ven motivadas para encontrar respuestas o condensar sus aportes realizando los procesos matemáticos de *Representar*, *Razonar y argumentar*, *Comunicar* o *Conectar*. De entrada se trabaja directamente con el planteamiento y resolución de problemas, que con un énfasis en los contextualizados promueve la identificación, uso y diseño de modelos matemáticos sencillos, lo que apoya el desarrollo de las capacidades matemáticas.

Este estilo obliga a una preparación cuidadosa de la lección, involucrando la escogencia de los problemas, los tiempos a destinar para cada paso y la acción docente en cada momento, que no es solamente guía general para la construcción de aprendizajes automáticos sino que posee un carácter central en la interacción social y cognitiva de aula.

Este desarrollo de la lección supone:

- *metodologías* pedagógicas o didácticas específicas,
- *gestión* apropiada del programa de estudios (su planeamiento y realización en tiempos y condiciones precisas),
- una *evaluación* adaptada al estilo de organización de las lecciones.

Ha sido común establecer los contenidos escolares dividiendo cada uno en pequeñas partes para las que se ofrecen procedimientos mecánicos y casi sin sentido. La enseñanza en ese esquema consiste en reproducir estos procedimientos sin mucha comprensión del significado de los mismos. En el estilo que se propone aquí la idea es otra: que se planteen problemas de cierta complejidad y que las personas no sólo sean receptores pasivos sino participantes activos en el aula. De igual manera, se propulsa una actividad en las lecciones para que cada estudiante contraste y comunique sus ideas y soluciones, activando así procesos matemáticos relevantes.

Debe existir una gran flexibilidad en el uso de este estilo, lo que dependerá de las condiciones y del contexto de aula así como del nivel educativo en que se enseña, pero organizar la acción de aula de esta manera puede ofrecer una estrategia general motivante para la mayoría de docentes en el país. Es una estrategia que aunada a la formación continua y al aporte de materiales especiales permitiría avanzar en los aprendizajes significativos, la potenciación de capacidades matemáticas y la construcción de ricas experiencias de aula.

Otro asunto: no se trata de usar muchos problemas en una lección, más bien unos pocos a partir de los cuales construir con profundidad los aprendizajes.

Finalmente, es un estilo que permite enriquecer la labor educativa con el correr del tiempo de manera precisa: escogencia de mejores problemas, anticipación de posibles soluciones o errores recurrentes, investigación docente para mejorar la presentación de los problemas y la organización de la lección.

La pregunta dirigida

En sintonía con este estilo general se puede desarrollar una estrategia de conducción de la lección mediante una indagación dirigida hacia toda la clase:

- formulación de preguntas apropiadas sobre un tópico,
- tiempo de espera para que se ofrezcan respuestas,
- reformulación de las preguntas para avanzar en los distintos aspectos del tópico, y

- repetición del proceso hasta llegar a un cierre cognoscitivo y pedagógico del tema.

Esta metodología pedagógica exige un papel docente muy activo y atento, acude a los pasos del estilo sugerido (problema, trabajo estudiantil, comunicación y contrastación de respuestas y clausura) pero de una manera más dinámica, que puede reiterar la secuencia de los pasos en poco tiempo. Es un método que se puede usar en ciertos momentos en el aula, definidos ya sea por el tópico o por las condiciones de la clase (por ejemplo, clases numerosas).

Los elementos clave: las preguntas deben capturar el interés estudiantil, la secuencia debe generar variaciones crecientes en el tratamiento del tema y en la comprensión de los distintos elementos del tópico considerado. Las preguntas siempre deben formularse tomando como partida las respuestas estudiantiles.

Indicaciones generales

En esta sección se trata de ofrecer algunas sugerencias generales para la elaboración de planeamiento didáctico y el desarrollo de las lecciones.

Integrar habilidades

Una de las orientaciones relevantes para el desarrollo de la acción de aula con este currículo refiere al manejo de los contenidos y las habilidades específicas. Las habilidades no deben verse de manera desagregada. No se trata de objetivos operativos que deben trabajarse en el aula necesariamente por separado. Por el contrario, lo conveniente es tratar de integrar las habilidades específicas en todas las actividades de aprendizaje: planeamiento, desarrollo de la lección y evaluación. Por medio de un solo problema es posible abordar varias habilidades.

Plazos educativos

De manera consciente o inconsciente cada docente adopta una estrategia de implementación, según la cual debe tomar en cuenta varios plazos (corto, mediano y largo) y los siguientes elementos.

- Las condiciones generales donde se desenvolverá la lección (contexto socioeducativo, localidad, recursos y materiales disponibles, nivel educativo, cantidad de estudiantes, etc.), que intervienen de diferentes maneras en la construcción y el desarrollo de la lección.
- El lugar que ocupa cada lección en el desarrollo de los fines curriculares. La lección debe entenderse incluida en secuencias de lecciones sobre uno o varios temas, es decir el cronograma curricular donde se colocan los tópicos y tiempos asignados en el año escolar y que exigen una visión estratégica.
- Un planeamiento de los distintos momentos de la secuencia de fases que se vaya a desarrollar.

Variables de la lección

Hay varios asuntos muy importantes para el diseño de la lección y que suelen llamarse *eventos de la lección.*

Tabla 3. Eventos de la lección

Comienzo de la lección e introducción de contenido.	El comienzo de la lección es decisivo. Se debe escoger con mucho cuidado el problema que dará inicio a la lección, lo que está asociado a la forma de introducir el contenido. Se debe identificar la naturaleza de los problemas que sean más convenientes en función del área matemática, del nivel educativo, del tópico a tratar, así como de las capacidades y procesos que se quiera favorecer. No sólo es importante seleccionar un problema apropiado a los contenidos, sino la forma misma con que se plantea: un enunciado es lo más simple, pero pueden usarse imágenes o medios tecnológicos.
Los problemas que se plantean en la lección.	Es necesario identificar otros problemas que se pretende introducir durante el curso de la lección y determinar los fines que se buscan con ellos, pues tendrán una función distinta a aquellos que sirven para iniciar la lección.
Las acciones docentes cuando estudiantes trabajan de manera individual, en parejas o en subgrupos.	Estas acciones deben preverse, o al menos conviene diseñar una actitud general: por ejemplo, cuándo dar sugerencias y de qué tipo.
Participación de estudiantes en la pizarra.	La participación en la pizarra frente al conjunto del grupo refuerza la competencia de comunicación matemática, y la seguridad y confianza de cada estudiante; sin embargo debe hacerse con cuidado para no ofrecer una visión equivocada de los contenidos tratados. Siempre es necesario que cada docente haga el cierre pedagógico para mostrar los contenidos matemáticos con precisión.
Final de la lección.	También es crucial la forma como se hace el final de la lección. Se debe decidir si se hace una síntesis cognoscitiva en ese momento o si se espera a hacerla en otra lección.
El papel de la síntesis cognoscitiva.	La síntesis o cierre de los contenidos puede hacerse enfatizando su consistencia con los elementos que se desarrollaron en esta lección, subrayando la conexión de los mismos con otros temas que se verán en otras lecciones. Esto depende del tópico a enseñar y del lugar que ocupe en la secuencia de lecciones. Esta síntesis resulta imprescindible que se haga ya sea en la misma lección o en una no muy distante de aquella en la que se trabajó, ya que se podría perder el "amarre" cognoscitivo que se requiere para provocar el aprendizaje.
Fuente: elaboración propia.	

En estos eventos se debe tomar en cuenta en el planeamiento pedagógico.

La evaluación en el planeamiento. También las características de la aproximación metodológica deben ser consistentes con la manera en que se pretende evaluar el rendimiento estudiantil; hay que pensar desde un principio en cómo se evaluará el tópico.

Tomar en cuenta la diversidad. Como existen distintos talentos e inteligencias, es muy importante que se use el tiempo de manera distinta para cada subgrupo de estudiantes o diferentes individuos. Eso se puede hacer por medio de una modulación específica de las sugerencias o indicaciones que puede dar. Aquí al menos dos dimensiones son relevantes: las diferencias cognitivas asociadas a las diversas aproximaciones que las y los estudiantes pueden tener para aprender matemáticas, y por otro lado, las relacionadas con el talento y la dedicación al estudio (no todos poseen los mismos talentos en las Matemáticas) o la disposición para dedicarle mucho tiempo. Algunas personas tienen mayor facilidad para representaciones visuales de los conceptos y procedimientos matemáticos, otras poseen mayor facilidad para aproximaciones secuenciales, sistemas numéricos, etc. No es sencillo identificar en las personas esas diferencias cognitivas pero es vital tener presente el asunto, pues puede permitir un mejor aprovechamiento de la acción de aula para todos. Responder a esto se ve favorecido dentro de la lección cuando se seleccionan procesos relacionados con objetos matemáticos que poseen diversas representaciones matemáticas. El tratamiento de las diferencias en talentos y disposición al estudio es un asunto más complejo.

Incluir comprensión conceptual y destreza procedimental. En el planeamiento pedagógico es imprescindible reflexionar sobre los mecanismos para que el problema permita generar comprensión conceptual, a la vez que el dominio de procedimientos. Procedimientos y comprensión conceptual son decisivos para el desarrollo de la competencia matemática, sin embargo la comprensión de conceptos permite asimilar mejor los procedimientos. De igual manera, es posible fortalecer la competencia matemática a partir de procedimientos con modificaciones oportunas de sus distintos elementos.

Interacciones en la institución

Si bien se efectúa la implementación del currículo de forma individual, es oportuno que varias de estas dimensiones se realicen con la colaboración de más docentes de la institución que enseñan matemáticas. La planificación pedagógica, el diseño de lecciones, la valoración de los resultados y experiencias obtenidas en el desarrollo de la lección así como la incorporación de conocimientos nuevos, pueden ser temas para sesiones regulares en cada institución. Estas actividades permiten ampliar y profundizar la acción en el aula que realiza cada docente, es un medio para llevar hacia adelante un programa continuo de investigación para la acción de aula.

IV. METODOLOGÍA

En la Educación Matemática, metodología y gestión han tenido un gigantesco progreso, en gran parte por la consolidación de la misma como una disciplina científica independiente de las Matemáticas y de la pedagogía general. Más allá de esto, muchas estrategias metodológicas y de labor de aula se han replanteado gracias a las tecnologías digitales.

En este capítulo se ofrecerán indicaciones generales sobre varios componentes del currículo y la acción de aula. Se presentan en seis secciones:

- Sobre áreas matemáticas
- Sobre procesos matemáticos
- Sobre la diversidad de estudiantes
- Sobre el uso de tecnologías
- Sobre actitudes y creencias
- Sobre el uso de la Historia de las Matemáticas

La amplia colección de sugerencias e indicaciones que se consigna aquí es una guía y un reservorio de recursos. No se pretende sustituir la labor profesional en el diseño educativo, ni ofrecer un nivel inadecuadamente específico de las acciones metodológicas. En algunos casos, solamente se dan lineamientos muy generales. En los planes de estudio se ofrecen indicaciones más específicas pero siempre deberán verse como sugerencias y como una orientación a usar de forma flexible y creativa.

Sobre áreas matemáticas

Resulta adecuado comenzar con orientaciones sobre las áreas matemáticas, pues éstas son las que organizan los planes de estudio. En primer lugar, es relevante visualizar el lugar que ocupan relativamente en los programas, y ofrecer seguidamente algunas indicaciones en cada una.

Las cinco áreas matemáticas seleccionadas participan con distinta intensidad. La siguiente gráfica de estos programas de estudios ha sido construida tomando en cuenta los lugares relativos que se pueden calcular con base en los tiempos que se espera sean dedicados a los tópicos integrados en las mismas.

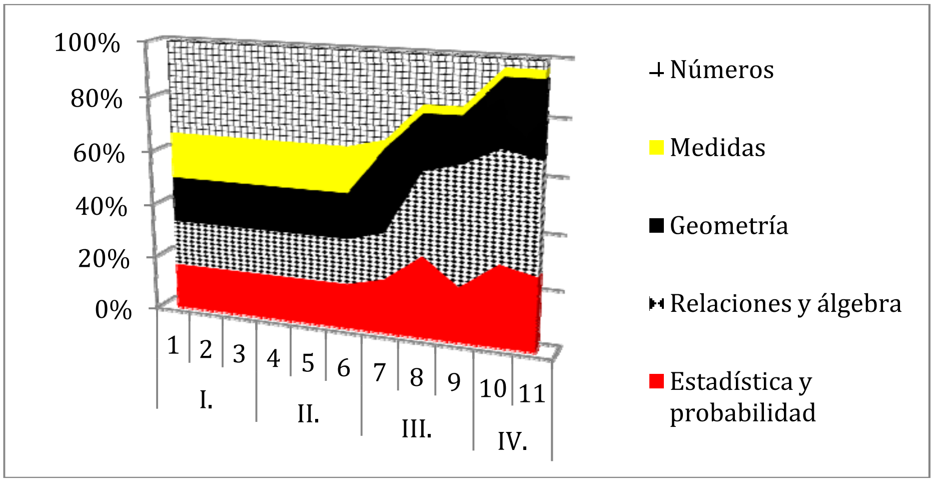


Figura 2. Las cinco áreas matemáticas en los cuatro ciclos educativos.

Relaciones y Álgebra es constante en los dos primeros ciclos, se duplica en el tercero y posee el mayor espacio en el Ciclo diversificado. *Geometría* es constante en la Primaria y aumenta un poco en los siguientes ciclos. *Números* ocupa un lugar muy grande en los dos primeros ciclos, es relevante en el tercero y disminuye mucho en el diversificado. *Estadística y Probabilidad* es constante en Primer y Segundo ciclos, aumenta en el tercero y el diversificado, sin llegar a superar el lugar de *Relaciones y Álgebra*. *Números*, *Medidas* y *Geometría* ocupan el 70% de la formación en la Primaria.

Además de una integración entre los diferentes niveles y ciclos educativos por medio de áreas matemáticas comunes, aquí se ofrecen algunas perspectivas que se separan hasta cierto punto de los programas de estudios anteriores:

- Integración de los temas de números y operaciones con un énfasis en la realización de cálculos y fortalecimiento del sentido numérico.
- Un enfoque sobre el área de *Medidas* que busca fundamentar aprendizajes matemáticos y establecer conexiones en todos los niveles educativos.
- Un enfoque en *Geometría* que incluye énfasis en el sentido espacial, el movimiento y el uso de coordenadas y una relación especial con el Álgebra.
- Integración de los temas de álgebra, relaciones y funciones y su inserción desde la Primaria en un proceso gradual.
- Potenciación del lugar de *Estadística y Probabilidad* desde el Primer ciclo hasta el diversificado.

En lo que sigue se ofrecen algunas indicaciones generales sobre cada área.

Números

Se busca un enfoque más integrado de esos números, operaciones y cálculos, una perspectiva especial de estrecha conexión entre las operaciones y las representaciones numéricas. En la Secundaria, a veces los grandes conjuntos numéricos ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) se han colocado de una manera abstracta, que apela más a la memorización de propiedades que a la utilidad de los números y sus operaciones. Se desea enfatizar un sentido muy práctico de los números y sus propiedades, especialmente mediante la resolución de problemas extraídos del entorno. Un tratamiento conjuntista se guarda para 10º Año y se incluirá en el área de *Relaciones y Álgebra,* aunque con utilidad también en *Estadística y Probabilidad.*

Se pretende darle mayor relevancia a los cálculos, que permiten desarrollar habilidades o destrezas numéricas. En ese sentido, se propone fortalecer el cálculo mental y la estimación. Esta visión se asocia con la resolución de problemas y la contextualización activa. El cálculo mental, por ejemplo, se puede cultivar desde un primer momento como un mecanismo especial para el dominio de propiedades numéricas y como entrenamiento de destrezas mentales; sin embargo, no conviene caer en la tentación de sobredimensionar el valor de los procedimientos por encima de la comprensión conceptual. Sin un dominio de procedimientos se afectan las posibilidades para resolver problemas; a la vez, sin una comprensión conceptual los procedimientos se olvidan con mayor rapidez y no se logran aprendizajes significativos. De igual manera, las actividades de cálculo en el aula permiten fortalecer la búsqueda de soluciones distintas. El registro, explicación, crítica y comunicación de estrategias de cómputo permiten favorecer procesos cognitivos importantes, que ayudan en el desarrollo de la competencia matemática.

Números juega un papel central en el Primer y Segundo ciclo, es notable en el Tercer ciclo y se desarrolla transversalmente a otras áreas matemáticas en el Ciclo diversificado. En 7º y 8º Año se introducen los números enteros y racionales y se da cierto valor a las diversas representaciones decimales de los racionales abriendo el camino a la introducción de los números irracionales. El concepto de irracional es complejo desde muchos puntos de vista (epistemológico, cognitivo, pedagógico) y su introducción debe hacerse con cautela.

Se busca robustecer un *sentido numérico*, mediante una apropiación del valor absoluto y relativo de los números; esto refiere, por ejemplo, al uso de los números para representar dimensiones o entidades de la realidad, a la estimación numérica de valores y de las operaciones aritméticas, a la “razonabilidad” de cálculos. El sentido numérico se fortalece con un dominio de las operaciones y de las propiedades que éstas tienen, por ejemplo con la descomposición de números usando las propiedades del sistema posicional y decimal ($15 = 10 + 5$). Un sentido numérico permite ver que una suma como $\frac{10}{11} + \frac{12}{13}$ se aproxima a 2 sin necesidad de hacer los cálculos. Otro ejemplo: aceptar que la media de pesos de la gente sea 456 kilogramos mostraría falta de sentido numérico. De igual manera, el sentido numérico, estrechamente asociado a operaciones y cálculos, es el que permite decidir sobre cuál es la estrategia más adecuada para enfrentar un problema: cálculo mental, estimación aproximada, trabajo sistemático con papel y lápiz, el uso de calculadora o incluso la computadora.

Uno de los propósitos centrales para esta área es potenciar la representación múltiple de números como: 18 = 10 + 8 = 9 + 9, o comprender por ejemplo que los racionales se pueden representar como fracciones, decimales, porcentajes: 1/2 , 0,50 y 50%.

Se quiere que se distingan progresivamente las propiedades de ciertos números: pares, impares, primos, cuadrados, etc. Al avanzar, ya en la Secundaria, deberán identificar y aplicar las propiedades de distintos sistemas numéricos de manera abstracta. Por ejemplo, que algunas propiedades se preservan en unos sistemas numéricos pero no en otros, como sucede con la multiplicación de naturales, que aquí siempre es mayor o igual a los números que se multiplican, pero no sucede así necesariamente cuando estos números son racionales (por ejemplo números entre 0 y 1).

Otro elemento que se desea enfatizar aquí desde el Primer ciclo es el aprendizaje de las relaciones entre las distintas operaciones, lo que prepara el camino para el aprendizaje de propiedades más abstractas, que se estudiarán en el Álgebra.

La introducción de las operaciones toma en cuenta criterios cognitivos, por eso la división que es más compleja que la suma y la multiplicación se debe introducir de manera adecuada en distintos años. En el 1er Año se da un énfasis a la suma y la resta (asociadas), en el 2º a la multiplicación y en el 3º se inicia la división. Si bien se propone una aproximación espiral en la introducción y tratamiento de tópicos matemáticos, también se busca en algunos momentos tratar con mayor amplitud y conexión ciertos contenidos, evitando repeticiones inadecuadas en distintos años lectivos que no provocan aprendizajes significativos y a menudo sobrecargan de contenidos algunos niveles del programa de estudios.

En el plan de estudios se trasladó el MCM y el MCD hacia 7º, introducidos por la teoría de números para favorecer un tratamiento más amplio.

Un asunto importante: en el Primer ciclo se incluye ahora el tratamiento con números menores de 100 000, para sintonizar con los reclamos de un escenario en que los números más grandes ocupan un lugar cotidiano.

Por otro lado, el tratamiento de fracciones y decimales se concentra en el Segundo ciclo. El Primer ciclo se destina para un fuerte entrenamiento en números naturales.

En los planes de estudio se usará el conjunto de números naturales incluyendo el cero, es decir se usará: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Esto ha sido lo tradicional en Costa Rica.

Geometría

Se considera la Geometría como organizadora de los fenómenos del espacio y la forma, y en particular se ven los objetos geométricos como patrones o modelos de muchos fenómenos de lo real. Es decir, no se privilegia una aproximación a la Geometría basada en el estudio de objetos ideales y abstractos, sino más bien una que asuma la relación geométrica con los entornos espaciales. Esto busca fortalecer una mayor visualización en la Geometría: establecer contactos estrechos entre representaciones visuales y las formas geométricas. Se apela de esta forma a la construcción de los aprendizajes geométricos en fases crecientes que van desde lo intuitivo, manipulable, pictórico y visual hacia las representaciones más generales y abstractas. Se refuerza la necesidad de ascender por medio de distintos niveles en los aprendizajes geométricos.

Lo anterior está asociado con un enfoque que busca darle mayor presencia al "sentido espacial", es decir la identificación, visualización y manipulación de las formas en el espacio. De esta manera arranca el sentido de figuras, cuerpos y sólidos desde los primeros años, con las representaciones físicas y objetos del entorno que se pueden acompañar por medio del uso de tecnologías. Por ejemplo, la representación de figuras tridimensionales, su traslación, el uso del color, texturas, sonidos y todas las posibilidades que el recurso multimedia puede proporcionar, en caminos radicalmente nuevos para abordar la enseñanza y aprendizaje de la Geometría tridimensional. Esto se hace de manera gradual en todos los programas desde el Primer ciclo. No es conveniente enfatizar el uso de fórmulas sino más bien la visualización de las formas en el espacio.

Se pretende una introducción de la geometría de coordenadas y analítica adecuada a los distintos niveles cognitivos. La geometría analítica presente en esta área se reduce a la representación en sistemas coordenados de puntos y de algunas figuras geométricas como el círculo. Se estudia la simetría axial, que posee muchos ejemplos interesantes en la realidad, y se introducen, en el Ciclo diversificado, algunas transformaciones en el plano (traslaciones y rotaciones). La introducción de estos tópicos favorece los vínculos entre Geometría y Álgebra, una dimensión importante de las Matemáticas contemporáneas.

Se propone introducir el movimiento de las formas geométricas, uno de los temas importantes que se desarrolló desde los siglos XVII y XVIII abriendo una nueva orientación en la Geometría (ampliando revolucionariamente los resultados de la Antigüedad). El movimiento de puntos y entidades geométricas permite construir nuevas entidades (curvas por ejemplo) y visualizar las usuales de otras maneras: un sentido dinámico de algunas propiedades geométricas como las posiciones relativas y transformaciones de puntos y formas. El tratamiento del movimiento en Geometría había sido difícil de incorporar en los programas escolares por las limitaciones para el trazado y su presentación gráfica. Con las tecnologías digitales esto cambió radicalmente. La presencia de software diverso de geometría dinámica y de representación geométrica desde hace bastantes años permite aproximarse a los fenómenos geométricos incluyendo esta propiedad esencial. Pero es más que eso: la tecnología permite replantear la lógica del plan de estudios y de muchos de sus contenidos en la Geometría y en otras áreas. Este sentido dinámico se puede introducir en congruencias, semejanzas y simetría lineal o rotacional de objetos que se transforman, lo que permite conexiones estrechas con el pensamiento *funcional*.

Un tratamiento con coordenadas que se apoya en el uso de tecnologías permite oportunidades muy ricas para la representación múltiple de sus objetos geométricos, una de las características importantes de las Matemáticas. Por medio de las coordenadas se pueden representar y manipular procedimientos algebraicos, objetos y propiedades matemáticas de maneras que son muy difíciles de lograr sin las coordenadas. Por otro lado, las actuales perspectivas de la Geometría se colocan con fuerza dentro del Álgebra y las funciones, y eso mismo permite mostrar la visión moderna de esta disciplina matemática, lo que al mismo tiempo será de gran utilidad para muchos estudiantes al cursar estudios superiores.

En la Primaria se propone trabajar la Geometría mediante aproximaciones muy intuitivas y contextualizadas que se deben formalizar en la Secundaria en ciertos temas. La geometría sintética (sin coordenadas) sigue siendo clave en cuanto a la generación de capacidades de razonamiento y prueba. Se destaca en los primeros ciclos el reconocimiento de figuras y propiedades geométricas, se cultiva el sentido espacial y el estudio en el plano de figuras sólidas. Este tratamiento se profundiza en el Tercer ciclo, especialmente en 8º Año se ofrece un énfasis a los aspectos lógicos y deductivos, es decir al razonamiento, argumentación y prueba. Bajo esta visión se pretende tratar los tópicos de congruencia y semejanza de figuras geométricas, introducidos de manera sencilla por medio del concepto de homotecia (lo que es novedoso), con lo que de nuevo se logra una conexión con la geometría de coordenadas.

En el plan de estudios los temas de esta área, sobre todo en la Secundaria, se han seleccionado con base en el criterio de perseguir el desarrollo de la competencia matemática y a la vez el de proporcionar los contenidos y habilidades instrumentales para una formación profesional posterior. Se excluyeron de la propuesta aquellos contenidos cuyo aporte no favorecía a ninguna de las dos.

La trigonometría se introduce en 9º Año favoreciendo la conexión con la Geometría. Es primordial enfatizar el uso de modelos donde participa la trigonometría.

Medidas

La medida es una característica de algunos objetos físicos (o matemáticos). No todo atributo es medible cuantitativamente, y en el caso de los que admiten la medición siempre hay un *sentido de aproximación.* Tanto por el sujeto que la haga como por el instrumento que se utilice aparece un porcentaje de error. Este es uno de los asuntos clave de esta área. Las medidas están emparentadas con el sentido numérico, con la estimación en particular. Un mismo atributo que es común a varios objetos permite la comparación de mediciones, y por ende apreciar semejanzas y diferencias entre los objetos. En un mismo objeto sus atributos son susceptibles de poseer relaciones cuyo estudio puede hacerse a través de medidas. Por ejemplo, un triángulo dibujado es un objeto que posee perímetro y área, existe una relación entre ambos. Y más aún, cuando se introducen cambios en un atributo puede ser que otros permanezcan invariantes o que cambien de cierta manera; por ejemplo, puede haber varios rectángulos con área de 60 centímetros cuadrados pero con perímetros distintos: se cambian los valores del ancho y el largo pero el área sigue igual.

Se propone el área de las medidas como una fuente muy rica para introducir objetos y procedimientos matemáticos, para hacer conexiones con otras áreas matemáticas y no matemáticas y con muchas situaciones del entorno. Las medidas pueden apoyar el estudio de varios conceptos matemáticos, como el cambio y la invariancia bajo algunas transformaciones. De la misma forma, las unidades de medidas se pueden manipular como variables (especialmente cuando se hacen conversiones de unidades) y por lo tanto ser capaces de motivar un tratamiento por medio de procedimientos algebraicos más generales. Temas como la proporcionalidad matemática o la semejanza de figuras se pueden generar usando mapas, que expresan relaciones de medidas de posiciones mediante escalas diversas. El uso de escalas no lineales, por ejemplo logarítmicas, pueden usarse para crear modelos reales, en los niveles finales de la educación Secundaria.

Las medidas se asocian en el Primer ciclo más al área de *Números* y en el Segundo ciclo a *Geometría,* pero también se requiere para algunos tópicos de *Estadística y Probabilidad*. En el Tercer ciclo y el Ciclo diversificado, *Medidas* se introduce de manera transversal a las otras áreas matemáticas. Esta presencia transversal de medidas en la Secundaria contribuye a un tratamiento contextualizado de varios temas matemáticos y a un sentido de realidad que deben poseer las Matemáticas escolares.

Aquí se han incorporado medidas relativas a dimensiones de la informática como la capacidad de almacenamiento y de velocidad de transmisión de los datos, lo que sintoniza con el entorno informatizado y lleno de tecnología que vivimos.

Relaciones y Álgebra

Hay varias indicaciones relevantes sobre esta área. Las funciones, que usualmente han tenido en el pasado sólo un tratamiento muy abstracto de relaciones entre elementos de conjuntos (correspondencias, dominios, condominios, ámbitos, etc.), se colocan aquí en otra perspectiva más concreta: relaciones de cambio entre 2 variables (que dependen entre sí). Las funciones vistas así están asociadas a relaciones más generales, como pueden ser las relaciones de orden (menor o mayor que) o las relaciones de divisibilidad, etc. Asuntos como la proporcionalidad, los porcentajes, las velocidades o razones de cambio forman parte de esta área.

El concepto de cambio o variación, que también es común al análisis de datos, forma parte central de los temas de esta área. Se podría decir que los procesos de cambio pueden ser modelados por las relaciones y funciones matemáticas, y éstas pueden tener distintas representaciones: gráficas, tabulares, simbólicas.

Otro asunto importante: se favorece un tratamiento “funcional” de la manipulación de expresiones simbólicas, por ejemplo las ecuaciones, la factorización y la simplificación, lo que permite darle significado a varios temas de ese tipo y empezar la formación en este pensamiento funcional desde la Primaria aunque de manera gradual.
La asociación entre funciones y álgebra permite darle coherencia a muchos contenidos que suelen estar dispersos en los planes de estudio usuales.

Los temas de esta área, por ejemplo en el Ciclo diversificado, poseen estrecha conexión y continuidad con la formación profesional en muchas carreras que requieren matemáticas. Por eso, en los últimos años de la Secundaria se insiste en contenidos y habilidades de las funciones, con una fuerte orientación hacia la resolución de problemas y la modelización. Por ejemplo, las funciones trascendentes (exponenciales, logarítmicas) se tratan con esta visión novedosa y estimulante. El aprendizaje y utilización de las funciones en diversos contextos cierra la formación matemática que aporta esta área.

Se ha considerado relevante el uso de tecnologías de cómputo algebraico en temas como la factorización o el manejo de polinomios, ya que dan cabida natural a la participación de nuevos sistemas de software o hardware, y esto entonces se consigna en el replanteamiento de algunos de los contenidos curriculares y sobre todo el enfoque con el que se introducen.

Se integran y concentran los tópicos algebraicos; por ejemplo, se concentra el estudio de lo lineal (ecuaciones y funciones) en el 8º Año y lo cuadrático (ecuaciones y funciones) en el 9º Año. Esto prepara la introducción en 10º Año del estudio abstracto de las funciones. Con esta visión, que ha permeado los programas con relaciones y funciones desde el Primer ciclo y que se profundiza en el Tercer ciclo, se logra con mayor facilidad el aprendizaje de los aspectos más abstractos de las funciones.

Esta área matemática, en conexión con otras áreas en este programa de estudios y con una buena preparación desde la Primaria, se convierte en el corazón de la educación Secundaria.

Estadística y Probabilidad

Estadística y Probabilidad adquiere un relieve mucho mayor en este plan de estudios que en los anteriores. Antes, al desvanecerse en el Ciclo diversificado y al no incluirse probabilidad aplicada o estadística, quedando por fuera de las pruebas del Bachillerato, se quitaban poderosos medios para la comprensión y organización de la información. A partir de los años Noventa se ha generalizado su uso y potenciado su lugar en los programas de los distintos países por su notable presencia en la vida cotidiana. Esta es un área que permite visualizar mejor el papel de las Matemáticas y contribuir con actitudes y creencias positivas en torno a esta disciplina. Por eso esta área posee un lugar estratégico, que alimenta directamente el sentido de la competencia matemática alrededor de la descripción de la realidad y el cultivo de la resolución de problemas en contextos diversos.

La adición de más tópicos de probabilidad en el presente programa busca formar en el pensamiento aleatorio y en el desarrollo de capacidades para abordar el azar, lo impredecible, la incertidumbre, características que participan en el conocimiento y en la vida de múltiples maneras. La probabilidad conecta mucho con *Números* y *Geometría,* y se debe tratar de manera informal en los primeros años para ir avanzando en su abstracción en la Secundaria.

El lugar relevante que se da a esta área obedece al papel que juega la información y el manejo del azar en la sociedad moderna. En el siglo XXI se requiere de personas capaces de comprender, interpretar y usar la información para entender la realidad, resolver distintos problemas y tomar decisiones inteligentes. Los temas de la Estadística y la Probabilidad son cada día un requisito para poder comprender lo que pasa en el mundo y poder actuar. Los tópicos de esta área se introducen de forma paulatina, intuitiva y práctica desde el Primer ciclo y preservando ese tono en toda la educación Primaria. Ya en el Tercer ciclo se repasan y formalizan los conceptos y técnicas introducidas, que se resumen y completan en el Ciclo diversificado. En todo momento, lo que es apenas natural en esta área, las temáticas se presentan a través de problemas reales, que generan conexiones con otras materias como Ciencias y Estudios Sociales, y que permiten favorecer actitudes positivas sobre las Matemáticas.

Algunas consideraciones sobre esta área resultan iluminadoras: por un lado, uno de los temas fundamentales que se desarrolla persistentemente es el de la variabilidad de los datos. Es muy importante insistir en que la representación y modelización de muchos fenómenos se hace por medio de datos, y que los diferentes conjuntos de datos se pueden comparar y así brindar más conocimiento de los fenómenos de partida. De igual manera, un conjunto de datos requiere instrumentos para su descripción (media, mediana, moda, rango, desviación); su enseñanza debe hacerse en buena parte en función de su aplicación en el análisis de la información y resolución de problemas y no como objetos en sí mismos. Esto es relevante, pues a veces se ve equivocadamente la Estadística escolar como colecciones de fórmulas y un manejo mecánico de esos instrumentos.

Las representaciones de fenómenos estadísticos deben pasar de formas simples a más complejas en los distintos niveles de escolaridad, siempre de lo más intuitivo en los primeros años a lo más técnico en los últimos años, sin olvidar que un mismo conjunto de datos permite realizar distintas representaciones.

Un detalle sustancial a tomar en cuenta en la enseñanza de la Probabilidad especialmente en la Primaria es la enseñanza de la diferencia entre los números que representan valores de datos y aquellos valores de frecuencia con que ocurren esos primeros valores. Se encuentra en la esencia de esta disciplina la distinción entre, por ejemplo, que no se pueda predecir que se obtenga escudo o corona al lanzarse una moneda, mientras que sí se pueda determinar la tendencia de un número grande de lanzamientos.

Se sugiere una relación estrecha con el uso de algunas tecnologías digitales, puesto que muchos de los datos pueden y deben “procesarse” por medio de ese tipo de instrumentos. Esto es relevante pues existe un aumento vigoroso en instrumentos tecnológicos de análisis de datos y modelación matemática. Internet proporciona hoy acceso a una variedad de datos que pueden ser explorados en la clase de Estadística.

Un egresado de la educación Secundaria costarricense debe ser capaz de comparar y juzgar en la vida cotidiana la validez de argumentos basados en datos, identificar los errores y distorsiones comunes en los medios de información, descubrir la racionalidad de afirmaciones sobre la probabilidad de eventos, así como manejar las ideas básicas de muestreo y realizar estadísticas aplicadas simples. Al igual que la lectura y escritura, el manejo de la Aritmética, la Geometría, el Álgebra y otras formas de matemáticas han sido parte de la alfabetización de la ciudadanía durante épocas: la Estadística y la Probabilidad deben concebirse como parte de la alfabetización ciudadana en el actual escenario histórico.

Sobre procesos matemáticos

En congruencia con los fundamentos teóricos de este currículo, una vez ofrecidas algunas orientaciones de método sobre los conocimientos y habilidades que organizan los planes de estudio, es relevante brindar sugerencias sobre los procesos matemáticos, es decir formas de comprender, aprender y usar los conocimientos que promueven capacidades cognitivas transversales y la competencia matemática.

Indicaciones para cada proceso

Razonar y argumentar

El proceso se activa en todas las áreas de múltiples maneras, por ejemplo en el estudio de regularidades y patrones, en la justificación de la congruencia de triángulos, la elección de una representación matemática y su manipulación, en la solución de ecuaciones, entre otros. La justificación y prueba son parte esencial de los quehaceres matemáticos y por lo tanto deben ocupar un lugar especial en la formación escolar.

Un lugar relevante lo ocupa la acción de conjeturar, pues es un camino central para el descubrimiento. Se trata en general de plantear una conjetura y buscar los medios para justificarla (en adecuación a cada nivel educativo), ya sea por medio de materiales concretos, diagramas, calculadoras u otros instrumentos. Las conjeturas deberán hacerse sobre tópicos más generales o abstractos conforme se progrese en la formación escolar y de modo creciente se deberán usar las formas matemáticas más precisas o técnicas. La argumentación también debe cultivarse de una manera gradual, primero acudiendo a formas verbales, luego escritas y más tarde simbólicas. Así mismo, se deben ir introduciendo poco a poco las formas de razonamiento por contradicción, inducción, uso de contraejemplos y las diferentes formas de la deducción.

Este proceso se puede reforzar por medio de la actividad de grupo, en la que se contrasten las argumentaciones o justificaciones que aporta cada estudiante, siempre con la guía docente. De igual manera, los errores que se cometen son oportunidades muy útiles para mejorar los procesos de razonamiento matemático y hacer progresar la competencia matemática general asociada.

Plantear y resolver problemas

Hay algunos elementos que vale la pena subrayar. En primer lugar, que no todo problema permite conducir a ideas matemáticas aunque sea interesante o divertido, por eso la acción docente es decisiva para el diseño de problemas apropiados. En segundo lugar, en cada área matemática es posible realizar este proceso de distintas maneras, pero siempre gradualmente. Las estrategias para la resolución de problemas deben ser introducidas no de manera abstracta sino en las instancias específicas en los problemas escogidos: a veces será potenciar el uso de diagramas, otras el reconocimiento de patrones, o la prueba con la exhibición de casos, etc. De igual manera, es necesario entrenar a las y los estudiantes en las diferentes etapas de la resolución de problemas como la comprensión de los mismos, el trazado de planes de acción y la evaluación o monitoreo de las acciones.

El uso de modelos, por otra parte, debe hacerse de forma escalonada con la enseñanza de las diversas estrategias. Las actividades de modelización sólo se pueden dar con un compromiso estudiantil activo que es vital para que la contextualización tenga éxito en la enseñanza. La modelización es una acción que se desarrolla de una manera natural y privilegiada cuando se inscribe en un marco educativo donde es central la organización de las lecciones por medio de problemas.

Comunicar

Este proceso está asociado a una característica esencial de los quehaceres matemáticos: una idea matemática para ser “correcta” debe ser aceptada por una comunidad profesional de matemáticos. Existen reglas específicas para hacer esto, lo cual es importante de incluir en los programas escolares. El proceso sugiere la comunicación en distintos niveles y formas, desde las más simples como verbales o escritas, hasta gráficas, simbólicas y formales.

Debe señalarse que no todo tópico se presta para realizar actividades ricas de comunicación. Por ejemplo, los algoritmos son en ese sentido menos útiles que los conceptos, sin embargo mediante una acción docente adecuada es posible desencadenar comunicación matemática. La comunicación y el pensamiento matemático, en particular la argumentación, están entrelazados en los quehaceres matemáticos. Comunicar obliga a precisar el pensamiento.

En el aula, por ejemplo, se puede usar la comunicación matemática para introducir nuevos conceptos (pidiendo la elaboración de diagramas, de expresión de ideas, de colocación de símbolos y expresiones), y también solidificar el propio pensamiento estudiantil sobre las ideas que se introducen en la clase. El desarrollo de este proceso permite conocer otros puntos de vista que pueden mostrar aspectos distintos de una entidad matemática. Y de igual manera en las actividades asociadas al proceso Comunicar es posible ensanchar la criticidad a través del natural cuestionamiento racional de las afirmaciones y argumentaciones expresadas.

El lenguaje matemático específico -a veces abstracto y muy técnico- es el vehículo a través del cual viajan las comunicaciones matemáticas, y por eso debe entrenarse. Hay una similitud entre la comunicación matemática y aquella que se realiza en otras áreas: es necesaria la práctica constante y la guía docente. Pero precisamente por su tecnicismo y abstracción es necesario realizar este proceso de forma paulatina en todos los niveles educativos.

Conectar

Es necesario tener una visión amplia de lo que este proceso supone en el medio educativo. Las conexiones se pueden desarrollar en muchos contextos: por ejemplo, dentro de cada área matemática (como cuando se aplican los procedimientos y operaciones de los números naturales en los racionales o reales). Pero también entre las distintas áreas matemáticas y de manera general con otras materias. Las Matemáticas, por su misma naturaleza, poseen las potencialidades para apoyar los procesos transdisciplinarios que desde los primeros años escolares se deben cultivar. El conocimiento debe visualizarse como una realidad interconectada llena de enlaces.

Este tipo de formación escolar permite lograr una comprensión más profunda y precisa de los objetos matemáticos, pero además permite cultivar la abstracción estudiantil, pues la generalización y universalización de métodos e ideas obliga a mayores abstracciones. Observar la aplicabilidad e interconectividad de las Matemáticas refuerza su aprecio y disfrute.

Sin embargo, no es tan sencillo introducir las conexiones en el aula. Se requiere dominio de las distintas áreas matemáticas así como de algunos conocimientos precisos para apoyar estas conexiones con problemas especiales. Es importante planear anticipadamente la introducción en el aula de las conexiones de los tópicos de una lección.

Representar

La representación y manipulación de objetos matemáticos no deben verse como un fin en sí mismo, debe entenderse que estas representaciones y sus leyes expresan a la vez acciones mentales y características de los objetos matemáticos. *Representar* debe estar estrechamente ligado a *Comunicar*, *Razonar y argumentar* y *Plantear y resolver problemas*; de lo contrario se distorsiona su sentido hacia un uso meramente mecánico, sin realmente poder alcanzar la comprensión.

Las representaciones matemáticas por símbolos, expresiones, diagramas, gráficos o por medios tecnológicos son productos elaborados históricamente, por lo que cambian y exigen acciones de enseñanza y aprendizaje. Si bien al principio de la escolaridad son posibles formas no convencionales o incluso intuitivas y personales para representar ideas matemáticas, es importante que se vayan enseñando gradualmente formas más convencionales y técnicas. El aprendizaje de las representaciones matemáticas formales permite que se pueda realizar la comunicación, pues ofrece el lenguaje y los objetos para entenderse; si cada quien funcionara con sus propias representaciones individuales no habría lugar para la comunicación.

Esto es muy relevante: las representaciones de ideas y objetos matemáticos pueden fácilmente oscurecer la complejidad de las ideas y objetos que representan. Por ejemplo, cuando se escribe x para representar una variable con mucha sencillez y utilidad, se puede perder de vista que el significado matemático de lo que es una variable es complejo y difícil de comprender (y requiere acciones educativas para su aprendizaje). Sucede lo mismo con el sistema posicional decimal, el cual nos permite un uso fácil en la realización de operaciones aritméticas que puede ocultar la complejidad de las acciones mentales y matemáticas que representa.

El cultivo de las representaciones diversas permite una organización mejor de las ideas matemáticas, para así avanzar en su comprensión y el desarrollo de nuevas formas matemáticas. Esto es lo mismo que ha sucedido en los asuntos matemáticos más generales no asociados con la educación: sin las representaciones simbólicas y gráficas que construyeron los matemáticos no hubiera sido posible el progreso de nuevas etapas en las Matemáticas.

Es esencial insistir en las representaciones diversas para los objetos matemáticos. Se trata de mostrar desde la sencillez de expresar de diferentes maneras un número (5+3, 4+4, 8) o expresión [$3x+3$, $3(x+1)$], hasta otras representaciones más complejas y abstractas. Cada representación de un objeto matemático puede revelar un aspecto o propiedad de una manera especial. Por ejemplo, $\frac{3}{2}$ expresa un número por medio de una operación o una relación, lo que no hace el mismo número 1,5. Escoger la representación matemática oportuna para resolver un problema o construir un modelo es uno de los tópicos más relevantes en la enseñanza de las Matemáticas, práctica que se ha visto favorecida por el uso de tecnologías digitales.

La representación matemática incorpora, al mismo tiempo, una abstracción de propiedades, permitiendo su manipulación eficaz ya sea para construir nuevos conceptos o teorías, para resolver problemas, construir modelos o bien para expresar entidades más complejas en distintos contextos.

Es muy importante que de manera escalonada se pueda avanzar en la abstracción de las representaciones matemáticas para potenciar el conjunto de matemáticas que se pueden aprender y usar. Con el progreso de distintas formas de representación, cada vez con mayor abstracción, se ofrecen más oportunidades para construir modelos más interesantes y complejos en distintas situaciones.

Otras sugerencias sobre procesos

Adaptación al nivel educativo y al área matemática. Estos procesos se deben identificar y adaptar apropiadamente en cada nivel educativo; además, su participación es distinta en cada una de las áreas matemáticas. La comunicación en números, operaciones y cálculos es tal vez más fácil de realizar en la educación Primaria que en las otras áreas. En algunos años lectivos ciertos tópicos y áreas favorecen un proceso más que otro. Por ejemplo, en 8º Año congruencia y semejanza de figuras (en Geometría) o la introducción de los irracionales en 9º Año (en *Números*) promueven el proceso *Razonar y argumentar*. Las conexiones con el entorno y otras materias son fáciles de realizar en *Estadística y Probabilidad* en todo momento, y las conexiones entre Geometría y Álgebra siempre se ven favorecidas. La acción docente deliberada es la que propicia que se active un proceso y, por eso, la planificación pedagógica y el diseño de tareas matemáticas deben efectuarse cuidadosamente.

Diseñar problemas especiales. Hay problemas especiales más ricos que estimulan más procesos que otros. Un problema no debe diseñarse orientado "exclusivamente a procesos", sino más bien éstos deben emerger de problemas orientados al aprendizaje de habilidades.

Enriquecer problemas para lograr una mayor activación de procesos. Un mismo problema puede ser modificado en sus variables didácticas para que resulte más rico. Enriquecer problemas es una de las tareas más importantes en la enseñanza de las Matemáticas.

Implementar varios procesos matemáticos en un problema. No siempre será posible desarrollar los cinco procesos centrales en una lección. En algunas se podrá proponer unos procesos u otros, o uno solo, pero es importante tomar esto en cuenta a la hora del planeamiento y del desarrollo de la lección. Al escogerse un problema contextualizado como centro generador de una lección se apela a *Plantear y resolver problemas*, pero también es posible activar allí *Razonar y argumentar*, *Conectar* y *Comunicar*. No todo problema se presta para ello, pero se deben diseñar tareas donde sea posible activar esos procesos. Una ventaja de organizar la lección por medio de problemas contextualizados es la posibilidad de que casi todos los procesos matemáticos entren en juego. Pero todo depende de cómo se planifique y cómo se desarrolle la lección.

Propiciar la redacción y la comunicación de respuestas. Una actividad privilegiada que convoca estos últimos procesos matemáticos es la redacción cuidadosa de las soluciones y su comunicación oral o escrita en el subgrupo o en la clase completa.

Sobre la diversidad de estudiantes

Las circunstancias educativas en Costa Rica no son iguales en todas las instituciones y regiones, hay diferencias entre lo urbano y lo rural, entre las zonas de mayor desarrollo socioeconómico y las urbano marginales. A esta diversidad de realidades que genera distintos niveles en los aprovechamientos escolares se suma también la diversidad de condiciones individuales (desde cognitivas y personales hasta culturales) en relación con los aprendizajes.

De alguna forma se debe ofrecer oportunidades adecuadas a todas y todos y cumplir con el fin de la educación nacional que promueve una perspectiva inclusiva y democrática. Si se restringen o minimizan los programas a localidades o sectores sociales por razones de condición socioeconómica o geográfica, se profundiza en las desigualdades sociales. La idea aquí ha sido proponer un currículo general base para todos con los contenidos necesarios y suficientes para generar los conocimientos, y sobre todo las destrezas y capacidades matemáticas que requiere el contexto en que vivimos.

Es fundamental comprender, sin embargo, que las acciones para la atención de la diversidad se encuentran en manos de docentes y de autoridades educativas y no en los planes de estudio. Lo que el currículo puede hacer es ofrecer algunos medios generales que pueden adoptarse.

Es necesario un enfoque inclusivo en el aula. Es importante ofrecer opciones a los diversos segmentos de estudiantes en los distintos niveles educativos. En el plano internacional las opciones para canalizar alternativas a los sectores de estudiantes son muy variadas. En algunos casos se hace por medio de segregaciones por rendimiento que incluso pueden empezar en la Primaria. En el contexto de Costa Rica, aparte de factores materiales y logísticos y en particular por razones culturales e históricas, no se podría introducir segmentaciones en la educación. Aparte de eso, hay razones pedagógicas y educativas de fondo por las que no resulta adecuado un enfoque que haga segregaciones, y más bien es necesario un enfoque inclusivo que fomente actitudes colaborativas en la acción de aula.

Tomar en cuenta a estudiantes con rezago. En un enfoque inclusivo es necesario dar atención particular a estudiantes rezagados, afinando las tareas matemáticas que se proponen y diseñando la intervención específica docente en las diferentes fases de la lección. Los rezagos pueden responder a muchas circunstancias y pueden ser superados si se les da la atención adecuada. Es necesario que se tome en cuenta este segmento de la población estudiantil en el planeamiento de su lección y en general en su acción educativa, para poder desarrollar los fines de aprendizaje que se propone. En los casos de adecuación curricular, según la reglamentación oficial es responsabilidad docente cumplir con las indicaciones que emanan del marco jurídico que rige estas situaciones.

El tratamiento de la complejidad sirve para atender la diversidad. Una manera de dar respuesta a las necesidades y cualidades distintas de la población estudiantil es por medio de un adecuado tratamiento de la complejidad de los problemas matemáticos en el aula. El asunto se vuelve metodológico. Resulta importante identificar las aptitudes y la disposición hacia las Matemáticas y ofrecer acciones de aula adecuadas a las distintas necesidades. Docentes con mucha experiencia ya suelen hacer esto de manera regular. Se trataría de establecer acciones con distinto peso en los niveles de complejidad de los problemas: para algunas personas un peso mayor en problemas de reproducción y de conexión, para otras un peso mayor en los de conexión y reflexión y para la mayoría probablemente una distribución “equilibrada”. Es una decisión que debe recaer en manos de los y las docentes. También esto puede dar lugar a acciones extra clase adicionales.

Debe existir atención especial de estudiantes con mayor talento o disposición hacia las Matemáticas. Ha sido insuficiente el apoyo para estudiantes con talento o con mayor disposición hacia el aprendizaje de esta materia. Acciones como Olimpiadas Matemáticas o programas en el Ciclo diversificado como MATEM (organizado por las universidades públicas) son útiles en esa dirección pero no son suficientes, y este segmento de estudiantes también debe recibir atención específica.

Esto se puede hacer con matemáticas de mayor profundidad, lo que además puede impactar la clase y los aprendizajes de manera positiva. No sólo se da respuesta justa a las necesidades de aprendizaje de estas personas, sino que su acción se puede introducir en el aula de forma colaborativa para beneficiar a todos los segmentos estudiantiles. Quienes tengan más talento o mayor disposición al estudio pueden apoyar y ayudar a estudiantes con menos avances en los aprendizajes y esto se asocia con valores generales que la educación debe potenciar, como la equidad, inclusividad y la solidaridad.

Sobre el uso de tecnologías

El uso de tecnologías es central para enriquecer y redimensionar la resolución de problemas y las estrategias educativas. En estos planes de estudio se incorporan mediante el tratamiento de varios tópicos, aumentando su uso con el avance en los años lectivos. Esto se hace por medio de indicaciones puntuales, así como otras que se colocan al final de cada área en cada ciclo. La selección de algunos contenidos asume este enfoque (como las rotaciones en el Ciclo diversificado). No obstante, las habilidades específicas que se incluyen son relativamente pocas. Esto es así precisamente porque el país no posee todas las condiciones formativas para una introducción más intensa. La forma en que se coloca en los planes, sin embargo, permite que se puedan usar las tecnologías en diversas condiciones. Con el tiempo se deberá intensificar el uso de las tecnologías.

Identificar el sentido pedagógico, no usar tecnología por la tecnología misma. El uso de tecnología en el aula debe hacerse de manera apropiada. Existen diferencias en los fines y posibilidades de cada tecnología. Es necesario tener muy claro que el uso de tecnologías debe hacerse en función estricta del aporte que ofrezca al logro de fines de aprendizaje consignados, no debe adoptarse su uso por el valor intrínseco de la tecnología, sea cual sea éste.

La calculadora debe ser un auxiliar. Debe insistirse en un uso de las calculadoras desde la Primaria para corroborar operaciones (cálculo mental, estimación) y como un auxiliar en la resolución de problemas y situaciones contextualizadas.

Usar la computadora para visualizar y experimentar las Matemáticas. La computadora es un recurso muy poderoso para utilizar en la enseñanza de las Matemáticas, siempre y cuando responda a los fines pedagógicos. Los llamados instrumentos dinámicos, por ejemplo, son especialmente relevantes: del tipo Geometer's Sketchpad, Cabri, Fathom o Geogebra, pues tienden a reducir las fronteras entre estudiantes y quienes han elaborado las actividades. Algunos instrumentos (como los paquetes señalados, donde se afirman actividades abiertas que no terminan) están más cerca del punto de vista estudiantil que del docente (como por ejemplo Java Sketchpad). Son instrumentos para facilitar cómputos, para apoyar la visualización de entidades y relaciones matemáticas, para favorecer la experimentación matemática, orquestar comunicaciones, formar redes y matematizar lo real externo.

Usar algunos paquetes informáticos especiales. En el actual momento histórico, el acceso de las personas a una computadora es amplio en el país, tanto en el entorno social externo como interno a la entidad educativa. Se propone aquí de manera apropiada a los niveles educativos el uso de paquetes informáticos de tres tipos:

- Geometría dinámica.
- Cálculo y representación gráfica (CAS).
- Simulación de experimentos estadísticos dinámicos.

En todos ellos existe excelente software libre -fácil de usar- que puede permitir el desarrollo de varios tópicos de matemáticas con mayor facilidad, proyección y experimentación.

Es importante el papel de Internet. Ofrece a las Matemáticas y su enseñanza múltiples vínculos con el entorno estudiantil y además con las principales tendencias sociales, culturales y educativas en el planeta. Dimensiones que se incorporan:

- Indagación, valoración y selección de información pertinente para tópicos matemáticos; por ejemplo páginas web con información de situaciones matematizables, censos, mapas Google, figuras, etc.
- Reforzamiento de aprendizajes de matemáticas mediante sitios especializados con plataformas interactivas.
- Aprendizajes interactivos y colaborativos en redes virtuales educativas, también mediante plataformas especiales.

Multimedios son muy útiles. Los medios audiovisuales son hoy un extraordinario instrumento para generar motivación en el aula, para consignar pasos de la lección e incorporar elementos del entorno. En particular, tanto para propiciar el tratamiento de temas como para revisar o analizar los procesos educativos en el aula, los videos se han convertido en un instrumento muy útil.

La evaluación del uso de tecnologías. Se propone que el uso de la tecnología se evalúe por medio de los problemas o ejercicios planteados, donde su utilización representa un componente oportuno. Por ejemplo, si en un problema el uso de la calculadora es significativo para su tratamiento o solución (cálculos muy grandes que sin calculadora tomarían muchísimo tiempo, o el valor de una función en un punto que resulta necesario para el ejercicio), ese elemento debe ser tomado en cuenta. Entonces, no se trata de evaluar la manipulación tecnológica en sí misma sino en función de problemas adecuados.

Sobre actitudes y creencias

Es fundamental que se aprovechen las oportunidades que se tienen en el aula para arraigar las actitudes que se han seleccionado como centrales. Esto es trascendental, pues puede existir una íntima conexión entre la actitud y el rendimiento en las Matemáticas si se reducen las sensaciones negativas que muchas veces existen entre estudiantes y padres de familia sobre las Matemáticas. Que se tenga presente no significa que en cada tópico sea posible ni conveniente introducirlo como objetivo a desarrollar, pues puede distorsionar el significado y el éxito de la lección. La potenciación de actitudes positivas hacia las Matemáticas se deriva aquí de varias orientaciones globales. Por ejemplo, la escogencia de los ejes articuladores trabaja en esa dirección apelando al interés estudiantil y a un involucramiento en el aprendizaje. Otra: el uso correcto de tecnologías es un poderoso recurso de motivación, pues además de asociarse con la realidad actual de nuestra juventud, inmersa en un mundo lleno de tecnología, se refuerzan dinámicas activas e interactivas que pueden facilitar la atención estudiantil.

Aquí se proponen algunas ideas para robustecer actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas.

Poner atención a las creencias, pues son base de actitudes. La mayoría de las actitudes están asociadas a creencias que a veces son muy difíciles de cambiar, porque pueden estar incrustadas en la cultura local. Pero si se sabe cuáles son esas creencias y se dispone de apoyo pedagógico es posible cultivar en las personas nuevas creencias y la generación de actitudes positivas asociadas a ellas. Cuando alguien piensa que al dedicar más de 10 minutos a un problema se pierde el tiempo, pensando que está mal formulado o porque es para genios y no puede hacerlo, se está frente a una creencia típica en la cultura local. Es una creencia según la cual el dominio de las Matemáticas requiere un talento que se trae al nacer, y que si no se tiene pues “no hay nada que hacer”. Frente a esa creencia falsa es necesario cultivar aquella que afirma que el dominio de las Matemáticas se logra con el trabajo y la perseverancia. Al trabajar con un problema más de 10 minutos, media hora o una hora aunque no salga la solución, se logra aprendizaje, pues se entrena la mente, se repasa teoría, se exploran alternativas fallidas y se aprende sobre los límites de los métodos. Esto es fundamental, pues precisamente los problemas que permiten realizar procesos matemáticos fundamentales y originar capacidades matemáticas exigen dedicación, tiempo, esfuerzo y perseverancia. Si sólo se está en disposición de realizar esfuerzos mínimos difícilmente se podrá pasar de problemas del nivel de reproducción y con ello se limitará fuertemente el progreso de su competencia matemática.

Involucrar a los familiares. Especialmente en los dos primeros ciclos, es elemental involucrar en el desarrollo de actitudes y creencias positivas a los familiares, con tal de fomentar el desarrollo matemático del niño o la niña, proporcionar un ambiente rico en lenguaje, estimular la exploración y valorar la originalidad. Es necesario abordar el tema con ellos de forma explícita.

Realizar un diagnóstico y llevar un registro escrito de actitudes y creencias. Al igual que se lleva un registro de los rendimientos escolares, se debe llevar uno sobre las actitudes y creencias que se perciben en el aula. Es una tarea muy relevante que se debe adecuar a cada ciclo educativo. En los primeros dos ciclos se puede obtener la información por medio de algunas preguntas específicas: ¿le gusta contar? ¿Qué piensa que son las Matemáticas? En otros niveles se puede hacer alguna actividad sobre el uso de las Matemáticas en la sociedad (una circunstancia histórica o un recorte de periódico con una noticia sobre matemáticas, por ejemplo), permitiendo obtener esta información.

También se puede hacer una pequeña encuesta cuidadosamente elaborada. En el Tercer ciclo es más provechoso este registro de las actitudes y creencias, pues se trata de un contexto escolar con poblaciones por lo general muy heterogéneas, debido a que provienen de diferentes escuelas. Una vez que se identifique quienes expresan actitudes o creencias negativas, lo que a menudo se asocia a malos rendimientos, se debe insistir para que alcancen los niveles de participación, confianza, respeto, autoestima y perseverancia deseados. Lo deseable es que este tipo de actitudes o creencias negativas no queden inadvertidas y se puedan intentar acciones para revertirlas.

Se requiere planificar muy bien el tiempo. Tanto para disfrutar de las Matemáticas como para tener una mejor comprensión de sus ideas y procedimientos fundamentales, se requiere tener suficiente tiempo para probar, experimentar, construir, equivocarse, reflexionar. Eso implica que debe existir un planeamiento muy metódico del tiempo en las lecciones.

El lenguaje que se utiliza es importante. Hay que estar atento a frases como "qué fea es la Matemática", "esto nunca me va a salir", "nunca voy a poder", "las mates son demasiado difíciles", "las Matemáticas no sirven para nada", "a mí las Matemáticas siempre me han costado", etc. No es pertinente expresar frases como "este tema sí es muy complejo", "en este año las Matemáticas son bien difíciles", "aquí no va aprobar casi nadie". El lenguaje que se usa es clave para que se aprecien y disfruten las Matemáticas, para impedir sensaciones negativas y para potenciar la autoestima.

Monitorear el rendimiento individual. Uno de los desencadenantes más fuertes de actitudes negativas son las dificultades en las tareas o problemas matemáticos. Es conveniente monitorear el trabajo de cada estudiante e intervenir oportunamente cuando observa que alguien está presentando dificultades para avanzar con las actividades propuestas.

La interacción docente-estudiante es esencial. Es relevante tener en el aula una actitud activa, brindando especial atención a estudiantes en dificultades e igualmente a quienes tienen talento. Se puede interrogar acertadamente para indagar si realmente esa persona está aprendiendo los conceptos. Cada estudiante debe sentir que sus aportes son necesarios para el desarrollo de las lecciones. Es sustancial que se valoren con cuidado las diferentes aproximaciones que aportan para detectar aquellos elementos que pueden reconocerse y usarse para fortalecer la autoestima.

Promover conexiones con otras materias. Las múltiples conexiones que las Matemáticas tienen con las distintas disciplinas y áreas del saber es otro elemento que debe ser aprovechado para mostrar la utilidad de las Matemáticas. En la escuela primaria hay buenas oportunidades para hacer esto pues una persona se encarga de impartir casi todas las materias. En la Secundaria se puede coordinar con colegas de otras materias.

Tabla 4. Algunas indicaciones para actitudes-creencias

Actitud	Indicación
Perseverancia	*Tratar adecuadamente los errores.* Si una persona se equivoca, no se debe permitir que se dé por vencida, debe insistirse para que continúe buscando estrategias que le permitan encontrar la respuesta para enfrentar y resolver los problemas. Los errores deben verse como oportunidades para revisar la teoría, explorar diferentes aproximaciones y mejorar los procesos de razonamiento. Debe transmitirse la idea de que al cometer un error no se pierde el tiempo, sino que más bien se aprende sobre una solución que no era la adecuada para esa situación. Equivocarse es también aprender.
Confianza en la utilidad de las Matemáticas	*Usar el entorno*. El uso de elementos de la zona geográfica en el entorno favorece la percepción de utilidad de las Matemáticas para resolver problemas.
	Enfatizar que las Matemáticas sirven para resolver todo tipo de problemas. Desde los primeros años en primaria es esencial que se explique el papel fundamental que las Matemáticas juegan en la resolución de un amplio número de problemas. Se debe visualizar las Matemáticas como algo práctico y sentir que lo que está aprendiendo es muy importante.
Participación activa y colaborativa	*Siempre propiciar un espacio para lo lúdico.* El juego provoca un entorno natural donde se colabora y comparte colectivamente. Es una metodología muy útil para involucrar la participación y el disfrute de las Matemáticas. Juegos del tipo competencias, como "Antorcha" o "Justas de la sabiduría", el cubo Rubik, cuatro en fila, batalla naval, ajedrez y otros, favorecen el desarrollo de actitudes de sana competencia y disfrute de las Matemáticas.

	El trabajo en grupo. A través del trabajo en grupo se puede fomentar la participación activa. Este consume más tiempo de las lecciones, pero bien realizado permite que haya una adecuada apropiación de los aprendizajes. Este tipo de actividades conviene que concluyan con exposiciones orales. Así se involucra a todos y todas y se activan otros procesos matemáticos. Estas exposiciones permiten desafíos, obligan a afinar y reforzar argumentos.
Autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas	*Poner atención a comentarios negativos*. Es importante impedir que en el aula se hagan comentarios despectivos sobre los aportes de una persona cuando comete errores.
	Usar positivamente las distintas formas de razonar y abordar los problemas. Se pueden identificar en el aula las distintas maneras de aprender y así impulsar la búsqueda de múltiples formas de razonamiento y aproximaciones a los problemas.
	Modular las exigencias. Las actividades deben ser apropiadas al nivel emocional y cognitivo estudiantil. Esto es imprescindible.
Respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas	*Uso de aplicaciones e historia.* Aunque sólo sean ejemplos poco elaborados sobre aplicaciones de las Matemáticas, noticias sacadas de la prensa o anécdotas sobre la historia de las Matemáticas, éstos se convierten en poderosos instrumentos para ir cultivando el respeto y aprecio por las Matemáticas.
Fuente: elaboración propia.	

Sobre el uso de la Historia de las Matemáticas

El papel de la Historia de las Matemáticas debe concebirse como un recurso para proporcionar oportunidades didácticas especiales, para ofrecer insumos a la lógica de la lección y para la generación de actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas. Se pueden citar algunos de sus usos:

Mostrar distintas formas de pensamiento y acción matemática. Por ejemplo, cuando se compara el esquema deductivo en los *Elementos* de Euclides con el uso de recursos intuitivos y heurísticos como en *El Método* de Arquímedes (donde usa medios de física e ingeniería). Aquí habría oportunidad para mostrar el sentido de lo que es y lo que no es una prueba matemática.

Potenciación de las conexiones entre las diferentes áreas matemáticas. Al estudiar contextos socioculturales de conceptos y procedimientos matemáticos es posible encontrar con frecuencia muchas conexiones entre las áreas matemáticas; por ejemplo, la geometría analítica en Descartes y Fermat.

Favorece conexiones entre matemáticas, Educación Matemática y concepciones generales de estudiantes y docentes. La Historia de las Matemáticas es el mejor medio para establecer vínculos entre matemáticas, Educación Matemática y la cultura global de una sociedad, y por eso mismo con las concepciones generales de los individuos. Esto es muy importante para trazar puentes entre enseñanza de las Matemáticas y estudiantes.

Enriquecimiento de la resolución de problemas. Al proponerse un problema matemático de un periodo histórico no sólo se ofrece la oportunidad para identificar esas relaciones entre matemáticas y otras Ciencias o dimensiones culturales, sino para usar desafíos interesantes que pueden poner en movimiento procesos. Hay una estimulante intersección entre uso de Historia y resolución de problemas.

Potenciación de la contextualización activa. Ofrece oportunidades para desarrollar las conexiones de una manera natural, realista, lo que a veces se intenta hacer de una forma artificial que no provoca el interés. Puesto en otra manera, la Historia es un instrumento para potenciar la contextualización activa.

Fortalecimiento de la multiculturalidad. Se pueden introducir distintas aproximaciones culturales a conceptos matemáticos colocándolos en contextos históricos. Las Matemáticas contemporáneas se tienden a visualizar como un producto occidental, la Historia puede permitir identificar los aportes de distintas civilizaciones en los quehaceres matemáticos (China, India, los Mayas), y por lo tanto cultivar una visión más amplia de las Ciencias y la cultura.

Atender grupos con particularidades socioculturales. La Historia es un poderoso vehículo para introducir circunstancias culturales precisas, locales, que pueden usarse para la enseñanza y aprendizaje en ambientes rurales o con particularidades étnicas o culturales. Hay muchas referencias de situaciones de enseñanza en medios culturales o sociales específicos. Por ejemplo, en lenguas polinesias la noción de distancia está asociada al tiempo que se toma en llegar a un lugar y no a la noción lineal que se maneja en Occidente, cambiando el significado de la medición y de las formas de aproximarse a la Geometría. La cultura condiciona el aprendizaje matemático.

Atender estudiantes con talento. Es un medio privilegiado para atender a estudiantes con talento, que pueden disfrutar de la evolución de tópicos matemáticos donde ha intervenido la habilidad procedimental, la perspicacia intelectual, la estética o las variables socioculturales.

Conexiones entre matemáticas y otras disciplinas: la interdisciplina. Esto se fundamenta precisamente en que en los contextos sociohistóricos hay múltiples conexiones entre las prácticas científicas y culturales. Una relación especial que se puede introducir desde la historia es la que existe entre matemática y textos literarios. Esto se puede lograr de una manera muy práctica: lectura de textos originales y su traducción a lenguaje matemático y viceversa: escribir en lenguaje natural realidades matemáticas. Al hacerse esto se favorece la comunicación y otras capacidades no necesariamente matemáticas pero que son relevantes para los aprendizajes, como la lectura, la búsqueda de referencias, la búsqueda de documentación, etc. La lectura de textos literarios que apelan a un momento histórico puede ser una excelente forma para introducir la naturaleza y fronteras de los objetos matemáticos de ese momento. Estos pueden ser problemas para iniciar una lección. El arte en general (plástico, dramático, literario, musical) es un recurso metodológico valioso que puede usarse muy bien dentro de situaciones históricas relacionadas con las Matemáticas.

Apoyo para el desarrollo de actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas. Al concebirse las construcciones matemáticas como actividades dinámicas se logra motivar el desarrollo de actitudes como, por ejemplo, la persistencia, que se puede nutrir al comprender los esfuerzos necesarios durante épocas para lograr el desarrollo de las Matemáticas. En la misma dirección, se puede motivar mayor autoestima, pues la historia de errores, fracasos y malos entendidos en la historia de las Matemáticas es una de sus características, así como de toda construcción intelectual humana. Se pueden usar problemas no resueltos o resueltos con gran dificultad, pruebas erróneas y diversas soluciones de problemas, con el fin de mostrar las dificultades de la construcción matemática. Hay muchos problemas recreativos planteados en distintos momentos históricos que pueden fomentar el disfrute de las Matemáticas. Al mismo tiempo, reseñar resultados matemáticos que han estado presentes en el progreso tecnológico aportaría en actitudes positivas hacia las Matemáticas.

Se puede mostrar, por ejemplo, que mucho del mundo de la informática tiene sus orígenes en las Matemáticas, que la modelización del universo se ha hecho con matemáticas, que hay matemáticas en el diseño y construcción de puentes y edificios, que las naves aeroespaciales tienen en sus entrañas matemáticas. Esto fomenta el respeto, el prestigio y el disfrute de las Matemáticas.

Existen varias opciones didácticas para el uso de la Historia en la Educación Matemática:

- Como un reservorio de anécdotas para motivar y sensibilizar. Una anécdota puede ser la referencia que permita a un sujeto recordar un objeto o resultado matemático.
- Descripción de situaciones matemáticas, que sitúan un contexto y circunstancias individuales y socioculturales.
- Para determinar la secuencia o lógica de la presentación de algunos tópicos, pues la lógica histórica puede sugerir caminos semejantes en los aprendizajes.
- Uso de fuentes primarias, problemas o textos de matemáticos que pueden permitir el tratamiento de ciertos tópicos con las herramientas teóricas que se disponían en el momento histórico.

En cuanto a las dos primeras, no se suscitan muchas dificultades para comprender su utilidad. El tercer uso puede parecer más sofisticado. Refiere a una temática que se ha planteado desde hace muchos años: la relación entre la historia de las ideas y el aprendizaje de ellas. Sin duda, en cuanto a la educación se deben tener siempre en mente las grandes transformaciones de las ideas científicas y matemáticas para su inserción en la acción pedagógica. Por eso la lógica histórica proporciona oportunidades para el tratamiento de tópicos, como por ejemplo cuando se decide empezar por logaritmos para pasar luego a exponenciales debido a la manera como se desarrolló esto en la historia. El cuarto uso que se consigna es el diseño de problemas con base en fuentes primarias o que aparecieron tal cual en su momento histórico. Son extraordinariamente útiles pues brindan a la vez el contexto y las fronteras cognoscitivas, permiten hacer comparaciones que aclaran sobre las ideas generales y sobre la efectividad de los métodos propiamente matemáticos a la luz del presente. Por ejemplo, se han tenido concepciones sobre el rigor y el sentido de la prueba, o prejuicios como la idea de que sólo se deben usar círculos y rectas en las construcciones geométricas porque son figuras perfectas.

Colocar problemas tal cual aparecieron en la historia y a los que se enfrentaron los científicos y matemáticos de una época (con medios específicos) puede ser un recurso contextualizado especial para realizar procesos matemáticos fundamentales, para desarrollar habilidades y para darle la perspectiva adecuada a los quehaceres matemáticos.

Muy ligado a lo anterior, en una circunstancia histórica es posible identificar obstáculos o dificultades epistemológicas que podrían poseer un paralelo con aquellas que se podrían encontrar en los aprendizajes (por ejemplo: el manejo del infinito, los inconmensurables, etc.).

Para estas diferentes opciones didácticas se pueden usar documentos o fuentes primarias (textos de matemáticos, Euclides, Diofanto, Descartes, Fermat, Gauss, entre otros), libros de Historia de las Matemáticas que narran o hacen un recuento de fases o áreas de las Matemáticas, personajes, momentos o libros didácticos que contienen orientaciones para la acción de aula. Estos últimos son más difíciles de conseguir, pero en los últimos años han aumentado considerablemente las páginas en Internet con usos y recursos didácticos de la Historia de las Matemáticas. Aquí hay confluencia recíproca: con uso de tecnologías de la información se potencia el uso de la Historia y con ésta se ayuda a configurar algunos usos pertinentes de aquellas.

Insistir en el carácter de las Matemáticas como construcciones. Es una creencia arraigada que las Matemáticas son exactas y sus verdades están colocadas en un mundo platónico al que sólo las mejores mentes pueden acceder y describir. Eso es falso. Todas las Matemáticas han sido producto de construcciones humanas y sociales en contextos con reglas no universales y modificables. En la mayoría de las ocasiones se han dado errores y aproximaciones diversas hasta llegar a lo que ahora existe. Las Matemáticas no están tan alejadas de otras Ciencias naturales. Y esto es importante expresarlo en el aula.

Varias estrategias para el uso de Historia de las Matemáticas:

- elaboración de carteles sobre matemáticos o resultados matemáticos; por ejemplo, números figurados, pruebas interesantes como la atribuida a Thales de Mileto sobre el ángulo recto de un triángulo con un vértice en la circunferencia y teniendo por lado opuesto el diámetro, el cálculo de la medida del diámetro terrestre por Eratóstenes, ejemplos de las diferentes notaciones matemáticas, entre otros,
- proyectos extra clase, puede ser sobre la historia de π (pi) o de la última conjetura de Fermat, sobre los instrumentos de medición, sobre la historia del sistema métrico decimal, sobre los orígenes de la Probabilidad, etc.,
- recreación dramatizada, por ejemplo de una discusión matemática (sobre el uso de círculos versus elipses en la cosmología, en Ptolomeo, Hipatia, o Kepler),
- videos sobre temas científicos y matemáticos (sobre Copérnico o Galileo acerca del heliocentrismo),

- comparación multicultural, por ejemplo de varias pruebas sobre un mismo resultado (podría ser el teorema de Pitágoras en Euclides o en la civilización china),
- traducción de pasajes de textos matemáticos a lenguaje moderno, etc.

Una didáctica relevante: identificar problemas interesantes (en fuentes primarias o secundarias) para resolver usando los conocimientos de la época. Esto se puede hacer en varios pasos, lo que se consigna en la siguiente tabla.

Tabla 5. Uso de problemas históricos originales.

Primer paso	Ubicar el contexto social, geográfico y cultural. • Se pueden usar mapas, pasajes de libros históricos, películas, etc.
Segundo paso	Plantear el problema y el significado del mismo en las Matemáticas de esa época. • Se puede empezar por poner estudiantes a trabajar procedimientos sencillos relacionados con el problema. • Identificar el problema en forma matemática precisa.
Tercer paso	Resolver el problema • Por medio de las heurísticas, analogías y estrategias disponibles en la época, etc.
Cuarto paso	Analizar y comparar las soluciones • Estudiar aquellas que se dieron históricamente y compararlas con las soluciones en el contexto actual.
Fuente: elaboración propia.	

Un ejemplo: los logaritmos. Estos se pueden colocar en el contexto de la navegación en alta mar (siglo XV, de la conquista de América) que promovía el estudio astronómico, pues requería amplios cálculos numéricos y el uso de las series aritméticas y geométricas, de donde emergía la idea de logaritmo. Se puede estudiar la forma como los trabajaron Briggs, Napier y Bürgi, o bien se puede acudir a tablas logarítmicas y también al uso de software para su consideración. Se pueden usar pasajes de libros viejos que contienen las tablas.

Otro ejemplo: construcciones con regla no graduada y compás. Esto permitiría estudiar el contexto de la Grecia antigua (como la presencia de prejuicios sobre los irracionales), usar los instrumentos para una prueba específica, plantear el asunto en términos modernos y con otros recursos y contrastar las distintas concepciones.

También se puede citar el uso de restas sucesivas para calcular el común divisor de dos números cuando se aplica al lado y a la diagonal de un pentágono regular; resulta que al no ser éstos conmensurables el proceso sigue indefinidamente y de esta forma se da una oportunidad para estudiar uno de los irracionales más famosos: la razón dorada.

V. EVALUACIÓN

En este capítulo se resumen principios y orientaciones generales para el desarrollo de una evaluación efectiva en la enseñanza de las Matemáticas. De igual manera, se consigan los porcentajes para los componentes y se señalan indicaciones para algunos de ellos.

Evaluación de los aprendizajes

La evaluación como parte integral del proceso de enseñanza y aprendizaje tiene como propósito recopilar información válida y confiable que permita determinar hasta qué punto se logran las habilidades, destrezas o competencias propuestas en los programas de estudio.

En este sentido se facilita la acción docente en la toma de decisiones prontas y oportunas orientadas al mejoramiento del desempeño estudiantil. De la misma forma, brinda información acerca de este desempeño, la comprensión y aplicación conceptual y la reflexión acerca de la resolución de problemas.

Desde esta perspectiva, la evaluación no se debe visualizar como una actividad aislada con un sentido punitivo, sino como un proceso inherente a la mediación pedagógica, que le permite a cada estudiante construir aprendizajes a partir de sus experiencias, trascendiendo de esta forma la idea de la evaluación como mecanismo de sanción.

Los programas de matemáticas tienen como enfoque principal la resolución de problemas como estrategia metodológica, esto implica un cambio en los procesos de mediación, partiendo de una organización de la lección, donde se promueva la introducción y el aprendizaje de los nuevos conocimientos, siguiendo cuatro pasos o momentos centrales: propuesta de un problema, trabajo independiente, discusión interactiva y comunicativa y clausura o cierre. Esto conlleva a un cambio en el proceso evaluativo, que comienza con el replanteamiento del quehacer educativo y la forma en que se planifican, desarrollan y evalúan las actividades educativas.

Si se mantiene la mirada puesta en la retención de conocimientos, la evaluación seguirá siendo un proceso para solicitar respuestas memorísticas y la resolución mecánica de ejercicios, situación que es contraria al enfoque de estos programas.

Principios

Para el abordaje de estos programas de estudio, es importante **planear** la evaluación de los aprendizajes a partir de los siguientes principios:

- ***Es parte integral del proceso de enseñanza y aprendizaje.*** La evaluación no debe considerarse un proceso separado de la mediación pedagógica, o como un conjunto de pruebas aplicadas al finalizar una unidad o un tema. Debe constituirse en parte natural del proceso de aprendizaje, que tiene lugar durante las actividades que se plantean en la clase, cuando cada estudiante participa, escucha, analiza situaciones del entorno y propone estrategias para su solución considerando los diferentes niveles de complejidad.

- ***Constituye un proceso colaborativo.*** Cada estudiante aprende de sus compañeros y del docente y éste aprende de y con sus estudiantes. La formulación de actividades que impliquen la puesta en práctica de las habilidades, destrezas y competencias de estudiantes favorece el desarrollo de su autoestima, valores y actitudes, así como la promoción de creencias positivas respecto de la asignatura.

- ***Pertinencia con las actividades de mediación.*** Durante el desarrollo de las actividades de mediación, es necesario recopilar información cualitativa y cuantitativa acerca del desempeño estudiantil en las distintas áreas matemáticas. La información recopilada mediante instrumentos técnicamente elaborados le permitirá evaluar sus habilidades, destrezas y competencias y la toma de decisiones.

- ***Congruencia de las técnicas e instrumentos***. Las técnicas e instrumentos que se utilicen en el proceso de evaluación deben ser variados y adecuados al nivel que pretende evaluar, deben servir para reflejar el nivel de conocimiento y las habilidades específicas logradas.

- ***Permite la toma de decisiones***. El análisis de la información recopilada permite la reflexión sobre la práctica pedagógica y la toma de decisiones orientadas a la realimentación o reorientación de la misma. Además, permite identificar las fortalezas en el aprendizaje de cada estudiante y sugerir cómo desarrollarlas aun más, con claridad y actitud constructiva respecto a eventuales debilidades y las formas como podrían enfrentarlas.

  A cada estudiante, por su parte, le permite reflexionar en torno a su desempeño y autoevaluarse, con el fin de que a través del tiempo sea responsable de su propio aprendizaje, y solicitar, en caso necesario, los apoyos que le faciliten el desarrollo de las habilidades y destrezas propuestas en estos programas.

- ***Promueve el compromiso hacia el aprendizaje.*** Para garantizar un aprendizaje efectivo debe existir comprensión estudiantil sobre lo que son los objetivos de aprendizaje y además el deseo de realizarlos. Esta comprensión y compromiso hacia su propio aprendizaje surge cuando tienen conocimiento de los objetivos y los criterios que se utilizarán para evaluar su progreso. La comunicación clara de estos criterios implica formularlos de manera que se pueda entender lo que se espera del desempeño estudiantil.

La evaluación en la resolución de problemas

La evaluación debe inscribirse dentro de situaciones portadoras de sentido y que provoquen el desequilibrio cognitivo, a partir del cual se favorezca el desarrollo de nuevas habilidades y destrezas estudiantiles.

Un problema se organiza alrededor de un obstáculo a superar que ha sido identificado y planeado previamente. Esta situación debe representar un desafío que provoque el esfuerzo estudiantil para darle respuesta, poniendo en práctica conocimientos, habilidades, destrezas y competencias.

Al plantearse un problema como parte de la evaluación de los aprendizajes se deben identificar y valorar no solamente los resultados, pues se perdería su significado, es oportuno considerar además las siguientes fases:

- La exploración del problema.
- El establecimiento de la estrategia.
- El desarrollo de la estrategia.
- La autoreflexión sobre la estrategia.
- El análisis de los resultados.
- La conclusión.

Se debe considerar que el aprendizaje de las Matemáticas es progresivo en la medida de que se desarrolla con base en el logro de unos conocimientos que son fundamentales para el logro de otros más complejos. Y es operativo, en tanto no es suficiente el conocimiento de los conceptos, sino su aplicación en la resolución de problemas matemáticos con diferente nivel de complejidad.

Al tratarse diferentes niveles de complejidad en los problemas matemáticos a desarrollar en el aula, es conveniente identificar las posibles acciones de cada grupo de estudiantes. No todos los problemas planteados se pueden evaluar de la misma manera. Si se trata de un problema de reproducción, es más fácil medir el desempeño en cuanto a los resultados. Sin embargo, si se trata de un problema de reflexión, no es suficiente con ello. Un término “medio” pueden ser los problemas de conexión.

Cuando se trata de problemas más complejos, por ejemplo de conexión y reflexión, es necesario diversificar los instrumentos y técnicas de evaluación, con el propósito de obtener información acerca de los procesos matemáticos desarrollados, los productos obtenidos, con el propósito de brindar acompañamiento en el desarrollo de las habilidades y competencias.

Las estrategias de evaluación deben ser congruentes con el nivel de complejidad de los problemas. Para el caso de la evaluación sumativa sería totalmente erróneo, por ejemplo, diseñar una prueba en la que predominen los problemas del grupo de reflexión. Por eso mismo, para su diseño se debe garantizar el equilibrio entre los distintos niveles de los problemas incluidos, considerando para ello el abordaje realizado durante el proceso de mediación pedagógica.

VI. PROGRAMAS DE CADA CICLO EDUCATIVO

Introducción

Los conocimientos y habilidades se organizan por medio de las cinco áreas matemáticas que se han seleccionado. Esta organización de contenidos se realiza para todos los años de la educación preuniversitaria.

En cada ciclo educativo se incluyen los programas de cada área matemática, consignados año por año.

Tabla 6. Estructura de cada ciclo educativo.

	Estructura	**Secciones de cada área**
Ciclo educativo	Introducción.	• Introducción. • Propósito de la enseñanza. • Habilidades generales. • Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales por año. • Indicaciones metodológicas. • Indicaciones de evaluación .
	Números.	
	Medidas.	
	Geometría.	
	Relaciones y Álgebra.	
	Estadística y Probabilidad.	

En cada área de cada ciclo se incluye una introducción que plantea ideas generales del área y hace referencia a los otros ciclos. “Propósito de la enseñanza” resume lo que se pretende en el área durante el ciclo, que se completa con “Habilidades generales” que se desea promover en el ciclo; se trata de una síntesis de las habilidades específicas del área.

La presentación de conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

La sección “Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales” se organiza en forma tabular en tres columnas: la primera con los conceptos, la segunda con las habilidades específicas asociadas a los conocimientos y en una tercera columna se dan *indicaciones puntuales* sobre los alcances de los contenidos, con la inclusión de ejemplos o sugerencias de método. Las habilidades específicas se numeran para cada año lectivo.

En cada área de cada ciclo se introducen dos secciones: Indicaciones metodológicas e Indicaciones de evaluación. En el primer caso, se incluyen orientaciones y sugerencias para todo el ciclo y otras para cada año de ese ciclo. En el segundo caso, se ofrecen sugerencias para todo el ciclo, en ocasiones se propone cómo integrar habilidades para su desarrollo y evaluación, se sugieren instrumentos de evaluación y se ofrecen ejemplos.

Estas secciones no pretenden sustituir la identificación, reflexión y selección de los métodos de la lección o de los procedimientos de evaluación que le corresponden al docente. Solamente se busca aportar elementos que pueden usar estos profesionales en su acción de aula.

Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales

Inmediatamente después de esta sección se incluyen algunas indicaciones específicas sobre evaluación.

La selección de los conocimientos y las habilidades lleva implícita una colección amplia de decisiones curriculares que no se pueden explicitar con detalle en el currículo. La presencia o ausencia de un contenido es una primera situación (por ejemplo, quitar bases distintas de la del 10, introducir geometría analítica, quitar identidades trigonométricas y algunos métodos de factorización). El número de contenidos es otra. Se trata de decisiones que se toman con base en el papel que se quiere dar a un área matemática o a ciertos tópicos.

Otro ejemplo es el lugar donde se coloca el contenido, pues eso expresa varias cosas: el sentido dentro de la disciplina (no se puede empezar por enteros y luego ver los naturales), la epistemología y cognición específica (primero sumas y restas luego multiplicación, primero naturales luego decimales y fracciones, las operaciones con fracciones en 6° Año, etc.), la lógica de aula (colocación de problemas en un lugar específico que favorezca el estilo de organización de las lecciones que se propone). Y en todo esto hay matices.

El lugar también implica una decisión subyacente sobre asuntos como el significado preciso que se le da al enfoque espiral en la colocación de contenidos curriculares, a la concentración de tópicos por año educativo (por ejemplo la concentración de ecuación de primer grado y función lineal en un año, y lo cuadrático en otro), o si en la secuencia se espera que se provoque una mayor o menor participación de los procesos.

El papel de las indicaciones puntuales

Es necesario subrayar el papel de la columna de “Indicaciones puntuales”. Es una forma novedosa en Costa Rica de ofrecer no sólo breves sugerencias de método asociadas a conceptos y habilidades, sino de especificar lo que se desea que se implemente en cada caso, visualizando el significado de las habilidades propuestas. No es una columna superflua: en la mayoría de las ocasiones sería difícil comprender el propósito curricular sin acudir a estas indicaciones. No existe una relación mecánica entre habilidades específicas e indicación, en muchas ocasiones una indicación refiere a varias habilidades; en otras, no hay indicación para un grupo de habilidades específicas.

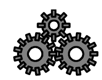
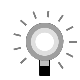
En estas indicaciones puntuales se incluyen sugerencias sobre la realización de los procesos matemáticos, pertinencia o lugar de los mismos, ejemplos, métodos posibles y también sobre las actitudes-creencias, así como sobre el uso de tecnologías y de la historia de las Matemáticas. Por medio de estas indicaciones se promueve un progreso de la competencia matemática a partir del logro de las habilidades; aquí se subraya esa relación por medio de estrategias pedagógicas. Pero estas indicaciones no pueden ser inapropiadamente demasiadas.

La presentación por medio de estas tres columnas permite visualizar mejor el currículo, en primer lugar en cuanto a conocimientos y habilidades.

Simbología empleada en la columna de indicaciones puntuales

Se usará la siguiente simbología para indicar la presencia de algunos de los elementos del currículo en el plan de estudios:

Tabla 7. Simbología empleada en la columna de indicaciones puntuales

Elemento	Símbolo
Indicación puntual	▲
Problema	
Proceso	
Actitud y creencia	
Elemento de Historia de las Matemáticas	
Uso de tecnología	
Eje transversal	

PRIMER CICLO

Introducción al Primer ciclo

El Primer ciclo de la Educación General Básica es esencial para la enseñanza de las Matemáticas, pues es el primer contacto que tienen los estudiantes con una materia frente a la que existen con frecuencia actitudes negativas, incluso antes de iniciarse la escolaridad. Este primer momento debe ser capaz de generar una percepción inicial positiva de los estudiantes, una base afectiva para profundizar sus conceptos y procedimientos en el siguiente ciclo.

Para iniciar este ciclo se presenta la sección *Conocimientos Básicos*, la cual pretende desarrollar habilidades necesarias para la transición de educación preescolar a educación Primaria. Esta sección involucra conocimientos intuitivos como la ubicación espacial, comparación de tamaños, longitudes, espesores y cantidades de un modo cualitativo (mucho, poco, entre otros). Luego de preparar a las y los estudiantes con lo establecido en esta sección se podrá abordar las áreas matemáticas correspondientes a este ciclo.

En este ciclo *Geometría*, *Medidas* y *Estadística y probabilidad* ocupan un tamaño similar, mientras que *Números* constituye la mayor parte. *Relaciones y Álgebra* por su parte presenta una extensión menor que las demás áreas.

Mucho de lo que se pretenda para afianzar conocimientos, procesos matemáticos y actitudes positivas gira alrededor de lo que se haga en *Números*. Este ciclo debe ofrecer dominio de los conceptos y procedimientos matemáticos fundamentales, números naturales y las operaciones suma, resta, multiplicación y división (aunque sin el algoritmo euclidiano), con una fuerte inclinación hacia el cálculo. En 1er Año se trabajará con números menores a 100, en 2° con números menores a 1000 para afirmar las operaciones, y luego en el 3er Año se ampliará el dominio hasta 100 000, con operaciones básicas en la resolución de problemas ubicados en contextos reales cercanos al estudiante. Desde un primer momento se debe conectar el concepto intuitivo de número con el sentido numérico (la posición absoluta y relativa de los números), donde es relevante potenciar el cálculo mental y la estimación pues activan procesos cognitivos que avanzan hacia la competencia matemática. Es importante que haya memorización de algunos procedimientos (como las tablas de multiplicación), pues esto crea una base para el aprendizaje conceptual. En esta etapa, hay una relación muy estrecha de esta área con la de *Relaciones y Álgebra*, que busca generar comprensión de patrones y relaciones, así como empezar a manipular (leer y escribir) símbolos básicos (de las operaciones) y comenzar a identificar y ubicar números en la recta numérica.

Medidas también se asocia fuertemente a *Números*. Aunque la acción de medir es distinta a la de operar y hacer cálculos, se requiere de números y apela a un sentido de lo numérico.

Asimismo, *Estadística y probabilidad* utiliza números al introducir la noción de dato, que codifica información cualitativa y cuantitativa; al final del ciclo se espera que el estudiante esté en capacidad de usar estrategias para procesos de recolección, resumen, presentación y análisis de información, aunque sea a un nivel muy básico. También, tiene que estar en capacidad de identificar entre eventos más o menos probables.

En *Geometría* se busca desarrollar la visualización (ubicación, reconocer formas geométricas en el entorno), manipulación y descripción de figuras geométricas, de las relaciones entre ellas y de los elementos que constituyen cada figura, además del aprendizaje de vocabulario geométrico elemental. En primera instancia, se debe promover la reproducción de figuras (con patrones, calcando, con papel cuadriculado, etc.) y el trazado de esas figuras a mano alzada o con ayuda de instrumentos. Se brinda especial atención al triángulo, rectángulo, círculo, caja, cubo y esfera, siempre de una manera intuitiva (sólo reconocer, manipular). Esta área permite establecer especiales conexiones con las percepciones e intuiciones del entorno, precisamente por su relación con lo visual y la manipulación física de objetos. El movimiento se puede introducir por medio de croquis sencillos que consignen inicio y final de un recorrido, y cambio en la posición de objetos.

La enseñanza en este ciclo debe ofrecer un sentido siempre intuitivo apegado a referentes físicos y sociales, a lo sensorial, lo pictórico, para poco a poco ir introduciendo mayores niveles de representación, simbolización y abstracción matemáticas.

Es posible promover los procesos matemáticos centrales mediante un sentido intuitivo y sensorial en las aproximaciones a los objetos matemáticos.

Los modelos matemáticos que se plantean principalmente en este ciclo son los números y sus operaciones así como los mismos objetos geométricos que se introducen; ellos representan situaciones del entorno de una manera muy directa, por lo que no deben considerarse como algo complejo. Por ejemplo, 4 + 7 es un tipo de representación (simbólica), y puede ser un modelo si responde a un contexto real. La resolución de problemas, por otro lado, se introduce implícitamente con el estilo de organización de lecciones que se ha propuesto como central.

Las conexiones se enfatizan en relación con el contexto y las intuiciones que deben predominar y en los problemas que usan a la vez números, operaciones, cálculos, medidas, relaciones y representación y manipulación simbólica.

Realizar las operaciones y cálculos, medir, usar patrones, ordenar datos en tablas y simbolizar con los signos numéricos básicos inducen al razonamiento matemático.

Conocimientos Básicos

Introducción

Se supone que al ingresar al ciclo las niñas y los niños tienen diversas habilidades, relacionadas con conocimientos matemáticos, adquiridas en la educación preescolar o en su entorno.

El 1^{er} Año de este ciclo deberá reforzar estas habilidades dado que permiten el desarrollo de destrezas y la adquisición de actitudes positivas que preparan para el aprendizaje.

Propósito de la enseñanza

El propósito de la enseñanza de estos Conocimientos básicos es desarrollar la capacidad de ubicación espacial, comparación de tamaños, longitudes, espesores y cantidades de un modo cualitativo (mucho, poco, entre otros).

Habilidades generales

Las habilidades generales que se pretenden son:

- Tener una noción clara de la ubicación en el espacio y de la relación espacial entre objetos.
- Realizar diferentes tipos de comparaciones tales como: tamaños, distancias, longitudes, espesores, cantidades, intervalos de tiempo.

Se fortalecen actitudes y creencias positivas hacia las Matemáticas, principalmente en lo que se refiere a participación activa y colaborativa y respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas, gracias a los recursos visuales que se proponen durante el desarrollo de las actividades.

Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

1^{er} Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Tamaño • Más grande • Más pequeño • Igual que • Tan grande como • Tan pequeño como	1. Comparar de acuerdo con el tamaño: más grande que, más pequeño que, tan grande como, tan pequeño como e igual que. 2. Ordenar según el tamaño objetos del entorno o trazados.	▲ La manipulación de material concreto e impreso es muy necesaria para que se pueda identificar y comparar estos conceptos: separar y clasificar objetos, o bien encerrar, marcar, repintar, dibujar, recortar o realizar otras actividades. Por ejemplo, encerrar el recipiente más grande:  **Imagen con derechos adquiridos por el MEP**

Noción de longitud – anchura – espesor	3. Comparar objetos o trazos según su longitud o anchura o espesor. 4. Ordenar objetos según su longitud, anchura o espesor.	▲ Se puede utilizar material concreto como bloques, piezas de madera, utensilios escolares, etc.  **Imágenes con derechos adquiridos por el MEP**
Ubicación espacial	5. Determinar la posición relativa entre objetos (adelante, atrás, arriba, debajo, dentro, fuera, derecha, izquierda, junto a, en medio de, al lado).	▲ Los conceptos se desarrollarán primero con la ubicación de las niñas y los niños en la clase: situarse en relación con otro o con un objeto.  **Imagen propiedad del MEP** También por medio de juegos, como por ejemplo: a. Simón dice: todos un paso adelante. b. Que se levante el que está a la derecha de Ana.
Distancia • Lejos • Más lejos • Tan lejos como • Cerca • Más cerca • Tan cerca como	6. Comparar la posición de objetos, cosas o personas según la distancia a que se encuentran a partir de una posición dada (lejos, cerca, más lejos, más cerca, tan lejos como, tan cerca como). 7. Ordenar objetos según su distancia a un punto dado.	▲ Una actividad relacionada con esto puede ser: expresar oralmente el orden de algunos de sus compañeras o compañeros de clase según se encuentren más o menos lejos de un punto de referencia dado.  **Imagen propiedad del MEP**

Cantidad • Mucho • Poco • Igual • Uno • Ninguno • Todos • Alguno • Más que • Menos que • Correspondencia uno a uno	8. Realizar comparaciones de cantidad utilizando las nociones de mucho, poco, igual cantidad, uno, ninguno, todos, alguno, tantos como, más que, menos que. 9. Establecer correspondencias uno a uno entre colecciones de objetos o dibujos.	▲ Se pueden ordenar recipientes según contengan más o menos bolitas. Debe ser evidente la diferencia en el contenido porque aquí no se trata necesariamente de contar sino de estimar visualmente. ▲ Dado una cantidad de materiales, por ejemplo, unas piezas de madera, ver si hay una para cada uno, si sobran o faltan.

Indicaciones metodológicas

1. Las habilidades propuestas para este periodo deben abordarse en estrecha relación con lo concreto, valiéndose tanto del entorno como de material preparado especialmente para la enseñanza aprendizaje de los conceptos o el desarrollo de las habilidades y procesos.

2. Cuando se trata de las nociones de espesor, longitud, anchura o tamaño y cantidad, es imprescindible el uso de objetos con los que las niñas y los niños estén familiarizados y que puedan llevar o estén presentes en el aula o la institución.

3. En cuanto a las nociones relacionadas con la ubicación espacial y la distancia, éstas pueden ser abordadas mediante juegos que permitan la participación de todo el grupo.

Indicaciones de evaluación

Las habilidades establecidas para los *Conocimientos básicos* pueden evaluarse mediante la observación durante el *trabajo cotidiano*.

En cuanto a la noción de tamaño es importante mostrar que se puede comparar objetos del entorno o ilustraciones y determinar cuál es más grande y cuál es más pequeño o si son del mismo tamaño; también se pueden organizar colecciones de objetos o ilustraciones por orden de tamaño. Por ejemplo, en la siguiente ilustración se puede pedir que señale con ● la barra más pequeña y con ✚ la más grande, o bien que se ordene las barras de la más pequeña a la más grande.

Imagen con derechos adquiridos por el MEP

Algo semejante podrá hacerse en cuanto a longitudes, espesores y distancias.

En cuanto a la ubicación espacial, se debe evaluar si se conoce la posición relativa entre personas u objetos. Por ejemplo, en una fotografía o una ilustración, señalar si un objeto determinado está delante o detrás, a la izquierda o a la derecha, arriba o debajo de otro.

Se deberá evaluar si la o el estudiante puede determinar si un objeto o persona está más lejos o más cerca que otro con respecto a un punto dado, tanto en situaciones del entorno como en ilustraciones o fotografías.

Dadas diversas colecciones de objetos, deberá determinar cuál tiene más objetos, cuál tiene menos o si se puede establecer una relación uno a uno entre los objetos de esas colecciones.

Se pueden evaluar dos o más actividades en un solo problema, por ejemplo, se presenta una ilustración como la siguiente:

Imagen con derechos adquiridos por el MEP

Se pueden plantear preguntas como éstas: ¿hay más archivadores negros que amarillos?, ¿hay tantos archivadores amarillos como morados?, ¿cuántos archivadores son color naranja?, ¿cuántos archivado-res son negros? Con esto se evalúan las nociones de uno, ninguno, tantos como. También se puede pedir que señale el archivador que está más alejado del negro, los que están más cerca del negro, el que está en medio de los archivadores verdes, etc.

Primer ciclo, Números

Introducción

Al ingresar al Primer ciclo los niños y niñas han desarrollado la habilidad de contar hasta el 10. A esta edad compiten para ver quién cuenta más y tienen un conocimiento básico de los números ordinales (primero, segundo y tercero).

El concepto de número aún no se tiene claro, pues el manejo de los números está relacionado en sus contextos a través del juego o como un lenguaje cotidiano (tengo una bicicleta, en mi casa hay tres gatos, tengo cuatro hermanos, etc.).

El Primer ciclo busca reforzar que eso que las y los niños usan como números tiene su símbolo-gía, escritura y expresión oral, pero adicionalmente se deben enseñar las operaciones básicas de una forma natural, desarrolladas mediante situaciones de la vida cotidiana.

Se abarcan los números naturales menores que 100 000 y sus relaciones, las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Además, habilidades relacionadas al cálculo y la estimación.

Números es importante pues tiene una relación directa con las otras áreas matemáticas (*Medidas, Geo-metría, Relaciones y Álgebra y Estadística y Probabilidad*), así como con las otras asignaturas que se imparten a este nivel; una muestra de ello es la línea del tiempo utilizada en Estudios Sociales.

El uso de problemas en contextos reales es fundamental para éste y los próximos ciclos, ya que permite relacionar las Matemáticas con el entorno y utilizar los números como referencia de situaciones cotidia-nas donde es posible usar las operaciones aritméticas.

Propósito de la enseñanza

El propósito de la enseñanza en Números es desarrollar el concepto de número para poder utilizarlo en diferentes situaciones, comprender los significados de las operaciones básicas, desarrollar y utilizar estrategias para el cálculo y la estimación.

Habilidades generales

Las habilidades generales que deberán tener los estudiantes en el área de *Números* al finalizar el Primer ciclo son:

- Escribir, leer y conocer los números menores que 100 000 en diversos contextos.
- Establecer relaciones numéricas con cantidades menores que 100 000.
- Identificar el valor posicional de los dígitos que conforman un número menor que 100 000.
- Identificar distintas representaciones de un mismo número.
- Desarrollar y utilizar estrategias para el cálculo y la estimación.
- Utilizar números ordinales en diferentes contextos.
- Resolver y proponer problemas del entorno en los que se haga uso de las operaciones básicas.
- Establecer relaciones entre operaciones.
- Escribir sucesiones numéricas de 10 en 10, de 100 en 100 y de 1000 en 1000.

Se puede fortalecer actitudes y creencias positivas hacia las Matemáticas con facilidad mostrando la utilidad de los números en la vida cotidiana, mediante los diferentes problemas que se les proponga, así como desarrollar el disfrute de las Matemáticas acudiendo sistemáticamente al juego como metodología de aula.

En *Números*, los procesos *Conectar* y *Representar* adquieren relevancia. Se empieza a manipular las primeras representaciones numéricas, por ejemplo por medio de la descomposición de números o por la utilización de otros signos o figuras para representarlos. Se iniciará la participación en el proceso *Plantear y resolver problemas* durante el 2° y el 3er Año.

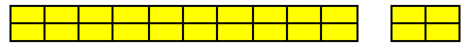
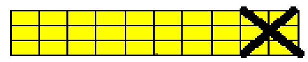
Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

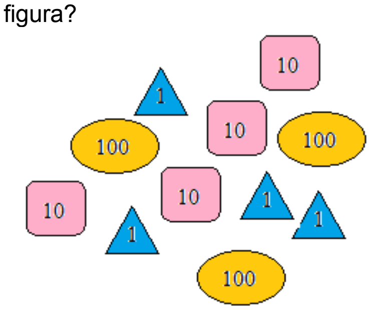
1er Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Números naturales • Conteo • Relaciones numéricas • Sistema de numeración decimal • Unidad y decena • Relaciones de orden • Números ordinales	1. Identificar varias utilidades de los números en diferentes contextos cotidianos. 2. Utilizar el conteo para asociar conjuntos de objetos con su respectiva cardinalidad. 3. Trazar los números del 0 al 9.	▲ Usar situaciones que permitan la utilización del número, para que éste surja de forma natural en la respuesta que brindan las y los estudiantes. Preguntar por otras situaciones en las que se usen. Se propone a la clase la siguiente actividad: Se colocan dos mesas en las esquinas opuestas del salón de clase. En una se coloca una sección recortada de un cartón de huevos (la cual representa un auto para 5 pasajeros) y en otra una cierta cantidad de bodoques de papel (los cuales representan personas). Se solicita a un estudiante completar el carrito con tantos pasajeros como asientos tiene para que este pueda partir. Algunos podrían ir completando de a uno los asientos disponibles; otros podrían tomar un grupo de bodoques, sin importar si es la cantidad exacta. Estas acciones no involucran el conteo de las cantidades. La acción docente debe ir orientada a cuestionar cómo se haría para completar todos los asientos haciéndolo más rápido, sin necesidad de hacer varios viajes y de manera que no sobren ni falten pasajeros. Esto busca propiciar el conteo y la cardinalización para luego trasladar esa cantidad, igualando dos colecciones que se presentan separadas. (Actividad adaptada de la presentación *Actividades de conteo en Nivel inicial* de Carme Barba Uriach) ▲ Estar atento a que la o el estudiante trace correctamente los números (sentido del trazado).
	4. Utilizar el conteo en la elaboración de agrupamientos. 5. Identificar y aportar ejemplos de representaciones distintas de un número. 6. Establecer correspondencias entre las diferentes formas de representación de un número natural menor que 100 aplicando los conceptos de unidad y decena.	▲ Se pueden implementar juegos como "El barco se hunde", donde alguien exclama: "¡El barco se hunde! y para salvarse hay que formar grupos de…" y en ese momento todos corren para formar el grupo con la cantidad que se especificó. Se recomienda iniciar con valores menores que 10. Luego, se solicita realizar grupos de 10 y así introducir el concepto de decena. Hay que aprovechar este tipo de actividades para conversar acerca del compañerismo y la solidaridad, así como la importancia de trabajar en equipo. Un número natural tiene varias representaciones entre las cuales se pueden citar:

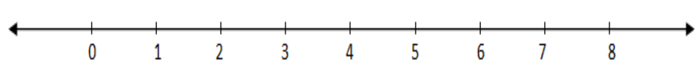
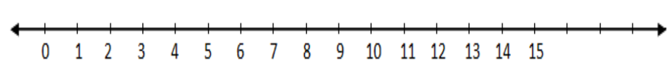
		a. La gráfica: ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ b. El numeral: **5** c. La concreta: en la que se utilizan colecciones de objetos del entorno.  **Imágenes cortesía de FreeDigitalphotos.net** d. La verbal: la forma como se dice el número respectivo. e. La literal: la forma como se escribe con palabras el número. Cinco f. Por composición y descomposición aditiva: 5 = 4 + 1 ▲ Se pueden realizar bingos o juegos de memoria para reforzar esta habilidad. Por ejemplo, la conformación de parejas mediante la utilización de tarjetas: en una se incluye el numeral y en la otra la representación gráfica que le corresponde.
	7. Comparar números menores que 100 utilizando las relaciones de orden (sin utilizar símbolos >,<, =).	▲ Se solicita realizar comparaciones con material concreto, para contar los elementos y señalar el grupo con menor, mayor o igual cantidad. Luego se pide representar estas cantidades en forma numérica y hacer comparaciones empezando por el dígito de las decenas.
	8. Describir la posición de orden en objetos y personas utilizando los números ordinales hasta el décimo.	▲ Como una actividad introductoria se pueden formar grupos de 10 estudiantes y solicitar que se ordenen en filas siguiendo algún criterio: a. Según su tamaño. b. Según su edad. Luego se puede preguntar: ¿Quién está de primero? ¿Quién está de segundo? Y así sucesivamente.
Operaciones con números naturales • Suma • Resta	9. Identificar la suma de números naturales como combinación y agregación de elementos u objetos.	▲ Se plantea uno o varios problemas donde se enfatice en los sentidos de la suma (agregar y reunir colecciones de objetos). Por ejemplo: ☺ Represente mediante un número la cantidad de estudiantes que se obtiene al unir la 1era fila con la 3era fila. ☺ ¿Cuántos lápices de color tienen Juan y Jimena?

	10. Identificar la resta de números naturales como sustraer, quitar y completar.	▲ Se plantean problemas que permitan modelizar situaciones utilizando los sentidos de la resta, por ejemplo: Se solicita a un estudiante (Juan) que coloque sobre el escritorio una determinada cantidad de lápices, la cual expresará a sus compañeros y compañeras. Luego le solicita a otro (Marianela) que de ellos retire y oculte rápidamente una cantidad menor a la que colocó su compañero. Se pide a la clase verificar cuántos lápices hay sobre el escritorio y se formula la pregunta: ¿cuántos lápices creen que tiene Marianela? Durante la actividad, es importante que se comiencen a propiciar espacios para la justificación de las respuestas y la comunicación de las estrategias a los demás.
	11. Establecer la relación de las operaciones suma y resta.	▲ Se puede proponer un problema como el siguiente: En el grupo 1-B hay 32 estudiantes. Si se conoce que en dicho grupo hay 20 niñas, ¿cuántos niños hay? Al brindar la respuesta, se pide a cada estudiante comprobarla. Se espera que realicen discusiones y aportes que permitan aproximarse hacia la estrategia de sumar la cantidad de niños y niñas, para ver si el resultado corresponde al total especificado. Esto permite fomentar los procesos *Razonar y argumentar* y *Comunicar* y generar confianza en la utilidad de las Matemáticas.
	12. Identificar el doble de un número menor que 10. 13. Identificar la mitad de un número par menor o igual a 20.	▲ Para trabajar estas nociones, es conveniente implementar las actividades como el uso de juegos y el planteo de problemas. Por ejemplo: En grupos de dos personas, se lanzan los dados y gana el que obtiene dos caras iguales e indica el resultado correcto de la suma.  **Imagen cortesía de FreeDigitalphotos.net** Solicitar al estudiantado traer frutas en trocitos (papaya, melón, sandía, banano, etc.) o bien una mandarina o una naranja (un máximo de 20 gajos). Luego se forman parejas y se les indica que deben compartir sus frutas, trozos o gajos con su compañero o compañera de forma tal que ambos tengan la misma cantidad. ▲ Se debe buscar relacionar el doble o la mitad de un número con las operaciones suma y resta, respectivamente.

		Se pide que se describa en forma oral los resultados. En la etapa de clausura o cierre, es importante formalizar la noción de mitad de un número. Actividades análogas a la anterior promueven una participación activa y colaborativa. ▲ No introducir o formalizar la noción de número par en este momento. La actividad anterior permite fomentar el consumo de alimentos saludables y el valor del compartir con los demás.
Cálculos y estimaciones • Sumas • Restas	14. Resolver problemas y operaciones con sumas y restas de números naturales cuyos resultados sean menores que 100.	▲ Es necesario proponer problemas como los siguientes: Para realizar un proyecto de Artes Plásticas, se requiere la elaboración de bodoquitos de papel china para pegarlos en ciertas regiones de un dibujo. Alicia y Saúl trabajan juntos y han hecho 26 y 19 bodoquitos respectivamente. ¿Cuántos bodoquitos han confeccionado entre ambos? Si del aula el conserje se lleva 12 sillas, ¿cuántas sillas quedan? (Es importante que el estudiante investigue o determine el total de sillas existente). ▲ Es conveniente utilizar diversos procedimientos para el cálculo de la suma. Se puede utilizar la composición y descomposición de números, bloques multibase, entre otros. Es importante permitir la participación en la pizarra para verificar que todos dominan esta habilidad y así elevar la autoestima estudiantil en relación con su dominio de las Matemáticas.
	15. Utilizar correctamente los símbolos =, + y –. 16. Representar en forma literal números menores que 100. 17. Representar números menores que 100 mediante composición y descomposición aditiva.	▲ El uso de estos símbolos debe ir no sólo en función de representar un número mediante la composición y descomposición aditiva, sino para modelizar problemas que se resuelven mediante el planteo de las operaciones de suma y resta. ▲ Es conveniente utilizar estos símbolos desde el momento en que la o el estudiante establece las primeras representaciones numéricas por descomposición. ▲ Es importante trabajar la correspondencia entre la representación gráfica, la verbal y la representación literal en expresiones como: 24 = 20 + 4 24 = 30 – 6 para dar continuidad al uso de diversas formas de representación. ▲ Cada estudiante debe relacionar la expresión 24 = 20 + 4 y 24 = 30 – 6

		con la forma verbal "veinticuatro es igual a veinte más cuatro", o bien "veinticuatro es igual a treinta menos seis". Reforzar esto con sus representaciones gráficas respectivas: $24 = 20 + 4$  $24 = 30 – 6$  ▲ Para representar números en su forma literal, es necesario escoger el momento adecuado en el que las y los estudiantes hayan desarrollado habilidades relacionadas con la escritura de palabras y oraciones.
	18. Calcular mentalmente sumas o restas mediante diversas estrategias.	▲ Conviene habilitar espacios para resolver operaciones (suma o resta) utilizando el cálculo mental o la estimación. Es necesario indagar al estudiante acerca del proceso de resolución y así proporcionar estrategias al compañero o compañera que presenta dificultades. ▲ Se debe mostrar la conveniencia de la descomposición de números con decenas para favorecer el cálculo. Por ejemplo, sumar primero las decenas y luego las unidades: $45 + 13 = (40 + 10) + (5 + 3)$
	19. Realizar estimaciones de una cantidad dada de objetos.	▲ Se presenta un grupo de 10 elementos como medio de comparación y al lado se coloca un grupo con más elementos. Se pide adivinar la cantidad aproximada que hay en este último grupo. Gana quien adivina o estuvo más cerca de la cantidad real (la cual sólo conoce la o el docente). ▲ Promover la visualización de paquetes de 10 objetos.

2° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Números naturales • Conteo • Relaciones numéricas • Sistema de numeración decimal • Centena • Recta numérica • Relaciones de orden • Sucesor y antecesor • Números ordinales	1. Utilizar el conteo en la elaboración de agrupamientos de 1 en 1, 2 en 2, 3 en 3, 4 en 4, 5 en 5, de 10 en 10, 50 en 50 y de 100 en 100 elementos. 2. Representar números menores que 1000 aplicando los conceptos de centena, decena, unidades y sus relaciones.	▲ Si se trabaja el conteo para agrupar de 50 en 50 y de 100 en 100, se pueden planear actividades donde se elaboren monedas de papel con estas denominaciones para que el docente establezca el precio de un artículo dado y los estudiantes determinen la cantidad de monedas correspondiente a pagar por él y que además cuenten en forma oral como una forma de verificar que se domina la habilidad. ▲ Se debe utilizar material recortable, papel cuadriculado o bloques multibase para trabajar este tema y realizar equivalencias. ▲ Se pueden proponer adivinanzas, juegos de memoria, concursos y recortes de noticias para realizar la lectura y escritura de cantidades menores que 1000. Por ejemplo: Se proporciona la siguiente noticia:  INCREMENTO AFECTA A 506 DE LAS 693 RUTAS URBANAS Y RURALES Pasajes de autobuses subirán entre ¢5 y ¢270 en todo el país Alza se aplicará la semana entrante, un día después de incluirse en *La Gaceta* Aresep rechazó fijación en 187 rutas porque requisitos estaban incompletos **Imagen tomada de: http://www.nacion.com/2011-07-27/ElPais/pasajes-de-autobuses-subiran-entre--5-y--270-en-todo-el-pais.aspx** La idea es evaluar la lectura de las cantidades que ahí se especifican. Posteriormente es necesario escribirlas utilizando la forma literal correspondiente. Esta actividad permite establecer conexiones con *Medidas* y la asignatura de Español.
	3. Identificar el valor posicional de los dígitos de un número menor que 1000.	Conviene aquí aprovechar las diferentes formas de representación para comprender el valor posicional de las cifras que tiene un número menor que 1000. Por ejemplo proponer la siguiente actividad: Cada figura tiene un número que representa la cantidad de unidades que contiene. ¿Cuál número permite representar la totalidad de la figura?  ▲ Al final, se procede a formalizar la noción de valor posicional de las cifras que componen un número.

4. Escribir sucesiones de números de 10 en 10 o de 100 en 100.	▲ Es útil proponer el siguiente problema: ¿Cuáles números hacen falta para completar las sucesiones numéricas mostradas a continuación? 4, 14, 24, 34,… 54, 154, … , 354, 454, …, 654 671, 681, 691, …, 711, …, 831. Esta actividad permite establecer conexiones con el área de *Relaciones y Álgebra*.
5. Comparar números menores que 1000 utilizando los símbolos <, > o =.	Observe en cada fila los grupos de objetos que se le presentan, poniendo especial atención a los símbolos que se ubican en el centro de tales agrupaciones. Descifre el significado que ellos tienen. ☎☎☎☎ > ☎☎ 💻💻💻💻💻💻💻 < 💻💻💻💻💻💻💻💻💻 🔔🔔🔔 < 🔔🔔🔔🔔🔔🔔🔔 🖰🖰🖰🖰🖰🖰🖰🖰🖰 > 🖰🖰🖰🖰🖰🖰 🕮🕮🕮🕮🕮🕮🕮 = 🕮🕮🕮🕮🕮🕮🕮 ▲ Al finalizar la actividad, se realizará una discusión plenaria donde se deducirá el significado de los mismos. La idea es aplicar estos símbolos en comparaciones con números menores que 1000. Es importante fomentar una actitud perseverante para descifrar el significado de los símbolos que relacionan los dos conjuntos de objetos. Esta actividad permite establecer conexiones con el área de *Relaciones y Álgebra*.
6. Representar números en la recta numérica.	▲ Como actividad inicial, se puede proponer lo siguiente: a. Dibujar una línea recta con una regla sobre papel para reciclar, de forma tal que se marquen los espacios que ocuparán los números que serán ordenados. Los espacios entre una marca y otra deben ser uniformes. b. Escribir de izquierda a derecha los números naturales menores que 15. ▲ Hay que supervisar durante el trabajo estudiantil el uso correcto de la regla y que los números que se colocan estén en el orden adecuado. Aquí se puede establecer una conexión con *Medidas,* pues se puede solicitar que el espacio entre un número y otro mida 1 cm, o bien 2 cm, etc.  

<table>
<tr><td></td><td>7. Identificar el antecesor y el sucesor de un número mayor o igual a cero y menor que 1000.</td><td>▲ Las rectas numéricas construidas en la actividad descrita para la habilidad anterior sirven para responder preguntas como:

¿Cuál número está antes de 15? ¿Cuál está después de 10? ¿Cuál número está antes de 0?

De ese modo, en la etapa de clausura se define el concepto de sucesor y antecesor de un número natural y se establece que 0 no tiene antecesor (en este nivel educativo).

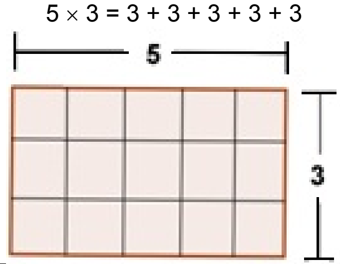
▲ Para reafirmar estos conocimientos, se puede utilizar el juego donde alguien menciona una cantidad y otro menciona el antecesor y el sucesor de ella.</td></tr>
<tr><td></td><td>8. Determinar el doble de un número natural y la mitad de números pares menores que 100.</td><td>▲ Se plantean problemas como el siguiente:

El papá de Miguel tiene el doble de su edad y su hermana tiene la mitad. Miguel tiene 36 años, ¿cuál es la edad del papá y de la hermana de Miguel?

▲ Utilizar juegos que favorezcan el cálculo mental, donde se pueda obtener la mitad o el doble de un número.</td></tr>
<tr><td></td><td>9. Identificar el lugar que ocupan objetos o personas en un orden definido utilizando números ordinales hasta el vigésimo.</td><td>▲ Se puede dar una hoja con 20 cuadritos trazados en forma horizontal, para realizar pequeños dibujos según las indicaciones de la o el docente. Por ejemplo, se exclama “en el tercer cuadro dibujar un círculo”, “en el noveno una equis”, etc. y los estudiantes proceden a ilustrar dichos elementos en las casillas correspondientes.

▲ También, se puede trabajar con actividades en un contexto real: buscar en un periódico el lugar que ocupa un determinado equipo en el fútbol, investigar en qué lugar se encuentra Costa Rica a nivel internacional en lo que respecta a la esperanza de vida, etc.


Así va torneo
Posiciones
TORNEO DE VERANO
<table><tr><th>Equipos</th><th>J</th><th>G</th><th>E</th><th>P</th><th>GF</th><th>GC</th><th>DIF</th><th>PTS</th></tr><tr><td>1. Pérez Zeledón</td><td>16</td><td>10</td><td>4</td><td>2</td><td>33</td><td>17</td><td>+15</td><td>34</td></tr><tr><td>2. Saprissa</td><td>15</td><td>7</td><td>6</td><td>2</td><td>24</td><td>15</td><td>+9</td><td>27</td></tr><tr><td>3. Cartaginés</td><td>15</td><td>8</td><td>3</td><td>4</td><td>25</td><td>19</td><td>+6</td><td>27</td></tr><tr><td>4. Santos</td><td>14</td><td>8</td><td>1</td><td>5</td><td>22</td><td>19</td><td>+3</td><td>25</td></tr><tr><td>5. Herediano</td><td>15</td><td>6</td><td>3</td><td>6</td><td>20</td><td>16</td><td>+4</td><td>21</td></tr><tr><td>6. Belén</td><td>14</td><td>5</td><td>6</td><td>3</td><td>19</td><td>15</td><td>+4</td><td>21</td></tr><tr><td>7. Alajuelense</td><td>15</td><td>6</td><td>3</td><td>6</td><td>23</td><td>21</td><td>+2</td><td>21</td></tr><tr><td>8. San Carlos</td><td>15</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>17</td><td>18</td><td>-1</td><td>20</td></tr><tr><td>9. Limón</td><td>15</td><td>3</td><td>4</td><td>8</td><td>17</td><td>26</td><td>-9</td><td>13</td></tr><tr><td>10. Puntarenas</td><td>16</td><td>3</td><td>3</td><td>10</td><td>15</td><td>28</td><td>-13</td><td>12</td></tr><tr><td>11. Orión FC</td><td>16</td><td>2</td><td>2</td><td>12</td><td>10</td><td>31</td><td>-21</td><td>8</td></tr></table>
**Imagen tomada de:
http://periodico.nacion.com/doc/nacion/la_nacion-29marzo2012/2012032901/?key=041868691202ca06a9ae05fbcffbd434#38**</td></tr>
</table>

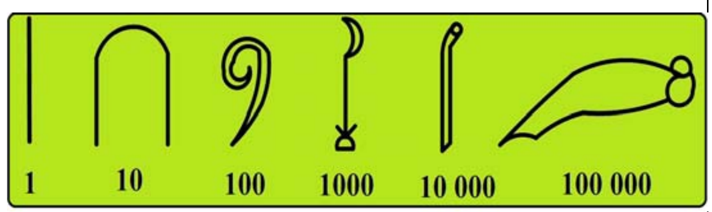
		Esto permite establecer conexiones con *Estadística y Probabilidad,* por cuanto se fomentan habilidades relacionadas con la lectura y descripción de la información que generan las tablas.
Operaciones con números naturales • Suma • Resta • Multiplicación	10. Aplicar la relación entre las operaciones suma y resta para la verificación de respuestas o resultados. 11. Efectuar sumas y restas en columnas.	▲ Se plantea un problema como el siguiente: En la escuela se realizaron las votaciones estudiantiles. Se conformaron dos partidos políticos: PAN y POE. No hubo votos nulos y todas y todos votaron. PAN ganó las elecciones por un margen de 134 votos y la escuela tiene un total de 251 estudiantes. ¿Cuántos votos obtuvo el partido PAN? ¿Cómo comprobar que no hubo fraude electoral? Se espera que existan discusiones y aportes que permitan converger hacia la estrategia de sumar la cantidad de niños y niñas para ver si el resultado corresponde al total especificado. Esto permite activar el proceso *Razonar y argumentar* y se da una oportunidad para mostrar la utilidad de las Matemáticas. El problema anterior recuerda el compromiso que tenemos como costarricenses por prestar atención a los procesos de elección de nuestros gobernantes, para que se desarrollen dentro del marco de la legalidad. ▲ En el caso de las operaciones de suma y resta de números naturales, es necesario comenzar a utilizar el agrupamiento o desagrupamiento de las cantidades, empleando números de hasta 3 dígitos. En la acción docente se deben proponer diferentes problemas con los sentidos de la resta: sacar, completar, hasta…. lo que falta para tener…, para llegar a….
	12. Identificar la multiplicación como la adición repetida de grupos de igual tamaño.	▲ Se puede plantear problemas similares al siguiente: Como parte del proyecto de reciclaje que se desarrolla en una escuela, se ha solicitado a cada estudiante traer 5 latas de aluminio. Si hay 23 estudiantes en total, ¿cuántas latas se recogieron en el grupo? Se espera que cada estudiante elabore sus propias estrategias de resolución, las cuales conviene compartir con sus compañeros. En la etapa de clausura se procede a establecer la multiplicación como la suma sucesiva de sumandos iguales. ▲ Trabajar la representación de la multiplicación con material concreto como papel cuadriculado: $5 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ 

<table>
<tr>
<td></td>
<td>13. Aplicar diversas estrategias para conocer los resultados de las tablas del 1, 2, 3, 4 y 5.</td>
<td>
▲ Es importante utilizar estrategias que permitan conocer los resultados de las tablas:
a. Contar de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4 y de 5 en 5.
b. El contar las articulaciones de los falanges en los dedos para la tabla del tres:

Elaboración propia
c. Reconocimiento de patrones en los dígitos de los resultados. En el caso de la tabla del 5 las últimas cifras siguen la secuencia 0, 5, 0, 5, 0, 5, 0, 5, 0, 5, 0 y las primeras siguen la secuencia 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5.
<table>
<tr><td>5 × 0</td><td>00</td></tr>
<tr><td>5 × 1</td><td>05</td></tr>
<tr><td>5 × 2</td><td>10</td></tr>
<tr><td>5 × 3</td><td>15</td></tr>
<tr><td>5 × 4</td><td>20</td></tr>
<tr><td>5 × 5</td><td>25</td></tr>
<tr><td>5 × 6</td><td>30</td></tr>
<tr><td>5 × 7</td><td>35</td></tr>
<tr><td>5 × 8</td><td>40</td></tr>
<tr><td>5 × 9</td><td>45</td></tr>
<tr><td>5 × 10</td><td>50</td></tr>
</table>
d. Memorización.
▲ Estas estrategias deben enfocarse hacia la memorización de las tablas de multiplicar. El uso de concursos, juegos o canciones puede contribuir a reafirmarlas.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Cálculos y Estimaciones
• Suma
• Resta
• Multiplicación
• División</td>
<td>14. Resolver problemas y operaciones con sumas y restas de números naturales menores que 1000.</td>
<td>
Mediante bloques multibase, papel cuadriculado o recortes con material reciclable, se pueden representar las unidades, decenas y centenas de los números presentes en el problema siguiente:
La selección de fútbol de la Escuela El Alto jugará un partido de fútbol sala contra la Escuela Proyecto Social en el gimnasio. La Dirección de la primera autorizó a dos grupos de segundo año (69 estudiantes entre ambos) y dos de tercero (65 entre ambos) para que fueran a brindar apoyo. ¿Cuántos estudiantes brindaron su apoyo a la Escuela El Alto?
▲ Con ello se pretende que se agrupen las unidades para formar decenas, o bien decenas para formar centenas y de esa forma dar sentido el algoritmo que permite sumar agrupando por columna.
</td>
</tr>
</table>

		▲ De forma análoga, es necesario propiciar una situación como la siguiente, para deducir el proceso de desagrupar en el caso de la resta como medio para justificar el algoritmo por columnas: Para elegir la directiva de la sección, se postularon dos candidatos para la presidencia. El primer candidato obtuvo 17 votos. Si en total votaron 35 estudiantes, ¿cuántos estudiantes votaron por el segundo candidato?
	15. Resolver problemas y operaciones que involucren el cálculo de multiplicaciones de números naturales. 16. Dividir por 2 números pares menores que 100.	▲ El primer factor debe poseer tres dígitos y el segundo factor uno. Los resultados deben ser cantidades menores que 1000. Se resuelve esta operación por columnas sin agrupamiento. ▲ Proponer la resolución de problemas análogos a los mostrados a continuación: Por día, María consume 8 vasos de agua. ¿Cuántos vasos consume en dos semanas? ¿Cuántas patas tiene un grupo de 23 caballos? En el grupo hay 32 estudiantes, de los cuales la mitad usa el autobús como medio de transporte. ¿Cuántos estudiantes viajan en autobús? ▲ Se puede aprovechar la noción de mitad de un número para relacionarlo con la división de números pares por 2. ▲ No introducir o formalizar la noción de número par en este momento.
	17. Calcular sumas con números naturales aplicando como estrategia las propiedades asociativa y conmutativa.	▲ Es necesario proponer problemas donde se pueda argumentar si el orden de los sumandos influye en el resultado de una suma. Por ejemplo: Raúl le comenta a su hermana Ester que quiere saber cuántos años suman las edades de sus 4 primos. A esta le informan que ellos tienen 19, 16, 11 y 14 años. Ambos deciden hacer los cálculos respectivos. Raúl decide primero realizar la operación 19 + 14, luego 16 + 11 y al final sumar ambos resultados. Por su parte, Ester decidió realizar primero 11 + 19 y luego 14 + 16 para sumar al final ambos resultados. a. ¿Cuál fue el resultado que obtuvieron? b. ¿Quién cree que planteó la operación de una forma más fácil y por qué? Una vez discutidos los resultados, se puede realizar la clausura de la lección formalizando los conceptos de asociatividad y conmutatividad de la suma de números naturales. ▲ Estas propiedades deben orientarse para facilitar los cálculos de tipo mental y escrito.

	18. Calcular sumas, restas y multiplicaciones utilizando diversas estrategias de cálculo mental y estimación.	▲ Por ejemplo, se le pregunta a la clase: ¿Cuál es el producto de 4 × 12? Varias estrategias pueden ser efectuadas. Por ejemplo: a. 4 × 12 = 48 pues 4 × 10 = 40 y 4 × 2 = 8 entonces 40 + 8 = 48. b. 4 × 12 es lo mismo que 12 + 12 + 12 + 12 por lo cual como 10 + 10 + 10 + 10 = 40 y 2 + 2 + 2 + 2 = 8 entonces 40 + 8 = 48. c. 4 × 11 = 44 y se suma un grupo de 4 entonces da 48. Luego se explica por qué es correcta la estrategia estudiantil usada. ▲ Actividades como los retos matemáticos promueven el cálculo mental y son un elemento didáctico muy enriquecedor para lograr estas habilidades. Por ejemplo, se brinda al grupo operaciones escritas en sobres de papel. Alguien lo abre, observa la operación y en un tiempo prudencial brinda el resultado por medio del cálculo mental. Luego se comenta en el grupo la estrategia empleada.
	19. Evaluar la pertinencia de los resultados que se obtienen al realizar un cálculo o una estimación.	▲ Utilizar problemas contextualizados que permitan, por medio del cálculo mental o la estimación, discernir si el resultado es correcto o no. Por ejemplo, se puede leer (o plantear por escrito) problemas como el siguiente: Un joven tiene ¢525 y compró un chocolate de ¢135. El pulpero le entregó ¢290 de vuelto. ¿Realmente el pulpero entregó la cantidad de dinero correcta? Evaluar la pertinencia de los resultados está asociado con los procesos de *Razonar y argumentar*, *Comunicar* y *Conectar*.

3^er Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Números naturales • Relaciones numéricas • Sistema de numeración decimal • Unidad de millar • Relaciones de orden • Números ordinales	1. Representar números menores que 100 000 aplicando los conceptos de decena de millar y unidad de millar.	▲Utilizar noticias de los medios de comunicación y datos numéricos de otras áreas del saber para el reconocimiento y presentación de estos números. Por ejemplo: 45 000 en Costa Rica verán en estadio beatificación de Juan Pablo II **Imagen tomada de: http://www.aciprensa.com/noticia.php?n=33122** Escriba en forma literal el número que representa la cantidad de personas que vieron al papa Juan Pablo II.
	2. Identificar el valor posicional de los dígitos de un número menor a 100 000.	Se puede introducir a manera de juego cómo es que se representaban algunos números en otros sistemas de numeración. Por ejemplo, el sistema de numeración egipcio utilizaba jeroglíficos para representar los números en base diez:  **Elaboración propia** ▲ Se puede solicitar a la clase formar varios números con esta simbología. Ver la diferencia entre la numeración decimal posicional y la no posicional como la de Egipto. ▲ Es importante el uso del ábaco vertical para la comprensión del valor posicional de las cifras que conforman un número menor que 100 000.
	3. Escribir sucesiones de números de 10 en 10, de 100 en 100 o de 1000 en 1000.	▲ Proponer sucesiones numéricas para ordenarlas en forma ascendente o descendente con tal de fortalecer el dominio de este tipo de conteos. Por ejemplo: a. 5123, _______, _______, 2123, _______ b. 13 524, 13 534, ________, ________.
	4. Comparar números menores que 100 000 utilizando los símbolos <, > o =.	Incluir la búsqueda de noticias o artículos a nivel nacional o internacional que involucren formas de representación tabular o gráfica para comparar cantidades menores que 100 000. Esto favorecería el establecimiento de conexiones con *Estadística y Probabilidad*, así como la confianza del estudiante en la utilidad de las Matemáticas. A continuación un ejemplo:

Cuadro I. Istmo Centroamericano: causística del dengue (2007)

País	Casos clínicos	Tasa de incidencia (por 100 000 habitantes)	Casos de dengue hemorrági-co	Muertes por dengue hemorrágico
Belice	40	17,32	0	0
Guatemala	5886	50,36	21	4
Honduras	33 508	444,58	4180	16
El Salvador	12 476	196,03	100	0
Nicaragua	1415	27,17	151	12
Costa Rica	26 440	815,04 a/	318	8
Panamá	3402	117,35	3	0
Total	**83 167**		**4773**	**40**

a/ Incidencia calculada a partir de la población en riesgo.
Fuente: OPS, 2008.

Información tomada de:
http://www.estadonacion.or.cr/index.php/apoyo-educativo/materiales-didacticos

De acuerdo con el cuadro anterior, escriba sobre la línea los símbolos >, < o = según corresponda y luego describa con sus propias palabras su significado.

26 440 _____ 33 508.

El estudiante deberá llegar a que

26 440 __<__ 33 508

y decir que Costa Rica registra una cantidad menor de casos de dengue con respecto a Honduras.

Esta actividad en particular puede ser de utilidad para crear conciencia sobre la necesidad de eliminar los criaderos de mosquitos y minimizar así el número de casos de dengue en nuestro país.

5. Identificar los números ordinales hasta el centésimo como la unión de vocablos asociados.

▲ Se le reparte a cada estudiante un sobre con prefijos y raíces de los números ordinales (vigésimo, trigésimo, cuadragésimo, hasta el centésimo), se les pide que las armen y que por último escriban al lado de cada una el número en forma simbólica. Se comparten las respuestas para verificar los aciertos y corregir los errores.

Operaciones

- Multiplicación
- División
  - Dividendo
  - Divisor
  - Cociente
  - Residuo

6. Determinar el resultado de las tablas del 1 al 10 aplicando diversas estrategias.

7. Efectuar multiplicaciones en columna donde el segundo factor sea de uno o dos dígitos agrupando y sin agrupar y donde el resultado sea un número menor que 100 000.

▲ Se propone el siguiente problema:

El aula de la maestra Flor tiene 7 filas de 4 estudiantes cada una. La del maestro Daniel tiene 4 filas de 7 estudiantes. ¿Cuál de los dos maestros tiene más estudiantes?

Es necesario estar pendiente de que se argumenten las respuestas:

a. Verbalmente.
b. Utilizando representaciones gráficas.
c. Mediante el uso de la multiplicación.

	8. Efectuar multiplicaciones en línea donde uno de sus factores es 10, 100 o 1000.	Producto de la discusión e intercambio de ideas, se debe concluir que el orden de los factores no altera el resultado. Se concreta la noción de propiedad conmutativa del producto y su utilidad para el dominio de las tablas de multiplicar. ▲ Estrategias que se pueden implementar para obtener el resultado de las tablas de multiplicar: uso de los dedos, canciones, bingos, conteo y uso de la propiedad conmutativa del producto. ▲ Se busca generalizar las ideas desarrolladas en los algoritmos de sumas por agrupación en la multiplicación. ▲ En el caso donde el segundo factor tiene dos dígitos, recalcar el porqué se deja un espacio después de efectuar la multiplicación por la cifra de las unidades. ▲ Es importante que en la clase se pueda deducir la estrategia que permite resolver multiplicaciones de números por 10, 100 y 1000 más rápidamente, a partir de la realización de varias operaciones de este tipo. Conviene permitirles que discutan acerca del patrón presente en el resultado de estas operaciones.
	9. Identificar la división como reparto equitativo o como agrupamiento.	▲ Se proponen problemas que permitan ir consolidando técnicas empíricas para la realización de divisiones: Si en mi aula hay 28 estudiantes, ¿cuántos grupos de 4 personas puedo formar? Si por cada salto un conejo avanza aproximadamente 3 dm, ¿en cuántos saltos podrá recorrer 39 dm? Pedro trae de su finca 38 mandarinas para compartir con sus 4 compañeros. ¿Cuántas mandarinas le corresponden a cada compañero? En la etapa de clausura, se sistematiza el concepto de división, su simbología y sus partes. No el algoritmo tradicional.

Cálculos y estimaciones
 	
• Suma
 	
• Resta
 	
• Multiplicación
 	
• División
	10. Resolver y plantear problemas en los que se utilicen las operaciones suma, resta, multiplicación y división.	▲ Se pueden resolver problemas como los siguientes:
		
		Determinar el valor de los símbolos @ y # de forma tal que las operaciones tengan resultado correcto:
		
		  5 7 @
		− 2 # 7
		  2 8 1
		
		Luis tiene en el bolsillo de su pantalón monedas de ₡25, ₡50 y ₡100. Si Luis saca tres monedas, ¿cuánto dinero pudo haber sacado?
		
		Este problema permite establecer conexiones con el área de *Estadística y Probabilidad*, ya que se hace referencia al manejo de la incertidumbre.

		Se insiste en el planteo de problemas a partir de datos de diferentes fuentes de información (televisión, periódicos, libros, internet, el entorno, etc.), y que permitan hacer uso de las operaciones básicas. Estos problemas pueden ser intercambiados para su resolución. La información obtenida por los estudiantes brinda oportunidades para crear conciencia en temáticas afines a los ejes transversales. Proponer al estudiantado plantear un problema con las siguientes operaciones: $3 \times 1500 = 4500$ $10000 - 4500 = 5500$ Posible planteo: Jorge compra 3 entradas de cine a ₡1500 cada una y paga con un billete de ₡10 000. ¿Cuánto dinero le quedará? ▲ En este año no se trabajará la división con el algoritmo tradicional, sino con técnicas como el reparto equitativo y el agrupamiento. Se trabajarán problemas y ejercicios donde el dividendo sea menor que 100 y el divisor sea de un dígito.
	11. Determinar el triple o el quíntuple de números menores que 100.	▲ Se plantean problemas que permitan la introducción de dichas nociones. Por ejemplo: Un banano en la soda de la escuela cuesta ₡40. ¿Cuánto dinero necesito para comprar cinco bananos? El precio del kilogramo de manga es tres veces superior al de maracuyá. Si el kilogramo de este último es de ₡225, ¿cuál es el precio por kilogramo de manga? Después de la actividad, en la etapa de clausura se define la noción de triple o quíntuple de un número a partir de lo estudiado.
	12. Calcular sumas, restas, multiplicaciones y divisiones aplicando diversas estrategias de cálculo mental y estimación.	▲ Para la estimación se deben utilizar operaciones como: 30×40 $1500 \div 3$ ▲ Proponga espacios para establecer características en los resultados de operaciones por medio de la estimación. Por ejemplo, plantear preguntas como: ¿Cuántas cifras tiene el resultado de las siguientes operaciones? 25×100 $800 \div 2$ Estas actividades permiten juzgar de manera crítica la situación y justificar verbalmente la estrategia utilizada.

<table>
<tr><td>13. Evaluar la pertinencia de los resultados que se obtienen al realizar un cálculo o una estimación.</td><td>Permitir espacios para comunicar y discutir las estrategias utilizadas.</td></tr>
<tr><td>14. Seleccionar métodos y herramientas adecuados para la resolución de cálculos, según el problema dado.</td><td>▲ Uso de
<table><tr><td>Cálculo mental</td><td>2500 + 2000</td></tr><tr><td>Papel y lápiz</td><td>1340 × 40</td></tr><tr><td>Calculadora</td><td>5784 ÷ 543</td></tr></table>
según la complejidad de la operación.

Para lograr que se aprenda a seleccionar el medio adecuado para realizar un cálculo, resulta conveniente que se expresen las razones de esa selección. Por ejemplo, cuando el problema requiere hacer un cálculo con una gran cantidad de datos, se puede recurrir a la calculadora; o bien en el problema ¿cuántos billetes de 2000 colones son necesarios para comprar un disco que cuesta 14 000 colones? , mentalmente se puede decir que 7.</td></tr>
</table>

Indicaciones metodológicas

Generales del ciclo

1. Para introducir los nombres de los números y su utilidad en los diferentes años se pueden solicitar recortes de noticias apropiadas para modelizar con números.

2. El uso de actividades lúdicas constituye una herramienta indispensable para desarrollar el cálculo mental. Esto permite fomentar una actitud de aprecio y disfrute de las Matemáticas, así como habilitar espacios para exponer la estrategia de cálculo usada y contribuir al aprendizaje de los demás.

3. Para el establecimiento de relaciones numéricas y el tratamiento de las operaciones se pueden usar diferentes recursos: objetos del entorno, material recortable, el ábaco, los bloques multibase, artículos de periódicos y revistas y algunos recursos tecnológicos como el Internet y la calculadora.

4. En relación al tema de valor posicional, hay que considerar que al inicio los niños y niñas aprenden a escribir los números sin tener conciencia sobre el valor que representa cada cifra. Es conveniente utilizar materiales como el papel cuadriculado, ábacos y bloques multibase para reforzar esta noción, que es importante para comprender el significado de los principales algoritmos que permiten resolver las operaciones básicas.

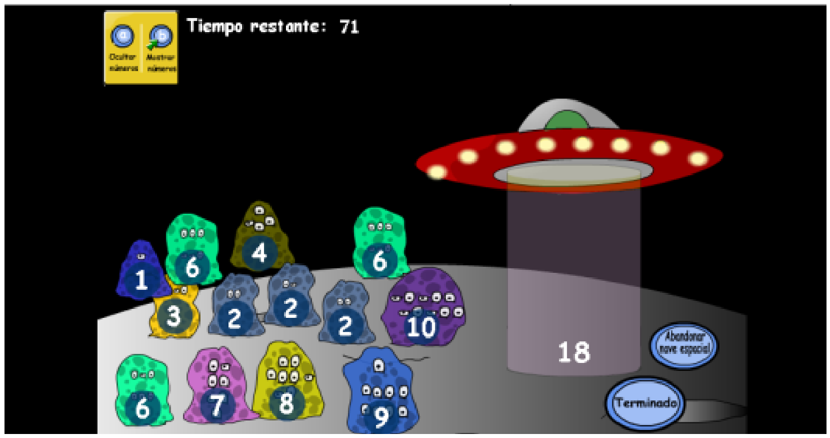
5. La resolución de problemas que involucre el uso de las operaciones básicas debe referirse a variedad de contextos reales que se experimenta en el diario vivir: ¿cuántos días faltan para las vacaciones de medio periodo?, ¿cuántos estudiantes están presentes hoy si faltaron 8?, etc.

6. El uso de recursos tecnológicos puede potenciarse para desarrollar habilidades relacionadas con el sentido numérico y el cálculo de operaciones. Por ejemplo, al ingresar al sitio web

   http://www.wikisaber.es/Contenidos/iBoard.aspx?obj=405

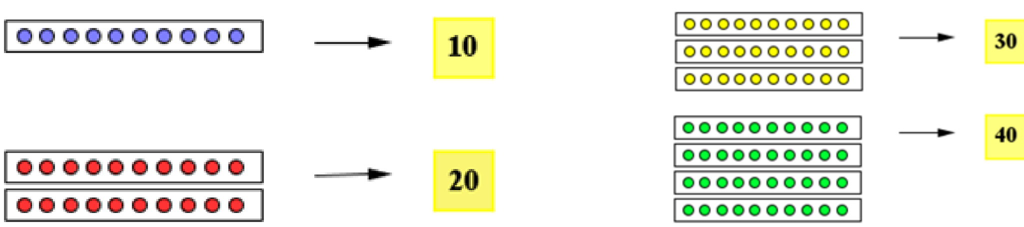
   se pueden desarrollar actividades como la siguiente:

Determinar dos o más sumandos que den como resultado el total dado.



Primer año

1. En este año se pretende comprender el significado de los números para establecer diferentes representaciones. Es importante que la o el estudiante pueda expresar de diversas formas que un número como el 37 equivale a 3 decenas y 7 unidades. Previamente, la acción estudiantil debe ir orientada a expresar verbalmente equivalencias que se forman al agregar decenas: 10 más 10 es veinte, veinte más 10 es 30, etc.



2. El tratamiento de los números ordinales debe ir orientado a diagnosticar qué tanto conocen acerca de la noción de estar ordenados (primero, segundo, etc.). Es probable que ya se hayan familiarizado con estas nociones, debido a que se pueden observar en diversas situaciones del contexto estudiantil (los grados de la escuela, al hacer fila para ir al comedor, etc.). Esto puede ser aprovechado para desarrollar actividades en el aula de forma natural.

3. Para progresar hacia el cálculo en línea y después el cálculo mental es necesario representar colecciones organizadas y visualizarlas sin contar. Por ejemplo:

Juegos con las manos

Docente: *¿cuántos dedos tengo aquí?*  **Imagen cortesía de FreeDigitalphotos.net** Estudiantes: siete.	O bien, se nombra un número menor que 10 y cada estudiante muestra los dedos correspondientes. Por ejemplo, Docente: ¡siete! Estudiantes: muestran la cantidad de dedos correspondiente.

Docente: *¿cuántos dedos faltan para llegar a 10?*

Estudiantes: tres

Imágenes cortesía de FreeDigitalphotos.net

Juegos con los dados

Dos estudiantes juegan a tirar dos dados. Cuando uno tira, el otro da un tiempo prudencial antes de taparlos. Luego le solicita al otro u otra decir cuánto suman los números representados en ellos, o bien ¿cuántas unidades mayor es uno respecto al otro?

Imagen cortesía de FreeDigitalphotos.net

4. Es necesario que se resuelvan problemas del contexto real inmediato antes de hablar de sumas y restas. Usar inicialmente cantidades menores que 20 aumentando progresivamente los números que se proponen. Se busca evolucionar del conteo simple (recuento de la totalidad o de la cantidad faltante) a estrategias más elaboradas como el agrupamiento y conteo de las decenas y unidades.

5. El uso de la tabla de sumas permite identificar la relación entre la suma y la resta, resultado bastante útil para el cálculo mental.

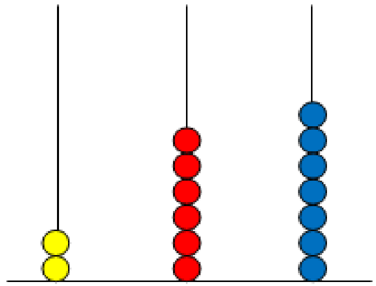
10											
9											
8										17	
7											
6											
5											
4											
3											
2											
1											
0											
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

De este modo se puede apreciar que si 9 + 8 = 17, entonces 17 – 9 = 8 y 17 – 8 = 9.

6. En el caso de las operaciones suma y resta de números naturales, no se utiliza la caja de valores ni el algoritmo clásico posicional por columnas. De ahí que en dichas operaciones no se emplea la técnica de agrupar o desagrupar las cantidades sino más bien es necesario favorecer la técnica particular que utilizó cada estudiante.

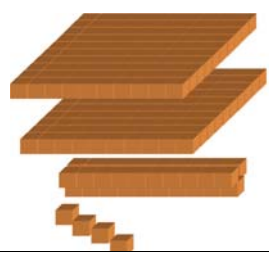
Segundo año

1. Es fundamental reconocer que una centena son 10 decenas o 100 unidades antes de proceder a realizar representaciones para cantidades menores que 1000. Para desarrollar la noción de valor posicional, se puede utilizar un ábaco vertical físico o dibujado. Por ejemplo, preguntar cómo representaría el número 267.



Así puede deducir cómo se representarían otros números de tres cifras. También se puede aprovechar el material para desarrollar las habilidades de suma y resta de números naturales.

2. Se debe trabajar simultáneamente las diversas formas de representación cuando sea pertinente:

Representación gráfica	Representación simbólica	Literal	Por composición o descomposición aditiva
	234	Doscientos treinta y cuatro	200 + 30 + 4

3. Con respecto a los números ordinales, es relevante mencionar que los términos onceavo, doceavo y treceavo están mal empleados, pues según la Real Academia Española, onceavo es una de las once partes en que se divide un todo. Esta definición es similar para doceavo y treceavo. La forma correcta es décimo primero, décimo segundo, décimo tercero, respectivamente.

4. Para analizar la relación existente entre la suma y la resta como operaciones inversas, se pueden proponer diversos problemas donde se utilicen los mismos números para visualizar la relación que existe entre ellos. Por ejemplo:

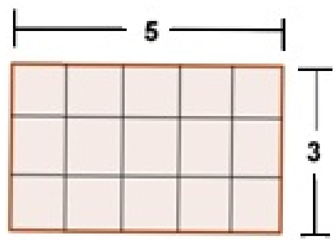
Rosa ha recogido 39 flores en un jardín mientras que su esposo ha recogido 28. ¿Cuántas flores recogieron en total?

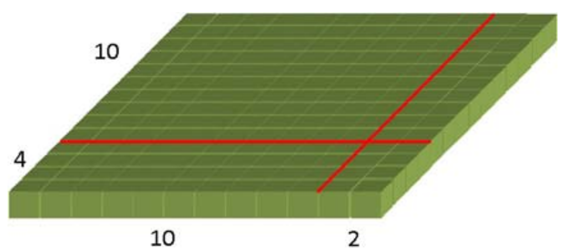
Entre Rosa y su esposo han recogido un total de 67 flores. Si el esposo de Rosa ha recogido 28, ¿cuántas flores recogió ella?

Rosa y su esposo han recogido 67 flores. Ella ha recogido 39 flores, entonces ¿cuántas ha recogido su esposo?

5. Es importante prestar atención a posibles errores que pueden presentarse durante la aplicación del algoritmo posicional, como la colocación incorrecta de los números, sumar o restar partiendo de la columna de la izquierda, errores de cálculo, a una cifra mayor se le resta una menor, olvidar "que llevo …" o "pido prestado".

6. Es conveniente que se pueda escribir una suma de números iguales como multiplicación y viceversa para que el aprendizaje sea más significativo. Además, que se comprenda el significado de cada uno de los números que conforman esta operación, pues los factores pueden hacer referencia a unidades diferentes. Modelizar los problemas característicos de la multiplicación con diagramas o materiales concretos ayuda a la comprensión de lo que representan los factores y su producto. El uso de rectángulos es una herramienta simple que permitiría entender por qué la multiplicación es más rápida que el conteo de cuadritos o la suma de éstos. Además permite comprender propiedades como la conmutatividad y la distributividad del producto respecto a la suma.





$5 \times 3 = 15$ $14 \times 12 = 100 + 40 + 20 + 8 = 168$

Es provechoso promover la discusión acerca de diferentes tipos de problemas que pueden ser resueltos por medio de la multiplicación.

7. Es conveniente ofrecer espacios para discutir estrategias de cálculo mental. El uso de la descomposición y composición aditiva permite establecer varias estrategias para calcular mentalmente sumas y restas; por ejemplo, para calcular la operación 46 + 38 se pueden aprovechar las siguientes ideas:
   - Sumar decenas y unidades por aparte. Luego sumar dichos resultados.
   - Tomar 4 unidades del 38 para completar el 46 a 50. Así se forma la operación 50 + 34 = 84.

8. El cálculo mental y la estimación deben ser utilizados en la validación de los resultados de ciertas situaciones. Por ejemplo se plantea el siguiente problema para valorar si la respuesta es correcta:

   Para completar un álbum, Jorge compra por día dos paquetes que contienen tres postales. Luego, en forma oral se pide a los estudiantes que juzguen si es correcta o no la siguiente afirmación: "Jorge compra 21 postales por semana".

   Se espera que alguien responda que eso no es correcto, pues por día Jorge compra 6 postales por lo que por semana habrá comprado $6 \times 7 = 42$ postales. O bien, que Jorge compra 14 paquetes por semana y en consecuencia compró $14 \times 3 = 42$ postales.

Tercer año

1. Las habilidades 1 y 2 pueden desarrollarse simultáneamente pues es por medio de las representaciones de un número que se comprende el significado que tienen las cifras de un número de acuerdo con su posición en él. Es importante reconocer que una unidad de millar corresponde a 10 centenas o 1000 unidades y comprender su magnitud en comparación con otras cantidades. Para ello, se pueden desarrollar actividades como confeccionar tiras de papel de 10 cm o 100 cm para luego unirlas y formar una tira que mida 1000 cm o construir un modelo de 10 bloques de centenas. Se pueden realizar actividades similares para comprender la idea de la decena de millar. Se debe utilizar el ábaco vertical para clarificar el valor posicional de las cifras de un número.
2. En cuanto a los números ordinales, hay que hacer énfasis en la forma en que se establecerá la representación literal y oral de ellos. Se puede realizar un bingo donde al exclamarse “quincuagésimo sexto” cada estudiante debería marcar la casilla correspondiente al número 56°.
3. Se pueden utilizar artículos de periódicos o revistas para representar simbólicamente diversas situaciones mediante el uso de los símbolos de >, < o =.

PRECIO DE COMBUSTIBLES POR LITRO EN COLONES

Mayor alza de los últimos años

PRODUCTO	SÚPER	PLUS	DIÉSEL
Ajuste extraordinario enero	29	27	11
Ajuste extraordinario febrero	33	33	11
Impuesto único (IV trimestre 2011)	3	3	2
Devolución a Recope	44	44	46
Ajuste total	109	107	70
Precio vigente	615	600	575
Nuevo precio con ajustes	724	707	645

FUENTE: ARESEP Y RECOPE

Imagen tomada de: http://periodico.nacion.com/doc/nacion/la_nacion-08marzo2012/2012030801/4.html?key=07b3cc706b369a533a1cb1315ecc5994#4

4. Proponer ilustraciones para que se planteen problemas mediante las operaciones básicas. Por ejemplo:

Imagen cortesía de FreeDigitalphotos.net

Posibles problemas a plantear: *¿cuántos huevos hay en 7 paquetes de media docena cada uno? Si recogí 42 huevos en la granja de mi abuelo y deseo acomodarlos en paquetes de media docena, ¿cuántos paquetes puedo formar?*

5. En este año se comienza a trabajar el algoritmo de la multiplicación por columnas con agrupamiento. Es importante que se dé la oportunidad de hallar estrategias propias (por ejemplo, sumando sucesivamente) para dar sentido a las operaciones. Posteriormente, se pueden usar recursos como ábacos, bloques, papel cuadriculado, etc., para facilitar la comprensión del algoritmo por columnas.

6. En el caso de la división deben considerarse dos sentidos: la división como agrupamiento y como distribución o reparto. Inicialmente, se debe plantear problemas del contexto real donde se haga alusión a repartir en partes iguales, hacer grupos iguales, restar reiteradamente, distribuir equitativamente, compartir, partir, etc. Por ejemplo:

   a. *¿Cuántos grupos de 4 personas puedo formar en mi sección, si ésta tiene 34 estudiantes?*
   b. *Lidia es maestra del 3-B, el cual tiene 27 estudiantes. Como parte de la campaña de vacunación contra la gripe, se le solicita a ella llevar grupos de 3 estudiantes para ser vacunados, después de lo cual esperarán en el gimnasio de la escuela un tiempo prudencial para prevenir algún tipo de reacción, ¿cuántos viajes debe realizar la maestra?*

7. En la habilidad donde se evalúa la pertinencia de los resultados, es importante proponer espacios para que la o el estudiante pueda establecer características en los resultados de operaciones por medio de la estimación. Por ejemplo, de cuántas cifras es el resultado de operaciones como:

$$223 + 487$$
$$345 - 300$$
$$35 \times 5$$
$$100 - 1$$

   Además, estimar si el resultado es superior o inferior a una determinada cantidad.

Indicaciones de evaluación

En este ciclo el *trabajo cotidiano* es fundamental pues se dan las bases para el cálculo operacional de los números. Es fundamental que existan instrumentos adecuados para documentar el progreso estudiantil en el dominio de las operaciones básicas, el cálculo, la estimación y la resolución de problemas.

Para el *trabajo extraclase* se recomienda reforzar los conocimientos mediante tareas cortas. En 3er Año se puede asignar una tarea donde se investigue sobre los diversos sistemas de numeración que se han utilizado en civilizaciones antiguas, esto con el objetivo de reflexionar sobre la importancia del sistema de numeración decimal.

Para este ciclo la *evaluación* en el área de *Números*, debe tener presentes las siguientes indicaciones.

- ✓ La estimación y el cálculo mental son habilidades que no necesariamente se evaluarían en una *prueba escrita*, pero sí se pueden evaluar de forma oral con propósitos formativos para documentar el progreso y analizar si los procedimientos y estrategias que los niños y niñas hacen al estimar o calcular son correctos.

- ✓ Para evaluar la escritura y lectura de los números se pueden realizar dictados de cantidades, esto con el fin de identificar posibles errores de interpretación que pueda tener el estudiante. Por ejemplo, al dictar doscientos treinta y ocho, un estudiante puede escribir 20038. Esto se podría realizar como parte del acompañamiento que brinda el docente a los estudiantes durante la mediación pedagógica.

- ✓ En los números ordinales lo importante a evaluar es la habilidad de comprender e identificar los nombres respectivos.

- ✓ En las *pruebas escritas*, se abarcarán en la parte de desarrollo ítems correspondientes a resolución de operaciones básicas, así como el planteo y resolución de problemas. Es necesario que cada docente considere las estrategias que las y los estudiantes utilizan para la resolución de una operación o un problema, así como las representaciones que se elaboran.

- ✓ La comparación de números naturales en 1er Año se puede realizar solicitando a cada estudiante que encierre o marque el número mayor o menor de una lista, por ejemplo:
  De acuerdo a la siguiente lista de números encierre en un círculo la cantidad mayor y en un triángulo la cantidad menor.

  21 13 19 25

  Esta misma habilidad, pero en 2° Año, se puede plantear de la siguiente manera.

  Analice el siguiente cuadro:

  Cantidad de ausencias injustificadas según grupo de Primer ciclo.
  Abril, 2011. Escuela Carlos Bendetti

Grupo	Cantidad de ausencias injustificadas.
1- A	11
1-B	17
1-C	21
2-A	36
2-B	29
3-A	25
3-B	38

  Ordene de menor a mayor los grupos que presentan ausencias injustificadas, indicando la cantidad respectiva.

- ✓ Se pueden evaluar varias habilidades en un mismo ítem, como por ejemplo, en el problema anterior se puede preguntar:

Ordene de menor a mayor los niveles que presentan ausencias injustificadas, indicando la cantidad respectiva.

Primer ciclo, Geometría

Introducción

Se supone que al ingresar al Primer ciclo cada estudiante tiene la habilidad de identificar figuras geométricas tales como el círculo, el triángulo y el rectángulo, ya sea en su entorno o en materiales concretos, así como recortarlas en papel o cartón y asociarlas con sus nombres.

El Primer ciclo deberá reforzar estas habilidades y avanzar en el reconocimiento de las figuras en situaciones en las que ellas aparezcan de forma menos evidente, así como ampliar el rango de figuras a reconocer. Se espera que cada estudiante pueda trazar figuras que cumplan con características dadas. Por otra parte, se reforzará la ubicación en el espacio, la visualización espacial, la noción de posición relativa entre objetos y se iniciará en el uso del vocabulario geométrico.

Todo esto prepara para la adquisición de un sentido métrico y la exploración de nuevas relaciones en *Geometría*.

Propósito de la enseñanza

El propósito de la enseñanza en *Geometría* es desarrollar la capacidad de visualizar las formas geométricas y algunas relaciones básicas entre ellas en el entorno en el que las niñas y niños se desenvuelven, así como iniciar un proceso de abstracción geométrica.

Habilidades generales

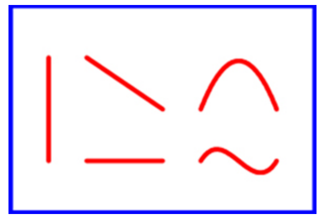
Las habilidades generales a desarrollar en *Geometría* al finalizar el Primer ciclo son:

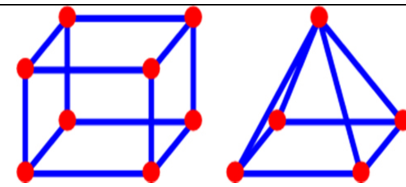
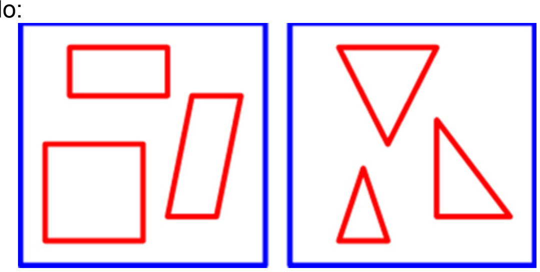
- Visualizar y reconocer figuras geométricas planas básicas (triángulos, cuadriláteros, circunferencias) en el entorno y en diversos objetos.
- Reconocer líneas rectas y curvas en el entorno y en diversos objetos.
- Visualizar y reconocer sólidos básicos (esferas, cubos, cajas) en el entorno y en diversos objetos.
- Utilizar vocabulario geométrico elemental.
- Reproducir y trazar figuras geométricas básicas a mano alzada o utilizando instrumentos.

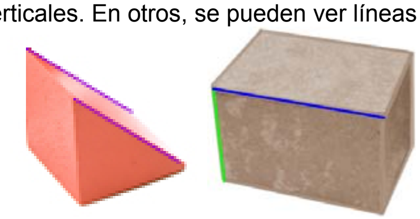
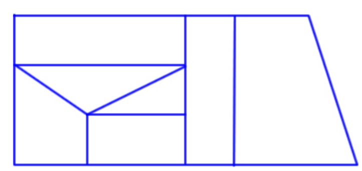
Se fortalecen actitudes y creencias positivas hacia las Matemáticas, principalmente en lo que se refiere a participación activa y colaborativa y respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas, gracias a los recursos visuales que se proponen durante el desarrollo de las actividades.

En cuanto a los procesos, se desarrollarán principalmente *Conectar* y *Representar*.

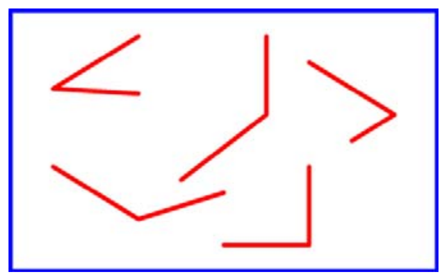
Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

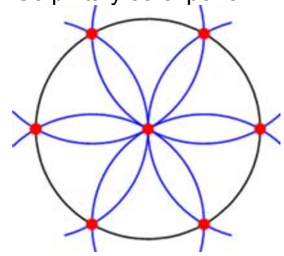
1er Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Conocimientos básicos • Líneas rectas • Líneas curvas • Líneas quebradas • Líneas mixtas • Nociones de posición con respecto a una línea cerrada (borde, interior, exterior)	1. Identificar y trazar líneas rectas, curvas, quebradas y mixtas.	▲ En una breve excursión por la escuela o dentro del aula se les pide que identifiquen líneas rectas, curvas, quebradas y mixtas. Se les provee de papel construcción y lana, se les pide que corten pedacitos y los peguen en el papel formando los diferentes tipos de líneas que observaron en su excursión. Ejemplo:  Con actividades como ésta se propicia el proceso *Representar*.
	2. Distinguir el interior, el exterior y el borde referidos a líneas cerradas tanto en el entorno como en dibujos y trazos elaborados por sí mismo y por otros.	▲ Para introducir el concepto de interior y exterior de una línea cerrada se puede proponer un problema como éste: Se les presenta un dibujo como el siguiente.  **Imágenes con derechos adquiridos por el MEP** Se les pide clasificar los objetos en dos grupos y que justifiquen su clasificación. Pueden dar varias estrategias de clasificación, al final se realizará la etapa de clausura definiendo los conceptos de interior y exterior de una línea cerrada. Estos conceptos pueden ser introducidos mediante juegos con líneas sobre el suelo o cuerdas, con ello se propicia el aprecio y disfrute de las Matemáticas.
Figuras planas • Triángulos • Cuadriláteros	3. Identificar figuras planas en cuerpos sólidos.	▲ En objetos tridimensionales, se pide señalar figuras planas (las caras de los cubos o de prismas y pirámides). Se facilitan materiales como plastilina y pajillas para que construyan objetos como cajas y pirámides. Con la plastilina se forman bolitas que serán las uniones (vértices) de los segmentos de las pajillas. Ejemplo:

• Polígonos • Identificación, trazo y clasificación		
	4. Trazar figuras planas de diversos tipos como triángulos, cuadriláteros, polígonos, utilizando regla, escuadra, papel cuadriculado. 5. Clasificar figuras planas de acuerdo con su forma (triángulos, cuadriláteros, polígonos).	▲ Se les facilita papel construcción para pegar en él paletas (de helados) y así formar figuras planas. Luego se recortan y se pueden pegar en carteles clasificándolas según su forma. Ejemplo: 
Cuerpos sólidos • Cajas	6. Identificar objetos que tengan forma de caja. 7. Clasificar objetos según tengan forma de caja o no tengan dicha forma.	▲ Relacionar estas formas con elementos que se localizan en el aula o en el entorno de la institución u objetos que porten las y los estudiantes. ▲ El nombre correcto de la forma geométrica que representa una caja como la que aparece abajo es “paralelepípedo”; sin embargo, en este nivel no es necesario proporcionar dicho nombre y para estar más acorde con el entorno inmediato se puede emplear el de “caja”.  **Imagen cortesía de FreeDigitalPhotos.net**

2° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Líneas • Horizontal • Vertical • Oblicua	1. Identificar en dibujos y en el entorno posiciones de líneas rectas: horizontal, vertical, oblicua. 2. Trazar líneas rectas en posiciones horizontal, vertical y oblicua.	▲ Los conceptos se seguirán manejando de forma intuitiva (no hay definiciones formales). ▲ En objetos como cajas puede identificarse segmentos horizontales y verticales. En otros, se pueden ver líneas oblicuas.  **Imagen a la izquierda con derechos adquiridos por el MEP** ▲ Para el trazo de estas figuras se pide colocar paletas, lana, pajillas, entre otros, en forma vertical, horizontal y oblicua. También, utilizar la regla para realizar trazos en estas posiciones. Se debe tener cuidado con las nociones horizontal y vertical cuando se refieren a líneas en el plano.  Es conveniente reutilizar materiales, esto irá fomentando una cultura ambiental.
Figuras planas • Triángulo • Cuadrilátero • Cuadrado • Rectángulo • Vértice • Lado	3. Reconocer triángulos y cuadriláteros. 4. Trazar triángulos y cuadriláteros utilizando intrumentos geométricos. 5. Reconocer si un cuadrilátero es un rectángulo. 6. Reconocer si un rectángulo es un cuadrado. 7. Identificar elementos de una figura plana (vértice, lado). 8. Identificar semejanzas y diferencias en triángulos, cuadrados, rectángulos y cuadriláteros en general. 9. Componer y descomponer figuras utilizando cuadriláteros y triángulos.	▲ Las habilidades aquí se refieren a un nivel de reconocimiento y trazado básico. ▲ Se les pide que identifiquen en objetos de su entorno triángulos y cuadriláteros, para luego trazarlos con ayuda de la regla. ▲ Para introducir el reconocimiento de rectángulos se puede proponer el siguiente problema:  En el dibujo, pinte con un mismo color tres figuras que se parezcan.  Se les solicita explicar el porqué de sus respuestas. Se dirige el proceso mediante preguntas apropiadas. Por último se define el término “rectángulo” y el reconocimiento de estas figuras. ▲ Pedirles que clasifiquen varias figuras hechas de cartulina en: a. Triángulos y rectángulos. b. Triángulos y cuadrados. Las figuras de cartulina representan diferentes tipos de triángulos, rectángulos de diversas formas y cuadrados. Se les pide justificar la clasificación realizada. Se les puede brindar el tangrama para que identifiquen estas figuras en sus piezas. Con ayuda de las mismas figuras de cartulina, que cuenten sus lados y esquinas (vértices) y que comenten las semejanzas y diferencias que observan. Al final de las observaciones tendrán claro que una figura poligonal tiene el mismo número de lados que de vértices.

		Las observaciones se pueden hacer en equipos y luego exponerlas al resto del grupo. Al final se les pide componer una figura con las figuras de cartulina para exponerlas o pegarlas en algún espacio del aula. También podrán, por ejemplo, dibujar un plano del aula. Esta actividad se presta para insistir en una participación activa y colaborativa. ▲ En cuanto al trazado de figuras (triángulos y cuadriláteros), se trata solamente de utilizar la regla. Se les puede pedir, por ejemplo, que tracen un segmento, luego otro que inicie donde termina el primero y finalmente cerrar la figura con otro segmento, para producir un triángulo. Esto permitirá que tengan una noción más clara de cómo están constituidas estas figuras. ▲ Para la parte de composición de figuras se puede hacer uso del tangrama. Se plantea una figura para intentar descomponerla en triángulos y cuadriláteros.  se descompone en  **Elaboración propia** La historia de los números figurados puede servir de elemento motivador. Estos números llamaron la atención de los primeros pitagóricos, ya que servían para representar formas geométricas por medio de puntos o piedras. Por ejemplo, el número 6 es triangular y el 9 es cuadrado:  El estudio más completo de estos números lo dio el griego Nicómaco de Gerasa alrededor del año 100 d.C. Es muy importante que este tipo de actividades concluyan con una exposición de los resultados por parte de las y los estudiantes. De esta forma, se podrá evaluar si hay comprensión de los conceptos y pueden expresarse apropiadamente. Con esto se potencia el proceso *Comunicar*.
Cuerpos sólidos • Cajas • Esferas	10. Identificar objetos que tengan forma de caja o forma esférica. 11. Clasificar objetos según su forma: cajas, esferas, otros (los que no son ni cajas ni esferas).	▲ Relacionar estas formas con elementos que se localizan en el aula o en el entorno de la institución u objetos que traigan las y los estudiantes. ▲ Se solicita mencionar diferentes objetos que tienen forma esférica o de caja en el aula y se les pide clasificarlos según su forma.

3er Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Ángulos • Lado • Vértice • Agudo • Recto • Obtuso	1. Reconocer ángulos en dibujos y objetos del entorno. 2. Trazar ángulos y reconocer sus elementos (lado, vértice). 3. Estimar la medida de ángulos en objetos del entorno. 4. Clasificar ángulos de acuerdo con su medida (agudo, recto, obtuso). 5. Estimar por observación (en dibujos y objetos del entorno) si un ángulo es recto, agudo u obtuso. 6. Medir ángulos con el transportador. 7. Plantear y resolver problemas que involucren los conceptos de lado, vértice, ángulo recto, ángulo obtuso, ángulo agudo.	▲ El concepto de ángulo queda a nivel de identificación en elementos del entorno. ▲ Se les pide clasificar dibujos de ángulos y comunicar su clasificación. ▲ Se llega a los conceptos de ángulo recto, agudo y obtuso. ▲ Se les pide marcar con sus brazos los diferentes ángulos. ▲ Observar y reconocer en el entorno diferentes ángulos. ▲ Con dos tiras de papel cartulina unidas en una de sus extremidades, se abren y se cierran de manera que se formen distintos ángulos. De esta forma se puede establecer una analogía para introducir posteriormente el uso del transportador y la escuadra. 
Rectas • Paralelas • Perpendiculares **Segmentos** • Paralelos • Perpendiculares	8. Diferenciar rectas y segmentos. 9. Reconocer rectas y segmentos paralelos en dibujos y objetos del entorno. 10. Reconocer rectas y segmentos perpendiculares en dibujos y objetos del entorno. 11. Trazar segmentos paralelos y perpendiculares.	▲ Se plantea reconocer en el aula distintos tipos de líneas formadas por las paredes, la pizarra, las mesas, las ventanas. ▲ Otro ejemplo: dada una fotografía de un edificio o una imagen, se solicita identificar en ella rectas paralelas y perpendiculares, repasando con algún color para identificar cada segmento. ▲Se propone dibujar paralelas utilizando los bordes de la regla y perpendiculares con la escuadra. ▲ Se les pide que tracen un dibujo utilizando segmentos paralelos y perpendiculares y que lo expongan al resto de la clase. ▲ Se debe relacionar la perpendicularidad con el concepto de ángulo recto.
Posición – localización	12. Ubicar personas u objetos a partir de un punto de referencia.	▲ Por medio de un juego o rally, se les refiere a un mapa en el cual se deben encontrar pistas que lleven a un tesoro o premio escondido. ▲ Se da un punto de referencia en el aula y se pide ubicar, por ejemplo, a cuántos pasos hacia un lado u otro se ubica un compañero o compañera.

Polígonos • Pentágono • Hexágono	13. Clasificar polígonos según el número de sus lados (triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono). 14. Trazar polígonos de diferente número de lados utilizando regla y compás.	▲ Aquí se consideran polígonos con mayor número de lados. ▲ Se busca que se señalen los vértices y lados de las figuras y que indiquen cuántos poseen para poder clasificarlas según el número de lados. Deben tener claro que una figura poligonal tiene el mismo número de lados que de vértices. ▲ Se le pide a cada estudiante que trace un polígono (puede escoger de 3 a 6 lados) sin comentar cuál va a trazar. Se dibuja en la pizarra una tabla de clasificación con el nombre de los polígonos y cada estudiante pasa y lo pega en el espacio que cree que corresponde. Con la participación de toda la clase se revisa la clasificación.
Circunferen-cias • Radio • Diámetro	15. Identificar y trazar circunfe-rencias. 16. Reconocer el radio y el diámetro de circunferen-cias.	▲ Se debe explicar paso a paso, el uso correcto del compás y supervisar que sea utilizado correctamente para trazar circunfe-rencias.  ▲ Para aprender a usar el compás se propone el trazo de la rosácea, flores, etc. Se pinta y se expone. 
Cuerpos sólidos • Esfera - Radio - Diámetro • Caja • Cubo - Arista - Cara	17. Reconocer el radio y diámetro de esferas. 18. Reconocer cuáles cajas corresponden a cubos. 19. Reconocer los elementos de cajas y cubos (caras y aristas). 20. Reconocer diferencias y semejanzas entre cajas y cubos.	▲ Dados varios objetos con forma de caja, se pide determinar cuál o cuáles son cubos. Identificar también sus caras y aristas. ▲ Se les puede solicitar que formen grupos y que elaboren una lista de objetos conocidos, con su respectiva clasificación, según sean esferas o cubos. Además, que identifiquen los elementos de dichos objetos.
	21. Plantear problemas con base en imágenes de cuerpos sólidos.	▲ Es importante que cada estudiante utilice los conocimientos adquiridos en el planteamiento de problemas. Se le debe pro-porcionar cierta información para que, de forma creativa, pro-ponga algún problema o ejercicio que utilice la información dada. Por ejemplo:

		Se ofrecen imágenes de objetos como las siguientes (también podrían ser objetos físicos): 1  2  3  4  5  **Imágenes cortesía de DigitalPhotos.net** Luego, se pide formular un problema o ejercicio donde se involucre uno o más de los anteriores objetos. Por ejemplo, se podrían enunciar las siguientes situaciones: a. Con base en las anteriores imágenes, ¿cuál o cuáles representan cubos? b. Con base en la imagen del objeto 1, señale una arista y pinte de color negro una cara. c. Señale en la esfera 5 un radio y en la esfera 3 un diámetro. Con esto se activa el proceso *Plantear y resolver problemas*.

Indicaciones metodológicas

Generales para el ciclo

1. En un primer momento los conocimientos y habilidades geométricas, en este ciclo, deben abordarse en estrecha relación con lo concreto, valiéndose tanto del entorno como de material preparado especialmente para la enseñanza aprendizaje de los conceptos o el desarrollo de las habilidades y procesos.

2. Lo anterior implica actividades como el recorte de figuras en papel o cartón; o bien juegos que tengan una intencionalidad geométrica.

3. Se debe proporcionar la mayor cantidad posible de oportunidades para que se construyan, dibujen, compongan o descompongan formas diversas.

4. Algunos recursos que se pueden utilizar: tangrama, doblado de papel, papel cuadriculado, cartulina, papel para calcar, cuerda, cubo soma, geoplano, materiales impresos (periódicos, revistas, volantes de propaganda), cajas, rollo de papel higiénico, diversos objetos.

5. Al usar materiales hay que tener en cuenta que cada estudiante requiere de un cierto tiempo para explorar y familiarizarse con el material, antes de llevar a cabo tareas específicas.

Primer año

1. En cuanto a la clasificación de objetos según su forma, se puede hacer observando los objetos que aparecen en el entorno escolar o solicitando que traigan objetos de sus casas. Se pueden establecer criterios de clasificación de acuerdo con la forma, según directrices docentes o indicaciones estudiantiles. Por ejemplo, hacer dos grupos de objetos: los que tienen forma redondeada y los que tienen “esquinas”. Cuando se trata de reconocer cajas, los objetos que tienen esta forma se clasifican en un grupo y todos los demás objetos en otro grupo.

2. En una segunda etapa se puede utilizar material impreso con dibujos o fotografías para identificar y clasificar figuras.

3. La identificación de líneas se hará, en primera instancia, observándolas en la naturaleza u objetos del entorno. También es útil el uso de cuerdas para simular líneas curvas y rectas, los niños y las niñas las colocan sobre el piso o las sostienen entre dos o más para modelar diversos tipos de curva.

4. La o el estudiante podrá ubicarse en el interior o exterior de curvas cerradas dibujadas sobre el suelo, o modelada con una cuerda. También podrá pintar el interior y el exterior de figuras planas. Las clases de Educación Física pueden ayudar a desarrollar estos conceptos.

5. En cuanto al trazado de figuras, las actividades deberán llevar a la reproducción a partir de un modelo dado o a construir figuras con base en datos brindados oralmente o por escrito. Esto se puede hacer sobre papel, preferiblemente cuadriculado, utilizando regla y escuadra. También se puede hacer sobre el piso usando diversos materiales (varillas, cuerdas, etc.).

6. Las habilidades 2 y 4 pueden trabajarse en una sola actividad con el uso del geoplano. Por ejemplo, se les da indicaciones para que delimiten una figura en el geoplano (trazado), luego se les pregunta, ¿cuántos clavitos toca la liga? (borde), ¿cuántos clavitos quedan por dentro de la liga? (interior), ¿cuántos quedan por fuera? (exterior). Luego se les pide que hagan, por ejemplo, un triángulo de modo que la liga toque cinco clavos. Se les pregunta, ¿puede hacer un triángulo que toque más de cinco clavos?, etc. Una actividad de este tipo, además, conecta con el área de *Números*.

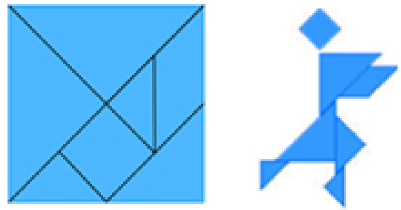
7. Se pueden aprovechar objetos tanto para clasificarlos por su forma como para identificar figuras planas que estén modeladas en ellos. Se pueden idear actividades que involucren las habilidades 1, 3, 6.

Segundo año

1. Igual que en el 1er Año se siguen utilizando modelos concretos; sin embargo, estos modelos deben permitir la exploración de diversas propiedades de las figuras. La idea es que se comience a centrar más la atención sobre las propiedades de las figuras que en la simple identificación.

2. Una actividad importante puede consistir en que cada estudiante, con la guía docente, elabore una lista mínima de propiedades para cada figura. Por ejemplo, establecer que un cuadrilátero que posee sus ángulos internos rectos es un rectángulo y si, además, posee sus lados congruentes, entonces también correspondería a un cuadrado. Se discute la lista y se ve si sobran o faltan elementos. No se trata de dar toda la lista de propiedades posibles sino de algunas cuyo cumplimiento garantice que una figura es o no lo que se quiere.

3. Una actividad que permite familiarizarse con las figuras consiste en componer o descomponer formas diversas. El tangrama es un recurso muy útil en este caso. Por ejemplo, componer la figura que aparece a continuación a la derecha utilizando las piezas del tangrama (izquierda) o construir un rectángulo usando tres piezas del tangrama, etc.



Elaboración propia

4. En las actividades de clasificación de figuras deben usarse las propiedades de las formas así como sus nombres. Por ejemplo, encontrar propiedades de los triángulos que hagan que unos sean similares y otros diferentes entre sí. Estas actividades también permiten que se tome conciencia de que en las formas geométricas se pueden distinguir ciertos elementos que permiten clasificarlas (por ejemplo vértices, lados, caras, aristas).

5. Para la identificación de objetos con forma de caja o esférica puede utilizarse una bolsa que contenga objetos pequeños con diferentes formas. Se planteará adivinar al tacto si un objeto tiene forma esférica o de caja o ninguno de estos. Luego se saca el objeto de la bolsa para verificarlo. Se podrán clasificar en tres grupos: cajas, esferas, otros.

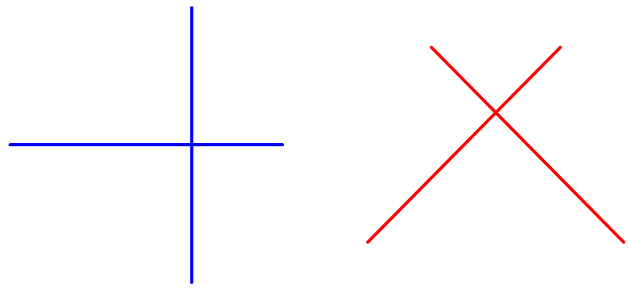
Tercer año

1. El concepto de ángulo es bastante complejo, por eso es necesario abordarlo desde una perspectiva amplia. Es importante que se puedan manipular modelos físicos de ángulos para que se desarrolle la habilidad de reconocerlos en el contexto, por ejemplo en una fotografía, pero en este caso debe prestarse atención a la perspectiva que puede distorsionar los ángulos.

Elaboración propia

2. El uso de tiras de cartulina o de reglas de madera unidas por sus extremos de manera que se puedan abrir y cerrar permite familiarizarse con ángulos agudos, rectos y obtusos y ayuda a desarrollar la habilidad de estimar, por observación, este tipo de ángulos en otras situaciones.

3. El reconocimiento de segmentos perpendiculares debe relacionarse, como corresponde, con los ángulos rectos. Se pretende reconocer la perpendicularidad, sin importar como estén ubicados los segmentos. Es más fácil reconocer que los dos segmentos a la izquierda en la siguiente figura son perpendiculares, pero resulta más difícil reconocer que los que están a la derecha también lo son.



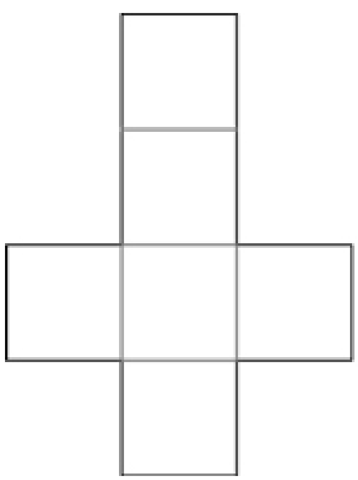
4. Antes de medir ángulos con el transportador es importante que se comprenda lo que significa medir ángulos. Para esto se puede, por ejemplo, construir un “ángulo patrón” con cartulina y ver cuántas veces cabe ese ángulo patrón en ángulos trazados en papel o en el piso, etc.

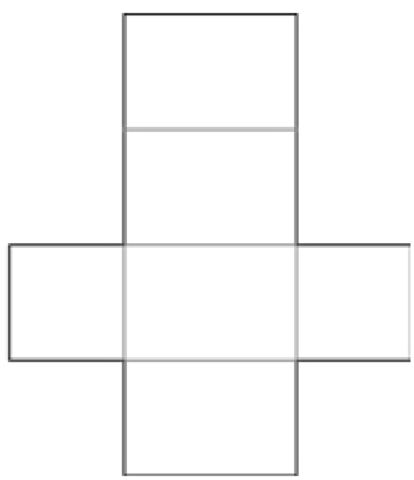
5. Se debe estar pendiente del uso correcto del transportador. En ocasiones se leen erróneamente los grados al revés. En general, hay que asegurarse que los diversos instrumentos se utilizan correctamente.

6. Para el desarrollo de las habilidades relacionadas con polígonos, se pueden proponer actividades que permitan a las y los estudiantes encontrar semejanzas y diferencias entre formas que aparecen en su entorno o que se trazan. Se puede proporcionar una forma poligonal, por ejemplo un pentágono (sin darles el nombre), y se les pide que busquen otras formas que sean parecidas a la forma dada; luego deberán argumentar porqué la forma que encontraron se parece a ella, en qué se parece y en qué no se parece. Así se puede adquirir el conocimiento de esa figura sin dar una definición expresa. Después se le dará nombre a la forma, la idea es que el nombre se proporcione una vez que el concepto de la forma esté desarrollado.

7. Una indicación análoga a la anterior se puede hacer en cuanto al reconocimiento de formas tridimensionales. Se proporcionan formas, se clasifican según semejanzas y diferencias y, posteriormente, se propone observar características particulares de cada grupo de formas (esferas, cajas, cubos).

8. Una actividad que permite familiarizarse con el reconocimiento de los sólidos y sus elementos consiste en realizar su desarrollo plano en cartulina y luego doblar y pegar para obtener la figura. Por ejemplo, las siguientes imágenes representan el desarrollo plano de un cubo y el de una caja rectangular respectivamente.





Indicaciones de evaluación

Es fundamental que se observe durante el *trabajo cotidiano*, que cada estudiante pueda identificar figuras y elementos geométricos en el entorno escolar y en los materiales que se preparen para tal efecto.

Los *trabajos extraclase* deberán estar orientados a evaluar el reconocimiento de figuras, por parte de cada estudiante, en el contexto de su hogar o de su comunidad. Un posible trabajo para 3er Año consiste en la elaboración de una lista de objetos de sus casas cuyas formas sean cajas, cubos o esferas, incluyendo un bosquejo de algunas de ellas y donde se señale el radio y el diámetro en el caso de las esferas.

Para este ciclo la *evaluación* en el área de *Geometría*, debe tener presentes las siguientes indicaciones.

- ✓ En cuanto a la ubicación espacial se debe evaluar si se conoce la posición relativa entre personas u objetos y los conceptos de interior y exterior de una figura plana. Por ejemplo, en una fotografía de periódico señalar si un objeto determinado está delante o detrás, a la izquierda o a la derecha, arriba o abajo de otro. Pintar el interior y el exterior de una figura dada; por ejemplo, dado un dibujo de un rectángulo que contiene en su interior un triángulo, pintar la región interior al rectángulo y exterior al triángulo. Esta evaluación se puede hacer de forma oral o escrita durante el *trabajo cotidiano*.

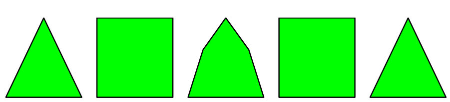
- ✓ El reconocimiento y clasificación de figuras se puede solicitar en objetos presentes en el entorno, objetos que la o el docente lleve para realizar la prueba, fotografías, etc. Por ejemplo, puede llevar figuras geométricas de cartón de diferentes colores y pedir que se asocie el color con el nombre de la figura. La clasificación de figuras promueve el uso de vocabulario geométrico básico. Esta es una evaluación que se puede realizar de manera oral en el *trabajo cotidiano*. Pueden utilizarse ítems como el siguiente:

  Observe la ilustración, escriba cuántos objetos tienen forma de caja ______.

Imagen con derechos adquiridos por el MEP

Un ítem como el siguiente permite, además, hacer conexión con el área de *Relaciones y Álgebra* en lo que respecta al reconocimiento de patrones:

Cierta serie de figuras consta de 12 figuras. Las primeras cinco son las siguientes:



¿Cuál es la que sigue?, ¿cuál es la número 10?, ¿cuál es la última?

- ✓ La evaluación del trazado de figuras y líneas puede hacerse mediante la indicación de propiedades que debe cumplir el trazado. Por ejemplo, pedir el dibujo de un segmento paralelo o perpendicular a un segmento dado. Se puede evaluar el trazado de figuras mediante el uso del geoplano o en pruebas escritas. Es importante tomar en cuenta en la evaluación la exactitud y nitidez del trazo.

- ✓ Para identificar los elementos que constituyen una figura se puede dar una figura poligonal y pedir que se señalen sus lados, vértices y ángulos. En la misma figura se puede estimar sus ángulos pidiendo que señalen cuál mide más, cuál mide menos, etc. En un sólido señalar los vértices, aristas y caras; determinar cuántos de estos elementos tiene el sólido dado. Estas habilidades pueden evaluarse en *pruebas escritas u orales*.

Primer ciclo, Medidas

Introducción

Al ingresar al Primer ciclo, las niñas y los niños poseen ideas intuitivas relacionadas con el concepto de medición. Es posible que estas ideas estén más asociadas con el sentido de comparación de medidas adquiridas a través de su relación con el entorno. Sin embargo, les falta integrar las nociones de unidades de medida y de estimación.

Este ciclo deberá proveer las herramientas cognitivas que les permitan adquirir una noción apropiada del sentido de la medición; deberán comprender que la medición no es sólo un dato numérico asociado a alguna característica sino que tiene un significado útil desde diversos puntos de vista. Al final ellos y ellas tendrán una noción más clara del significado de la medición, podrán realizar mediciones, hacer estimaciones y comparaciones de diversas medidas y utilizarlas en distintos contextos.

Todo esto prepara para la adquisición de un sentido de la medida más desarrollado y más práctico en años posteriores.

Propósito de la enseñanza

El propósito de la enseñanza en *Medidas,* en este ciclo, es dar inicio a la comprensión del concepto de medida y que se calcule, estime, compare y aplique algunas de ellas.

Habilidades generales

Las habilidades generales que deberán ser adquiridas en el área de *Medidas,* al finalizar el Primer ciclo, son:

- Construir la noción de medición (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad).
- Utilizar instrumentos de medición.
- Realizar mediciones (longitud, moneda, peso, tiempo).
- Estimar medidas (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad).
- Aplicar la medición en diversos contextos.

La medida es una característica central de los fenómenos del entorno. Es posible motivar actitudes de fuerte compromiso activo y el reconocimiento de la utilidad de las Matemáticas.

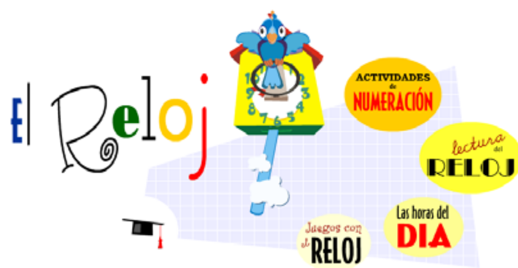
Las distintas posibilidades de expresar las unidades de medida ofrecen ocasiones para apoyar el proceso *Representar*. Es sencillo, en este ciclo, favorecer la comunicación de las acciones y resultados obtenidos en la medición. El planteamiento y resolución de problemas se presenta de una manera muy sencilla y natural.
Es importante partir siempre de los conocimientos que cada estudiante posea (¿con qué puedo pesar un objeto?, ¿con qué puedo medir la altura de una persona?, ¿cómo puedo medir la distancia entre San José y Limón?, ¿conocen ustedes monedas de su país, de otros países?).

Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

1er Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Longitud • Unidad de medida • Metro • Centímetro	1. Estimar medidas utilizando unidades de medidas arbitrarias como la cuarta o unidades definidas por las y los estudiantes. 2. Estimar medidas utilizando el metro o el centímetro como unidades de medida convencionales.	▲ Se puede pedir que digan con qué se puede medir el borde del pupitre, la altura de la pared del aula, etc. ▲ Se pide comparar diversos objetos: es más largo, más corto etc. Las y los estudiantes pueden comparar su tamaño: es más grande que… es más bajito que… ▲ Pueden utilizar, por ejemplo, una cuerda, el borde de una hoja, un lápiz o diferentes partes de su cuerpo (pie, codo, cuarta, jeme) como unidades para estimar la medida de su pupitre, cuaderno, pizarra, ventanas u otras partes del aula. Luego realizan las mediciones con el metro o la regla y comparan resultados con los demás. Estos conocimientos se pueden conectar con *Geometría;* por ejemplo, solicitando que identifiquen líneas rectas y que estimen o realicen mediciones de ellas.
Moneda • Unidad monetaria • Colón • Monedas de Costa Rica	3. Construir el conocimiento de unidad monetaria. 4. Reconocer el colón como la unidad monetaria de Costa Rica. 5. Identificar la relación entre las monedas de denominaciones hasta ₡100.	▲ Se solicita traer monedas de la casa, colocarlas debajo de una hoja de papel blanco y repintar con color sobre ellas hasta que aparecen los detalles de la moneda. Luego se pide recortarlas y crear su propio dinero para contarlo, realizar equivalencias y hasta compras ficticias de los mismos materiales que ellos utilizan. ▲ Plantearles problemas que requieren el uso del dinero tales como: Pablo compró cuatro chicles en ₡ 25 cada uno, si pagó con ₡ 100, ¿cuánto dinero le sobró? ▲ Debe aclarárseles que las denominaciones de las monedas han cambiado con el tiempo y que podrían cambiar en el futuro.
Peso • Unidad de peso • Comparación de pesos	6. Estimar el peso de objetos utilizando unidades arbitrarias. 7. Comparar los pesos de diversos objetos en forma intuitiva.	▲ Se puede tomar un objeto como unidad de peso y comparar pesos con él mediante manipulación de objetos. ▲ Si hay subibajas en la escuela, se puede utilizar para comparar el peso de dos estudiantes.
Tiempo • Día • Noche • Mes • Año • Antes • Después	8. Identificar la necesidad de medir el tiempo. 9. Utilizar la noción de tiempo (día, noche, sema-na, mes, año, antes, ahora, después, ayer, hoy, mañana, pasado, presen-te, futuro) en situaciones de la vida cotidiana o imaginarias.	▲ Preguntar acerca de los instrumentos que conocen para medir el tiempo. ▲ Con ayuda de imágenes fotocopiadas de diferentes actividades diarias de un niño o niña en edad escolar, se solicita recortar, ordenar y pegar las imágenes según una secuencia lógica. Identificar las diferentes maneras que conocen de medir el tiempo, minutos, horas, días, semanas, meses, años u otros. Se puede traer un reloj de arena y que estimen el tiempo que tarda en caer la arena. Estimar cuánto tiempo permanecen en la escuela o cuántas horas duermen.

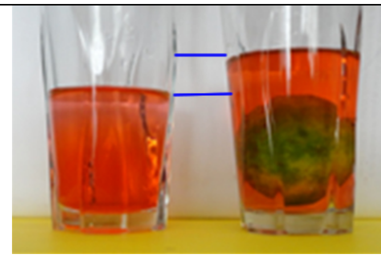
• Ahora • Mañana • Pasado • Presente • Futuro • Horas, minutos	10. Estimar el intervalo de tiempo transcurrido entre dos eventos.	▲ Pueden narrar hechos reales o ficticios, noticias, o dibujar actividades según el tiempo solicitado. ▲ Elaborar un álbum con fotos del pasado y presente y dibujos o imágenes de lo que les gustaría llegar a hacer. Se puede trabajar conjuntamente con la noción del tiempo en Estudios Sociales. Diversas actividades de juegos para que cada estudiante se familiarice con el uso de las medidas pueden propiciar el respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas.
Capacidad • Unidad de capacidad • Comparación de capacidades	11. Estimar la capacidad de diversos recipientes utilizando unidades de capacidad arbitrarias. 12. Comparar las capacidades de diversos recipientes en forma intuitiva.	▲ Para iniciar, se les puede presentar un problema como el siguiente: La docente de primer grado A va a repartir una caja de leche en varios vasos pequeños y la de primer grado B en varios vasos grandes. ¿Cuántos vasos pequeños cree que llenará la docente de primero A? ¿Cuántos vasos grandes llenará la de primero B? El análisis de las respuestas estudiantiles permitirá llevar a la noción de unidad de capacidad y a la comparación de cantidades. ▲ Preguntarles cómo se puede medir una cantidad de agua, de harina, de leche, para hacer un queque. ▲ Se pueden hacer comparaciones de capacidad llenando recipientes de algún líquido usando un vaso o una taza como unidad de medida.

2°Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Longitud • Metro • Centímetro • Relaciones • Símbolos	1. Comparar longitudes sin usar la regla. 2. Realizar mediciones utilizando el metro y el centímetro. 3. Establecer relaciones entre metro y centímetro. 4. Reconocer los símbolos para metro y centímetro.	▲ Comparar longitudes a simple vista, con una cuerda y mediante comparación de segmentos con tiras de papel usando el compás. ▲ Presentarles problemas como: Doña Carolina compró 2 m de tela para un saco y 100 cm para una blusa, ¿cuántos metros de tela compró en total? Esto permite aplicar equivalencias entre medidas y utilizar sus símbolos. ▲ Construir con cartulina un metro para que puedan adquirir mejor la relación entre centímetro y metro. La construcción de instrumentos promueve la perseverancia.
Moneda • Estimación • Comparación	5. Establecer relación entre las monedas de denominaciones hasta ₡ 500. 6. Estimar cantidades monetarias. 7. Comparar cantidades monetarias.	▲ Proponerles problemas donde aplican las relaciones entre las monedas y billetes, por ejemplo: ¿Cómo pagar la suma de ₡325 con monedas de ₡100, ₡10 y ₡5? Roxana compró un paquete de tortillas en ₡325 y un helado de palillo en ₡175. Si pagó con un billete de ₡1000, represente mediante círculos el dinero en monedas que le sobró. ▲ Pueden realizar estimaciones del dinero que ellas y ellos traen para comprar en la soda de la escuela.
Peso • Kilogramo • Gramo • Símbolo • Estimación • Comparación	8. Utilizar el kilogramo como unidad de masa. 9. Reconocer el símbolo para kilogramos. 10. Estimar medidas de peso. 11. Comparar medidas de peso.	▲ Se puede pedir, por ejemplo, estimar el peso de un colibrí, de un perro, de una persona adulta. ▲ Se plantean problemas como el mostrado a continuación: Para una receta se necesitan 2 kg de carne de cerdo y 1000 g de carne de res. ¿Cuál tipo de carne se necesita más? ▲ Se pueden traer diferentes frutas de la casa o las que traen para merendar y comparar la medida del peso. ▲ Es importante aclarar que el kg es una unidad de masa pero se usa corrientemente como unidad de peso. Al decir que un objeto pesa 1 kg en realidad es 1 kgf. (kilogramo fuerza).
Tiempo • Horas • Minutos • Intervalos	12. Medir intervalos de tiempo utilizando horas, minutos y lapsos de 15, 30 o 45 minutos. 13. Comparar intervalos de tiempo medidos en minutos.	▲ Uso del reloj analógico. Con ayuda de material impreso con imágenes de relojes sin las manecillas se puede solicitar trazar la hora.

	14. Leer el reloj analógico.	 **Elaboración propia** ▲ Resolver problemas tales como: El examen empezó a las 9:00 a.m. y terminó 120 minutos después. ¿Cuántas horas transcurrieron? ¿A qué hora terminó el examen? Es relevante aprovechar los recursos que existen en Internet. Por ejemplo, en el sitio: http://concurso.cnice.mec.es/ cnice2005/115_el_reloj/index.html se pueden encontrar diferentes actividades para la lectura del reloj. 
Capacidad • Litro • Estimación • Comparación	15. Estimar la capacidad de diversos recipientes utilizando el litro como unidad de capacidad. 16. Comparar mediciones de capacidad. 17. Plantear y resolver problemas que involucren diferentes medidas.	▲ Se pueden plantear problemas como: Alejandra compró, para su fiesta de cumpleaños, 3 envases de jugo de fruta, cada uno con capacidad de un litro. ¿Cuántos vasos pequeños puede llenar con cada litro de refresco? Para el trabajo con este problema se les proporciona vasos de diferentes capacidades y se pide que respondan a la pregunta en cada caso. ▲ Realizar estimaciones de capacidad comparando el contenido de recipientes con el contenido del litro. Se les puede pedir que traigan de la casa envases vacíos de jugos, leche y refrescos para hacer equivalencias entre los mismos. En este nivel se espera que el estudiantado pueda comunicar sus ideas con respecto a la resolución de los problemas.

3er Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Longitud • Metro • Múltiplos • Submúltiplos • Conversiones	1. Estimar mediciones. 2. Realizar mediciones utilizando el metro, sus múltiplos y submúltiplos. 3. Realizar conversiones de medida entre el metro, sus múltiplos y submúltiplos.	▲ Se propone usar un metro para realizar estimaciones y mediciones de diferentes objetos del entorno. ▲ Proponer problemas donde aplican las conversiones; por ejemplo: Mónica recorre su comunidad en bicicleta todos los días. Al día recorre 8 km. ¿Cuántos metros recorre en un día?
Moneda • Monedas • Billetes • Comparación • Estimación	4. Establecer la relación entre las monedas de denominaciones hasta ₡500 y billetes de hasta ₡ 10 000 para utilizarlas en situaciones prácticas. 5. Estimar y comparar cantidades monetarias.	▲ Se pueden proponer problemas para desarrollar estas habilidades; por ejemplo: Luisa tiene ahorrado cinco monedas de ₡500, trece monedas de ₡100, veinte de ₡50 y ocho de ₡25. Ella quiere cambiar su dinero por billetes. ¿Por cuáles y cuántos billetes podría cambiar su dinero? ▲ Recuerde que la respuesta no es única. Se puede comentar una noticia como la siguiente, desde el punto de vista de su contenido matemático (en lo que concierne al nivel de conocimiento de las y los estudiantes) y su relación con el medio ambiente. …Ortíz diseñó con experimentación y de forma autodidacta un prototipo de calentador de agua que redujo su factura de electricidad y le dio beneficios adicionales, además del agua caliente de la ducha, ahora también tenía agua caliente para lavar los platos y la ropa. Su idea no terminó allí sino que creció a un ámbito empresarial para conformar el emprendimiento familiar "H2SOL", en donde puso a disposición de las empresas su diseño por 300 mil colones, monto que para ella es más bajo y accesible que los que se encuentran en el mercado actual. Sin embargo, Ortíz no es la única que redujo su consumo de electricidad con un calentador. Roque Corrales, vecino de Naranjo, mencionó que en su hogar la factura bajó aproximadamente en 6000 colones por mes gracias al uso de un calentador. Estos equivaldrían a 72 000 colones al año…. **Fuente: http://www.crhoy.com/19 de febrero de 2012.**

Peso • Kilogramo • Cuartos • Medios • Tres cuartos • Estimar • Comparar	6. Medir pesos utilizando el kilogramo y sus divisiones en ¼, ½ y ¾ de kg. 7. Estimar pesos utilizando el kilogramo y sus divisiones en ¼, ½ y ¾ de kg. 8. Estimar y comparar medidas de peso.	▲ Se pueden implementar problemas tales como: Mi abuela nos prepara empanadas de queso todos los días. Si el lunes gastó ¼ kg de queso, el martes ½ kg y el miércoles ¼ kg, ¿cuántos kilogramos gastó en total? ▲ Utilizando un objeto que pese un kg como patrón, estimar el peso de objetos traídos por las y los estudiantes.
Tiempo • Año • Mes • Semana • Hora • Minuto • Segundo • Conversiones	9. Estimar el tiempo. 10. Medir el tiempo utilizando año, meses, semanas, horas, minutos y segundos. 11. Realizar conversiones entre estas medidas.	▲ Se puede iniciar el tema proponiendo un problema tal como: Si mi perrito tiene 19 semanas de nacido y el perro de mi vecino tiene 5 meses, ¿cuál tiene más edad?
Capacidad • Litro • Múltiplos • Submúltiplos • Conversiones	12. Estimar y medir la capacidad de diversos recipientes utilizando el litro, sus múltiplos y submúltiplos. 13. Realizar conversiones entre el litro, sus múltiplos y submúltiplos. 14. Resolver problemas que involucren diferentes medidas.	▲ Se puede preguntar con qué unidad de medida se puede medir la cantidad de agua en un vaso, en un tanque de agua, en una piscina, en una jeringa. ▲ Resolver problemas tales como: Si una caja de leche tiene 1800 ml, ¿cuántos vasos con capacidad para 30 cl puedo llenar? Problemas que tienen que ver con el entorno estudiantil propician la confianza en la utilidad de las Matemáticas. Este es un momento adecuado para usar la anécdota de Arquímedes de Siracusa (matemático del siglo III a.C.) y su grito ¡Eureka! (¡lo encontré!). Puede servir para llamar jocosamente la atención de las y los estudiantes acerca de los descubrimientos relacionados con la hidrostática hechos por este matemático de la antigüedad. Arquímedes descubrió un principio que lleva su nombre que dice que si se sumerge un objeto en un líquido, entonces el volumen del objeto es igual al volumen del líquido que se desplaza al ser sumergido.

		 **Elaboración propia** Se cuenta que, cuando descubrió este principio, Arquímedes se encontraba en su tina bañándose y fue tal su alegría que salió desnudo por las calles de Siracusa (hoy Sicilia, en Italia) gritando ¡Eureka!, ¡Eureka! En este nivel, cada estudiante debe comprender el problema, considerar al menos una forma de resolverlo, revisar el proceso de solución y evaluar la respuesta obtenida.
Medidas • Longitud • Moneda • Masa • Tiempo • Capacidad	15. Plantear problemas que utilicen diferentes tipos de medidas.	▲ Para esto, cada estudiante debe integrar los conocimientos adquiridos en el área de *Medidas*. Una estrategia puede ser brindar información real del uso de algún tipo de medidas para que con esta información puedan construir un ejercicio o problema. Por ejemplo: Proporcionar la siguiente información del calendario 2011: a. Octubre tiene 744 horas. b. Febrero tiene 40 320 minutos. c. Agosto tiene 4 semanas completas y tres días. Luego se pide formular un problema o ejercicio donde se involucre uno o más de los datos proporcionados. Proceso involucrado: *Plantear y resolver problemas*. Por ejemplo, podría enunciar problemas como los siguientes: a. Si en el 2011 el mes de agosto tiene 4 semanas completas y tres días, entonces ¿cuántos minutos tiene el mes de agosto? b. Si en el 2011 el mes de octubre tiene 744 horas y el mes de febrero tiene 40 320 minutos, ¿cuál mes tiene mayor cantidad de días? ¿Cuántos días tienen de diferencia? ▲ También se deben proporcionar datos para plantear problemas que involucren a la vez dos tipos de medidas: peso y moneda, longitud y moneda, capacidad y masa, etc.

Indicaciones metodológicas

Generales para el ciclo

1. Las actividades que se proponen en esta área tienen que estar relacionadas con acciones cotidianas o situaciones del entorno y con el uso de diversos materiales. Esta es un área estrechamente ligada con la utilidad de las Matemáticas y esto debe evidenciarse a través de situaciones en las que se usen datos y mediciones realistas.

2. Es necesario tener presente que las niñas y los niños pueden confundir algunos atributos de los objetos con atributos medibles que no necesariamente están relacionados. Por ejemplo, al observar dos objetos de diferente tamaño tienden a pensar que el más grande tiene más peso. Las actividades que se programen procurarán tomar en consideración esto con el propósito de ir eliminando estas dificultades.

3. Las actividades de comparación están estrechamente ligadas con la operación de transitividad. Aquí se sugiere, por ejemplo, ordenar objetos según su peso o según su tamaño, o según la característica que se esté considerando.

4. Algunas actividades tienen que enfatizar la conservación de la cantidad. Por ejemplo, medir un cordel, luego partirlo en dos o tres pedazos, medir cada uno de ellos y sumar las medidas; esto permite ver que el cordel original y los pedazos juntos tienen la misma longitud. La cantidad de agua se conserva cuando se pasa de un envase a otro, aunque la forma y el tamaño de los envases sean diferentes.

5. La masa y el peso son magnitudes diferentes. La masa de un cuerpo refiere al "contenido de materia de dicho cuerpo"; el peso, en cambio, es la fuerza con que la Tierra (u otro cuerpo) atrae a un objeto. Resulta que los objetos de igual masa en un mismo lugar de la Tierra tienen el mismo peso. De ahí que popularmente ambas magnitudes se identifican. Esto hace casi imposible que en los primeros años escolares estas dos características de los cuerpos puedan ser distinguidas. Por otra parte, los instrumentos usados para medir masas en realidad miden pesos, de manera que no parece oportuno hacer la distinción en los niveles de educación Primaria. El kilogramo (kg) es una unidad de masa, el kilogramo fuerza (kgf) es una unidad de peso, lo mismo que el Newton; 1 kilogramo fuerza equivale a 9,807 Newtons.

6. Es importante que se utilice el lenguaje natural y eventualmente el lenguaje matemático en las explicaciones estudiantiles.

7. Es fundamental el uso de material concreto para promover las habilidades propuestas. Algunos recursos que se pueden utilizar: cuerdas, cartulina, palillos, diversos objetos (piedras, frijoles, frutas, etc.), instrumentos como pesas, cinta métrica y reloj analógico, envases, botellas de varias capacidades.

Primer año

1. Durante el 1er Año se comienza a construir el concepto de medición, las actividades que se realicen deben estar dirigidas a este propósito. De ahí la importancia de que las mediciones que se aborden se hagan en principio con el uso de unidades de medida no convencionales.

2. Al final, debe quedar claro que medir involucra una comparación de un atributo con una unidad que posee el mismo atributo.

3. Las niñas y los niños adoptarán sus propias unidades de medida para hacer estimaciones. Incluso el concepto de unidad monetaria puede ser abordado, en principio, de esta manera. Por ejemplo,

se podrían utilizar cuadros de papel de diferentes colores para simular intercambios de tipo comercial.

4. Hay que tener claro que la capacidad refiere a la cualidad de un recipiente de poder contener líquidos u otros materiales.

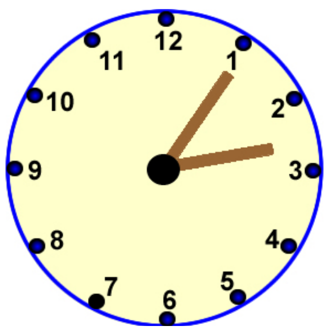
Segundo año

1. El tipo de medidas que se estudian en este año es el mismo que el de 1er Año. Sin embargo, ahora se inicia el uso de unidades de medida convencionales.

2. Por otra parte, debe avanzarse en el sentido de la medición a través de estimaciones y comparaciones de medidas.

3. Debe quedar claro que los instrumentos de medición reemplazan unidades de medida reales. Es importante que se entienda cómo funciona un instrumento de medida para que pueda ser usado correctamente.

4. Una actividad común y que se puede implementar es la construcción de un reloj utilizando cartulina (o papel) y palillos (o paletas) para que se practique el representar la hora correcta.



Tercer año

1. Se estudian las mismas medidas que en los años anteriores pero se avanza en el nivel de complejidad. Se utilizan más unidades de medida y las mediciones son de mayor magnitud, dado el avance en el conocimiento de los números.

2. Didácticamente, para trabajar con las mediciones debe seguirse en general un esquema como el siguiente: comparar y ordenar, estimar antes de realizar la medición, elegir el instrumento apropiado para realizar la medición, elegir la unidad de medida más adecuada, realizar la medición, comparar la medición obtenida con la estimación y valorar la discrepancia entre ambas.

Indicaciones de evaluación

Las habilidades que tienen que ver con estimaciones y comparaciones de medidas pueden ser evaluadas de manera natural en el *trabajo cotidiano*. Se deberá observar qué grado de precisión logra cada estudiante en la estimación de las medidas. También es necesario indagar si identifica apropiadamente el tipo de medición que requiere el atributo a ser medido, por ejemplo, si no confunde longitudes con pesos.

En el *trabajo extraclase* se debe evaluar la estimación, la comparación y el cálculo de medidas en contextos no escolares. Por ejemplo en 3er Año se puede elaborar una lista de recipientes y para cada uno escribir su capacidad utilizando el litro como unidad y desarrollar la conversión correspondiente a decilitros, centilitros o mililitros.

Para este ciclo la *evaluación* en el área de *Medidas*, debe tener presentes las siguientes indicaciones.

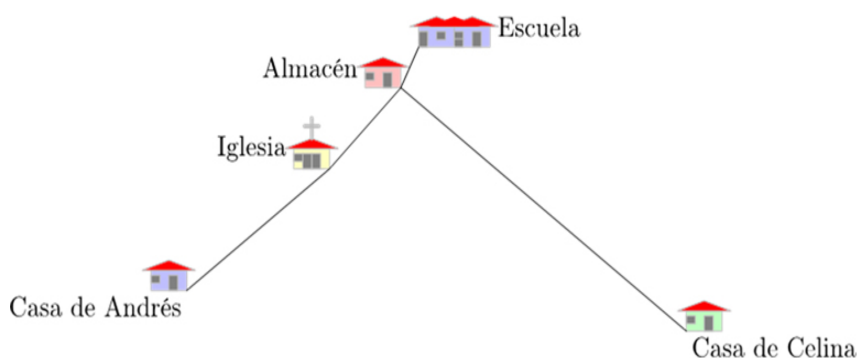
- ✓ Para evaluar el cálculo de medidas se pedirá el uso de instrumentos como regla graduada, compás, relojes, balanzas, etc. También, en el caso de las monedas, se pedirá la obtención del resultado de transacciones sencillas que involucren la compra y venta de objetos. El cálculo de medidas se puede evaluar mediante exámenes escritos u orales, en este último caso especialmente cuando se trate de estimaciones.

- ✓ La estimación de medidas es una habilidad muy importante puesto que permite a la persona tener una referencia apropiada de la medida sin el uso de instrumentos. Al evaluar longitudes se les puede pedir que estimen la longitud de un cordel; se aceptará una respuesta como correcta si el valor proporcionado se encuentra dentro de cierto rango previamente establecido.

- ✓ Para evaluar la habilidad de comparar medidas se les puede solicitar que comparen dos pesos y que se estime cuál es la razón entre ellos (uno aproximadamente el doble del otro, o si son casi iguales, etc.). Esto se puede hacer de manera oral en el *trabajo cotidiano*.

- ✓ Para la evaluación de la aplicación de la medición en diversos contextos se puede proponer una enorme cantidad de problemas contextualizados. Dos ejemplos:
  Una bolsa de arroz contiene 2 kg, una bolsa de azúcar pesa 1 kg. Si Luisa lleva 5 bolsas de arroz y Roberto lleva 8 bolsas de azúcar, ¿quién lleva más peso?

  Para ir de su casa a la escuela, Andrés y Celina recorren el camino que indica la figura. De la casa de Andrés hay 5 hm hasta la iglesia, de la iglesia al almacén hay 350 m y de ahí hasta la escuela hay 90 m. De la casa de Celina hasta el almacén hay un 1 km. ¿Quién debe caminar más, Celina o Andrés?



Primer ciclo, Relaciones y Álgebra

Introducción

Al ingresar a este ciclo, cada estudiante ha desarrollado ciertas habilidades para relacionar personas, palabras y objetos, clasificar y ordenar objetos y de describir verbalmente ciertas regularidades en patrones, lo que es fundamental para el desarrollo de la *recursividad*. Otra habilidad importante para el desarrollo del concepto de función (un caso particular de relación) es la relacionada con el cambio, las y los niños pueden, por lo general, describir verbalmente ciertos cambios cualitativos, tales como el crecimiento de una planta o de una persona.

Relaciones y Álgebra inicia en este ciclo el trabajo con sucesiones, al establecer relaciones entre números naturales y la búsqueda del valor faltante en una expresión.

La introducción temprana de relaciones, patrones y manipulación simbólica posibilitará una mayor articulación con los ciclos que siguen y desarrollará una forma de pensamiento matemático necesaria para la construcción de conceptos relacionados con las funciones y la geometría, favoreciendo los procesos de *Conectar, Razonar y argumentar* y *Representar.*

Es importante fomentar el desarrollo de las habilidades relacionadas con el reconocimiento de patrones, la comprensión del cambio, la determinación del valor faltante en una expresión, la representación y comparación de números en la recta numérica. Esto también favorece el proceso matemático de *Razonar y argumentar.*

Propósitos de la enseñanza

El propósito de la enseñanza en el área de *Relaciones y Álgebra* para este ciclo es desarrollar en cada estudiante la comprensión de patrones y relaciones, la capacidad para representar y analizar situaciones matemáticas dadas y la habilidad para utilizar estos conocimientos con el fin de resolver problemas en varios contextos.

Habilidades generales

Las habilidades generales a desarrollar en *Relaciones y Álgebra* al finalizar el Primer ciclo son:

- Construir sucesiones con números y con figuras.
- Identificar patrones en una secuencia de figuras o de números.
- Ordenar números en forma ascendente o descendente.
- Escribir e interpretar expresiones matemáticas que representan cantidades dadas.
- Identificar y sustituir el número que falta en una tabla o en una expresión matemática.
- Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada.

Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

1er Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Sucesiones • Patrones	1. Identificar patrones o regularidades en sucesiones con números menores que 100, con figuras o con representaciones geométricas	▲ Una estrategia consiste en proponer sucesiones numéricas en forma de juegos, oralmente (pasándose una bola) o en forma escrita. ▲ Se pueden proponer sucesiones que requieran la suma, resta, el doble, o bien sucesiones numéricas de términos que se obtengan mediante la adición, donde el término inicial sea un número natural y el término final sea menor que 100. ▲ Proponga que cada estudiante marque en una tabla que contiene números naturales menores que 100 aquellos números que se obtienen de añadir 5 sucesivamente a partir del cero. Verificar si las unidades de los números marcados obedecen a un patrón (el cual corresponde a que la cifra de las unidades es 0 o 5). ▲ Proponga sucesiones con figuras geométricas bidimensionales y tridimensionales (sólidos). En las figuras geométricas bidimensionales se puede utilizar rectas paralelas y rectas perpendiculares. Esto favorece la conexión entre las áreas de *Geometría* y de *Relaciones y Álgebra.*
	2. Construir sucesiones con figuras o con números naturales menores que 100 que obedecen a una ley dada de formación o patrón.	▲ Proponga una secuencia numérica, por ejemplo 5, 7, 9, 11,… en la que empieza con un número natural y le va agregando un número natural fijo a cada número sucesivo. ▲ Es importante utilizar material concreto para introducir el tema de sucesiones. Por ejemplo, cortar rectángulos de distintos colores y ubicarlos en fila, color 1, color 2, color 3, color 1, color 2, color 3, y preguntar, si el patrón continúa, el color que sigue, o el color que ocuparía la posición número 10. Se recomienda la utilización de materiales concretos reciclables, para desarrollar una *Cultura ambiental para el desarrollo sostenible.* Motive a cada estudiante para que formule su propia sucesión manteniendo una actitud perseverante y que lo comparta con otros compañeros o compañeras en un ambiente de respeto mutuo. Lo anterior favorece los procesos *Razonar y argumentar* y *Comunicar*. ▲ Es fundamental que cada estudiante haga cálculos mentales para identificar patrones o regularidades.

Expresiones matemáticas • Signo de Igualdad • Representación de cantidades	3. Identificar dos expresiones matemáticas que son iguales. 4. Reconocer el significado de " = ".	▲ Se pueden plantear problemas como el siguiente: Alicia tiene 2 bolsas con 3 galletas de avena cada una y su prima Ana tiene 3 bolsas con 2 galletas cada una. ¿Cuál de las dos tiene más galletas? ▲ Proponga por ejemplo operaciones del tipo 15 + 3 = 20 – 2, donde cada estudiante identifique que lo que se coloque a la izquierda y a la derecha del signo " = " son iguales en valor o cantidad. ▲ Es importante interiorizar el signo de igualdad como un símbolo de equivalencia y equilibrio.  **Imagen cortesía de FreeDigitalPhotos.net**
	5. Representar cantidades en situaciones diversas utilizando la escritura de expresiones matemáticas.	En el bolsillo del pantalón me encontré dos monedas de veinticinco colones y tres monedas de diez colones. Estas cantidades pueden expresarse matemáticamente por 25 + 25 +10 + 10 + 10
	6. Plantear y resolver problemas contextualizados aplicando la representación de cantidades.	▲ Por ejemplo, que cada estudiante plantee y resuelva un problema que corresponda a la siguiente representación de cantidades: 7 + 7 + 7 + 5

<table>
<tr><th colspan="3">2° Año</th></tr>
<tr><th>Conocimientos</th><th>Habilidades específicas</th><th>Indicaciones puntuales</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">Sucesiones

• Patrones

• Tablas numéricas

• Sucesiones ascendentes

• Sucesiones descendentes</td>
<td>1. Construir sucesiones con figuras o con números naturales menores a 1000 que obedecen un patrón dado de formación.</td>
<td>▲ Cada estudiante propone una sucesión para que la resuelvan sus compañeros y compañeras. Motive a utilizar diferentes patrones para así lograr obtener un banco de ejercicios útiles para cuando se quiera reforzar el conocimiento. Permita que cada estudiante comparta las estrategias utilizadas en la construcción.

Esto favorece los procesos de Razonar y argumentar.

▲ Proponga la construcción de sucesiones que requieren dos operaciones a lo sumo.

Será motivador contar la historia del matemático alemán Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) el cual a los 9 años de edad, buscó una forma ingeniosa de sumar los 100 primeros números naturales, usando su gran habilidad para el reconocimiento de patrones numéricos. En efecto, su profesor de aritmética J. G. Büttner, propuso dicho problema para ver si lograba mantener a sus estudiantes ocupados por un buen rato. Gauss se dio cuenta de que la suma solicitada simplemente era 50 veces 101, número formado por la suma de las parejas 1 y 100, 2 y 99, 3 y 98, y así sucesivamente.

▲Se podría proponer a cada estudiante calcular la suma de los 10 primeros números naturales.</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Identificar patrones o regularidades en sucesiones o en tablas de números naturales menores que 1000, con figuras o con representaciones geométricas.</td>
<td>▲ Proponga sucesiones que requieren dos operaciones para que cada estudiante explore e identifique el patrón en la sucesión. Por ejemplo: 1, 3, 7, 15, 31,… Una estrategia sería: sumarle al número su sucesor. Otra más compleja sería duplicar el número y sumar 1 al resultado.

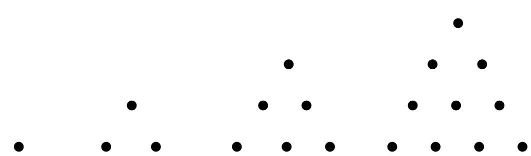
Este tipo de ejercicio requiere de un mayor esfuerzo, por esta razón la actividad puede ser presentada como un desafío. La búsqueda de patrones es una herramienta muy importante.

Que cada estudiante comparta la estrategia utilizada para identificar el patrón en un ambiente de respeto mutuo.

▲ Es recomendable utilizar representación tabular. Por ejemplo, que cada estudiante complete la tabla:
<table>
<tr><td>No. Manzanas de agua</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Precio de las manzanas de agua (en colones)</td><td>60</td><td>120</td><td>180</td><td>?</td><td>?</td></tr>
</table>
Que cada estudiante comparta las estrategias utilizadas para el resultado de 5 manzanas de agua. Por ejemplo

60×5 o bien $120 + 180$.</td>
</tr>
</table>

		Se puede permitir a los alumnos el uso de las tablas de multiplicar o calculadoras para que los cálculos no sean un obstáculo al aprendizaje.
	3. Ordenar números ascendente o descendentemente.	Introduzca situaciones donde cada estudiante ordene cantidades, por ejemplo sus notas obtenidas durante la semana de evaluación, ya sea de forma ascendente o descendente. Esto permite establecer conexiones con el área de *Estadística y Probabilidad.*
	4. Identificar y construir sucesiones ascendentes o descendentes.	

3er Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Sucesiones • Patrones • Sucesiones ascendentes • Sucesiones descendentes	1. Identificar y construir sucesiones con figuras, representaciones geométricas o con números naturales menores a 100 000 que obedecen a un patrón dado de formación.	▲ Se sugiere proponer en forma de juegos y desafíos sucesiones numéricas y no numéricas con un secreto escondido (patrón) que cada estudiante debe explorar e identificar a través del análisis de las mismas. Puede ser con figuras geométricas, operaciones, símbolos, múltiplos u otros. Se escribe en la pizarra una sucesión cuyos primeros términos son 2, 6 y 18, y se solicita a cada estudiante que proponga un problema cuya respuesta corresponda con la sucesión brindada. Un posible problema puede ser: Determine los primeros tres términos de la siguiente sucesión: ____, ____, ____, 54, 162, 486, … El problema planteado tiene un alto nivel de dificultad para el nivel. Una propuesta más sencilla sería: encuentre el siguiente término en la sucesión: 2, 6, 18, … Sucesión con puntos (números triangulares)  Se le pide a cada estudiante dibujar el término siguiente de la sucesión. ▲Cada estudiante construye y resuelve una sucesión donde pueden utilizar una o dos operaciones en el patrón. Para la construcción de sucesiones con figuras se recomienda la utilización de materiales concretos, principalmente los que son reciclables, para desarrollar una *Cultura ambiental para el desarrollo sostenible.*

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Se puede compartir la historia de los números poligonales, en particular los números triangulares, construidos por los pitagóricos.</td></tr>
<tr><td></td><td>2. Ordenar números ascendente o descendentemente.</td><td>▲ Se sugiere proponer que comparen y ordenen cantidades obtenidas de un contexto en forma creciente o decreciente. Por ejemplo comparar y ordenar alturas de cerros o de volcanes de Costa Rica, o comparar y ordenar el número de estudiantes de cada sección de la escuela.

Hay que seleccionar las cantidades a comparar para que los números correspondientes no superen 100 000.

Esta es una oportunidad para mostrar la utilidad de las Matemáticas y favorecer el proceso Conectar.</td></tr>
<tr><td></td><td>3. Identificar y construir sucesiones ascendentes o descendentes.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>4. Plantear y resolver problemas aplicando sucesiones y patrones.</td><td>El número favorito de Nery Brenes es el último número de la décima fila en la siguiente tabla (suponiendo que continúa el patrón de números).

<table>
<tr><th>Fila 1</th><th>Fila 2</th><th>Fila 3</th><th>Fila 4</th></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr>
<tr><td></td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>12</td><td>12</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>14</td><td>14</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>16</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>18</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Relaciones

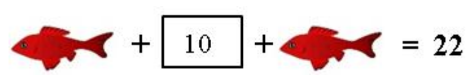
• Tablas

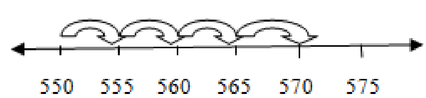
• Valor faltante</td><td>5. Representar tabularmente relaciones entre números y operaciones.

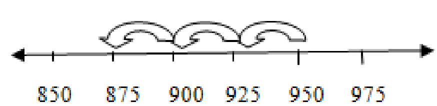
6. Identificar el número que falta en una tabla.</td><td>▲ Se puede proponer una tabla para que cada estudiante la complete:

Precio en colones de un jugo envasado

<table>
<tr><th>Cantidad</th><th>Precio</th></tr>
<tr><td>1</td><td>350</td></tr>
<tr><td>2</td><td>700</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>1750</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td></tr>
</table>
Que cada estudiante explique verbalmente la estrategia utilizada para completar la tabla. Puede haber diferentes estrategias.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
En este ejemplo, cada estudiante debe entender la importancia que tiene la representación de la información matemática a través de tablas, con el propósito de resumir o evidenciar información relevante para la solución de un problema. Esto conecta con el área de Estadística y Probabilidad.
Represente en una tabla el triple de un número.
<table>
<tr><th>Número</th><th>Triple del número</th></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>13</td><td></td></tr>
<tr><td>17</td><td></td></tr>
<tr><td>24</td><td></td></tr>
<tr><td>39</td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>7. Plantear y resolver problemas que involucran valores faltantes en una tabla o expresión matemática.</td>
<td>
Es importante que cada estudiante argumente la estrategia utilizada en el planteo o en la resolución del problema. Esto favorece el proceso de Razonar y argumentar. Además, es fundamental que el proceso de comunicación ocurra en un ambiente de respeto a las ideas de las otras personas, lo que favorece la Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz.
¿Cuál es el número que cubre cada delfín, suponiendo que cada uno de ellos cubre un mismo número en la figura que sigue?


Elaboración propia
</td>
</tr>
<tr>
<td>Representaciones
• Recta numérica</td>
<td>8. Representar sumas y restas en la recta numérica.</td>
<td>
▲ Se puede proponer ejemplos donde cada estudiante localice diferentes representaciones de cantidades:
550 + 20 =


950 – 75 =


</td>
</tr>
</table>

Indicaciones metodológicas

Generales para el ciclo

1. Es fundamental dedicar suficiente tiempo para que cada estudiante trabaje en la identificación de patrones o regularidades en sucesiones con figuras, dibujos, representaciones geométricas y números. Los patrones constituyen una herramienta muy importante en el desarrollo del pensamiento matemático.

2. Para lograr habilidades relacionadas con la identificación, construcción y aplicación de patrones, es recomendable utilizar recursos variados tales como: recortes de revistas, periódicos, papel cuadriculado, cartulina, geoplano, papel de construcción y objetos que se encuentran en el entorno.

3. Se debe proporcionar la mayor cantidad posible de oportunidades para que el cada estudiante construya sus propios ejemplos de patrones, conjeture y argumente su estrategia.

4. Para la comunicación de las estrategias utilizadas, hay que crear un ambiente de respeto y tolerancia por las ideas de las otras personas, y de esta forma favorecer a la *Vivencia de los derechos humanos para la democracia y la paz*, además de activar los procesos de *Razonar y argumentar*.

5. A este nivel es recomendable que cada estudiante utilice el lenguaje natural en sus argumentaciones.

Primer año

1. Para el desarrollo de habilidades relacionadas con sucesiones proponga sucesiones con figuras para que cada estudiante identifique el término que sigue. Por ejemplo: suponiendo que continúa el patrón dado en la sucesión, ¿cuál es el siguiente término?

   ☺ ☺ ☹ ☺ ☺ ☹ . . .

   También es importante utilizar dibujos o recortes de revistas que conlleven a reconocimiento visual y a interpretaciones.

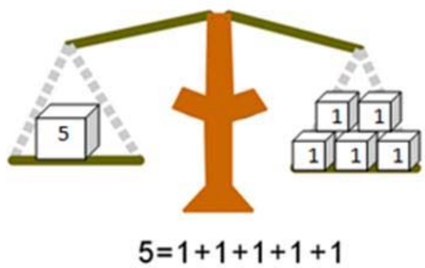
   Por ejemplo: Considere el patrón

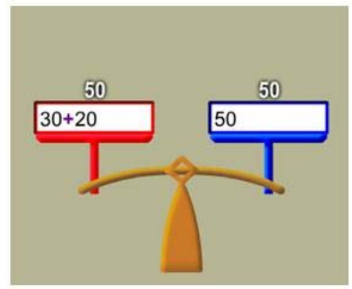
Imágenes con derechos adquiridos por el MEP

   Si el patrón de la figura continua, ¿cuántos botones tendrá la Osa 4 en su vestido?

2. Se debe utilizar sucesiones numéricas que involucren una única operación. Por ejemplo, que cada estudiante complete el número que ocupa el espacio siguiente al último término de la sucesión dada: 4, 7, 10, 13, 16, _____.

3. Las habilidades 4 y 5 pueden ser trabajadas en una sola actividad si utilizamos la metáfora de la balanza. Los dos lados de la igualdad son pesos que equilibran la balanza. De esta forma la igualdad es un símbolo de equivalencia y de equilibrio.





Elaboración propia

Segundo año

1. Para el desarrollo de habilidades relacionadas con sucesiones proponga sucesiones con un nivel de dificultad más elevado que el utilizado en el 1er Año. Por ejemplo, utilice sucesiones que requieran dos operaciones matemáticas, tablas o que solicite un elemento superior al siguiente de la sucesión. Ejemplo: que cada estudiante complete los elementos desconocidos u ocultos en la siguiente tabla

5	**9**	**13**	**?**	**21**	**?**	**29**	**33**	**?**	**?**

- **Ejemplo con figuras**: considere el siguiente patrón:

Imágenes con derechos adquiridos por el MEP

Si el patrón de la figura continua, ¿cuántos botones tendrá la Osa 8 en su vestido?

- **Ejemplos numéricos**: completar el número que ocupa el espacio siguiente al último término de la sucesión dada: 5, 9, 17, 33, ______ (sume el número a su antecesor, o bien multiplique cada término por 2 y reste 1).

2. Las habilidades 4 y 5 pueden ser trabajadas en una sola actividad. Proponga una lista de números, por ejemplo 54, 18, 159, 432, 9, 300, para que cada estudiante los ordene en forma ascendente y posteriormente en forma descendente.

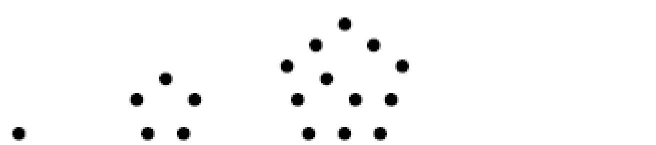
3. Al ordenar sucesiones, es pertinente que cada estudiante utilice los símbolos < o >, estudiados en el área de *Números*.

4. El uso de tecnología digital puede ayudar a que cada estudiante busque patrones. Por ejemplo, en el sitio web http://ares.cnice.mec.es/matematicasep/a/1/ca1_08.html se propone completar los números en una secuencia que aparece en el caracol para que éste logre avanzar hacia su comida.

Tercer año

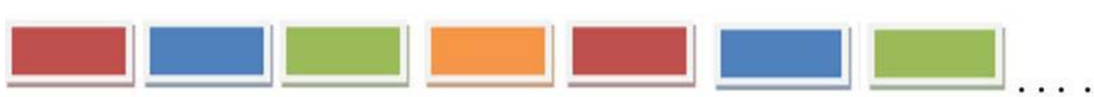
1. Para las sucesiones, los números utilizados y el nivel de complejidad serán más elevados que en los años anteriores. Por ejemplo, completar los dos términos que faltan en la sucesión numérica que sigue: 2, 4, 3, 6, 4, 8, 5, ____ , _____, 12. En este caso se utiliza un término, su doble, el sucesor del término anterior, su doble, continuando con el patrón.

2. Es importante utilizar representaciones geométricas en las sucesiones. Por ejemplo: encontrar el siguiente término de la sucesión de puntos que forman la sucesión.



   Este ejemplo se conecta con el área de *Geometría* y permite invocar la historia de los números pentagonales desarrollados por los pitagóricos.

3. Se recomienda recortar figuras de distinto colores, ubicarlos en filas o columnas y, suponiendo que el patrón continúa, preguntar por el color que ocuparía cierta posición.



¿Qué color ocuparía la posición 15?

Indicaciones de evaluación

Para la evaluación del *trabajo cotidiano* debe observarse la forma y el grado de participación de cada estudiante en las actividades que se proponen, y que la información se registre en los instrumentos de medición correspondientes. En particular, es fundamental que cada estudiante logre identificar sucesiones numéricas y patrones matemáticos en objetos del entorno escolar y en materiales elaborados por la maestra o el maestro.

Los *trabajos extraclase* deberán estar orientados a evaluar el reconocimiento de patrones en el contexto del hogar o de la comunidad de cada estudiante, y son recomendados para reforzar y profundizar los conocimientos adquiridos. Un ejemplo para 2° Año consiste en que cada estudiante observe y construya una lista de objetos de distintas formas geométricas que encuentra en su entorno y que forme patrones al ordenar aquellos objetos que tienen una misma forma, según algún criterio dado. Por ejemplo, en un grupo pueden ir los objetos que tienen forma circular, en otro los que tienen forma rectangular, otro con forma triangular, etc. Podrían brindarse criterios para objetos sólidos: esferas, cubos, cajas. Este tipo de trabajo conecta *Relaciones y Álgebra* con *Geometría*.

Para este ciclo la *evaluación* en el área de *Relaciones y Álgebra*, debe tener presentes las siguientes indicaciones.

- ✓ La evaluación de construcción de sucesiones puede hacerse proporcionando algunos números o figuras y solicitando que se construya una sucesión con los elementos dados. Por ejemplo, que construyan una sucesión con al menos 8 términos, si los primeros 3 términos son los números 3, 7, 10. Esta evaluación se puede hacer de forma oral o escrita durante el *trabajo cotidiano*.

- ✓ La identificación de patrones con figuras puede ser hecha mediante objetos presentes en el entorno, fotografías u otros objetos que el o la docente pueda aportar para realizar la prueba. Por ejemplo, puede llevar figuras geométricas de cartón que representan polígonos regulares y se asocie el número de lados con el tipo de polígono. Esta es una evaluación que se puede realizar de manera oral o escrita en el *trabajo cotidiano* y conecta con el área de *Geometría*.

- ✓ Para ordenar números en forma ascendente o descendente se puede dar una lista con números dados en forma desordenada y pedir que sean ordenados. Por ejemplo, ordenar en forma ascendente los números 17, 11, 5, 29, 13, 9, 41, 37 e indicar que característica especial tienen estos números (en este caso todos son impares). Esta evaluación se puede realizar de manera escrita en el *trabajo cotidiano* y conecta con el área de *Números*.

- ✓ Para identificar y sustituir el número que falta en una tabla o expresión matemática, se puede dar una tabla con expresiones matemáticas en dónde aparecen algunos números perdidos. El trabajo tipo detectivesco consiste en encontrar dichos números. Estas habilidades pueden evaluarse en *pruebas orales o escritas.*

Primer ciclo, Estadística y Probabilidad

Introducción

Desde sus primeros años, niños y niñas están expuestos a un bombardeo constante de información, que en general llega en forma desordenada, por lo que no siempre es comprendida. Antes de ingresar a la escuela las niñas y los niños han adquirido ciertas destrezas para agrupar, clasificar y cuantificar información, las cuales deben ser aprovechadas en Primaria.

En este Primer ciclo de educación formal se deben crear las condiciones para fortalecer y ampliar las habilidades vinculadas con la interpretación de los datos que se generan en su entorno, de modo que comprendan su importancia y critiquen aquellos que directa o indirectamente tienen relación con ellos. Al mismo tiempo deben incursionar en la resolución de problemas vinculados en procesos de recolección, resumen, presentación y análisis de información, aunque sea a un nivel muy básico.

Por otro lado, los principios de *incertidumbre* y *aleatoriedad* que están presentes en el contexto estudiantil deben también ser orientados positivamente hacia una interpretación adecuada. Se espera que puedan diferenciar entre una situación *aleatoria* y una *determinista o segura,* que sean capaces de intuir hechos que tienen una mayor probabilidad de ocurrencia y de este modo favorecer sus decisiones.

En términos generales, en este ciclo se inicia un proceso hacia la creación de una cultura para el manejo e interpretación de información.

Propósito de la enseñanza

El propósito de la enseñanza de *Estadística y Probabilidad* en este ciclo consiste en propiciar en las y los estudiantes la identificación de información cuantitativa y cualitativa en diferentes contextos y valorar su utilidad para una mejor comprensión del entorno. Al mismo tiempo, se busca favorecer los procesos de resolución de problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil.

Habilidades generales

Las habilidades generales que debe tener cada estudiante en *Estadística y Probabilidad* al finalizar el primer ciclo son:

- Identificar información cuantitativa y cualitativa que se genera por medio de distintas fuentes en la sociedad e interpretar el mensaje que suministran.
- Reconocer el papel del dato como unidad básica para el tratamiento de información.
- Identificar la variabilidad en los datos como la principal fuente de análisis dentro de los estudios estadísticos.
- Utilizar diferentes estrategias para el proceso de recolección y representación de información cuantitativa y cualitativa
- Responder interrogantes del contexto que requieran de recolección, ordenamiento, presentación y análisis de datos.
- Identificar situaciones aleatorias y seguras dentro de la cotidianidad y eventos asociados con ellas.
- Clasificar eventos aleatorios en más o menos probables para situaciones o experimentos particulares.
- Identificar eventos de acuerdo con los resultados simples que están vinculados con ellos
- Plantear y resolver problemas vinculados con el área de *Estadística y Probabilidad*.

La mayoría de estas habilidades está directamente vinculada con la actividad estudiantil mediante la identificación, visualización e intuición para el análisis y discusión de problemas contextualizados que deben ser seleccionados cuidadosamente.

Mediante el desarrollo temático se pretende favorecer la motivación y el interés por las Matemáticas. La utilidad de los conceptos desarrollados queda implícita debido a que, en la mayoría de casos, se propone emplear datos generados dentro del contexto estudiantil y que deben ser recabados durante la misma actividad, esto favorece su integración al proceso educativo y su vinculación al trabajo en equipo. La actividad estudiantil no sólo está orientada hacia la recolección de los datos con los que se trabaja sino también a su análisis para responder preguntas concretas, favoreciendo la construcción de aprendizajes. Por ello se espera aumentar la autoestima y generar aprecio y disfrute hacia la disciplina.

Tal como se ha venido planteando, en la generación de estas habilidades intervienen diferentes procesos: *Plantear y resolver problemas* como estrategia metodológica principal que enfrenta a cada estudiante ante un reto que le debe llevar a la búsqueda, a la identificación y recolección de datos cuantitativos o cualitativos o a la interpretación de una situación aleatoria particular. Estos problemas deben *Conectar* con otras áreas del currículo o con su propio contexto. El proceso de *Representar* la información que proporcionan los datos (por medio de cuadros, gráficos o medidas) va dirigido a encontrar patrones que permitan razonar sobre las principales interrogantes que ha generado el problema y *Comunicar* mediante una adecuada argumentación las respuestas a dichas interrogantes.

Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

1er Año		
Estadística		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
El Dato • Uso • Datos cuantitativos • Datos cualitativos	1. Identificar datos dentro del contexto estudiantil (aula, escuela, hogar, comunidad, etc.). 2. Clasificar datos en cuantitativos o cualitativos.	▲ Para iniciar el proceso, se requiere enfrentar a cada estudiante con información que le rodea y que es objeto de estudio. Para ello, se recomienda realizar algunas preguntas que generen datos. Por ejemplo: a. ¿Cuántos grupos de primer año tiene la escuela? b. ¿Cuál es el precio de un litro de leche? c. ¿Cuáles son los medios de transporte que utilizan las y los estudiantes para llegar a la escuela? d. ¿Cuántas personas habitan en la casa de cada estudiante? e. ¿Cuál es la mascota preferida de la profesora o profesor? Con lo anterior, se pretende familiarizar en el uso de datos cuantitativos y cualitativos que se generan cotidianamente. Se sugiere enfatizar en la importancia de comprender la información que proporcionan esos datos. ▲ Se procura identificar de qué manera cada estudiante percibe la información que les rodea. A partir de estas percepciones se deben plantear interrogantes para motivar la importancia de los datos y el mensaje que comunican.
La variabilidad de los datos	3. Valorar la importancia de la variabilidad para el análisis de datos.	▲ Para identificar la variabilidad de los datos, la actividad estudiantil debe estar vinculada con datos generados en el mismo contexto, de manera que identifiquen la variabilidad que presentan y los efectos que esta variabilidad produce en el proceso de análisis de la información.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
Suponga que se desea conocer para los miembros del grupo:
a. ¿Cuántos hermanos tiene cada uno?
b. ¿Cuál es la mascota preferida?
c. ¿Cuál es el color del pantalón o enagua que utilizan para asistir a la escuela?

▲ Para determinar los datos que ayudan a responder las interrogantes, se puede pasar una lista de clase con tres columnas adicionales para que cada estudiante aporte la información personal relacionada con las respuestas:
<table>
<tr><th>Nombre</th><th>No. de hermanos</th><th>Mascota preferida</th><th>Color de Pantalón o enagua</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

▲ Con la información recabada, se plantean las siguientes interrogantes:

a. ¿Se obtiene la misma respuesta en todos los casos para cada pregunta?
b. ¿Cuáles de los datos generados se parecen más entre sí?
c. ¿En cuál de los grupos de datos es más fácil dar respuesta a la pregunta original?

▲ En el proceso de clausura, se debe indicar que esta variabilidad que presentan las respuestas y que generan datos diferentes hace necesario establecer estrategias para clasificar y resumir estos datos para tener así una mejor comprensión de esa variación de acuerdo con la interrogante que originó el problema.

▲ Se busca que cada estudiante pueda identificar la variabilidad de los datos, como aquella característica que los hace distintos unos de otros, vinculando este concepto con sus creencias sobre el principio de las diferencias entre objetos, las plantas, los animales y las personas.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Recolección de información

• Observación

• Interrogación

Presentación de información

• Frecuencia
</td>
<td>
4. Recolectar datos mediante la observación y la interrogación.

5. Emplear la frecuencia de los datos repetidos para agruparlos.
</td>
<td>
En este proceso conviene iniciar recolectando datos por medio de la observación simple o la interrogación. Para ello se puede plantear situaciones referidas a las y los estudiantes:

a. ¿Cuál es el color predominante de los bolsos utilizados para llevar sus útiles escolares?
b. Al analizar el primer nombre de cada estudiante del grupo y contar el número de letras que incluye ¿Cuál es el número de letras que más se repite?
c. ¿Cuáles son los deportes preferidos?

▲ Para contar con información que permita responder estas preguntas, se debe motivar a las y los estudiantes para que formulen estrategias que permitan recolectar los datos.
</td>
</tr>
</table>

		Para las primeras dos interrogantes deben hacer uso de la observación para recabar los datos de cada quién, mientras que en la pregunta c. deben preguntar a cada estudiantes cuál es su deporte preferido. Una vez agrupados y ordenados los datos, se pide ofrecer las respuestas correspondientes a los problemas que originaron el estudio, empleando argumentos que justifiquen sus respuestas. En todo el ciclo, las actividades propuestas requieren ser muy dinámicas para fortalecer el proceso de *Comunicar*. También es deseable promover la generación de estrategias para la clasificación y caracterización de la información, despertando el interés por representar los datos. Además está presente el proceso de razonar y argumentar, el cual se activa en el momento que los estudiante empleen argumentos que justifiquen sus respuestas.

1er Año		
Probabilidad		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Situaciones • Aleatorias • Seguras	1. Identificar diferencias entre situaciones cuyo resultado sea aleatorio de aquellas cuyo resultado es conocido o seguro.	Se recomienda formular situaciones u organizar juegos en los cuales se puedan establecer diferencias claras entre situaciones aleatorias o inciertas y situaciones seguras. Por ejemplo : a. Solicitar que dos estudiantes jueguen “Zapatito cochinito cambia de piecito” varias veces y siempre iniciando con la misma persona. b. Repetir la experiencia pero ahora con el juego “Piedra-papel-tijera”. Preguntar: ¿cuál de los juegos presenta más variación en el ganador?, ¿por qué será que se presenta esta variación?, ¿a qué conclusiones se puede llegar? Se espera que logren identificar que en el primer juego siempre gana la misma persona, por lo que corresponde a una situación o juego cuyo resultado es conocido sin necesidad de llevarlo a la práctica. Por su parte, debido a que el segundo presenta variaciones, el resultado del ganador solamente se conoce al llevar a cabo la experiencia. Se debe aprovechar los resultados para introducir intuitivamente los conceptos de eventos seguros y eventos aleatorios. Para reforzar los resultados anteriores, y motivar hacia la identificación de situaciones seguras y aleatorias en la cotidianidad estudiantil, se deben plantear problemas de reproducción del conocimiento adquirido, por ejemplo: Se elige una persona cualquiera de la lista y se desea: a. Determinar el color de su bolso escolar. b. Determinar el color de su camisa o blusa.

<table>
<tr><td></td><td></td><td>¿Cuál de las situaciones es aleatoria? (Hay que tomar en cuenta que el ejemplo es válido si el color de todas las camisas o blusas es el mismo, debido al uso de uniforme escolar).

▲ Conviene plantear más problemas vinculados con el tema para que logren diferenciar entre una situación segura y una aleatoria.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">2do Año</td></tr>
<tr><td colspan="3">Estadística</td></tr>
<tr><td>Conocimientos</td><td>Habilidades específicas</td><td>Indicaciones puntuales</td></tr>
<tr><td>El dato

• Uso

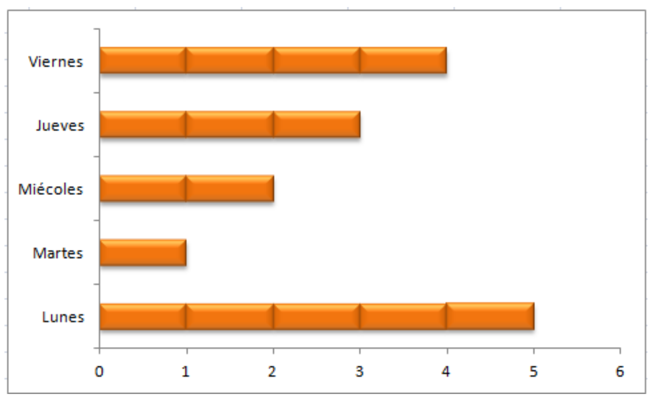
• Datos cuantitativos

• Datos cualitativos</td><td>1. Identificar datos cuantitativos y cualitativos en diferentes contextos.

2. Interpretar información que ha sido resumida en dibujos, diagramas, cuadros y gráficos.</td><td>▲ Además de situaciones vinculadas con la cotidianidad, conviene plantear situaciones que incorporen datos relacionados con la información que aparece en periódicos, revistas o Internet. Por ejemplo, comparar el precio de algunos productos de la feria del agricultor en dos fines de semana. Se recomienda enfatizar en el mensaje que los datos proporcionan, por ejemplo identificar si el precio de las papas subió o bajó durante esta semana, así también con otros productos.

▲ Se recomienda también incluir ejemplos como el siguiente en el cual se pide que analicen el gráfico:

Número de ausencias de estudiantes por día, ocurridos la semana anterior en cierto grupo de 2° Año



▲ Se pueden plantear diferentes preguntas. Por ejemplo, ¿cuántas ausencias se presentaron la semana anterior?, ¿en qué día de la semana se ausentaron más estudiantes?, entre otras. Señalar la importancia de utilizar estos recursos para presentar información que suministran los datos.

Es importante enfatizar que los cuadros, gráficos, diagramas, entre otros, son formas de resumir y representar los datos. Se requiere realizar una adecuada lectura de la información que comunican.</td></tr>
<tr><td>La variabilidad de los datos</td><td>3. Identificar la variabilidad de los datos como componente básico dentro de los análisis de la información.</td><td>Solicitar que mediante un proceso de recolección y análisis de datos se busquen respuestas para las siguientes interrogantes vinculadas con el grupo:</td></tr>
</table>

a. ¿Cuáles son las frutas preferidas?
b. ¿Cuáles son los colores de zapatos que más se utilizan?

▲ Consultarles sobre la forma en que la variabilidad de las respuestas obtenidas ha afectado el análisis de la información.

Considere la siguiente imagen.

Imagen con derechos adquiridos por el MEP

a. ¿Qué características o elementos son variables o diferentes entre estos seis niños y niñas?
b. ¿Qué elementos tienen en común?

Ahora, lea el siguiente párrafo:

Aprender a ser respetuoso en la diversidad

Los niños deben aprender a amar a sus compañeros y a los demás, independientemente de su color de piel, de sus rasgos, de cómo es su pelo, si es chino, árabe o indígena, si habla otro idioma, y a respetar su cultura y sus tradiciones. Los niños deben saber que la diversidad nos trae riquezas de informaciones y de experiencias. Que podemos aprender mucho con las diferencias. En lugar de criticarlas, debemos aprender con ellas y darles su valor...

Fuente: http://www.guiainfantil.com/1225/educar-en-valores-respeto-a-la-diversidad.html

¿Qué puede concluir de esta lectura?

El problema anterior muestra la importancia que tiene el comprender la variabilidad dentro del mundo actual. La diversidad cultural es un ejemplo de variabilidad entre personas. Es de esperar que ante la primera pregunta se identifiquen diferencias en el color de la piel, en la vestimenta, el color del cabello, el tipo de zapatos, entre muchas otras. En cuanto a las semejanzas, hay dos claramente marcadas: todos están alegres y todos son niñas o niños. De allí la importancia de insistir en el contenido del texto. Este es un ejemplo de cómo introducir el eje transversal *Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz.*

Recolección de información

- Observación
- Interrogación

Representación

- Tabular: cuadros de frecuencia

Medidas de resumen

- Moda

4. Recolectar datos mediante la observación y la interrogación.
5. Agrupar datos por medio de la frecuencia de repeticiones.
6. Resumir los datos por medio de cuadros que incluyan frecuencias absolutas.
7. Utilizar la moda de un grupo de datos para resumir e interpretar información.
8. Utilizar los análisis estadísticos para comunicar y argumentar respuestas a interrogantes que surgen de los problemas planteados.

▲ Los procesos de recolección de información constituyen una de las principales etapas de los análisis estadísticos, por ello se deben generar problemas que permitan buscar estrategias para recabar los datos. El siguiente problema puede poner en práctica la interrogación.

Determine los deportes preferidos del grupo.

▲ En este caso deben establecer una estrategia para la recolección, que les va a implicar consultar a sus compañeros y anotar las respuestas. Esto implica generar una base de datos de la siguiente forma:

No.	**Nombre de cada estudiante**	**Deporte preferido**
1	Abarca Lewis Manolín	Ciclismo
2	Álvarez Moín Libertad	Baloncesto

▲ Los datos recabados deben ser ordenados y clasificados tomando en consideración la frecuencia o número de repeticiones para cada una de las respuestas u observaciones realizadas. Aquí se recomienda el empleo de cuadros, tal como se muestra seguidamente:

Deporte preferido

Deporte	**No. de estudiantes**
Natación	3
Ciclismo	5
⋮	⋮
Total	

Se puede preguntar ¿cuál o cuáles son los valores que más se repiten en cada caso? A este concepto se le conoce como *moda*.

▲ El proceso debe concluir con un análisis de la información resumida en el cuadro y el significado de la moda, en procura de ofrecer argumentos sólidos que den respuesta a cada una de las interrogantes del problema.

Es conveniente combinar problemas que incluyan datos cuantitativos como el siguiente:

Buscar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Es cierto que el número de letras del primer nombre de la mayoría de estudiantes del grupo está entre cinco y ocho? (la mayoría significa más de la mitad).

▲ Se espera que realicen un análisis parecido al efectuado previamente.

2do Año		
Probabilidad		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Situaciones o experimentos • Aleatorias • Seguras	1. Identificar diferencias entre situaciones cuyo resultado sea incierto de aquellas cuyo resultado es conocido o seguro.	▲ Es relevante identificar las diferencias entre situaciones aleatorias y situaciones seguras, además incorporar ejemplos de la cotidianidad. Determine cuáles de las siguientes situaciones son aleatorias y cuáles son seguras. Justifique su respuesta: a. los resultados de la Lotería Nacional o los Chances, b. el costo del pasaje del bus, c. la condición de lluvia (que llueva o no llueva) el día del próximo cumpleaños, d. la hora a la que suena el timbre para salir a recreo. ▲ Se espera que se identifiquen las actividades aleatorias como aquellas cuya respuesta es incierta, mientras que las actividades seguras son aquellas para las que el resultado es predecible. ▲ Se pueden utilizar los conceptos de situación o experimento como sinónimos.
Eventos • Seguro • Probable • Imposible • Más probable y menos probable	2. Identificar resultados seguros, probables o imposibles según corresponda a una situación particular. 3. Identificar resultados o eventos más probables o menos probables en situaciones aleatorias pertenecientes a diferentes contextos.	▲ Debido a la importancia que tiene el concepto de probabilidad, es necesario iniciar esta etapa con la identificación de las creencias. Primeramente se recomienda iniciar con el análisis de los términos *probable*, *imposible* y *seguro*. Se puede realizar una lluvia de ideas para generalizar el conocimiento sobre esos términos. Para familiarizar sobre el concepto de probable se puede plantear la siguiente situación: Considere la siguiente frase: *Científicos han determinado que los fumadores tienen más probabilidad de enfermarse que los no fumadores.* ¿Cuál es el significado de esa frase? ¿Qué mensaje se puede extraer? En este tipo de situaciones es importante no solamente enfocarse en discutir el término probable, sino también el mensaje que proyecta el párrafo, en función del eje transversal *Educación para la Salud*. ▲ En el proceso de clausura de la actividad, se debe generalizar la idea de que una situación es más probable que otra si tiene más posibilidad de ocurrir, o sea ocurre con mayor regularidad. ▲ Luego que se ha logrado una puesta en común en el grupo, se puede ejemplificar su uso en situaciones aleatorias. Por ejemplo, trabajando en subgrupos, pedirles que experimenten lanzando varias veces un dado numerado de 1 a 6 tal como se indica:

		 Lanzar varias veces el dado y anotar el número de puntos que se obtiene en cada caso. Al considerar el número de puntos obtenido, determinar: a. Un evento seguro. b. Un evento imposible. c. Un evento probable. ▲ Para complementar el proceso, es importante aprovechar el aprendizaje adquirido para identificar situaciones más probables o menos probables dentro del contexto estudiantil. Por ejemplo, para utilizar el conocimiento que tienen sobre época seca y época lluviosa se puede consultar: ¿En qué mes es más probable que llueva, el día del cumpleaños de una persona, en marzo o en octubre? Justifique la respuesta. ▲ La respuesta va a depender de la región del país donde se viva, pero con la respuesta correcta se puede orientar sobre la noción de probabilidad. Es oportuno plantear ejemplos similares para que identifiquen eventos más probables o menos probables.

3er Año		
Estadística		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
El dato • Uso • Datos cuantitativos • Datos cualitativos	1. Identificar datos cuantitativos y cualitativos en diferentes contextos. 2. Interpretar información que ha sido resumida en textos, dibujos, diagramas, cuadros y gráficos.	▲ Se puede analizar el siguiente párrafo: Para muchos jóvenes el estudiar no representa mucho en su vida, sólo lo consideran como una rutina, ir a la escuela, hacer exámenes, meterse de lleno a los libros, lidiar con las materias, hacer tareas y demás. Hay quienes llegan al más extremo y sólo conciben al estudio de una manera muy simple: meterse en la cabeza muchos conceptos que ayuden a obtener buenas calificaciones, pasar de grado y listo. **Fuente: www.vivirdiario.com** a. ¿Cuál es el mensaje principal que se puede extraer? b. ¿De qué manera el aprendizaje de las Matemáticas le puede ayudar a mejorar su condición de estudiante y persona? Reflexiones de este tipo favorecen la interacción entre estudiantes y docente, además mejoran la actitud hacia la disciplina y aumentan la motivación. ▲ Seguidamente conviene enfatizar en los datos que se publican en los medios de comunicación, por ejemplo: estado del clima y temperatura por región, información sobre deportes, precios de productos, precios de compra y venta del dólar o el euro, número de accidentes de tránsito, resultados de la Lotería Nacional, resultados de encuestas, entre otros. ▲ Debido a que los censos de población y vivienda son una fuente invaluable de información estadística, conviene realizar una reflexión sobre el tema. Cada estudiante debe tener la preparación para analizar e interpretar la información publicada mediante dibujos, diagramas, cuadros o gráficos que le sean proporcionados.
Recolección de información • Observación • Interrogación **Representación** • Tabular: cuadros de frecuencia • Gráfica: barras **Medidas de resumen** • Moda • Máximo	3. Plantear problemas del contexto estudiantil que puedan abordarse por medio de recolección y análisis de datos. 4. Resolver problemas del contexto estudiantil utilizando la técnica de interrogación para la recolección de datos. 5. Resumir los datos por medio de cuadros que incluyan frecuencias absolutas o gráficos de barras. 6. Resumir e interpretar información utilizando la moda, el máximo y el mínimo de un grupo de datos.	▲ En esta etapa es adecuado solicitar a las y los estudiantes que formulen problemas cuya solución requiera de recolección y análisis de datos. Se requiera que analicen cada uno de los problemas planteados en función de su factibilidad de implementación y las técnicas que deben ser empleadas para llevarlos a la práctica. ▲ Es importante que algunos de los problemas planteados puedan ser ejecutados por las y los estudiantes, con las adecuaciones del caso, de modo que identifiquen que sus ideas se pueden poner en práctica. ▲ No obstante, conviene plantear problemas que complementen la actividad previa: Determinar a quienes en el grupo les agrada consumir regularmente frutas. Definir el agrado en tres categorías: mucho, mediano y poco. ▲ La información obtenida puede ser presentada en un cuadro como el siguiente:

<table>
<tr>
<td>• Mínimo</td>
<td>7. Utilizar los análisis estadísticos para comunicar en forma verbal y escrita los argumentos que dan respuestas a los problemas contextuales.</td>
<td>
<table>
<tr><th>Agrado por las frutas</th><th>Frecuencia Absoluta</th></tr>
<tr><td>Mucho</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Mediano</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Poco</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>23</td></tr>
</table>

Este tipo de situaciones puede utilizarse para hacer reflexionar a los estudiantes de la importancia de tener una buena alimentación, esto con el fin de promover el mensaje del eje transversal *Educación para la Salud*.

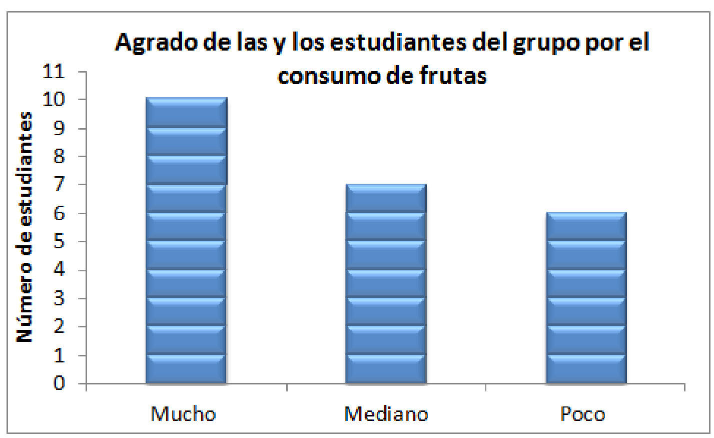
Se ha afirmado que la mayoría de los hogares del país tiene menos de cinco personas. Compruebe si la mayoría de los hogares de sus compañeras y compañeros cumplen o no con esta afirmación.

▲ Para el análisis de la moda, el máximo y el mínimo durante el proceso de clausura vinculado con el número de personas por hogar, se pueden plantear las siguientes preguntas:

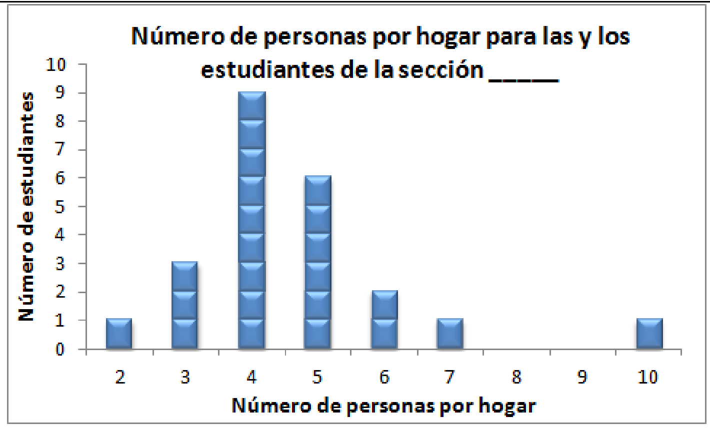
a. ¿Cuál es el número de habitantes que más se repite entre los hogares?
b. ¿Cuál es el número menor de habitantes por hogar?
c. ¿Cuál es el número mayor de habitantes por hogar?

Con las respuestas que se generen es posible entonces definir los conceptos de máximo y mínimo, además profundizar en su interpretación, así como en el de la moda.

▲ Motivar el uso de representaciones gráficas, particularmente el gráfico de barras. Las siguientes gráficas pueden ser utilizadas para analizar los problemas planteados arriba.



</td>
</tr>
</table>



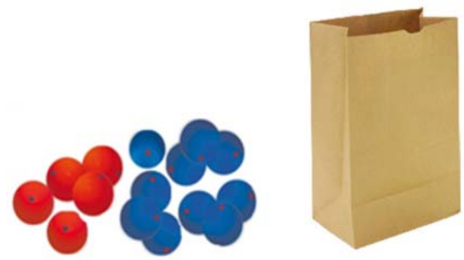
Los dibujos corresponden a una forma de expresión que el ser humano utilizó antes de comunicarse mediante palabras. Estas imágenes las utilizaba como representaciones de lo que veía, y le servían como un medio de comunicación. Fue por medio de dibujos que se inició el proceso de articulación de imágenes para formar los primeros alfabetos. A continuación se presentan algunos de los dibujos que se han encontrado en cuevas, por medio de los cuales las antiguas civilizaciones procuraban dejar un mensaje sobre sus actividades y lo que observaban en la naturaleza.

Imagen con derechos adquiridos por el MEP

Este análisis debe permitir apreciar la importancia que tienen las distintas representaciones. De allí que se valore el rol que juegan las representaciones dentro de los análisis de datos.

3er Año		
Probabilidad		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Situaciones o experimentos • Resultados simples de un experimento aleatorio	1. Identificar todos los posibles resultados al realizar experimentos simples. 2. Representar los posibles resultados de un experimento o situación aleatoria simple por enumeración o mediante diagramas.	▲ Repetir varias veces los siguientes experimentos: a. Lanzar un dado y determinar el número de puntos que se puede obtener. Se pide que determinen los resultados posibles. Buscar formas de representar los posibles resultados 1, 2, 3, 4, 5, 6 o por 1 3 4 2 5 6 b. Lanzar una moneda dos veces y determinar los resultados posibles y el número de escudos obtenidos. E representa un resultado de Escudo y C un resultado de Corona. Los resultados simples están constituidos por dos letras, el primero representa el primer resultado y la segunda letra el segundo resultado. Con ello el espacio muestral se puede representar por EE, EC, CE, CC o por EC EE CC CE
Eventos • Seguro • Probable • Imposible • Más probable, igualmente probable y menos probable	3. Describir eventos seguros, probables o imposibles según corresponda a una situación particular. 4. Interpretar los conceptos de eventos más probables, igualmente probables o menos probables.	Para iniciar puede plantear problemas vinculados con algún tipo de juego. Por ejemplo: Para el lanzamiento de una moneda dos veces, determinar: a. Un evento seguro y un evento imposible. b. ¿Cuál evento es más probable: obtener dos escudos u obtener únicamente un escudo? c. ¿Cuál evento es más probable: obtener un escudo u obtener una corona? Enfatice en la justificación de las respuestas. ▲ Incluya en una bolsa de papel cinco bolas rojas y diez bolas azules, y plantee el siguiente problema: Si se extrae una bola en forma aleatoria (sin ver qué color se está escogiendo) a. ¿Qué color tiene más posibilidad de salir: azul o rojo?

b. ¿De qué manera se deberían variar las cantidades para que exista justicia o equidad en las posibilidades de selección?
c. ¿Será posible extraer una bola de color verde?
d. Si uno quiere estar seguro de que va a adivinar el resultado, ¿cuál debería ser el color o colores que debiera indicar?



Elaboración propia

▲ Plantear el siguiente párrafo para que sea leído y discutido en subgrupos:

Costarricenses piden ambientes libres de humo de tabaco

Irene Rodríguez, 12:59 p.m. 31/05/2010, Diario *La Nación*

San José (Redacción). Representantes de la Caja Costarricense de Seguro Social, el Ministerio de Salud, la Universidad de Costa Rica, médicos, ex fumadores y ciudadanos en general se reúnen en la Plaza de las Garantías Sociales para abogar por una ley que prohíba el fumado en sitios públicos.

…

"El cigarrillo mata a una de cada dos personas que fuman y puede producir daños muy graves en la salud de quienes están alrededor de los fumadores. Tenemos derecho a vivir en ambientes libres de humo y que no perjudiquen nuestra salud", explicó Wing Ching Chan Cheng, jefa de neumología del Hospital México.

Imagen con derechos adquiridos por el MEP

Una vez que cada subgrupo haya leído este artículo, solicite que extraigan información relevante, por ejemplo, plantee las siguientes interrogantes:

a. ¿Con qué propósito se realizó esta reunión en la Plaza de las Garantías Sociales en San José?
b. ¿Qué significa la frase "El cigarro mata a una de cada dos personas que fuman"?

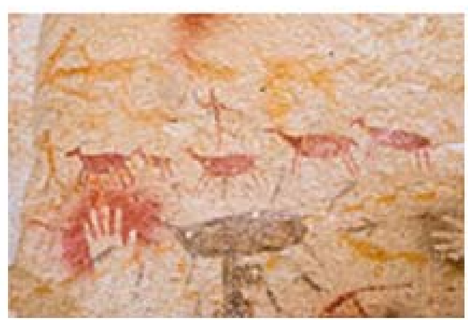
		c. ¿Por qué es importante que aunque no fumemos no estemos cerca de personas que estén fumando? d. ¿Quién tiene más posibilidades de adquirir una enfermedad relacionada con el sistema respiratorio, una persona fumadora o una no fumadora? Para finalizar la actividad se recomienda realizar un debate en función de los problemas que acarrea el fumado para la salud, con esto se viene a implementar el eje transversal *Educación para la salud*. ▲ Al igual que en los niveles previos se pretende aprovechar el conocimiento sobre los eventos que son probables para que exista posibilidad que la situación ocurra.

Indicaciones metodológicas

Generales del ciclo

1. Cada uno de los tres años del ciclo se inicia con la identificación de información dentro de la cotidianidad. En el 1er Año se emplean datos muy simples vinculados con el entorno inmediato y a medida que avanza se requiere incorporar información más compleja, mucha de ella proveniente de medios de comunicación y otras fuentes de la sociedad. Se debe propiciar espacios de análisis no solamente en relación con la identificación del dato sino con el mensaje que proyecta. Mediante este proceso se propicia la crítica ante la información que le rodea.

2. Para el 2do y el 3er Año, además de la información documental se incluyen diagramas, esquemas, cuadros y gráficos con información que puede ser interpretada dentro del contexto. Con ello se pretende que las y los estudiantes puedan iniciarse en la lectura de información resumida mediante estas herramientas, así como en identificar la necesidad de resumir datos. Es muy importante que los estudiantes visualicen los cuadros, gráficos, diagramas, dibujos, entre otros, como medio de comunicación de mucha importancia práctica, que se han utilizado desde hace muchos años. Además de las imágenes que se incluyen en las indicaciones puntuales, se pueden utilizar otras tales como las siguientes que se han encontrado en algunas cuevas:

Imágenes con derechos adquiridos por el MEP

3. En general, se propone el desarrollo de las habilidades por medio de una participación estudiantil en la resolución de problemas simples, previamente diseñados. Así se generan interrogantes que permiten que cada estudiante se ocupe de la búsqueda de las respuestas, para lo cual requiere de la recolección y análisis de datos vinculados con entornos cercanos. No obstante, si las circunstancias lo ameritan se pueden simular problemas con el propósito de lograr un mayor potencial para generar las habilidades propuestas. En esta etapa el énfasis se centra en destacar cómo la variabi-

lidad que presentan los datos obliga a recolectar y analizar gran cantidad de ellos para comprender su comportamiento y responder preguntas concretas.

4. En todo momento se pretende que cada estudiante utilice la *Estadística* para modelar, representar e interpretar la realidad.

5. El concepto de dato como unidad primaria para el análisis debe quedar muy claro. Sea cualitativo o cuantitativo se valora el rol que juega dentro del proceso. No obstante, el dato corresponde a un atributo o característica de un ente y por eso no tiene sentido en sí mismo. Desde un punto de vista estadístico, es en el momento, en que se agrupan y se procesan datos de la misma naturaleza, que se genera valiosa información para la comprensión de un fenómeno o para la toma de decisiones.

6. La variabilidad se concibe como fuente principal de los análisis estadísticos. Aunque el dato resulta de vital importancia, debe quedar claro que para posibilitar análisis estadísticos un dato aislado no es una fuente de análisis, sino la variabilidad que presenten los valores de un dato a otro. Es necesario aclarar que si todos los datos fueran iguales, o sea si no existiera variabilidad en las respuestas u observaciones realizadas, los análisis estadísticos carecerían de importancia. En las indicaciones se ofrecen algunos ejemplos que ponen en evidencia la relevancia de la variabilidad. La comprensión de que la variabilidad es un común denominador en el mundo puede ser ilustrada con diversas imágenes, tales como:

Imagen con derechos adquiridos por el MEP

Es casualmente esta variabilidad natural en el mundo, lo que hace que sea necesario encontrar estrategias que permitan identificar los patrones de variabilidad y generar una mayor comprensión de la misma. Este es el propósito básico de la Estadística y las Probabilidades.

7. Aunque se establecen habilidades para iniciar en la construcción de cuadros y gráficos y en la determinación de algunas medidas de resumen, se puntualiza que se trata únicamente de herramientas. Lo fundamental dentro de la *Estadística* radica en el mensaje general y específico que se desea suministrar con cada representación. Estos elementos pueden verse como un vehículo para proporcionar ese mensaje y ofrecer una respuesta concreta al problema original.

8. Es valioso prestar especial atención a la información que suministra cada técnica utilizada y la forma en que se interpreta. A manera de ejemplo, es común que al interpretar la moda se diga que la mayoría de las observaciones toma este valor, lo cual en muchos casos es una afirmación falsa. La moda es el valor que más se repite o que tiene mayor frecuencia dentro de un grupo de datos. Mayoría se refiere a más de la mitad de los datos; evidentemente son conceptos diferentes.

9. Para facilitar la interpretación, tanto los cuadros como los gráficos deben llevar un título lo suficientemente comprensible y que permita hacer una lectura sin necesidad de buscar información adicional.

10. En este Primer ciclo es importante que se conciban las situaciones, experimentos o juegos aleatorios como aquellos en los que no se puede predecir de antemano su resultado, a diferencia de las situaciones deterministas o seguras. Además de juegos con monedas, dados, ruletas y otros, se pueden incluir situaciones cotidianas que estén vinculadas a la incertidumbre, lo que va a favorecer un mayor acercamiento con estas experiencias y sus decisiones. También es oportuno romper algunas ideas equivocadas sobre estos conceptos, por ejemplo la creencia errónea de que juegos del tipo “zapatito cochinito” o “de tin marín de do pingüé” son aleatorios, cuando realmente se puede determinar quién va a ser el ganador simplemente determinando una secuencia. Al contrario, al jugar “piedra-papel-tijera” no se tiene claridad sobre quién va a ganar, para saberlo hay que jugar.

11. Es fundamental establecer vínculos entre los conceptos estadísticos y los probabilísticos, por ejemplo, la variabilidad de los datos puede conectarse con los conceptos de eventos seguros y eventos aleatorios. Los siguientes problemas muestran este vínculo:

    a. Diez personas llegan al supermercado a comprar un kilo de arroz, cuyo precio es de 1100 colones por kilo. ¿Cuánto dinero pagaron en total?
    b. Diez personas llegan al supermercado a comprar arroz, cuyo precio es de 1100 colones por kilo. ¿Cuánto dinero pagaron en total?

    En el primer problema no hay variabilidad pues las diez personas compraron un kilo, por lo que cada uno gastó 1100 colones, entonces en total gastaron $1100 \times 10 = 11\ 000$. Observe que al poderse determinar la respuesta con la información proporcionada se convierte en una situación segura.

    En el segundo problema no es posible determinar el resultado, pues no se sabe cuántos kilos de arroz compra cada uno; de este modo el gasto que realiza cada persona es variable y desconocido. Por ello, la situación planteada es aleatoria debido a que la única forma de responder al problema sería observando cuántos kilos de arroz compró cada una de las diez personas.

12. En el proceso de clausura o cierre de cada actividad planteada se deben resumir los hallazgos en cuanto a las estrategias utilizadas, corregir posibles errores que se hayan cometido y verificar que el concepto haya sido comprendido adecuadamente. Por ejemplo, conceptos como *frecuencia* no pertenecen al lenguaje común del estudiantado, por lo que durante el desarrollo de las lecciones se emplea *número de repeticiones*. Similarmente, el concepto de *evento* no surge espontáneamente sino que se emplea *resultado* u algún sinónimo. Con el propósito de ampliar el lenguaje hacia una mayor especialización, es necesario que durante la clausura los conceptos de *frecuencia* y *evento*, vayan siendo introducidos lentamente, de modo que se pueda reconocer la información que comunican. Al igual que ellos, surgen muchos otros como *moda*, *máximo*, *mínimo*, etc.

13. En relación con el manejo de situaciones aleatorias y la probabilidad de resultados o eventos, para este ciclo únicamente se desea generar nociones intuitivas. Es conveniente que las interrogantes sean muy puntuales y se enfoquen directamente hacia las habilidades específicas en cada año. Todavía no se cuantifican numéricamente las probabilidades, únicamente se habla de eventos más o menos probables en relación con estas ideas intuitivas.

Primer año

1. Para determinar diferencias entre datos cuantitativos y cualitativos, se requiere identificar que algunos de los datos que se generan al plantear interrogantes a sus compañeros y compañeras producen números y otros producen valores no numéricos. Los términos numérico y no numérico se pueden utilizar como sinónimos de cuantitativo y cualitativo, respectivamente. Para propiciar un mejor aprendizaje de estos conceptos se recomienda que, mediante el trabajo en grupos, se planteen ejemplos de datos y los clasifiquen en cuantitativos o cualitativos según corresponda. Además deben indicar desde su propia experiencia por qué creen que es importante analizar cada uno de esos datos.

2. Se requiere evidenciar que la variabilidad de las respuestas generadas provoca que no exista una única respuesta a las preguntas planteadas sobre el número de hermanos o la mascota preferida (pues no hay solamente un dato para responder), debido a que el número de hijos de una familia es muy variable y también lo es la preferencia por un tipo particular de mascota. Pero esta situación no se presenta con la determinación del color del pantalón o enagua que utilizan en la escuela, pues todos llevan uniforme. Nuevamente se debe insistir en evidenciar que la presencia de variabilidad en los datos provoca la necesidad de emplear algunas estrategias para resumir y clasificar la información. Esta situación no ocurre cuando todos los datos son iguales, pues existe una única respuesta.

3. En las indicaciones puntuales se incluyen preguntas muy simples para el análisis de la variabilidad de los datos, no obstante, la discusión que se pueda generar alrededor de ellas permite valorar la importancia del concepto en función de los análisis estadísticos.

4. Dentro de las estrategias que conviene utilizar en este año para resumir un grupo de datos, está la determinación del número de repeticiones de cada dato (frecuencia de cada dato), pero también se pueden identificar otras características como los valores que más se repiten y los que menos se repiten, entre otras posibilidades. Es recomendable mantener el orden de los datos para los casos de información cuantitativa.

5. Observe que el análisis de las probabilidades se inicia mediante la identificación de situaciones aleatorias y seguras. Es conveniente que esta actividad inicie con juegos simples que formen parte de la actividad estudiantil. Paulatinamente los estudiantes deben identificar la existencia de situaciones o experimentos para los cuales se puede predecir el resultado y otras para las cuales dichos resultados son inciertos.

Segundo año

1. Aunque todavía no se ha abordado la elaboración de gráficas, es conveniente que cada estudiante pueda realizar una lectura simple de la información que proporcionan estas representaciones. Se debe tomar en cuenta información comunicada por medio de otras técnicas visuales como dibujos, diagramas, cuadros y gráficos sencillos que hayan sido publicados en libros, periódicos, Internet u otros, o que se elaboren exclusivamente para ayudar a interpretar la información que suministran. Se pretende generar la capacidad de extraer información (aunque no sea estadística) de esas representaciones.

2. Al igual que se realizó en el 1er Año, se debe evidenciar la relevancia que tiene el concepto de variabilidad dentro de los análisis estadísticos. Se espera favorecer la comprensión de que entre más variables sean los datos con que se trabaja más complejo se vuelve el análisis estadístico, por lo que la utilización de cuadros facilita la comprensión de la información.

3. En este año se requiere orientar hacia la sistematización de la información que se recolecta en cuadros o tablas donde se listan todos los individuos que participaron en el estudio. Con ello se pretende iniciar al estudiantado en la elaboración de bases de datos. El ejemplo que se incluye es muy simple

No.	Nombre de cada estudiante	Deporte preferido
1	Abarca Lewis Manolín	Ciclismo
2	Álvarez Moín Libertad	Baloncesto
⋮	⋮	⋮

pero evidencia una forma elemental de construir bases de datos, de modo que permita posteriormente resumir la información en forma sencilla.

4. En este año se introduce la moda. Este concepto forma parte del lenguaje común de las personas, con la frase "*eso está de moda*", la cual se utiliza para indicar que el objeto en cuestión se está utilizando mucho. El concepto estadístico de moda no es muy diferente, pues la moda es el dato (o conjunto de datos) más común, pues es el que tiene mayor frecuencia. Es importante que se identifique que la moda se utiliza tanto para datos cuantitativos como cualitativos, y también que puede existir más de una moda para un grupo de datos.

5. Al igual que el concepto de moda, para iniciar al estudiantado en el campo de las probabilidades se utilizó el conocimiento o creencias sobre las situaciones posibles e imposibles. Aunque hay diferencias entre lo probable y lo posible, la estrategia permite que cada estudiante, paulatinamente, vaya comprendiendo el significado de lo probable en su relación con la realidad. Del mismo modo, también se analizan los conceptos de situación imposible y situación segura. Es de esperar que al formar parte del lenguaje de las niñas y niños, para esos términos no sea necesario un análisis muy profundo; sin embargo, es necesario verificar que las ideas que se tienen sobre esos principios estén en armonía con los requerimientos de la disciplina.

Tercer año

1. A diferencia de los años anteriores, en este año se plantea la habilidad de formulación de problemas. Se espera que se desarrolle la capacidad de plantear problemas simples que requieran de recolección y análisis de datos. Pero además la de analizar la viabilidad de implementar el problema de la siguiente forma: establecer las principales interrogantes que deben responder y definir una estrategia de recolección y resumen de datos que se adecúe con las necesidades del problema, para finalmente lograr una solución satisfactoria.

2. En las indicaciones puntuales se sugiere el desarrollo de dos situaciones que involucran una característica cualitativa: agrado por el consumo de frutas, que contiene tres categorías: mucho, mediano o poco, y una característica cuantitativa: número de miembros por hogar. La estrategia de recolección de información es la interrogación, por lo que se puede sugerir que se recolecte la información realizando las dos consultas al mismo tiempo. Esto permite ampliar el conocimiento sobre la elaboración de una base de datos.

No.	Nombre de cada estudiante	Agrado por las frutas	No. de miembros en el hogar
1	Abarca Lewis Manolín	Mucho	4
2	Álvarez Moín Libertad	Poco	6
⋮	⋮	⋮	⋮

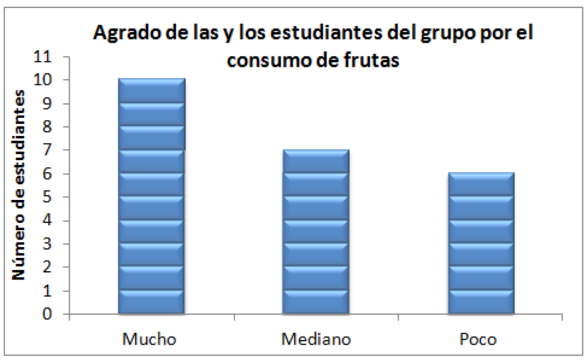
Con esta información se puede proceder a la organización de la misma y su resumen por medio de cuadros de frecuencia absoluta o incluso gráficos. Por ejemplo, en relación con el número de miembros del hogar, la información se podría resumir en un cuadro similar al siguiente:

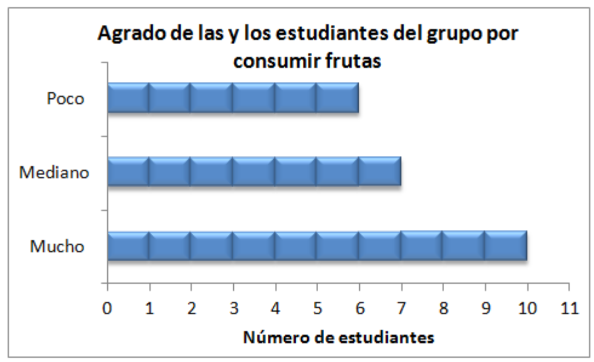
Número de personas por hogar para las y los estudiantes de la sección ____

Número de personas	Número de estudiantes
2	1
3	3
4	9
5	6
6	2
7	1
10	1
Total	**23**

El problema planteaba que se determinara si la mayoría de los hogares estudiantiles tenía menos de cinco personas. De acuerdo al cuadro, en 13 de 23 hogares habitan menos de cinco personas. Con dicha información se podría argumentar que efectivamente en la mayoría de los hogares hay menos de cinco habitantes.

3. El gráfico de barras también es un instrumento visual muy importante para resumir los datos, por ello se debe estimular su uso y la interpretación de la información que proporciona. No obstante, debido a que este tipo de representaciones es novedoso, lo ideal es recurrir a su elaboración mediante bloques según la frecuencia de cada categoría, tal como se muestra:





Cualquiera de las dos representaciones anteriores permite resumir los datos recolectados. Se puede utilizar la moda del grupo de datos para complementar el análisis. De las gráficas anteriores se deduce que como el valor de moda es “mucho”, significa que lo más común es que en el grupo tengan mucho agrado por el consumo de frutas.

4. Para algunas de estas herramientas hay indicaciones que no son reglas sino que se utilizan para favorecer una mejor presentación. Por ejemplo, en los gráficos de barras, para el caso de datos cuantitativos se acostumbra emplear barras verticales y en el caso de datos cualitativos se usan barras horizontales; esto simplemente es una sugerencia para facilitar la lectura del gráfico, pero los dos tipos de gráficos suministran el mismo mensaje.

5. En este tipo de representaciones gráficas se incluye un eje coordenado, de modo que se conecta el conocimiento de *Estadística* con *Números* y *Relaciones y Álgebra*. Por ello es importante que se respete la escala utilizada y que estos gráficos simples inicien en cero.

6. Muchos de los problemas que se han sugerido hasta ahora se relacionan con características estudiantiles; pero ésta no debe ser la norma, sino que dentro del contexto escolar, familiar o comunal es posible plantear problemas que involucren otras características.

Por ejemplo, identificar qué característica es más variable: la cantidad de gajos o la cantidad de semillas de un grupo de 10 o más mandarinas.

Con la información de las mandarinas, las frutas deben pelarse y se debe contar la cantidad de gajos de cada una, luego resumir esta información anotando la frecuencia de veces que se repite cada número de gajos y el número de semillas. Estos datos pueden ser representados mediante un cuadro o un gráfico.

7. Es importante hacer notar que las representaciones tabulares o gráficas permiten resumir el patrón de variabilidad de los datos de modo que la información que generan es comprensible para cualquier lector. Además, la elaboración de gráficas conecta con *Números* mediante el uso del concepto de recta numérica.

8. En este año se mencionan eventos igualmente probables. No obstante, este principio debe introducirse en forma intuitiva, pues será hasta el Segundo ciclo que se potencien mayores destrezas para identificar las características de los eventos igualmente probables. Por ejemplo, se espera que las y los estudiantes puedan inducir que es igualmente probable obtener un escudo (E) o una corona (C) al lanzar una moneda y por ende que los eventos obtener un escudo y una corona (EC) y obtener una corona y un escudo (CE) al lanzar dos monedas son igualmente probables.

9. Ante la frase "El cigarrillo mata a una de cada dos personas que fuman", se requiere señalar que existe una alta probabilidad que un fumador muera por una enfermedad ocasionada por el consumo del cigarrillo, esto quiere decir que se estima que la mitad de los fumadores van a morir de alguna enfermedad que es consecuencia de este vicio.

Indicaciones de evaluación

En el Primer ciclo, además de buscar el logro de habilidades generales específicas en *Estadística y Probabilidad*, se requiere que mediante la actividad estudiantil se determine la importancia de la evaluación de los procesos de aprendizaje como un medio para fortalecer estos procesos. La evaluación debe favorecer gradualmente esta valoración por medio de estrategias que sean motivadoras y formativas.

Las estrategias utilizadas deben involucrar a cada estudiante hacia la información elemental que se genera en su contexto. Esta información puede ser presentada en un documento o en forma tabular, gráfica o de diagrama. El énfasis de la evaluación se debe centrar en el análisis y la interpretación desde la perspectiva contextual. Pero además debe incluir la identificación de una adecuada estrategia para recolectar datos del entorno con la intención de generar los insumos necesarios para responder interrogantes concretas, así como la búsqueda de estrategias para ordenar, resumir, presentar y analizar los datos recolectados con la intención de generar información que le ayude a resolver los problemas. Por esta razón la participación permanente en la resolución de cada actividad es fundamental.

En cuanto al manejo de situaciones aleatorias, la evaluación debería ir dirigida a la identificación de estas situaciones y sus diferencias con respecto a las deterministas, así como identificar eventos más probables y menos probables y además verificar que se comprende su significado en situaciones particulares.

Para este ciclo la *evaluación* en el área de *Estadística y Probabilidad,* debe tener presentes las siguientes indicaciones.

- ✓ Para el *trabajo cotidiano* debe identificarse la forma en que cada estudiante participa en el análisis de los diferentes problemas que se plantean y las reflexiones sobre las estrategias empleadas para la recolección, clasificación y resumen de datos. Pero además deben incluirse los procesos de clausura donde se organicen la corrección de errores cometidos y el resumen de los nuevos conocimientos adquiridos. Un análisis similar debe realizarse para la evaluación del área de *Probabilidad*.

- ✓ En relación con los *trabajos extraclase*, se propone plantear estrategias sencillas por medio de las cuales, mediante el trabajo individual o en subgrupos, se resuelvan problemas vinculados con los el análisis de datos dentro de un contexto cercano. En la evaluación se debe prestar especial atención a la forma en que se realiza cada uno de los pasos, que van desde el análisis del problema hasta la conclusión. En *Estadística* se debería establecer e implementar estrategias para la recolección de datos su organización, representación y análisis de la información que comunican. Para el caso de *Probabilidad*, en este ciclo se requiere enfocar los análisis básicamente hacia de identificación de situaciones más o menos probables. En ambas áreas, las actividades propuestas deben permitir desarrollar los procesos: *Plantear y resolver problemas*, *Razonar y argumentar, Conectar, Representar* y *Comunicar*.

  Los problemas propuestos pueden ser similares a los que se incluyen en las indicaciones puntuales, y en este sentido se deberían combinar los tres niveles de complejidad: reproducción, conexión y reflexión.

- ✓ Por último, las *pruebas escritas* deben ser introducidas paulatinamente como una forma en la cual se pueden poner en práctica las habilidades adquiridas y la identificación de aquellas que requieren ser reforzadas. Debido a que estas pruebas deben verse como una etapa más del proceso educativo, los ítems o preguntas que se incluyan en el área de *Estadística* deberían estar orientados hacia la identificación de tipos de datos (cuantitativos o cualitativos), su agrupamiento y clasificación, su representación en cuadros de frecuencia o gráficos de barras. Pero sobre todo la información que comunican dichos datos. A continuación se presente un ejemplo de un ítem:

  Considere las siguientes representaciones gráficas que corresponden al número de letras que tienen los nombres de los 28 estudiantes de las secciones Tercero A y Tercero B de cierta escuela.

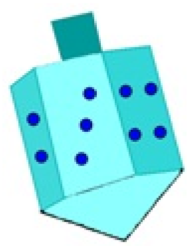
De acuerdo con la información que proporcionan estos gráficos, ¿cuál de las alternativas siguientes es la correcta?

a. ( ) Hay más variabilidad en el número de letras de los nombres de estudiantes del Tercero A con respecto al Tercero B.
b. ( ) Hay menos variabilidad en el número de letras de los nombres de estudiantes del Tercero A con respecto al Tercero B.
c. ( ) La variabilidad en el número de letras de los nombres de las y los estudiantes es similar en los dos grupos.

Los mismos principios que se aplican en Estadística deben ser orientadores para la evaluación en Probabilidades. Se requiere generar la capacidad para identificar eventos seguros o aleatorios, y dentro de las situaciones aleatorias aquellas que son más o menos probables de acuerdo con nociones intuitivas. Un ejemplo de un ítem que tiene este propósito es el siguiente:

Suponga que se debe seleccionar a uno de cuatro estudiantes para que exponga sobre un tema. Para realizar la selección se cuenta con los siguientes criterios:

I. Seleccionar al primero de los cuatro estudiantes que aparecen en la lista de clase.
II. Dar un número a cada uno (de uno a cuatro) y luego lanzar el siguiente trompo para seleccionar quién debe exponer.



Elaboración propia

Identificar cuál de estas situaciones es aleatoria: ________________

SEGUNDO CICLO

Introducción al Segundo ciclo

En el Segundo ciclo las Matemáticas se colocan en una doble perspectiva: por un lado, afirman y amplían los conceptos y procedimientos fundamentales que se han aprendido en el Primer ciclo; por otro lado, hacia el final del ciclo se introducen conceptos y habilidades que conectan con la educación Secundaria, con características distintas a las que predominan en la educación Primaria. Es importante cuidar las actitudes pues hay una importante extensión del dominio de acción con objetos matemáticos que son cognitivamente más complejos (fracciones, decimales, propiedades geométricas abstractas), o más amplios (números más grandes, más medidas, datos, objetos geométricos sólidos). Se debe insistir en la utilidad de las Matemáticas en su relación con el entorno y apoyar la perseverancia en los estudiantes.

En este ciclo, *Números* ocupa el mayor espacio del currículo. *Medidas*, *Geometría, Relaciones y álgebra y Estadística y Probabilidad* ocupan un espacio similar que en el Primer ciclo.

En *Números,* con la base obtenida en el Primer ciclo en operaciones y cálculo, se amplía el dominio de acción mediante números naturales mayores que 100 000 y la incorporación de números decimales y fracciones, así como distintas representaciones de objetos matemáticos. Se introducen nuevos procedimientos operatorios, se desarrolla el algoritmo euclidiano de la división y se refuerza el sentido numérico. El énfasis en cálculos debe seguir predominando aunque con la presencia de más propiedades y objetos abstractos matemáticos.

Relaciones y Álgebra prosigue con patrones numéricos, pero incluye representación de puntos en el plano cartesiano y de relaciones entre cantidades que varían y, algo muy importante, el razonamiento proporcional que conecta con las funciones.

En *Estadística y Probabilidad* solamente se profundizan los conceptos y habilidades del Primer ciclo. Es un tema que puede permitir fácilmente conexiones con medidas (obtención de datos), números, relaciones numéricas (tablas) y geometría (gráficas).

Medidas adquiere en este ciclo un mayor relieve pues se introduce el sistema métrico decimal que se enlaza con propiedades de los números; se ofrece en ese sentido un énfasis a la estimación en las mediciones, que es un asunto muy importante para el aprendizaje de las medidas. Ya en este ciclo, donde se dispone de casi todos los elementos relacionados con la medida, se da la posibilidad de enriquecer los problemas con muchos más elementos del entorno físico y social del estudiante.

En *Geometría* se profundiza en lo que se refiere a ubicación espacial y a visualización de las formas geométricas en el plano y el espacio, ampliándose la identificación y estudio de propiedades de los elementos que las componen. Si bien siempre debe haber reproducción y trazado de figuras, debe darse relieve a las propiedades y relaciones que las identifican. Por ejemplo, en este ciclo hay un importante salto en la definición de criterios de clasificación de figuras (número de lados, relaciones de posición, métrica). Se aumenta el vocabulario geométrico y se añade el cálculo de perímetros y áreas de figuras poligonales y circulares que está muy asociado con el área de *Medidas*. Se inicia el tema de simetrías, característica importante de algunas formas geométricas que puede ilustrarse con belleza por medio de frisos y mosaicos. Se establece una conexión especial con *Relaciones y Álgebra* en el manejo de puntos y figuras sencillas en el plano.

Siempre debe predominar lo intuitivo y sensorial en este ciclo, pero se debe introducir más elementos matemáticos abstractos y sus relaciones, para avanzar en el desarrollo de las capacidades cognitivas de los estudiantes. La presencia de más símbolos, como modelo de situaciones, también debe abrir paso a una mayor manipulación de los mismos. Por ejemplo, los patrones, relaciones y la teoría de números (que se introduce en 5° Año) son recursos valiosos para promover el pensamiento abstracto.

Segundo ciclo, Números

Introducción

Al ingresar al Segundo ciclo, cada estudiante trae la habilidad de comparar y operar números naturales cuyos totales son menores que 100 000. Todos estos conceptos fueron desarrollados por medio de la resolución de problemas.

Lo fundamental en el área de *Números* en este ciclo es el fortalecimiento del cálculo operatorio de los números naturales, fracciones y decimales.

Se abarcan los números naturales mayores que 100 000, con conceptos de la teoría de números, el concepto de fracción y sus representaciones. También se incluyen números con expansión decimal.

Números sigue siendo el área principal de Primaria, por lo que es necesario abordarlo tomando en cuenta los diferentes estilos de aprendizaje. Su importancia radica en que esta área tiene una conexión directa con las otras áreas matemáticas (*Medidas, Geometría, Relaciones y Álgebra y Estadística y Probabilidad*), así como con las otras materias que se imparten a este nivel.

Como desde el Primer ciclo se ha trabajado la contextualización activa de los conceptos a través de problemas, entonces en el Segundo ciclo la construcción de los nuevos conceptos será más significativa.

Todo esto prepara el camino para que se logre la identificación, lectura, comprensión y utilización de los números en la realidad circundante.

Propósito de la enseñanza

El propósito de la enseñanza en esta área es que cada estudiante adquiera habilidades para identificar, leer, comprender y utilizar las diferentes representaciones de los números para el cálculo y la estimación en diversos contextos.

Habilidades generales

Las habilidades generales que se pretenden generar al finalizar el Segundo ciclo son:

- Construir y aplicar los números mayores o iguales que 100 000 en contextos reales.
- Comparar cantidades y utilizar correctamente los símbolos <, > o =.
- Identificar el valor posicional de los dígitos que conforman un número natural y con decimales.
- Identificar distintas representaciones de un mismo número.
- Leer y escribir números en sus distintas representaciones.
- Aplicar las operaciones aritméticas en diversos contextos.
- Aplicar el concepto de fracción, sus tipos y representaciones en la resolución de problemas.
- Aplicar el concepto de números decimales en la resolución de problemas.
- Efectuar operaciones con números en sus diferentes representaciones.
- Desarrollar y utilizar estrategias de cálculo mental y la estimación en la resolución de problemas.
- Establecer relaciones entre operaciones.
- Utilizar los conceptos básicos de la teoría de números en la resolución de problemas.

El sentido numérico se fortalece en este ciclo, con lo que se puede profundizar la percepción de la utilidad de las Matemáticas.

En este ciclo se abordan con mayor profundidad algunos elementos de la teoría de números, los cuales brindan valiosas oportunidades para fortalecer el proceso *Razonar y argumentar*. La introducción sustantiva de decimales y fracciones en este ciclo permite favorecer el proceso *Representar*.

Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

4° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Números naturales • Relaciones numéricas • Sistema de numeración decimal • Relaciones de orden • Números pares • Números impares • Múltiplos	1. Leer y escribir números naturales menores que un millón.	▲ Como actividad introductoria se pueden proporcionar recortes de noticias que usen números naturales menores que un millón. El objetivo es identificar qué tanto se conoce acerca de estos números. ▲ Es importante dar estrategias para la lectura y escritura de cantidades menores que 1 000 000. Un ejemplo: en el número 754 789 agrupar los dígitos en ternas de derecha a izquierda. miles 7 5 4 | 7 8 9
	2. Comparar números naturales menores que un millón utilizando los símbolos <, > o =.	▲ Se proporcionan problemas donde utiliza los símbolos <, > o = para comparar los números. Se solicita comunicar cuál fue la estrategia usada para valorar la argumentación.
	3. Reconocer números pares e impares.	En este periodo, los grupos 4-A y 4-B recibirán clases de defensa personal. En ellos se deben formar parejas de estudiantes para realizar las dinámicas que se proponen. El instructor a cargo necesita identificar en cuáles secciones queda algún estudiante sin pareja para ayudarlo durante el desarrollo de dichas lecciones. ▲ Es importante que se dé una discusión estudiantil acerca de las posibilidades que se pueden dar. Por ejemplo, que en los dos grupos se puedan formar parejas sin que sobre alguno, o bien que en los dos grupos sobre una persona, o que en uno de los grupos sobre una persona. La acción docente debe ir dirigida a utilizar estos elementos para que sus estudiantes identifiquen la noción de número par e impar. *Razonar y argumentar* y *Comunicar* son procesos involucrados en este problema. ▲ El estudiantado identifica los números pares como aquellos que se pueden dividir por 2 con residuo cero. Además, debe reconocer en qué dígito debe terminar un número para ser par o impar.
	4. Reconocer los múltiplos de un número.	▲ Es importante que cada estudiante reconozca los múltiplos de un número como los resultados de las multiplicaciones entre dos números. Así si $7 \times 8 = 56$ entonces 56 es múltiplo de 7 y de 8. ▲ Es necesario que se identifiquen estrategias que permitan el reconocimiento de los múltiplos de un número. Entre ellas: a. Los números cuya última cifra es un número par son múltiplos de 2.

		b. Los números cuya última cifra termina en 0 o 5 son múltiplos de 5. c. Los números de dos cifras cuyas cifras suman 9 son múltiplos de 9.
Operaciones • Multiplicación • División	5. Resolver problemas utilizando el algoritmo de la división de números naturales. 6. Comprender la relación entre la multiplicación y la división.	▲ Proponer problemas para relacionar la división de dos números con situaciones de reparto equitativo y agrupamiento. Analizar casos donde el residuo sea cero o no. Por ejemplo: **a. Reparto** Ernesto desea repartir entre sus 12 primos 132 jocotes que recolectó. ¿Cuántos jocotes le corresponden a cada uno? **b. Agrupamiento** En una fábrica deben empacar equitativamente 825 lápices en 10 cajas. ¿Cuántos lápices se empacaron en cada caja? **c. ¿Cuántas veces cabe…?** ¿Cuántas veces un segmento de 5 cm cabe en otro segmento de 75 cm? La utilización de problemas que utilizan la noción de división como reparto equitativo permite sensibilizar sobre la necesidad de ofrecer un trato igualitario a los demás. ▲ Para el algoritmo de la división se debe utilizar el dividendo menor a 1 000 y divisor de hasta 2 cifras. ▲ Para la comprensión de la relación entre el producto y la división, se pueden aprovechar problemas similares a los anteriores (los que tienen residuo cero), para preguntar cómo puede verificar si el resultado de la división es correcto. Se espera que se pueda visualizar que la multiplicación permite verificar los resultados de divisiones con residuo cero.
Fracciones • Concepto • Escritura • Lectura • Fracción propia	7. Identificar las fracciones como parte de la unidad o parte de una colección de objetos.	Se solicita llevar a la clase una mandarina o una naranja. Se indica que se tiene que anotar en el cuaderno la cantidad total de gajos que tiene su fruta, así como la cantidad de gajos que se comerán (indicar que no se la coman toda). Luego, se solicita representar gráficamente o por escrito la situación vivida durante la actividad. Coloque sobre la mesa todos los lápices de color que tiene y proceda a pintar el siguiente dibujo:

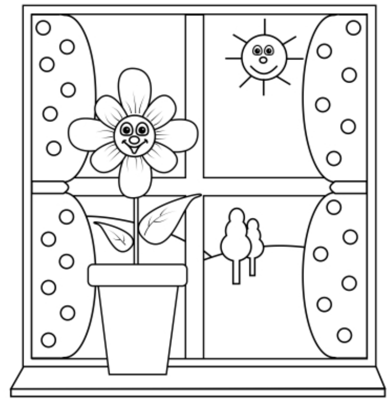
<table>
<tr>
<td>• Represen-taciones</td>
<td></td>
<td>


Imagen cortesía de FreeDigitalphotos.net

Represente gráficamente o por escrito la cantidad de lápices que usó para pintar la flor con su maceta, respecto de la cantidad total de lápices utilizados.

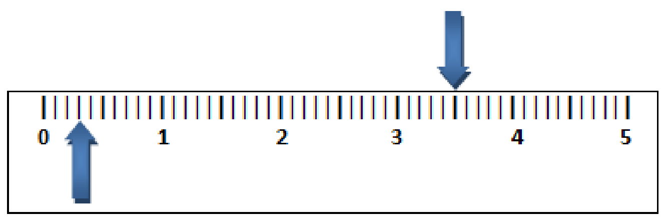
▲ En la etapa de clausura, se define la fracción como una forma de representación para este tipo de situaciones.

Es importante implementar actividades que permitan crear conciencia sobre las ventajas que ofrece el consumir alimentos saludables. Además con esta actividad de las frutas se promueve el valor de compartir.
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>8. Analizar las fracciones propias.</td>
<td>
▲ Se pretende reconocer fracciones propias y establecer correspondencias entre diversas formas de representación.

Se proponen ejemplos en forma simbólica, para que sean representados gráficamente (identificando claramente el concepto de numerador y denominador). Luego, se identifican las tres formas de escribir fracciones: literal, simbólica y gráfica. Esta es una oportunidad para prestar atención al proceso *Representar.*

▲ Proponer problemas donde pueda escribir fracciones en la representación que se solicite. Por ejemplo:

<table>
<tr><th>Gráfica</th><th>Literal</th><th>Simbólica</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Cinco novenos</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\frac{3}{6}$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>9. Comparar las fracciones propias utilizando los símbolos <, > o =.</td>
<td>Marta, Mario y Nancy salen a caminar por las mañanas y siempre llevan una botella de 250 ml de agua cada uno. Después de haber caminado durante una hora, Marta se ha bebido tres cuartas partes de su botella, Nancy la mitad y Mario dos cuartas partes. ¿Quién ha tomado más agua? ¿Quién ha tomado menos cantidad de agua?</td>
</tr>
</table>

		Se espera que se use en primer lugar una representación gráfica o modelo que ilustre la situación (pueden ser dibujos). A continuación, se propone realizar una representación simbólica a partir de la representación gráfica. Una vez hecho esto se pide usar los símbolos <, > o = para realizar las comparaciones. Este problema corresponde con el eje transversal *Educación para la Salud*. Este problema muestra la conexión existente con el área de *Medidas*.
	10. Plantear y resolver problemas que involucren fracciones propias.	▲ Proponer problemas relacionados con un contexto de la vida cotidiana. Por ejemplo: Rita dividió un pastel en 8 partes iguales. Sus amigas se comieron 4 partes del queque. ¿Qué fracción representa lo que se comieron sus amigas?
Decimales • Lectura • Escritura • Ubicación en la recta numérica • Relaciones de orden	11. Leer y escribir números en su representación decimal hasta la milésima.	▲ Para introducir los números decimales se puede plantear el siguiente problema: ¿Cómo representaría los números señalados por las flechas en la siguiente figura?  Es importante que el estudiantado observe que las unidades están divididas en 10 partes iguales. Puede usar la representación por fracciones e intentar decir oralmente cómo se nombraría el número. Por ejemplo, para el número señalado a la derecha, podría representarlo así: "Tres y cinco décimas" o bien 3 y $\frac{5}{10}$. A partir de aquí, se puede precisar la representación de estas cantidades mediante números decimales. ▲ Establecer situaciones para generalizar el trabajo con centésimas y milésimas.
	12. Establecer entre cuáles números naturales consecutivos se encuentra un número decimal al localizarlo en la recta numérica.	▲ Para dar secuencia al trabajo realizado anteriormente, se puede proponer un problema como el siguiente: Construya una recta numérica con su regla. ¿Dónde ubicaría aproximadamente los siguientes números? 3,32 3,7 5,45 5,225

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>▲ Una vez terminada la actividad se pide a varios estudiantes que ubiquen dichos números en una recta numérica dibujada previamente en la pizarra, argumentando su decisión. Este problema permite desmentir una creencia de que cuantos más decimales tenga un número, mayor es éste.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>13. Comparar y ordenar números en su representación decimal.</td>
<td>▲ A partir de información numérica en un contexto real, representar los datos en la recta numérica, compararlos mediante la utilización de los símbolos <, > o = y ordenarlos en forma ascendente o descendente.

La siguiente tabla muestra los sismos sentidos en febrero del 2012.

<table>
<tr><th>Fecha</th><th>Hora Local</th><th>Magnitud</th><th>Profundidad en km</th><th>Localizacion</th></tr>
<tr><td>2012-02-28</td><td>09:48:00</td><td>2.6</td><td>8</td><td>4 km al sur de Tobosi de Cartago</td></tr>
<tr><td>2012-02-19</td><td>11:34:00</td><td>4.8</td><td>13</td><td>35 km al sur de Puerto Quepos</td></tr>
<tr><td>2012-02-14</td><td>10:46:00</td><td>4.5</td><td>11</td><td>40 km sur de Quepos</td></tr>
<tr><td>2012-02-13</td><td>04:55:00</td><td>6</td><td>11</td><td>44 Km al Sur de Quepos</td></tr>
<tr><td>2012-02-11</td><td>14:43:00</td><td>4.1</td><td>20</td><td>34 Km al Suroeste de Playa Dominical</td></tr>
</table>

Imagen tomada de: http://www.ovsicori.una.ac.cr/sismologia/sentidos/ssentido/SismosMes.php

a. ¿En qué localización se sintió el mayor sismo?
b. ¿Qué día tembló con menor magnitud?
c. ¿En qué lugar tembló más veces? (esta pregunta puede ayudar a conectar con otras materias).

▲ Realizar comparaciones utilizando decimales y utilizando fracciones.</td>
</tr>
<tr>
<td>**Cálculos y estimaciones**

• Sumas

• Restas

• Multiplicaciones

• Divisiones</td>
<td>14. Resolver y plantear problemas donde se requiera el uso de la suma, la resta, la multiplicación y la división de números naturales.

15. Resolver y plantear problemas donde se requiera el uso de la suma, la resta y la multiplicación de números con decimales.</td>
<td>▲ Efectuar multiplicaciones donde:

a. El segundo factor sea a lo sumo de dos dígitos.
b. Ambos factores contengan decimales, de forma que el resultado no sobrepase las milésimas.
c. Un factor sea natural y otro con decimales cuyo resultado no exceda las milésimas.

▲ En las divisiones se debe empezar con dividendo menor que 1000 por un divisor de 1 o 2 dígitos.

▲ Para evitar errores en la colocación de los números decimales que se suman o que se restan, se debe retomar la idea de valor posicional. Luego se generaliza esto al caso de los decimales.

▲ Proponer elementos que le permitan a cada estudiante plantear y resolver un problema. Por ejemplo:</td>
</tr>
</table>

Extensión de las provincias de Costa Rica

Provincia	Extensión (km^2)
San José	4965,9
Alajuela	9757,5
Cartago	3124,6
Heredia	2657,9
Guanacaste	10 140,7
Puntarenas	11 265,6
Limón	9 188,2

Cada estudiante podría plantear varias preguntas, como por ejemplo:

a. ¿Cuántos km^2 abarcan las provincias que limitan con las costas?
b. ¿Cuántos km^2 de diferencia tiene Puntarenas respecto a Heredia?

Esta actividad permite establecer conexiones con *Medidas* y Estudios Sociales.

16. Multiplicar un número con o sin expansión de-cimal por 10, 100 y por 1000.

▲ Se proponen varias multiplicaciones con este tipo de números para que sean resueltas por el método habitual de cálculo. Luego, se plantea la inquietud sobre si puede establecer una estrategia de cálculo más rápida para este tipo de operaciones.

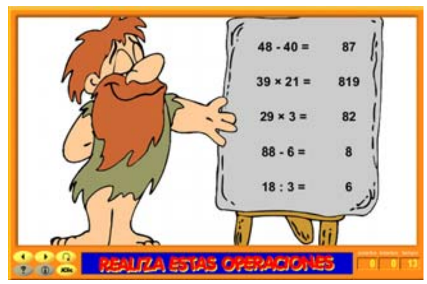
Se solicita comunicar sus estrategias al grupo. En una sesión plenaria se exponen las ideas y se valora su pertinencia. La acción docente debe ir dirigida a presentar una estrategia que permita resolver más rápidamente estas operaciones.

17. Utilizar la calculadora para resolver problemas y operaciones numéricas con cálculos complejos.

En el mapa adjunto, se muestra la cantidad de toneladas de dióxido de carbono emitidas por los países centroamerica-nos, durante los años 2003 y 2004. Determine si ha aumentado o disminuido de un año a otro el nivel de dióxido de carbono a nivel centroamericano. Se debe usar la calculadora.

Imagen tomada de: http://www.estadonacion.or.cr/index.php/apoyo-educativo/materiales-didacticos

<table>
<tr>
<td></td>
<td>18. Seleccionar los métodos y las herramientas más adecuados para la resolución de cálculos.</td>
<td>▲ Uso de cálculo mental, lápiz y papel o calculadora según el tipo de operación, como por ejemplo:
<table>
<tr><td>Cálculo mental:</td><td>48 × 10 000</td></tr>
<tr><td>Papel y lápiz:</td><td>350,5 × 98</td></tr>
<tr><td>Calculadora:</td><td>3454,84 × 19,4</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>19. Calcular mentalmente los resultados de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.</td>
<td>El uso de juegos y competencias permite de una forma divertida el desarrollo de esta destreza. Por ejemplo, en el sitio web *Cálculo mental* de Jaime Riba (http://clic.xtec.cat/db/act_es.jsp?id=3339) se pueden encontrar actividades para desarrollar esta habilidad:



</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>20. Evaluar la pertinencia de los resultados que se obtienen al realizar un cálculo o una estimación.</td>
<td>El auto de Valeria recorre aproximadamente 9,5 km por litro de gasolina. El tanque del carro tiene una capacidad de 35,6 litros aproximadamente. Ella desea realizar un viaje de San José a Limón (152,5 km aproximadamente) y observa que dispone de tres cuartos de tanque. ¿Considera necesario que Valeria llene el tanque para realizar el recorrido de ida?

Es importante que cada estudiante argumente su respuesta. Es posible generar una discusión en la clase y contrastar las diferentes opiniones.</td>
</tr>
</table>

5° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Números naturales • Relaciones numéricas	1. Contar, reconocer y escribir los números naturales.	▲ Es importante brindar estrategias para la lectura y escritura de cantidades mayores de 9 dígitos, un ejemplo sería separar las cantidades en clases (miles, millones, miles de millones).

	Mil			millones				mil	
6	8	2	3	0	5	4	7	8	9

Se puede trabajar con noticias (puede ser que contengan gráficos) donde se utilizan cantidades grandes, como por ejemplo:

En el siguiente gráfico se muestra la deuda externa de Costa Rica en el periodo 2003-2011.

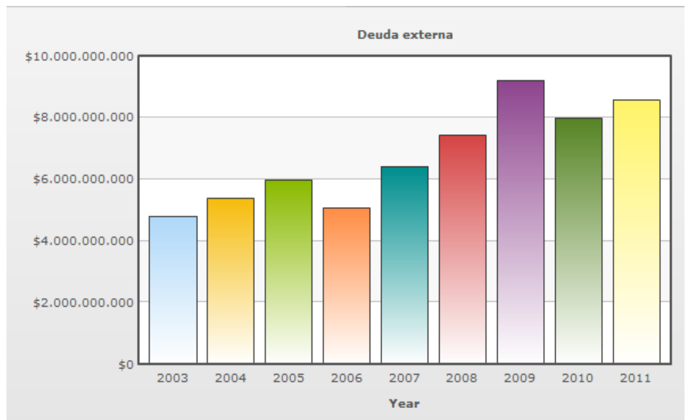


Imagen tomada de:
http://www.indexmundi.com/es/costa_rica/deuda_externa.html

A partir del gráfico se realizan preguntas como:

a. ¿En qué año Costa Rica ha tenido la mayor deuda externa? ¿De cuánto es aproximadamente?
b. ¿Cuál fue la deuda externa, aproximadamente, en el año 2010?

Los datos exactos se encuentran en la siguiente tabla (que también se puede utilizar para algunas preguntas).

Año	Deuda externa
2003	$ 4 800 000 000
2004	$ 5 366 000 000
2005	$ 5 962 000 000
2006	$ 5 049 000 000
2007	$ 6 420 000 000
2008	$ 7 416 000 000
2009	$ 9 205 000 000
2010	$ 7 972 000 000
2011	$ 8 550 000 000

Este tipo de problemas permite la conexión con *Estadística y Probabilidad*, particularmente en el análisis de información presentada a través de gráficos y tablas.

Operaciones • Combinación de operaciones • Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma	2. Resolver problemas y operaciones donde se requiera el uso de la combinación de operaciones suma, resta, multiplicación y división de números naturales. 3. Plantear y resolver problemas utilizando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.	▲ Se puede contextualizar la prioridad en el uso de operaciones con números naturales mediante el planteo de problemas como el siguiente: El papá de Melanie va a la verdulería y compra 5 manzanas, 3 peras y 10 bananos. Los precios a pagar por cada producto son ₡250, ₡400 y ₡40 respectivamente. Determine la cantidad de dinero que pagó el papá de Melanie. ▲ Algunas veces la utilización de los paréntesis es necesaria en la resolución de problemas. A menudo, el agrupamiento se realiza de forma intuitiva. El siguiente problema se puede resolver con el uso o no de los paréntesis, sin embargo su uso ordena las operaciones a resolver: Un lápiz y un lapicero tienen el mismo precio en la librería de don Pablo. Por otra parte un borrador, una maquinilla y un pincel tienen igual precio. Sandra va y compra 11 lápices, 13 lapiceros, 8 borradores, 14 maquinillas y 7 pinceles. Si el precio de un lápiz y un borrador es de ₡135 y ₡ 85 respectivamente, ¿cuánto dinero debe pagar Sandra por la lista de materiales? Operación a plantear: $135 \times (11 + 13) + 85 \times (8 + 14 + 7) =$ Después de su resolución, se precisa el uso de la propiedad distributiva del producto respecto a la suma. La propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma permite el uso de diferentes representaciones.
Teoría de números • Número par • Número impar • Múltiplos • Divisores • Reglas de divisibilidad	4. Aplicar los conceptos de múltiplo de un número natural, números pares e impares en la resolución de problemas. 5. Identificar divisores de un número natural.	Proponer adivinanzas donde se debe aplicar estos conceptos para encontrar la cantidad. Por ejemplo: a. Soy un número de 5 dígitos. Soy múltiplo de 1000. Mi dígito en las decenas de millar es factor de 2. ¿Qué número soy? b. Soy un número de 3 dígitos, múltiplo de 30. Mi dígito de las decenas es impar y el de las centenas es el doble que el de las decenas. ¿Qué número soy? ▲ Se pueden plantear problemas cuya solución no sea única, por ejemplo: La maestra Andrea tiene a cargo un grupo de 30 estudiantes. Ella planea realizar un trabajo con ellos y ellas en el cual formarán subgrupos con igual cantidad de estudiantes para cada uno de ellos. ¿Cuáles opciones tiene Andrea? Sin embargo, el día que iba a realizar la actividad faltaron dos estudiantes. ¿Cómo podrá realizar la distribución la maestra?
	6. Deducir las reglas de divisibilidad del 2, 3, 5 y 10. 7. Establecer si un número natural es divisible por 2, 3, 5 o 10 aplicando las reglas de divisibilidad.	Un comerciante tiene 135 manzanas, las cuales desea empacar de forma tal que cada paquete tenga la misma cantidad de manzanas, que cada uno no exceda de 10 y que todas las manzanas sean empacadas. ¿Cuántas manzanas podría tener cada paquete?

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
Una empresa recogió cuadernos para regalar a diferentes escuelas de Heredia. Después de la recolección realizó paquetes de 10 cuadernos cada uno. Las escuelas recibieron la siguiente cantidad de cuadernos:
<table>
<tr><td colspan="4">Escuelas</td></tr>
<tr><td>San José</td><td>Los Ángeles</td><td>Laboratorio</td><td>Montecito</td></tr>
<tr><td>80</td><td>40</td><td>20</td><td>70</td></tr>
</table>
¿Cuántos paquetes recibió cada institución?

Pedro, Flor y Julia forman parte de un campamento en el que asisten 114 jóvenes. Julia propone para el desarrollo de las actividades y con el objetivo de no dejar a ninguna persona por fuera, que se formen equipos de tres personas. Flor con la misma preocupación propone más bien crear grupos de 5 personas y Pedro cree que deben formarse parejas. ¿Qué opina sobre la propuesta de estas tres personas? Redacte una justificación que respalde su posición.

Nótese que este problema contempla no sólo la parte operatoria o de representación, sino que se pide explícitamente argumentar su posición. Además, se puede discutir sobre la conveniencia de buscar la integración de las personas como una forma de establecer relaciones de convivencia pacífica y respetuosa de la diversidad.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Fracciones

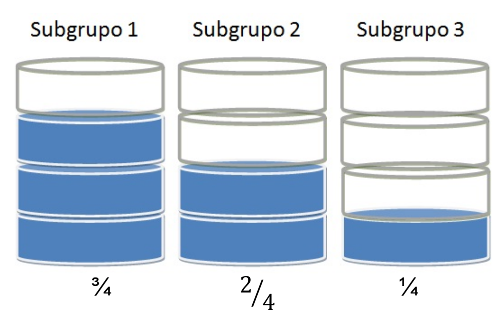
Fracción propia e impropia
Representación mixta
Fracciones homogéneas
Fracciones heterogéneas
Relaciones numéricas
Ubicación en la recta numérica

</td>
<td>
8. Identificar fracciones impropias.

9. Representar una fracción impropia como la suma de un número natural y una fracción propia.

10. Expresar una fracción impropia en notación mixta y viceversa.
</td>
<td>
▲ Proponer problemas que involucren fracciones impropias, por ejemplo:

La sección 5-A de una escuela se propuso pintar su aula, por lo que se dividieron en tres subgrupos. Un subgrupo llevó tres cuartos de galón de pintura, otro llevó dos cuartos y el último subgrupo (que era el más pequeño) llevó sólo un cuarto de pintura. ¿Cuántos galones llevaron en total?

Se espera que las y los estudiantes se apoyen en formas de representación gráfica para dar solución al problema.


Se llena uno de los galones con parte del contenido del otro, resultando:
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>


Así, se recogió en total un galón y dos cuartos. Algo importante en este problema es que la respuesta se obtuvo sin necesidad de realizar operaciones con fracciones.

▲ Se debe explicar la importancia de la representación mixta de una fracción impropia para la interpretación de algunas situaciones específicas. Por ejemplo:

Para la elaboración de un pastel, Andrés lee en la receta que se necesitan $\frac{9}{2}$ cucharadas de azúcar. Éste se siente confundido y desconoce realmente la cantidad de azúcar que debe agregar. Indíquele a Andrés realmente cuántas cucharadas necesita para su receta.

Después de entender el concepto e importancia del uso de números mixtos, se debe utilizar el algoritmo para pasar de una representación a otra.
</td></tr>
<tr><td></td><td>11. Identificar fracciones homogéneas y heterogéneas.</td><td>▲ Proponer grupos de fracciones homogéneas y grupos de fracciones heterogéneas y que cada estudiante deduzca las diferencias entre ellas.</td></tr>
<tr><td></td><td>12. Comparar fracciones utilizando los símbolos <, > o =.</td><td>
▲ Es importante que se argumenten los resultados de las comparaciones realizadas con base en el sentido numérico. Por ejemplo:

<table>
<tr><th></th><th>Argumentación</th></tr>
<tr><td>$3\frac{2}{5} > \frac{4}{7}$</td><td>$\frac{4}{7}$ es una fracción propia por lo que no es mayor que la unidad.</td></tr>
<tr><td>$5{,}67 > 7\frac{3}{5}$</td><td>El primer número tiene menos unidades que el otro.</td></tr>
<tr><td>$\frac{9}{4} > \frac{9}{11}$</td><td>La fracción de la izquierda es impropia y la de la derecha es propia.</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td></td><td>13. Ubicar fracciones en la recta numérica.</td><td>
A continuación se brinda una lista de objetos peligrosos para niños menores de tres años (debido a su tamaño) y sus medidas aproximadas:

a. Diámetro de una moneda de 100 colones: 3 cm.
b. Clavo de una pulgada: $\frac{5}{2}$ cm.
c. Una tuerca: $\frac{2}{3}$ cm.
d. Una grapa: $\frac{11}{10}$ cm.
</td></tr>
</table>

		Elabore un pequeño cartel donde se dibuje una recta numérica (escala de un centímetro) que permita representar las medidas de estos objetos peligrosos y sus respectivas ilustraciones. Esta actividad permite crear conciencia sobre la necesidad de alejar este tipo de objetos del alcance de los niños pequeños y es una forma de valorar la utilidad que tienen las Matemáticas en la vida cotidiana. Al finalizar la actividad, se presentan los diseños elaborados, enfatizando el porqué de la ubicación de dichos números y los criterios que mediaron para hacerlo de esa forma. ▲ Use fracciones cuyo denominador sea 2, 3, 4, 5 o 10.
	14. Determinar fracciones entre dos números naturales consecutivos.	▲ Se presentan problemas donde se requiera identificar fracciones entre números naturales, por ejemplo: Nueve amigos compran pizzas y quieren comer $\frac{1}{4}$ de pizza cada uno. ¿Cuántas pizzas tienen que comprar? Aprovechar la notación mixta de una fracción impropia para establecer entre cuáles números naturales consecutivos se ubica dicha fracción. Es necesario estar pendiente de que el estudiantado aprenda a cuestionarse los resultados obtenidos así como su coherencia. Esto permite desarrollar el proceso *Razonar y argumentar.*
Decimales • Lectura • Escritura • Notación desarrollada • Redondeo	15. Leer y escribir números en su representación decimal hasta la diezmilésima. 16. Establecer la correspondencia entre fracción decimal y número decimal. 17. Representar fracciones mediante un número con expansión decimal finita y viceversa.	▲ Se puede utilizar esta habilidad para reforzar la ubicación de fracciones en la recta numérica. ▲ Al pasar de una representación fraccionaria a un número con expansión decimal es necesario implementar el algoritmo de la división de forma tal que los resultados no excedan las diezmilésimas. Por ejemplo, tres octavos se representa de la forma siguiente: $\begin{array}{r\|l} 30 & 8 \\ -\ 24 & 0{,}375 \\ 60 & \\ -\ 56 & \\ 40 & \\ -\ 40 & \\ 0 & \end{array}$
	18. Representar un número decimal en su notación desarrollada.	▲ Proponer al estudiante interrogantes de cómo realizar la notación desarrollada de cantidades como 896; 14,8 y 5,412. Darle un espacio de tiempo para su propuesta y luego representar otros ejemplos en la pizarra, como: $4+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{9}{1\ 000}$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>19. Redondear un número decimal.</td>
<td>▲ Redondeo a la milésima, centésima, décima o al número natural más cercano.

▲ El grado de precisión de las estimaciones depende del contexto en que se realice. Por ejemplo a modo de comparación, en el fútbol el árbitro puede pitar el final del partido unos segundos antes o después del tiempo real, sin embargo en una carrera de 400 metros cada segundo y milésima de segundo cuenta y el cálculo debe ser muy preciso.

Esto mismo sucede con los números, dependiendo del contexto se hace necesario redondear a la milésima, centésima, décima o número natural más cercano. Por ejemplo, al redondear π el cálculo del área de un círculo puede variar mucho:

<table>
<tr><th>Redondeo a</th><th>π</th><th>Área de círculo de radio 15 cm</th></tr>
<tr><td>Milésima</td><td>$\pi=3,142$</td><td>706,95 cm^2</td></tr>
<tr><td>Centésima</td><td>$\pi=3,14$</td><td>706,5 cm^2</td></tr>
<tr><td>Décima</td><td>$\pi=3,1$</td><td>697,5 cm^2</td></tr>
<tr><td>Número natural</td><td>$\pi=3$</td><td>675 cm^2</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="4">Cálculos y estimaciones

• Suma

• Resta

• Multiplicación

• División</td>
<td>20. Multiplicar y dividir un número con o sin expansión decimal por 10, 100, 1000 y 10 000.</td>
<td>▲ Es necesario que se obtenga un procedimiento para multiplicar y dividir un número natural o con decimales por 10, 100 y 10 000.</td>
</tr>
<tr>
<td>21. Analizar el resultado de multiplicar y dividir por números mayores o menores que uno.</td>
<td>▲ Se pueden plantear problemas como el siguiente:

Pedro tiene 5 litros de agua que va a repartir a sus amigos y cada uno tiene un recipiente cuya capacidad es de medio litro. ¿Cuántos recipientes puede llenar Pedro?</td>
</tr>
<tr>
<td>22. Resolver y plantear problemas donde se requiera el uso de la suma, la resta, la multiplicación y división de números naturales y con decimales.</td>
<td>▲ Se puede plantear un problema como el siguiente para repasar el algoritmo de la división:

Para el desfile del 15 de setiembre, la maestra Grace tiene planeado que sus 35 estudiantes asistan con un pequeño lazo tricolor adherido a su brazo izquierdo. Para ello, compró un listón de 6,5 m de longitud. ¿Cuántos centímetros de cinta se requieren para elaborar el lazo de cada estudiante, si cada uno tendrá la misma longitud?

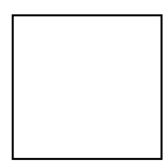
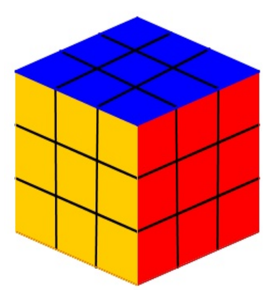
El problema anterior promueve la Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz.

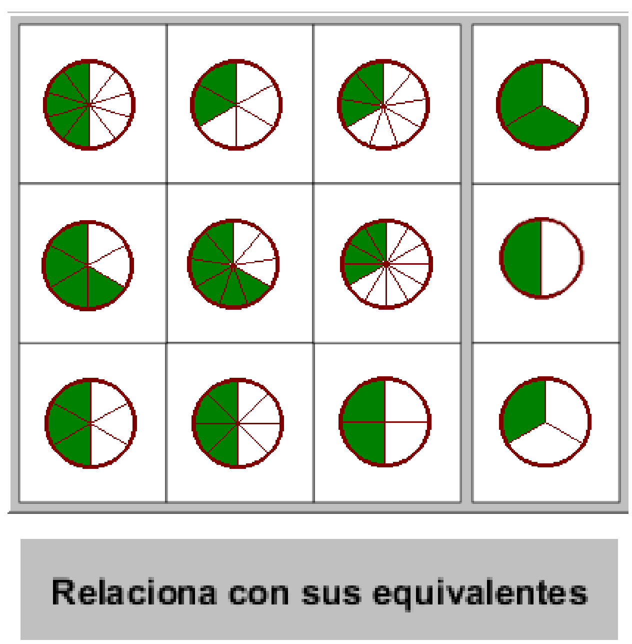
▲ Efectuar multiplicaciones donde el segundo factor sea a lo sumo de tres dígitos agrupando y sin agrupar.</td>
</tr>
<tr>
<td>23. Utilizar la calculadora para resolver problemas que involucran operaciones con cálculos complejos.</td>
<td>Una finca de forma rectangular colinda con un río en uno de sus lados. Se desea implementar una cerca con tres filas de alambre de púas para evitar que el ganado salga de la finca. El costo del alambre se estima en unos ₡ 535 el metro. Si la finca tiene por dimensiones 17,331 dam por 1,563 hm, ¿cuánto dinero se gasta por la compra del alambre?</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>▲ Aquí es importante estar vigilantes de que se realice el planteo, el procedimiento y las conversiones en forma correcta. La calculadora es un medio para facilitar los cálculos.

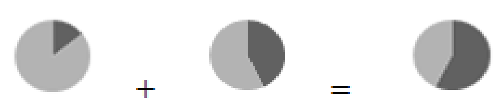
Este problema permite conexión con el área de Medidas.</td></tr>
<tr><td></td><td>24. Seleccionar métodos y herramientas adecuados para la resolución de cálculos.</td><td>▲ Uso de cálculo mental, lápiz y papel o calculadora según el tipo de problema, como por ejemplo
<table>
<tr><td>Cálculo mental</td><td>Si un videojuego cuesta $500 y el dólar tiene un valor de ₡500, ¿cuánto cuesta el videojuego en colones?</td></tr>
<tr><td>Papel y lápiz</td><td>Si un videojuego cuesta $582 y el dólar tiene un valor de ₡500, ¿cuánto cuesta el videojuego en colones?</td></tr>
<tr><td>Calculadora</td><td>Si un videojuego cuesta $582 y el dólar tiene un valor de ₡506,7, ¿cuánto cuesta el videojuego en colones?</td></tr>
</table>
Se puede observar que cada uno de estos problemas tiene un nivel de dificultad diferente, por lo que es necesario utilizar el método adecuado.</td></tr>
</table>

6° Año		
Conceptos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Teoría de números • Divisibilidad • Factores • Números primos • Números compuestos	1. Aplicar los conceptos de divisibilidad, divisor, factor y múltiplo de un número natural en la resolución de problemas.	▲ Se le pueden proponer problemas tipo adivinanzas donde deben aplicarse estos conceptos para encontrar la cantidad, como por ejemplo: Halle un número que sea divisible por 2, 3 y 11. ▲ Es importante la aplicación de estos conceptos a la hora de abarcar los conocimientos de amplificación y simplificación de fracciones.
	2. Identificar números primos y compuestos.	▲ Se solicita a cada estudiante que encuentre todos los factores o divisores de una serie de números primos y compuestos (sin mencionar estos conceptos). Luego, se clasifican según la cantidad de divisores. Después se formaliza los conceptos de números primos y compuestos. Se sugiere utilizar la Criba de Eratóstenes (276 - 194 a.C.) para reforzar el tema y valorar su contexto histórico. A este nivel aumenta la complejidad de los cálculos, por ello se debe estar atento a motivar para resolver problemas enfrentándolos; no debe ocurrir que se copie simplemente la respuesta sin comprenderse el razonamiento utilizado.

Números naturales • Potencias • Cuadrados perfectos • Cubos perfectos • Potencias de base 10	3. Representar productos con factores iguales como potencia y viceversa. 4. Calcular potencias cuya base y exponente sean números naturales no iguales a cero simultáneamente.	Una forma interesante de introducir el concepto de potencia y la necesidad de su notación es mediante la historia del ajedrez que se encuentra en el libro *El hombre que calculaba* de Malba Tahan. En el capítulo XVI se relata la historia de un joven llamado Lahur Sessa quien obsequió al rey Iadava un juego (el ajedrez) que le permitiría salir del dolor que le embargaba por la muerte de su hijo el príncipe Adjamir. El rey como muestra de agradecimiento le manifestó a Sessa que le daría lo que él deseara. Éste sin embargo no quería recompensa alguna, pero ante la insistencia de Iadava accedió a recibir un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera y así doblando la cantidad de granos sucesivamente por cada una de las casillas siguientes. El rey creyó ridícula su petición, pero después de realizados los cálculos le comunicaron que dicha cantidad de granos era imposible de pagar. ▲ Se solicita representar o describir la operación que se debe realizar para obtener dicho resultado. Después realizar una discusión sobre la necesidad de la notación de potencia y los inconvenientes que se presentan a la hora de realizar estos cálculos. Se formaliza así la noción de potencia como el producto sucesivo de factores iguales. Con esta reseña histórica se puede fortalecer el aprecio y respeto por las Matemáticas.
	5. Identificar cuadrados y cubos perfectos de números naturales.	El siguiente cuadrado tiene un área equivalente a 81 mm^2. ¿Cuánto mide su lado?  Se pretende que cada estudiante determine que el lado mide 9 mm y en consecuencia el área se puede expresar como una potencia de exponente 2. A continuación se muestra una imagen del cubo Rubik:  **Elaboración propia** a. ¿De cuántos cubitos está formado? b. ¿Qué relación tiene la medida de la arista (se puede suponer que cada arista mide 3 cm) con la cantidad de cubitos?

		Se pretende que el estudiantado determine que el cubo grande se completa con 27 cubitos, en consecuencia esta cantidad se puede expresar como una potencia de exponente. Estos problemas promueven la conexión con *Geometría* y *Medidas.*
	6. Expresar múltiplos de 10 como potencias de base 10. 7. Expresar números naturales en notación desarrollada utilizando potencias de base diez.	▲ Proponer una cantidad en notación desarrollada, por ejemplo: $3782 = 3 \times 1000 + 7 \times 100 + 8 \times 10 + 2 \times 1$ y pedirles que la escriban utilizando potencias de base 10: $3782 = 3 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 2$
Fracciones • Fracciones equivalentes • Simplificación y amplificación • Multiplicación • División • Inverso multiplicativo • Suma • Resta	8. Identificar fracciones equivalentes. 9. Simplificar y amplificar fracciones.	▲ Se pueden utilizar problemas similares al siguiente, con el objetivo de justificar el algoritmo que permite simplificar y amplificar fracciones: En el sitio web http://clic.xtec.cat/db/jclicApplet.jsp?project=http://clic.xtec.cat/projects/divfrace/jclic/divfrace.jclic.zip&lang=es&title=Fracciones,+múltiplos+y+divisores se encuentran algunas actividades con fracciones por lo que se puede aprovechar para un repaso y estudiar la noción de fracciones equivalentes a través de gráficos. A continuación se describe una de ellas:  ▲ Para el proceso de simplificación, es necesario presentar fracciones cuyo numerador y denominador sean números que tengan a lo sumo tres dígitos. Enfatizar el uso de las reglas de divisibilidad vistas con anterioridad.

	10. Multiplicar y dividir fracciones.	▲ Es necesario enfatizar que las fracciones son simplemente una forma de representar los números y que se utilizan porque nos ayudan a simplificar los cálculos.
	11. Identificar el inverso multiplicativo de un número natural y/o fraccionario.	▲ Se propone el siguiente problema: ¿Qué valores hacen verdaderas las siguientes igualdades? $\frac{3}{4} \times [\quad] = 1$ $\frac{5}{7} \times [\quad] = 1$ $11 \times [\quad] = 1$ $9 \times [\quad] = 1$ ¿Qué características presentan dichos valores con respecto al primer valor? ▲ Después de que se ha realizado la comunicación de respuestas y su pertinencia, es importante precisar el concepto de inverso multiplicativo de un número. Aprovechar la actividad anterior para concluir que cero no tiene inverso multiplicativo.
	12. Sumar y restar fracciones homogéneas y heterogéneas.	▲ Iniciar sumando y restando fracciones homogéneas, para lo cual se plantean problemas semejantes al siguiente: Hugo es un veterinario que tiene un terreno cerca de la playa, el cual está constituido por zonas boscosas. Él ha decidido que $\frac{3}{10}$ partes del mismo las utilizará para construir una casa en armonía con el medio ambiente, $\frac{2}{10}$ lo dedicará a la construcción de un lugar donde se atenderá animales nativos del lugar que estén enfermos o hayan sido objeto de maltrato. El resto lo conservará como área protegida para preservar las especies del lugar. a. Determine la fracción de terreno que abarcará la casa y la estancia para animales enfermos o maltratados. b. Determine la fracción de terreno que corresponde al área protegida. Es importante que la acción docente esté dirigida a discutir y crear conciencia en el estudiantado acerca de la importancia de conservar nuestra biodiversidad y vivir una *Cultura Ambiental para el Desarrollo Sostenible.* Para introducir el concepto de suma o resta de fracciones heterogéneas se puede trabajar gráficamente. Se puede proponer un problema que permita potenciar las representaciones numéricas. Después se formaliza el algoritmo para la homogenización de las fracciones por medio de la amplificación o simplificación de fracciones.

		▲ Analizar ejemplos como $$3+\frac{2}{7}$$ y relacionarlo con la notación mixta de una fracción. ▲ Para trabajar la suma o resta de forma algorítmica se trabajará sin utilizar el concepto de Mínimo Común Múltiplo, por lo que se recomienda, después de que se haya entendido el concepto, realizar sumas o restas, como el siguiente ejemplo: $$\frac{5}{4}+\frac{7}{6}=\frac{5\times 6+7\times 4}{24}=\frac{58}{24}=\frac{29}{12}$$
Operaciones • Prioridad • Combinación	13. Resolver problemas donde se requiera el uso de la combinación de operaciones suma, resta, multiplicación y división de números naturales y con decimales.	▲ Se propone una combinación de operaciones para que se generalicen los conocimientos establecidos en 5° Año. Por ejemplo: a. 642,4 ÷ 12,56 – 1,2 × 10,23 = b. 110 × (263,7 – 4 × 20,36) =
Cálculos y estimaciones • Suma • Resta • Multiplicación • División • Potencias	14. Resolver y plantear problemas donde se requiera el uso de la suma, la resta, la multiplicación y la división de fracciones y números con decimales.	▲ Los problemas propuestos deben ser similares a los estudiados cuando se formalizó este tipo de operaciones en habilidades anteriores. Para establecer conexiones con *Medidas*, se pueden utilizar problemas vinculados a la obtención de distancias entre varias ciudades en un mapa haciendo uso de su escala, indicando al estudiantado que sus mediciones se hagan con una precisión de hasta milímetros. Se brinda alguna representación gráfica de una suma de fracciones:  $\frac{1}{7}$ + $\frac{3}{7}$ = $\frac{4}{7}$ A partir de estos datos, cada estudiante debe plantear algún problema o situación donde los utilice.
	15. Calcular mentalmente potencias mediante diferentes estrategias.	▲ Es importante que cada estudiante trabaje mentalmente las potencias de 10 y los cuadrados perfectos. Se puede buscar una conexión con *Medidas* y sirve de repaso para algunos temas de esta área, por ejemplo: 1 km = 10^3 m = 10^4 dm = 10^5 cm = 10^6 mm
	16. Aplicar el cálculo mental de los resultados de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.	▲ Proponer juegos, rallyes y otras actividades que permitan favorecer el cálculo mental.

17. Determinar el resultado de operaciones con fracciones mediante el cálculo mental utilizando diferentes estrategias.	▲ Deben usarse ejercicios simples como por ejemplo: $\frac{3}{4}+2$ $\frac{14}{5}-1$ $\frac{3}{7}+\frac{6}{7}$ $\frac{13}{5}-\frac{3}{5}$ $\frac{5}{6}\times 1$ Entre las posibles estrategias que cada estudiante debe manifestar durante la resolución de estas operaciones se citan: a. El resultado de sumar o restar una fracción y un número natural se obtiene al multiplicar el denominador de la fracción y el número natural, luego sumar o restar dicho resultado al numerador y conservar en el proceso el denominador original. b. Sumar o restar los numeradores y conservar el denominador para el caso de fracciones homogéneas. c. Al multiplicar una fracción por 1 el resultado corresponde a la misma fracción.
18. Utilizar la calculadora para resolver problemas y ejercicios numéricos con cálculos complejos.	Se puede proponer problemas como el siguiente: Determine la cifra de las unidades del resultado de la operación: 3^{2011} Aquí la calculadora contribuye a agilizar el reconocimiento de un patrón presente en la cifra de las unidades que se obtienen al desarrollar algunas potencias. Este problema permite establecer conexiones con *Relaciones y Álgebra*.

Indicaciones metodológicas

Generales para el ciclo

1. Es importante seguir la generalización de los algoritmos para la suma, la resta y la multiplicación de números naturales trabajados durante el Primer ciclo, así como la resolución de problemas mediante estas operaciones. No se pretende que los problemas se vean al final del tratamiento de las operaciones, sino que ambos vayan de la mano.

2. El trabajo en equipo resulta beneficioso, pues un ambiente colaborativo ofrece la oportunidad de que cada estudiante manifieste las habilidades y destrezas que domina. También la competencia es característica de las personas de esta edad por lo que estrategias tipo “antorcha” o “rally” resultan enriquecedoras y llamativas para aprender matemáticas.

3. El uso de juegos de mesa realizados por los mismos estudiantes, como bingos o crucigramas, se pueden aprovechar para repasar las tablas de multiplicación.

4. En este ciclo se trabaja con cantidades mayores o iguales que 100 000; algunos procesos se pueden trabajar de manera abstracta (no contextualizada), pues la abstracción es pieza medular en esta disciplina. Por ejemplo, si en el Primer ciclo se utilizó el ábaco vertical o los bloques multibase para la adquisición del concepto de decena o centena, en el Segundo ciclo los conceptos de decenas, centenas de millar, etc., se pueden trabajar de forma abstracta.

5. El uso de la calculadora durante este ciclo debe ir orientado en dos direcciones:
   a. Como una herramienta que permite simplificar la realización de cálculos complejos en problemas donde lo primordial es evaluar el planteo de los datos, la estrategia empleada y la argumentación propuesta por cada estudiante.
   b. Como una herramienta que ayuda en la verificación de los resultados finales de las operaciones para detectar posibles fuentes de error en los procedimientos desarrollados.

   Nunca se debe utilizar la calculadora como sustituto de las operaciones que debe resolver cada estudiante, ya sea a través de cálculo mental o con papel y lápiz.

Cuarto año

1. Se propone la siguiente actividad:

ALZA DE ¢5.000 TAMBIÉN IMPACTA OTROS BENEFICIOS COMO DEDICACIÓN EXCLUSIVA Y CARRERA PROFESIONAL

Sueldos base del sector público se disparan por pluses salariales

BENEFICIOS DEL SECTOR PÚBLICO

Variación salarial según pluses

Categoría	Salario base con alza de ₡5000	14 anualidades	Carrera profesional	Otros pluses Dedicación exclusiva	Incentivo didáctico	Dosificación adicional 17%	Dedicación carrera hospitalaria 22%	Salario total
Misceláneo 1	₡209.050	₡74.926						₡283.976
Secretario 1	₡265.700	₡76.090						₡341.790
Profesional del Servicio civil 1-B	₡505.350	₡137.256	₡65.860	₡277.942				₡986.408
Profesor de Enseñanza General Básica 1 (aspirante)	₡252.350	₡75.404	₡52.497		₡31.575			₡411.826
Profesor de Enseñanza General Básica 1 (licenciado)	₡497.400	₡136.100	₡52.497		₡57.060			₡742.057
Profesor de Enseñanza Media MT5 (licenciado)	₡506.350	₡137.256	₡52.497		₡57.902			₡753.006
Médico G-1	₡732.527	₡564.046	₡65.950			₡124.530	₡327.132	₡1.814.185

FUENTE: **MINISTERIO DE TRABAJO, CON DATOS DEL SERVICIO CIVIL.**

Fuente: http://nacion.docpit.com/?type=&publication=&cursor=&mode=simple&q=&pub_date=2012-03-12&topic=&limit=8&resultset=1

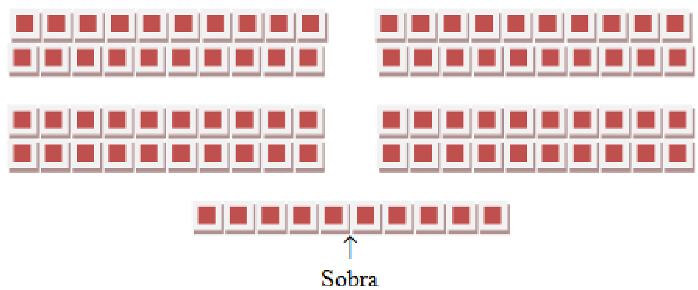
Coloque el símbolo de >, < o = según corresponda. Además describa el significado de dicha proposición, de acuerdo con la información descrita en el cuadro anterior.

Proposición	Descripción
252 350 _____ 506 360	
283 978 _____ 209 050	

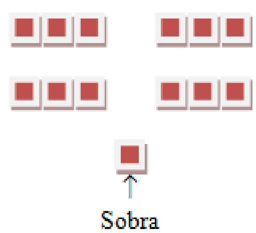
2. Al trabajar la división, es importante que el estudiantado inicie estableciendo estrategias intuitivas, vistas en el ciclo anterior con ayuda de bloques multibase o papel cuadriculado, para que el algoritmo que se implemente tenga un mayor sentido. Por ejemplo se propone el siguiente problema:

   Producto de una recolecta se lograron conformar 93 canastas de víveres, las cuales se piensan repartir equitativamente a familias necesitadas en 4 barrios de la zona. ¿Cuántas canastas se deben repartir en cada barrio?

   Se espera que cada estudiante represente el número 93 con 9 decenas y 3 unidades y que decida repartir primero equitativamente las decenas:

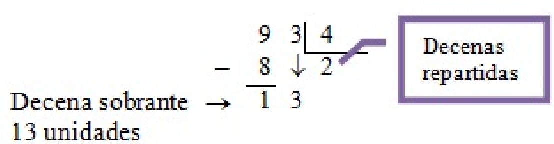


   Así a cada barrio le corresponde una cantidad de canastas equivalente a 2 decenas. Al sobrar una y agregando las tres unidades pendientes, se forman 13 unidades las cuales también se reparten equitativamente:

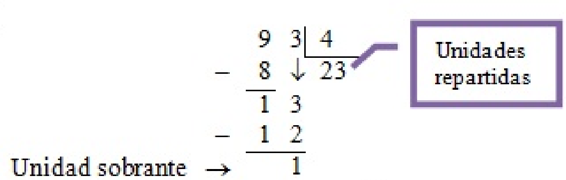


   Con esto, a cada barrio le corresponde 3 canastas más. Como ya se tenían 20, a cada barrio le corresponde 23 canastas de víveres, sobrando una.

   Al formalizar las partes de la división y el algoritmo, es importante plasmar la secuencia de pasos seguida:



Se repite el proceso:



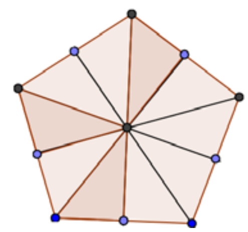
3. Es importante ir introduciendo el término “divisible” para denotar cuándo la división de un número natural por otro tiene residuo cero. Por ejemplo la operación 135 ÷ 9 tiene residuo cero, por lo cual 135 es divisible por 9. Justificar adecuadamente que la división con divisor cero no está definida ya que no hay un número que multiplicado por cero dé como resultado un número diferente de cero. Por ejemplo: 3 ÷ 0 = ? está indefinido ya que ? × 0 = 3.

4. Para introducir el concepto de fracción es importante proponer al estudiante actividades donde se vea en la necesidad de expresar verbalmente situaciones donde se toman partes de una colección de objetos o existen características especiales en ciertas partes de un todo. Después, se propone la fracción como una forma de representar este tipo de situaciones y se introducen aspectos relacionados con su escritura.

Imágenes cortesía de FreeDigitalphotos.net

Alguien peló cuatro bananos de nueve que habían: $\frac{4}{9}$

“Cuatro novenos”

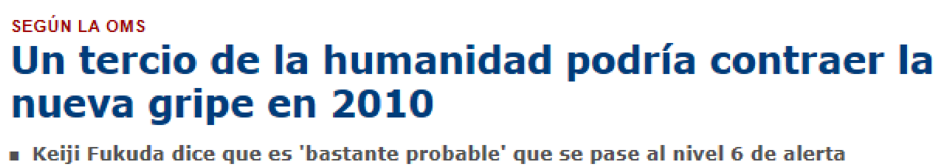


Faltan siete triángulos por pintar del total: $\frac{7}{10}$

Para motivar el tema y lograr de una manera significativa la habilidad, se realizan juegos de memoria donde se forman parejas entre fracciones representadas en formas gráficas variadas (circulares como pizzas, rectangulares como un queque o en línea como un pan baguette, o colecciones de objetos como un grupo de lápices de color) y fracciones escritas en palabras.
Cabe resaltar que durante el 4° Año sólo se trabajarán fracciones propias.

Se propone a cada estudiante hacer carteles con ejemplos de fracciones $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6}\right)$ a partir de colecciones de objetos, círculos, cuadrados, rectángulos donde las representan en forma precisa (uso de la escuadra y del compás).

5. En el análisis de fracciones propias es relevante que se utilicen para la comprensión de textos y noticias. Por ejemplo, comprender la magnitud de lo que expresa el título siguiente y concientizar acerca de la necesidad de acatar las disposiciones sanitarias que corresponden para prevenir esta enfermedad.



SEGÚN LA OMS

Un tercio de la humanidad podría contraer la nueva gripe en 2010

- Keiji Fukuda dice que es 'bastante probable' que se pase al nivel 6 de alerta

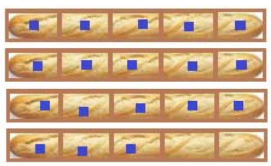
Imagen tomada de: http://www.elmundo.es/elmundosalud/2009/05/07/medicina/1241700820.html

6. Al comparar fracciones propias mediante los símbolos >, < o =, comenzar comparando fracciones con igual denominador. Para el caso en que las fracciones tienen diferente denominador apelar al sentido numérico del estudiante, el cual se debe ir reforzando mediante el uso de representaciones gráficas. Se propone el algoritmo que permite establecer la relación de orden existente al comparar dos fracciones. En el caso de números con expansión decimal, se debe trabajar y evaluar la comparación de cantidades como 1,3 y 1,25 o 1,7 y 1,700.

Quinto año

1. Es necesario retomar la noción de múltiplo de un número natural para relacionarlo directamente con la obtención de sus divisores. Así cuando se habla de que 24 es múltiplo de 6 y 4 pues $24 = 6 \times 4$, se puede afirmar también que 6 y 4 son divisores de 24.

2. Es importante que durante el trabajo estudiantil se utilicen diferentes representaciones de una fracción impropia:

Representación gráfica	**Fracción propia**	**Número mixto**	**Nomenclatura**
	$\frac{18}{5}$	$3\frac{3}{5}$	Tres unidades y tres quintos.

3. Para la operatoria con divisiones se deben contemplar los siguientes casos:

   a. Para división de números naturales: dividendo menor a 10 000 y divisor de hasta 3 cifras.
   b. Para división de números decimales: dividendo y divisor con números decimales hasta la diezmilésima.
   c. Para división de un número decimal por otro natural: el dividendo menor a 10 000 con decimales hasta la diezmilésima y el divisor de hasta tres cifras.
   d. Para división de un número natural por otro decimal: el dividendo menor a 10 000 y el divisor con decimales hasta la diezmilésima.

4. Los resultados de dichas divisiones no deben generar una expansión decimal infinita periódica, pues dicha noción se estudiará en 8° Año. Sólo se trabaja con resultados con expansión decimal finita.

Sexto año

1. En la teoría de números, particularmente los números primos y compuestos se pueden evaluar hasta el 100, pero no conviene valorar la memorización de los mismos sino el proceso para obtener si un número es primo o no. De hecho se puede resumir para el caso de números menores que 100 en que un número primo es aquel que no sea divisible por 2 (excepto el 2 que es el único primo con esta característica), por 3, por 5 y por 7.

2. Estudiar el caso de potencias cuya base sea cero o uno. Un error típico en el tratamiento de las potencias es creer que para resolverla basta multiplicar la base por el exponente. Por ejemplo, $3^4 = 3 \times 4 = 12$ (incorrecto) pues $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$. Declarar al estudiante que cualquier potencia cuya base es diferente de cero y exponente nulo equivale a uno, aseveración que se justificará oportunamente en Secundaria.

3. Para representar fracciones en su forma decimal se deben proponer ejemplos que no sean equivalentes a números con expansión decimal infinita periódica. Se trabajará únicamente con representaciones con expansión decimal finita.

4. Una vez comprendido el algoritmo para la simplificación de fracciones, alternativamente se puede aprovechar el representar el numerador y el denominador de la fracción como el producto de varios factores y proceder a aplicar la simplificación de los mismos. Por ejemplo, si se desea simplificar la fracción

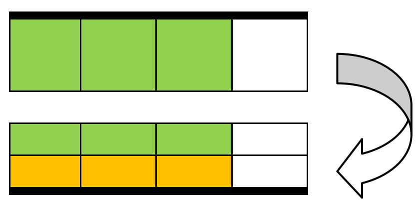
$$\frac{130}{125} = \frac{10\times 13}{5\times 25} = \frac{2\times 5\times 13}{5\times 5\times 5} = \frac{2\times 13}{5\times 5} = \frac{26}{25}$$

5. Para el caso de las operaciones con fracciones, se deben proponer problemas al estudiante para que sean resueltos utilizando medios empíricos y/o representaciones. Posteriormente, se formalizan los algoritmos correspondientes para la resolución de los siguientes casos:

- **Multiplicación de fracciones**

¿Cómo representar $\frac{1}{2}$ *de* $\frac{3}{4}$*?*

Solución: gráficamente,



Operación a formalizar:

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

- **Multiplicar un número natural por una fracción**

Valeria tiene un tanque de agua de reserva con una capacidad de 1440 litros. Por motivos de reparación de la tubería principal la compañía de agua ha suspendido la distribución de este preciado líquido en el vecindario. Así, Valeria recurre al uso de dicho tanque para realizar sus labores diarias y al finalizar el día estima que ha gastado en $\frac{2}{5}$ *de su capacidad. ¿Cuántos litros de agua dispone el tanque para ser utilizado al día siguiente si se presenta nuevamente este inconveniente?*

Solución: como se han consumido $\frac{2}{5}$ de su capacidad, quedan todavía tres quintas partes de contenido.

Imagen cortesía de FreeDigitalphotos.net

Se procede a dividir 1440 litros por 5 y su resultado se multiplica por 3, obteniendo 864 litros.

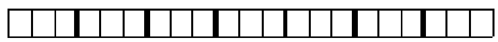
Operación a formalizar:

$$1440 \times \frac{3}{5} = \frac{4320}{5} = 864$$

- **Dividir un número natural por una fracción**

Luisa tiene que recortar los 7 m de tela que compró en pedacitos de un tercio de metro. ¿Cuántos pedazos de $\frac{1}{3}$ m logrará tener?

Solución: gráficamente



Cada estudiante tiene que encontrar el resultado de 7 m dividido en $\frac{1}{3}$ de metro. Luisa tendrá 21 tercios de metro recortando los 7 m en tercios de metros.

Operación a formalizar:

$$7 \div \frac{1}{3} = 21$$

- **Dividir una fracción por una fracción**

Para una carrera, varios jóvenes elaboran bolsitas con líquido hidratante para los competidores. El comité organizador les proporciona 15 litros y medio de líquido e indican que cada bolsita debe tener el equivalente a un cuarto de litro. ¿Cuántas bolsitas elaborarán?

Solución: si por cada litro se pueden elaborar cuatro bolsitas, entonces con 15 litros se obtienen 60 bolsitas. Con el medio litro restante se elaboran 2 bolsitas más, con lo que en total se obtienen 62 bolsitas para repartir entre los competidores.

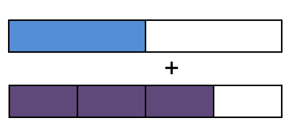
Operación a formalizar:

$$15\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{31}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{31 \times 4}{2} = \frac{124}{2} = 62$$

6. Para introducir el concepto de suma o resta de fracciones heterogéneas se puede trabajar gráficamente. Se puede proponer un problema que permita potenciar las representaciones numéricas. Por ejemplo:

Luis se comió la mitad de una cajeta que tenía forma rectangular y Xinia se comió tres cuartas partes de una cajeta similar. ¿Cuál fracción representa la cantidad de cajeta que consumieron los dos?

Las y los estudiantes pueden establecer las siguientes representaciones:



y convertir en cuartos la porción que consumió Luis:

De ese modo, sumando estas partes se obtiene

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$$

Después se precisa el algoritmo para la homogenización de las fracciones por medio de la amplificación o simplificación de fracciones.

7. Es importante promover la simplificación de los resultados de las operaciones que realizan con fracciones.

Indicaciones de evaluación

En este Segundo ciclo se seguirá evaluando la aplicación de las operaciones en la resolución de problemas, generalizando a números mayores que 100 000, con expansión decimal y fracciones. Es de suma importancia evaluar en todos los años el uso de las diferentes representaciones de los números y el cálculo de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y en 6° Año la potenciación.

Para evaluar el uso correcto de la calculadora se trabaja en clases programadas donde las actividades justifiquen el uso de la misma en la resolución de problemas y análisis de resultados.

El Departamento de Evaluación del Ministerio de Educación Pública propone diferentes instrumentos para la evaluación del *trabajo cotidiano*, que permiten documentar, particularmente, el progreso en el dominio de las operaciones básicas, el cálculo, la estimación y la resolución de problemas que utilicen números naturales, con decimales y fracciones.

Para el *trabajo extraclase*, se recomienda que conforme se avance en los diferentes conocimientos se asignen tareas que permitan reforzarlos a nivel de reproducción. Sin embargo, también es conveniente dejar tareas que permitan al estudiante alcanzar el nivel de conexión y reflexión, por lo que se puede incluir en éstas la resolución de problemas por medio de operaciones básicas. Alternativamente, se pueden proponer tareas con un mayor nivel de complejidad, permitiendo establecer conexiones con otras áreas matemáticas y del saber. Por ejemplo, hacer un presupuesto para calcular el costo de pintar uno de los pabellones de la escuela (conexión con *Medidas* y *Geometría*), o bien hacer un estudio estadístico que permita determinar cuál de los grupos de la escuela tiene mejor promedio en alguna de las materias y argumentar posibles razones por las cuales se piensa que ello ocurre.

Las *pruebas escritas* deben ir en función del trabajo que se realiza en la clase. En este ciclo, todos los conocimientos pueden ser evaluados mediante ejercicios correspondientes al nivel de reproducción y conexión. Para los conocimientos relacionados al cálculo o estimación del resultado de una operación se debe elaborar previamente una escala que permita valorar la precisión de los resultados. La resolución de problemas que involucra la utilización de operaciones básicas se puede evaluar mediante problemas propuestos en la parte de desarrollo y que alcancen los niveles de conexión y reflexión. Por ejemplo:

Una maratón consiste en correr 42,195 km. El récord mundial lo tiene un etíope que la completó en aproximadamente 2 horas y 4 minutos. Determine cuántos metros por minuto recorrió aproximadamente.

Según los datos que se suministran a continuación, ¿cuántas personas poseen edades que van desde los 15 hasta los 60 años en la provincia de Alajuela?

Información sobre la provincia de Alajuela. Año 2011

Población total	885 571
Población menor que 15 años	305 208
Población mayor que 60 años	88 261
Tasa global de fecundidad (2010)	1,92
Tasa bruta de mortalidad (2010)	4,08
Tasa de mortalidad infantil (2010)	7,81
Extensión territorial en km^2	9 757,93
Densidad de población	90,75

Fuente: Elaboración propia con datos tomados del sitio http://www.inec.go.cr/Web/Home/pagPrincipal.aspx

Segundo ciclo, Geometría

Introducción

Durante el Primer ciclo, se adquieren diversas habilidades geométricas que se pueden resumir en el conocimiento intuitivo de las figuras, la identificación de sus elementos constituyentes, el trazado de algunas formas básicas, clasificación de ellas y nociones de ubicación espacial.

El Segundo ciclo deberá reforzar estas habilidades y avanzar en el reconocimiento de más figuras. Por otra parte se deberá profundizar en el estudio del triángulo y de los cuadriláteros, esto incluye la estimación y cálculo de perímetros y áreas.

Se hará un estudio elemental de la circunferencia y se avanzará en el conocimiento de otros cuerpos sólidos, además de los ya vistos en el ciclo anterior.

Esto prepara para un estudio posterior más formal de la Geometría.

Propósito de la enseñanza

El propósito de la enseñanza de la *Geometría* en este ciclo es continuar con el desarrollo de la capacidad de visualizar las formas geométricas y el establecimiento de relaciones básicas entre ellas. Además, se deducirán fórmulas básicas para calcular perímetros y áreas de figuras planas.

En este ciclo se seguirá desarrollando la intuición y la experimentación para ampliar los conocimientos geométricos.

Habilidades generales

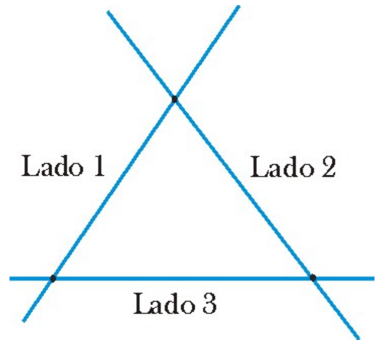
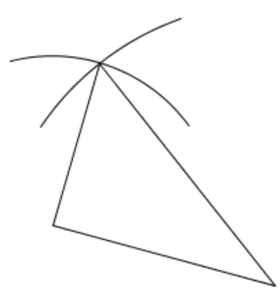
Las habilidades generales que deberán ser desarrolladas en *Geometría* al finalizar el Segundo ciclo son:

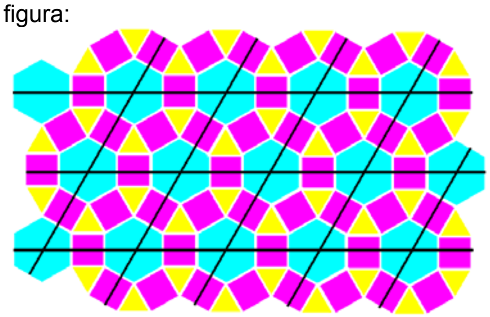
- Identificar figuras geométricas planas en el entorno y en diversos objetos.
- Identificar sólidos en el entorno y en diversos objetos.
- Clasificar figuras geométricas considerando el número de sus lados, las relaciones de posición entre ellos y sus aspectos métricos (ángulos, lados).
- Reproducir y trazar figuras geométricas.
- Abstraer algunas propiedades de las figuras geométricas.
- Aplicar el cálculo de perímetros y áreas de figuras poligonales y circulares en diversos contextos.
- Identificar y trazar figuras simétricas.
- Identificar relaciones entre figuras mediante giros y traslaciones.
- Utilizar vocabulario geométrico básico.

Se fortalecen actitudes y creencias positivas hacia las Matemáticas principalmente en lo que se refiere a su utilidad, pues en este ciclo el cálculo de áreas y perímetros muestra una aplicabilidad inmediata a situaciones de repartición de terrenos, el área de construcción de un proyecto, etc. También se desarrolla la perseverancia, la participación activa y colaborativa y el respeto, así como el aprecio y disfrute de las Matemáticas.

En cuanto a los procesos, se desarrollará un cierto grado de argumentación pues se debe distinguir las figuras geométricas y sus propiedades. Se manifiestan además procesos referentes a *Comunicar, Conectar* y *Representar*.

Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

4° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Triángulos • Lado • Vértice • Ángulo • Base • Altura • Clasificación según la medida de sus lados - Equilátero - Isósceles - Escaleno • Clasificación según la medida de sus ángulos - Acutángulo - Rectángulo - Obtusángulo	1. Identificar diversos elementos de los triángulos (lado, vértice, ángulo, base, altura). 2. Clasificar triángulos de acuerdo con las medidas de sus ángulos. 3. Clasificar triángulos de acuerdo con las medidas de sus lados. 4. Estimar, por observación, si un triángulo es acutángulo, rectángulo u obtusángulo. 5. Estimar, por observación, si un triángulo es equilátero, isósceles o escaleno. 6. Trazar triángulos utilizando instrumentos tales como regla, compás, transportador.	▲ Se pide trazar tres rectas que se cortan en tres puntos. Se colorea la figura formada y se observa: ¿Cuántos lados, cuántos vértices y cuántos ángulos?  ▲ Con ayuda de los triángulos del tangrama pueden identificar los diferentes elementos que tiene y la cantidad de cada uno. ▲ Brindarles una fotocopia con triángulos de diferentes tamaños y posiciones. Se les pide que midan con regla sus lados. Luego se pide que recorten y que los clasifiquen según las medidas que obtuvieron (en los que todos sus lados miden igual, los que tienen dos medidas iguales y los que no tienen ninguna medida igual). Se lleva a cabo la etapa de clausura con los conceptos de triángulo equilátero, isósceles y escaleno. ▲ Utilizando los mismos triángulos recortados se solicita que midan los ángulos y que los clasifiquen según las medidas obtenidas. Se realiza la clausura con los conceptos de triángulo acutángulo, rectángulo y obtusángulo. ▲ Identificar triángulos en los objetos de su entorno y clasificarlos por la medida de sus lados y por la medida de sus ángulos utilizando la observación. ▲ Trazar triángulos con la ayuda del compás y la regla siguiendo los pasos que la o el docente le indica para que sean equiláteros, isósceles o escalenos. 

Cuadriláteros • Lado • Vértice • Ángulo • Base • Altura • Diagonal • Paralelogramos - Rectángulo - Rombo - Romboide - Cuadrado • No Paralelogramos - Trapecio - Trapezoide	7. Identificar diversos elementos de los cuadriláteros (lado, vértice, ángulo, base, altura, diagonal). 8. Clasificar cuadriláteros en paralelogramos y no paralelogramos. 9. Clasificar paralelogramos en cuadrado, rectángulo, rombo y romboide. 10. Trazar cuadriláteros que cumplan características dadas. 11. Reconocer propiedades de cuadriláteros referidas a los lados, los ángulos y las diagonales.	▲ Para avanzar en el logro de estas habilidades, pueden trabajar con las piezas del tangrama para identificar entre ellas cuáles son cuadriláteros, o bien formar con ellas otros cuadriláteros e identificar sus elementos. Utilizando las piezas para la construcción de otras figuras, identificar cuadriláteros paralelogramos y no paralelogramos. ▲ Con ayuda de papel cuadriculado, trazar cuadriláteros paralelogramos, recortar y trazar los diferentes elementos para luego pegarlos en el cuaderno. ▲ Se observan y se verifican por medio de instrumentos de medición las propiedades de los lados (paralelos, perpendiculares, iguales) y de las diagonales (se cortan en el medio, iguales, perpendiculares). ▲ Trazar con la ayuda del compás y de la escuadra cuadrados y rectángulos usando sus propiedades. ▲ El doblado de papel es una estrategia útil para realizar construcciones geométricas y establecer propiedades. Actividades como el doblado de papel pueden propiciar el aprecio y disfrute por las Matemáticas.
	12. Clasificar los cuadriláteros no paralelogramos en trapecios y trapezoides. 13. Identificar estas figuras y sus elementos (vértices, lados, ángulos) en objetos del entorno. 14. Resolver problemas que involucren el trazado de diversos tipos de cuadrilátero.	▲ Se les puede brindar trapecios y trapezoides de cartulina en un sobre (sin mencionar estos conceptos) y se les pide formar dos grupos. Luego, se hace la clausura con los conceptos de trapecio y trapezoide. ▲ Se espera que encuentren los criterios de clasificación: los que tienen lados paralelos y los que no. ▲ Se les pide que mencionen objetos que tienen estas formas o que identifiquen estas figuras en el entorno.
Polígonos • Regulares • Irregulares	15. Reconocer en dibujos u objetos del entorno si una línea corresponde o no a un polígono. 16. Reconocer en dibujos u objetos del entorno polígonos regulares e irregulares.	▲ Se pretende que el estudiantado pueda determinar si una línea corresponde o no a un polígono, o bien si un polígono dado (dibujado o presente en un objeto) es regular o no. ▲ Puede ampliar el tema con ilustraciones de mosaicos y trazando hexágonos regulares con la ayuda del compás. Por ejemplo, identificar polígonos regulares e irregulares en la siguiente figura: 

<table>
<tr>
<td>Cuerpos sólidos

• Cubos
• Prismas rectangulares
• Planos
• Planos paralelos
• Planos perpendiculares</td>
<td>17. Identificar cubos y prismas rectangulares en objetos del entorno.

18. Identificar segmentos paralelos y perpendiculares en conexión con prismas rectangulares.

19. Identificar planos en conexión con las caras de los prismas rectangulares.

20. Aplicar el concepto de paralelismo y perpendicularidad de planos en conexión con prismas rectangulares.

21. Identificar diversos cuadriláteros en conexión con cubos y prismas en general.</td>
<td>▲ Tanto aquí como en los niveles anteriores, el estudio de los cuerpos sólidos pretende una familiarización con ellos como forma general tridimensional, con sus nombres y con los elementos que los definen. Esto implica trabajar con material concreto que permita explorar e identificar las características de cada cuerpo. Este tipo de actividades se pueden hacer en equipos donde se le da un sólido diferente a cada grupo para que determine sus características y las exponga a los demás grupos.

▲ La identificación de cuadriláteros en un cuerpo sólido está ligada al reconocimiento de las caras y cortes del sólido mediante planos.</td>
</tr>
<tr>
<td>Simetría

• Figura simétrica
• Eje de simetría
• Puntos homólogos
• Distancia de un punto al eje de simetría</td>
<td>22. Identificar los ejes de simetría de una figura.

23. Ubicar un punto homólogo a otro respecto a una recta.

24. Trazar una figura simétrica a otra respecto a una recta.

25. Estimar la distancia de un punto al eje de simetría.</td>
<td>Se puede presentar un dibujo como el siguiente y pedir a las y los estudiantes que coloreen las partes que faltan por colorear y que den una explicación de por qué utilizaron esos colores. Esto permitirá introducir el concepto de figura simétrica, eje de simetría y puntos homólogos.

Imagen con derechos adquiridos por el MEP

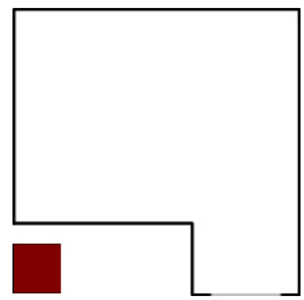
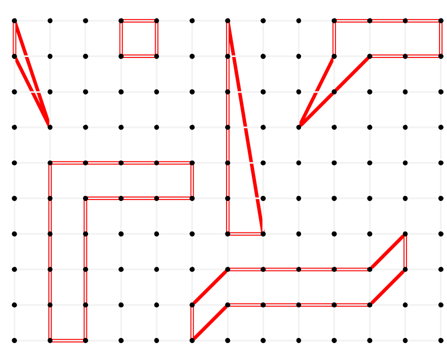
El proceso Comunicar se activa cuando se pide que se explique el porqué de los colores utilizados.

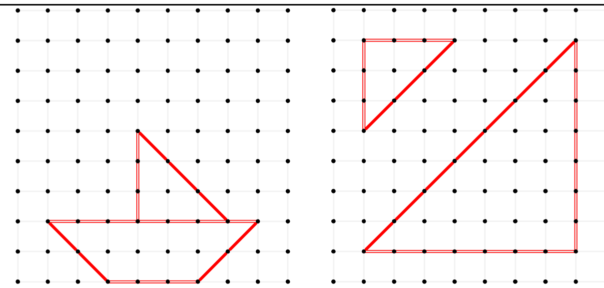
▲Manipulación con papel: con la mitad de una figura, por ejemplo una mariposa, se dobla y se dibuja la segunda mitad por transparencia. Se buscan puntos homólogos en las dos mitades simétricas.

▲ Con papel cuadriculado, trazar la imagen simétrica de una figura sencilla con respecto a una recta horizontal o vertical.

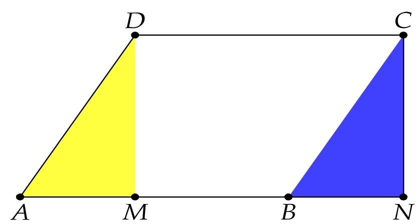
▲Se pretende que se puedan identificar figuras simétricas simples con sólo un eje de simetría. También, conviene usar figuras muy simples con más de un eje de simetría (por ejemplo un cuadrado), lo que permite trabajar con ejes de simetría horizontales, verticales y oblicuos.</td>
</tr>
</table>

		▲ La distancia de un punto al eje de simetría de una figura se estimará por medición con una regla graduada o mediante el trazado en papel cuadriculado. La distancia de un punto A a una recta es la medida del segmento perpendicular cuyos extremos son el punto A y el punto de intersección de la recta y el segmento.

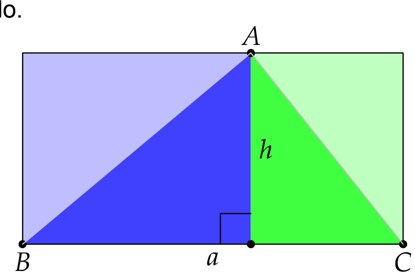
5° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Perímetro • Triángulos • Cuadrados • Rectángulos • Paralelogramos • Trapecios **Área** • Triángulos • Paralelogramos • Trapecios	1. Estimar perímetros y áreas de figuras en conexión con objetos del entorno. 2. Calcular, utilizando fórmulas, el perímetro y el área de triángulos, cuadrados, rectángulos, paralelogramos y trapecios. 3. Reconocer figuras simples dentro de una más compleja. 4. Calcular perímetros y áreas de figuras planas compuestas por triángulos, cuadrados, rectángulos, paralelogramos y trapecios. 5. Resolver problemas que involucren el cálculo de perímetros y áreas de triángulos y cuadriláteros.	▲ Para introducir la noción de área se puede proponer un problema como el siguiente: ☺ El siguiente es un dibujo del piso del cuarto de Juanita.  Los papás le van a poner mosaicos del tamaño del cuadrado de color café que se ve en la figura. ¿Cuántos necesitan para cubrir el piso? Las y los estudiantes establecerán estrategias para realizar el conteo, lo que permite llevar al concepto de área, tomando en este caso el cuadrito como unidad de medida. ▲ Para diferenciar las nociones de perímetro y área se pide trazar un rectángulo, colorear en verde el contorno (perímetro) y rellenar el rectángulo de cuadritos de 1 cm^2. Así se construye el concepto de área y la fórmula del área del rectángulo. Se les pide que hagan lo mismo con la figura de un cuadrado. ▲Se trabaja la noción de área con el geoplano (cada estudiante puede construir el suyo en la casa). Tomando como unidad de medida el área del espacio entre 4 clavitos, se ordena calcular el área de figuras desplazando las ligas. 



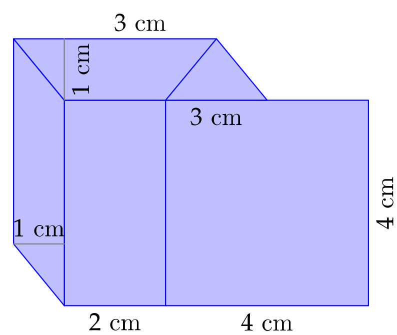
▲Para construir y establecer la fórmula de cálculo del área del paralelogramo, se trabaja con el geoplano desplazando ligas o con papel cuadriculado recortándolo para formar un rectángulo.



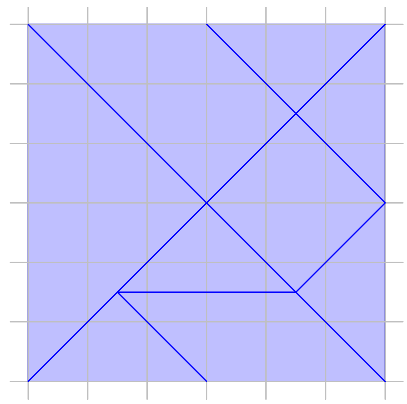
▲ Para construir y establecer la fórmula de cálculo del área del triángulo, se coloca éste dentro de un rectángulo y se introduce la noción de altura. El área del triángulo medirá la mitad del área del rectángulo.

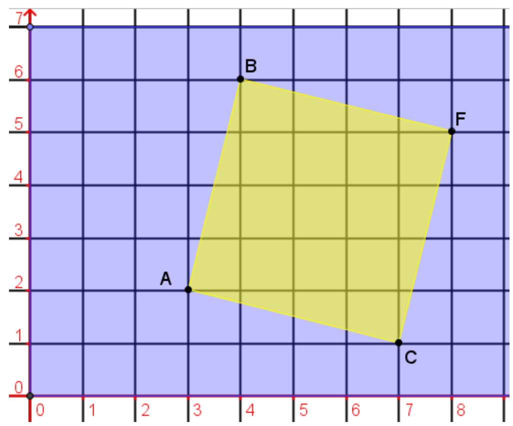
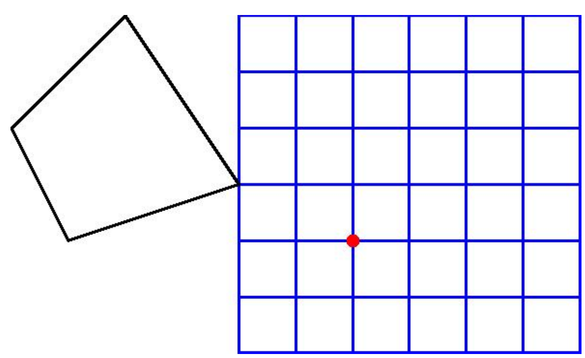


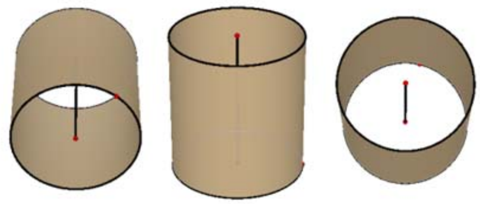
▲Brindar problemas donde se requiere el área total de una figura para que apliquen las diferentes fórmulas. Por ejemplo, calcular el área de la siguiente figura:

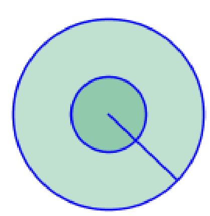


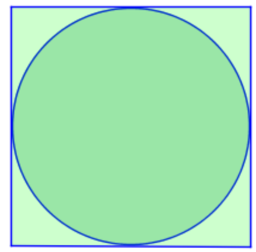
Con el estudio de las áreas debe quedar clara la estrecha relación existente entre *Geometría* y *Relaciones* y *Álgebra* y entre *Geometría* y *Números*.

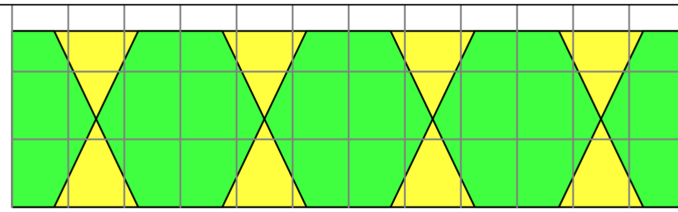
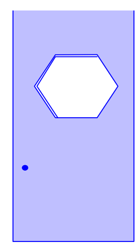
	6. Plantear problemas utilizando los conocimientos adquiridos de áreas y perímetros de figuras.	Se activa el proceso *Plantear y resolver problemas* cuando se les solicita que construyan un problema, con determinada información o representación gráfica, relacionada con conocimientos adquiridos acerca de perímetros y de áreas de polígonos (triángulos, cuadrados, rectángulos, paralelogramos y trapecios). Se puede facilitar la siguiente figura en una hoja fotocopiada, la cual corresponde al cuadrado que se forma con las partes del tangrama:  Posteriormente, se propone formular un problema que utilice esta figura o las que la componen. Por ejemplo, se podrían enunciar las siguientes interrogantes con base en la figura: a. ¿Cuál es el área del cuadrado mayor y cuál es el área del cuadrado menor? ¿Cuánto más grande es el cuadrado mayor con respecto al menor de acuerdo con su área? b. Construya utilizando todas las partes del tangrama dos figuras que tengan igual área. c. Construya utilizando todas las partes del tangrama dos figuras que tengan igual perímetro. La búsqueda de un problema basado en una situación dada puede requerir tiempo de reflexión por parte de las y los estudiantes, esto estimula la perseverancia.
Geometría Analítica • Puntos • Figuras	7. Representar puntos y figuras utilizando coordenadas en el primer cuadrante.	Se utiliza un sistema de referencia con indicaciones de los puntos cardinales. Esto permitiría localizar puntos en el plano. Por ejemplo, se puede realizar una actividad donde el cuadriculado del piso del aula represente un sistema de coordenadas; un vértice de uno de los cuadros es el punto de referencia, de modo que a la derecha de él está el Este (si no se cuenta con un piso cuadriculado se puede utilizar unidades de medida específicas para realizar los desplazamientos). Luego se solicita a varias personas caminar una determinada distancia al Este y otra al Norte y que se posicione ahí. Por ejemplo: a. Una persona A que camine 3 cuadros al Este y 2 al Norte.

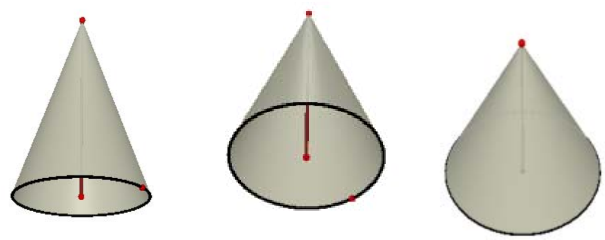
		b. Otra persona B que camine 4 cuadros al Este y 6 al Norte. c. Una persona C que camine 7 cuadros al Este y 1 al Norte. d. Una persona D que camine 8 cuadros al Este y 5 al Norte. Posteriormente, se solicita a las demás determinar el tipo de figura que ellas formaron. Luego se puede proponer que inten-ten formar un rectángulo y que describan las coordenadas necesarias para ello.  Esta actividad es un ejemplo de participación activa y colaborativa para lograr un aprendizaje más significativo.
Transforma-ciones • Traslaciones	8. Reconocer figuras que se obtienen mediante trasla-ción de otras.	▲ Se puede comenzar con el desplazamiento de una persona o deslizando objetos o figuras sobre el piso o sobre cualquier superficie plana. ▲ Dada una figura, cada estudiante podrá trazar otra que se traslada a otra posición, utilizando papel cuadriculado. Se le puede pedir que traslade el cuadrilátero que se da en la figura al cuadriculado de modo que uno de los vértices sea el punto rojo.  Luego se le pregunta sobre qué elementos del cuadriláte-ro permanecen invariantes (se deberá expresar en su propio vocabulario que las medidas de los ángulos y de los lados permanecen constantes). Proceso involucrado: *Comunicar*.

Cuerpos sólidos • Prismas • Cilindros • Altura	9. Reconocer prismas y algunos de sus elementos y propiedades (caras, bases, altura). 10. Reconocer cilindros y algunos de sus elementos y propiedades (bases, superficie lateral, eje, altura, radio y diámetro de la base).	▲ Muchos objetos tienen estas formas. Se puede solicitar como tarea llevar a la clase objetos que tengan esas formas. La y el docente debe saber que se trata de cilindros circulares rectos, aunque a las y los estudiantes solo se les dirá que son cilindros. A través de un software se pueden mostrar varias vistas de un cuerpo sólido. 

6° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Circunferencia • Diámetro • Radio • Centro • Cuerda • Ángulo central • Cuadrante • Número π • Longitud • Área	1. Resolver problemas que involucren el cálculo de perímetros y áreas de diversas figuras. 2. Identificar circunferencias en dibujos y objetos del entorno. 3. Identificar elementos de una circunferencia (diámetro, radio, centro, cuerda, ángulo central, cuadrante). 4. Estimar la medida de la circunferencia conociendo su diámetro. 5. Identificar π como la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. 6. Utilizar el número π para calcular la medida de circunferencias. 7. Calcular el área de círculos. 8. Calcular el área de figuras compuestas por círculos, triángulos y cuadriláteros.	▲ Utilizando lana, cintas de papel y objetos cilíndricos puede darse una idea del significado de π, así como de su valor aproximado. Se solicita previamente a cada estudiante traer un objeto de forma circular o cilíndrica y varias tiras largas de papel. Cada quien tomará la cinta de papel y la colocará de tal modo que coincida con la circunferencia que se puede identificar en el objeto. Es probable que deba cortar o añadir parte de la cinta con el propósito de que ésta se ajuste lo mejor posible al borde o forma circular. Hecho lo anterior, se retira momentáneamente la cinta y se procede a tomar otra que se extienda lo correspondiente al diámetro de la forma circular utilizada con anterioridad. Se pide a la clase que comparen la longitud de las dos cintas para buscar una relación. Se espera que manifiesten que sin importar su longitud, la circunferencia es aproximadamente el triple del diámetro respectivo. Luego se busca reflexionar sobre la exactitud de dicha afirmación y se procede a la clausura con la sistematización del concepto del número π y de la fórmula que permite el cálculo de la circunferencia. ▲ Proponer problemas para hallar la medida de la circunferencia utilizando el diámetro, como por ejemplo: El fondo de un plato tiene un radio de 6 cm. Si el diámetro de todo el plato es de 30 cm, ¿cuál es la circunferencia del fondo del plato y la del borde del plato?  ▲ Se puede estimar el área de círculos y luego proporcionar la fórmula.

		▲ Proponer problemas para hallar la medida del área de diferentes figuras, como por ejemplo: Carlos dibujó un círculo del tamaño exacto de una hoja cuadrada de 28 cm de lado, luego lo recortó. ¿Cuál es el área del sobrante de la hoja y el área del círculo recortado?  Se puede solicitar que construyan un problema con base en el siguiente artículo del Reglamento de la Ley No. 7600 sobre la igualdad de oportunidades para la persona con discapacidad: ARTICULO 110.- Dormitorio principal El dormitorio principal de la vivienda deberá disponer de por lo menos un espacio libre de maniobra con un diámetro mínimo de 1,50 m. Idealmente, esta área debería estar ubicada enfrente de los armarios de los dormitorios. Un espacio libre con un ancho mínimo de 0,90 m debe proporcionarse por lo menos a un lado de la cama. Un pasadizo de 1,20 m de ancho debe proporcionarse entre los pies de la cama y la pared opuesta. Este tema está relacionado con el eje transversal *Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz.* Un detalle histórico que puede introducirse como medio para conectar *Geometría* con Geografía es la forma como Eratóstenes realizó una medida aproximada del radio terrestre. Es muy importante que se generen los espacios apropiados para escuchar las respuestas y los razonamientos utilizados por las y los estudiantes. Sólo de esta forma se podrá corregir a tiempo los errores de aprendizaje y aplicar las medidas correctivas. Procesos involucrados directamente: *Comunicar*, *Razonar y argumentar.*
Polígonos regulares • Ángulo central • Radio • Apotema	9. Identificar diversos elementos en un polígono regular. 10. Trazar polígonos regulares utilizando regla, compás, transportador.	▲ Para iniciar el estudio de los polígonos regulares y sus áreas se puede proponer inicialmente un problema como el siguiente: Un muro tiene el siguiente diseño:

• Área • Perímetro	11. Identificar elementos de un polígono inscrito en una circunferencia (ángulos centrales, radio, apotema). 12. Calcular el perímetro de polígonos regulares. 13. Resolver problemas que involucren el cálculo de perímetros y áreas de diversas figuras relacionadas con polígonos y circunferencias.	 Se va a pintar utilizando dos colores: verde y amarillo, tal como se indica en el dibujo (cada cuadrito mide un metro de lado). Generalmente la pintura se vende por galones, cada galón cubre aproximadamente 30 metros cuadrados. Realice un estimado de la cantidad de pintura de cada color que se requiere si se le va a dar una sola mano de pintura al muro. ▲ Se estudiarán polígonos regulares de máximo diez lados. ▲ Con regla y compás se puede construir fácilmente el triángulo equilátero y el hexágono regular. Otros polígonos pueden ser trazados utilizando regla y transportador. ▲ Al construir polígonos inscritos en una circunferencia se les puede indicar que identifiquen con colores diferentes la apotema, los ángulos centrales y el radio. ▲ Proponer problemas donde se debe encontrar el área de polígonos regulares, como por ejemplo: Una puerta mide 95 cm de ancho y 220 cm de alto. En la parte superior tiene un vidrio en forma hexagonal de 30 cm de lado. ¿Cuál es el área de la puerta sin el vidrio?  Los problemas referidos a situaciones cotidianas desarrollan en la o el estudiante la confianza en la utilidad de las Matemáticas. Problemas como el anterior hacen conexiones con el área de *Medidas* y con situaciones cotidianas.
Cuerpos sólidos • Cubo • Prismas • Cilindros • Conos • Pirámides • Esfera	14. Clasificar cuerpos sólidos por su forma.	▲ Brindar material fotocopiado con figuras que representan partes de ciertos cuerpos para que ellos los puedan observar, reconocer, recortar y pegar para formar cuerpos geométricos. Se puede pedir al grupo que elabore una tabla que indique la cantidad de objetos de esas formas que hay en el aula o en la institución y organice la información de acuerdo con sus características. Esto conecta con el área de *Estadística y Probabilidad.* Los trabajos y descubrimientos de Arquímedes concernientes a la comprensión de las relaciones entre los cuerpos sólidos pueden constituir un elemento motivador para la o el estudiante. Él demostró que si se tiene un cilindro y una esfera

		inscrita en él, entonces tanto las superficies como los volúmenes de estos cuerpos sólidos están en razón 3:2. Como detalle curioso: un día Arquímedes estaba muy concentrado estudiando una figura geométrica que había dibujado en la arena, uno de los soldados romanos que habían invadido Siracusa le pidió varias veces que lo acompañara; sin embargo, Arquímedes no le hizo caso, por lo que el soldado sacó su espada y lo mató. A través de un software se pueden mostrar varias vistas de un cuerpo sólido. 
	15. Calcular el volumen de los cuerpos sólidos simples: cubo, prisma, cilindro, cono, pirámide y esfera.	▲ Se puede introducir el tema de volúmenes con el caso particular del cubo de una unidad de arista y así poder construir el concepto de unidad cúbica. Por ejemplo: En un “kinder” se tienen 64 cubos de madera de diferente color y de un decímetro de arista. Si se desea guardarlos en una caja de madera, entonces ¿cuáles podrían ser las dimensiones de la caja?  **Imágenes cortesía de FreeDigitalPhotos.net** Lo interesante de este problema es que hay varias soluciones correctas. Por ejemplo, una de ellas puede ser una caja en forma de cubo de 4 dm de arista, otra solución puede ser una caja de 8 dm de largo, 4 dm de ancho y 2 dm de altura. Es importante en este problema poder llevar al concepto de volumen de un cuerpo sólido por medio de la unidad cúbica. Además con este ejemplo se puede construir la fórmula del volumen de un prisma. ▲ Sobre el volumen de cilindros, conos, pirámides y esferas se hacen algunas observaciones en la sección de indicaciones metodológicas.

La siguiente situación refiere a los ejes transversales:

El compostaje es el procesamiento controlado de residuos orgánicos para que sean descompuestos por microorganismos aeróbicos y se obtenga un producto llamado compost que se puede utilizar como abono orgánico.

Es una práctica utilizada tanto para reducir el efecto contaminante de residuos orgánicos de la actividad agropecuaria como para aprovechar materiales orgánicos tales como vegetales y boñiga de animales, los cuales se transforman rápidamente en abono orgánico, mejorando así la fertilidad del suelo.

La siguiente es una forma sencilla y práctica de hacer compost. Se escoge un lugar lo suficientemente despejado, plano y limpio, de manera que facilite la preparación de la mezcla.

Primero se coloca una capa de 10 centímetros de espesor de estiércol (boñiga) ya sea de vaca, caballo, conejo, cabra, oveja o gallina. Esta capa se humedece con agua de melaza proveniente de la mezcla de 1 parte de melaza con 5 partes de agua.

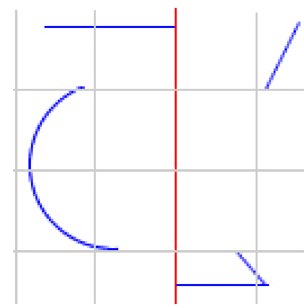
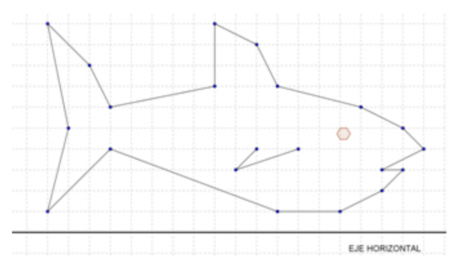
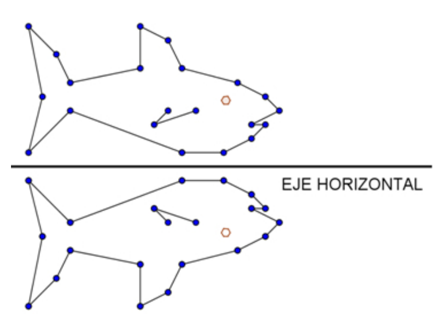
Luego se coloca encima una capa de 20 cm de espesor de material vegetal picado en pequeños trozos, pueden ser residuos de frutas, ramas, etc.

Esta segunda capa también se riega con agua de melaza. Se pueden ir colocando varias capas alternativamente de estiércol y material vegetal, una sobre otra sin que la altura total sobrepase un metro.

Fuente: Ministerio de Agricultura y Ganadería. Recuperado de http://www.mag.go.cr/bibliotecavirtual/index.html#HERMES_TABS_6_1)

▲ Esta lectura tiene un contenido matemático importante que puede ser utilizado para redactar diversos problemas. Por ejemplo, ¿cuál es el volumen de la mezcla si se ponen 2 capas de estiércol y dos de material vegetal sobre una superficie rectangular de 5 dm por 1,2 m? Esto conecta con el área de *Medidas* y está relacionado con los ejes transversales.

También se puede hacer una conexión con *Relaciones y Álgebra* en la parte de proporciones (melaza/agua).

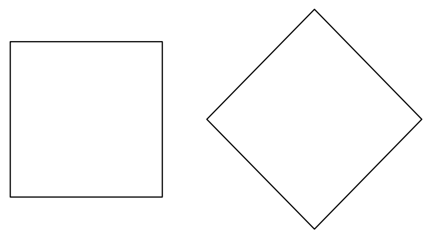
Simetría	16. Reconocer, reproducir y trazar figuras simétricas. 17. Plantear problemas referidos a la simetría de figuras y a su reproducción.	▲ Se trata del reconocimiento de figuras simétricas con un mayor nivel de complejidad que en el 4° Año, además de la reproducción de figuras simétricas y el trazado de figuras simétricas con características dadas. ▲ Una actividad que puede mejorar la comprensión del concepto es dar un eje y algunas partes de una figura simétrica para que la o el estudiante complete la figura.  Se puede pedir que se dibuje una figura en papel cuadriculado y se proponga como ejercicio su reproducción tomando en cuenta un eje de simetría previamente escogido. Proceso: *Plantear y resolver problemas.* Por ejemplo, alguien puede proponer el siguiente ejercicio: Reproduzca la siguiente figura al otro lado del eje horizontal, de tal forma que cada punto de la nueva imagen esté a la misma distancia del eje de simetría que los puntos de la figura original.  Entonces los dos peces forman una figura simétrica con respecto al eje horizontal: 

Indicaciones metodológicas

Generales para el ciclo

1. En este ciclo se debe implementar actividades que permitan la experimentación con contenidos geométricos. Por ejemplo, para investigar relaciones con áreas puede utilizarse material recortable y también software de geometría dinámica como una herramienta útil para la experimentación geométrica.

2. Es medular el sentido espacial; esto implica la manipulación, la construcción y el trazado de figuras, visualizándolas en diferentes perspectivas o posiciones. Esto es de suma importancia porque las y los estudiantes pueden tener dificultades para reconocer las figuras si éstas se trazan siempre en la misma posición. Por ejemplo, es usual que un cuadrado se represente en la posición que se da abajo a la izquierda, de esta forma tienen dificultades para reconocer que el que aparece a la derecha es también un cuadrado; en general lo ven como un rombo y no como un cuadrado. Esto tiene que ver también con el conocimiento de las propiedades de la figura en cuestión.



3. Es primordial repasar los conceptos y habilidades adquiridos en el ciclo anterior mediante problemas que se relacionen con los nuevos conocimientos.

4. Igual que en el Primer ciclo, se deben utilizar recursos variados tales como: tangrama, doblado de papel, papel cuadriculado, cartulina, papel para calcar, cuerda, cubo soma, geoplano, materiales impresos (periódicos, revistas, volantes de propaganda), cajas, rollo de papel higiénico, diversos objetos.

5. Al usar materiales hay que tener en cuenta que se requiere de un cierto tiempo para explorar y familiarizarse con ellos antes de llevar a cabo tareas específicas.

6. Progresivamente, en su argumentación cada estudiante irá pasando del lenguaje natural al lenguaje matemático y la simbología apropiada.

Cuarto año

1. En el Primer ciclo la atención se centró en el reconocimiento y clasificación de figuras. En el caso de las figuras planas, la clasificación básica está relacionada con el número de lados. En 4° Año se va un poco más allá; un triángulo no sólo es una figura poligonal de tres lados, que es una característica común a todos los triángulos, sino que entre los mismos triángulos hay otras diferencias que corresponden a patrones que pueden ser observados y que permiten clasificarlos en subcategorías según ciertos criterios. Deberá por lo tanto plantearse actividades que permitan visualizar dichas clasificaciones. Se da una serie de triángulos y se pide que se identifiquen qué cosas tienen en común y qué características los diferencian observando sus ángulos u observando relaciones entre las medidas de sus lados. Estos temas se iniciarán mediante problemas que permitan repasar los conocimientos previos y lleven a los nuevos conocimientos.

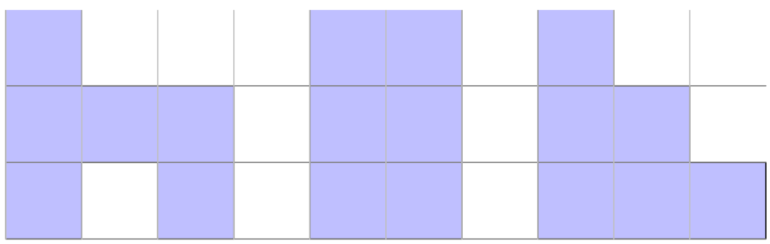
2. Del mismo modo, la o el estudiante deberá clasificar los cuadriláteros de acuerdo con características específicas que éstos cumplan. Inicialmente, se clasificarán según las propiedades; por ejemplo, si se quiere el reconocimiento de paralelogramos se le presentan varios cuadriláteros y se pide encontrar todos los que tengan un par de lados paralelos, luego encontrar los que también tienen los otros dos lados paralelos. La asignación de un nombre vendrá cuando se hayan captado las propiedades que permiten clasificar ese tipo de formas.

3. Se puede proceder de modo semejante para fortalecer el reconocimiento de polígonos regulares e irregulares.

4. Para reforzar el reconocimiento de simetrías se pueden brindar diversas figuras trazadas en papel o en cartulina. Se busca que los y las estudiantes identifiquen cuáles son simétricas y que tracen un eje de simetría. Luego que recorten las figuras y las doblen por el eje de simetría trazado para verificar si efectivamente la figura es simétrica.

Quinto año

1. Proponer actividades que refuercen los conceptos de área y perímetro y que al mismo tiempo aclaren la diferencia entre ambos. Por ejemplo, se pueden ofrecer las siguientes figuras:



   Se pide determinar el área y el perímetro de cada figura celeste si cada cuadrito mide un centímetro de lado. Luego se pueden proporcionar figuras con otras áreas.

2. Las fórmulas para el cálculo de áreas deben ser deducidas por las y los estudiantes mediante actividades que los lleven a ello. Para esto es muy útil el uso de material concreto o software de geometría dinámica. Por ejemplo, pueden investigar, por diferentes medios, la relación entre las áreas de un rectángulo y un paralelogramo no rectángulo que tengan la misma base y la misma altura. Utilizando diversas medidas para la base y la altura pueden llegar a conjeturar que ambos tienen la misma área.

3. En cuanto a la representación de puntos y figuras utilizando coordenadas, se puede empezar con direcciones para moverse de un lugar a otro dentro de su clase o en su escuela, a partir de un punto de referencia. Por ejemplo, hacer un croquis en papel cuadriculado tomando como punto de referencia la entrada principal de la escuela y los puntos cardinales. Luego, ubicar edificios o lugares de la comunidad como: la plaza de futbol, el parque, el salón comunal, etc.

4. Otra actividad que puede reforzar el uso de coordenadas puede consistir en presentar una lámina como la siguiente:

Imagen con derechos adquiridos por el MEP

Se les pide idear un sistema que permita dar una localización de las imágenes en la lámina. Luego, utilizando dicho sistema, dar la ubicación del bebé o de la jeringa, etc.
La misma lámina pero sin las letras y los números indicadores puede servir como un problema inicial para introducir las coordenadas.

5. En cuanto a las traslaciones, se busca que estén en capacidad de predecir la figura que se obtendrá mediante traslación de una figura previamente trazada. También, dadas varias figuras planas podrán determinar cuáles son traslaciones de una u otras.

6. Es relevante ligar las traslaciones con las coordenadas. Por ejemplo, en papel cuadriculado se da una figura y se puede pedir dibujar la traslación que se obtiene al trasladarla 4 unidades hacia la derecha y dos unidades hacia arriba.

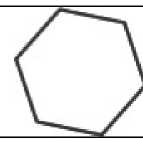
Sexto año

1. Un uso correcto del compás y el conocimiento del significado del radio de una circunferencia pueden potenciar actividades de construcción de polígonos.

   Actividad de construcción del triángulo equilátero. Se dan las siguientes instrucciones:
   a. Trace un segmento.
   b. Apoyando la punta metálica del compás en un extremo del segmento dibuje un arco de circunferencia.
   c. Apoyando la punta metálica del compás en el otro extremo del segmento dibuje un arco de circunferencia.
   d. Marque el punto donde se cortan ambos arcos.
   e. Trace el triángulo cuyos vértices son los dos extremos del segmento y el punto donde se cortan los arcos de circunferencia.

   Luego se pide que justifique por qué el triángulo que se obtiene es equilátero. Esto da la oportunidad de que argumenten y comuniquen las ideas al respecto.

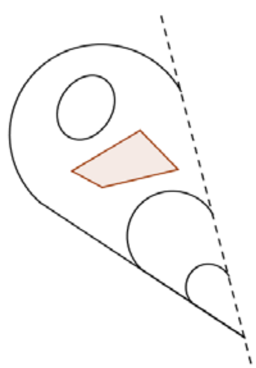
   Otra actividad es la construcción de un hexágono regular a partir de un círculo de radio, por ejemplo, de 5 cm.

Se traza un segmento de 5 cm con la regla.	
Con el compás se traza un círculo cuyo radio mida la misma longitud del segmento anterior.	
Se procede a realizar 6 trazos sobre la circunferencia con el compás, sin variar su abertura.	
Se forman los segmentos del hexágono con la regla. Sus extremos son las marcas realizadas en el paso anterior.	

Imágenes con derechos adquiridos por el MEP

Finalmente se puede explorar por medio del transportador o la regla las medidas de los diversos ángulos y segmentos presentes en la figura y luego sistematizar algunas características. Esta actividad permite introducir también conceptos como el de polígono inscrito en una circunferencia y sus elementos como ángulo central, radio y apotema.

2. El uso de software con enfoque geométrico se puede convertir en una herramienta poderosa para desarrollar la visualización de las propiedades y transformaciones de las figuras geométricas. Se puede, por ejemplo, realizar actividades de construcción de figuras simétricas, dados un eje de simetría y una parte de la figura, como la siguiente:

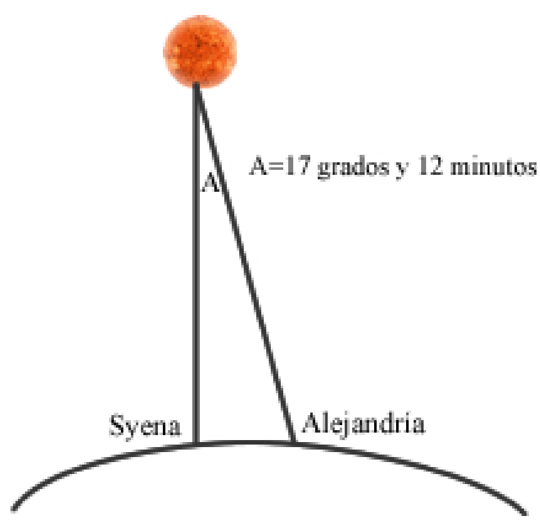


3. Otro uso de la tecnología como herramienta didáctica está relacionado con los videos. Por ejemplo, se pueden encontrar muchos videos en Internet sobre el significado y la historia del número pi. Estos pueden utilizarse en la clase como elemento explicativo y motivador del tema. A continuación se proporcionan dos direcciones en Internet con videos acerca del número pi:
http://www.youtube.com/watch?v=HEJMWGTeChU&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=FGXWLINm7pk&feature=relmfu

4. Algunas actividades para estimar áreas pueden estar ligadas con situaciones de interés para las y los estudiantes. Por ejemplo, en la siguiente toma aparece el estadio nacional (Google maps). Dada la escala que se indica, se busca estimar el área de la cancha de fútbol y el área de la pista atlética. Para eso se deberán ofrecer indicaciones sobre qué superficie corresponde a la pista o a la cancha y hacer otro tipo de consideraciones (posibles sombras, etc.).

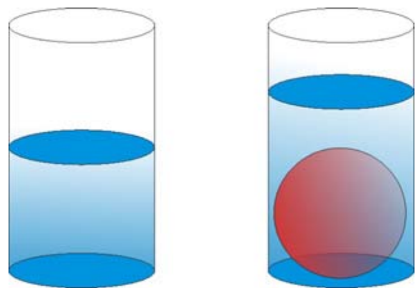
5. El cálculo del área del hexágono regular requiere del conocimiento de la apotema del mismo, lo que presenta una dificultad conceptual en este nivel, dado que la razón entre la medida de la apotema y la medida del lado del hexágono es el número irracional $\sqrt{3}/2$. La aproximación de este número, con dos decimales, es 0,86. Esto significa que no se puede decir, por ejemplo, que un hexágono tiene lado 6 y apotema 4 para generar un problema puesto que estaría alejado de la realidad. En el caso de un hexágono regular de lado 6, la apotema aproximada con dos decimales es 5,19. En conclusión, para obtener una aproximación aceptable de la apotema de un hexágono regular debe multiplicarse el lado por 0,86. Para cada polígono regular hay un valor por el que hay que multiplicar la medida de su lado para obtener la medida de la apotema: para el pentágono regular la apotema es aproximadamente 0,69 por el lado, para el heptágono regular la apotema es aproximadamente 1,04 por el lado, etc.

6. Como elemento motivador, se puede contar la historia de cómo en la antigüedad Eratóstenes logró estimar el radio de la Tierra sin ningún instrumento sofisticado. Eratóstenes nació cerca del año 276 a. C. y murió cerca del año 194 a. C. Es famoso porque logró dar una medida bastante acertada del radio de la Tierra. Usó, desde luego, un método indirecto. Él se dio cuenta de que a mediodía del día de solsticio de verano, el Sol alumbraba directamente en vertical el fondo de un pozo muy profundo en la localidad de Syena (en el actual Egipto).



Al mismo tiempo, en la ciudad de Alejandría, localizada aproximadamente en el mismo meridiano y a 5000 estadios (un estadio es aproximadamente 158 m) al Norte de Syena, la sombra que proyectaba el sol indicaba que la distancia angular del Sol al cenit era de un 1/50 de una circunferencia completa (aproximadamente 7 grados con 12 minutos). Esto le permitió saber que la circunferencia de la Tierra es 50 veces la distancia entre Syena y Alejandría.

7. La fórmula para determinar el volumen de un paralelepípedo (caja) es igual al área de la base por la altura; esto puede ser deducido por las y los estudiantes utilizando cubitos de una unidad de arista, tal como se consignó en las indicaciones puntuales. A partir de aquí, cada estudiante puede deducir que también el volumen de un cilindro se calcula multiplicando el área de la base (círculo) por la altura. El volumen de la esfera puede deducirse por experimentación, introduciendo objetos esféricos en un recipiente cilíndrico con agua y midiendo el cambio en la altura del nivel del agua; el cambio en el nivel multiplicado por el área de la base del cilindro da el volumen de la esfera.



Si se hace con esferas de diferentes diámetros se puede observar un patrón y deducir la fórmula para el volumen de la esfera.

Cuenta la historia que Blas Pascal (1623 – 1662) realizó un experimento que le permitió deducir el volumen de un cono. Construyó un cono y un cilindro con el mismo radio de la base y la misma altura que el cono. Llenó el cono de arena y lo vació en el cilindro, hizo esto tres veces y el cilindro quedó completamente lleno, descubriendo así que el volumen del cono es un tercio del área de su base por la altura. Se puede realizar este experimento y otro análogo con prismas y pirámides para ver que el volumen de la pirámide es un tercio del área de su base por la altura.

Indicaciones de evaluación

Las habilidades que tienen que ver con estimaciones por observación pueden ser evaluadas de manera natural en el *trabajo cotidiano*. Es conveniente observar con qué frecuencia cada estudiante acierta al realizar observaciones sobre las figuras. Es importante evaluar el uso correcto de los instrumentos, así como la manera y la frecuencia con la que se participa en las actividades propuestas. La evaluación del reconocimiento y clasificación de figuras se puede realizar de forma oral, utilizando objetos presentes en el entorno o bien aquellos que la o el docente aporte (fotografías, ilustraciones, etc.).

En el *trabajo extraclase* se pretende reconocer las figuras geométricas en contextos diferentes a los del entorno escolar. Por ejemplo, para 6º Año una tarea puede consistir en que las y los estudiantes elaboren una lista de objetos que tienen en sus casas, cuyas formas sean cajas, cubos, esferas, cilindros; que hagan un bosquejo de ellas y calculen sus volúmenes.

Para este ciclo la *evaluación* en el área de *Geometría*, debe tener presentes las siguientes indicaciones.

- ✓ En cuanto al reconocimiento de figuras, deberán reconocerlas en dibujos o fotografías; por ejemplo en un plano, reconocer cuántos triángulos aparecen.

- ✓ Se debe evaluar la identificación de diversos elementos de las figuras planas y de los cuerpos sólidos.

- ✓ Dados diversos triángulos, con medidas de lados y ángulos, podrán clasificarlos según los criterios de medida de ángulos y medida de lados. Del mismo modo podrán clasificar los cuadriláteros, utilizando los criterios estudiados (si son cuadrados, rectángulos, paralelogramos, rombos, trapecios, trapezoides).

- ✓ La evaluación del cálculo y aplicación de perímetros y áreas puede hacerse de forma escrita. Para ello se puede brindar una figura con cierta información y pedir los cálculos pertinentes. Es recomendable, en esta parte, la evaluación mediante problemas contextualizados que permitan establecer conexiones sencillas con otras áreas matemáticas o asignaturas.

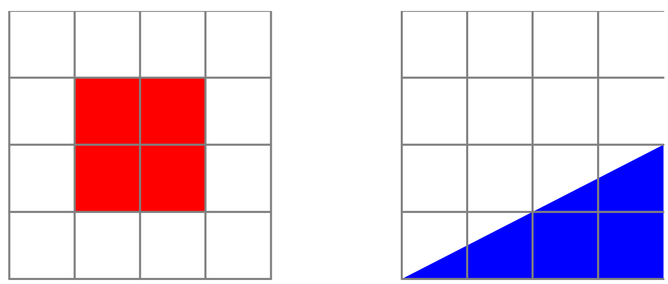
- ✓ Es muy importante evaluar el trazado de figuras considerando únicamente el uso apropiado de instrumentos, dejando de lado la destreza del estudiante y la precisión de la figura. Esto puede desarrollarse durante el *trabajo cotidiano*.

- ✓ Para evaluar la ubicación en el plano mediante coordenadas, en una *prueba escrita u oral* se puede brindar un plano, por ejemplo de una ciudad, con las indicaciones del Norte y el Este y un punto de referencia que puede ser el parque u otro punto importante. Se pide que ubique qué se encuentra, por ejemplo, 200 m al Este y 100 m al Norte del punto dado, o pedirse las coordenadas de un negocio u otro punto.

- ✓ Las simetrías se pueden evaluar proporcionando dibujos y preguntando cuáles son simétricos; en un nivel de evaluación superior se puede dar una recta y pedir que se dibuje una figura simétrica con eje de simetría en la recta dada. En cuanto a traslaciones se puede pedir que se reproduzca una figura trasladada a una posición determinada. Esto se puede hacer en *pruebas escritas*.

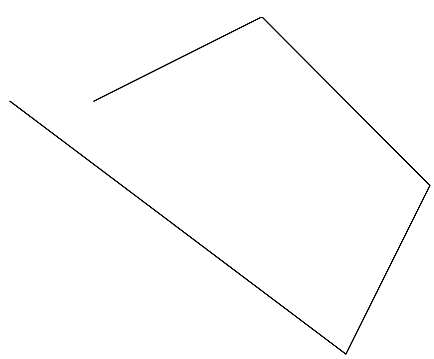
Por ejemplo, el siguiente ítem sirve para evaluar si se tiene claro el concepto de área:

Las dos cuadrículas tienen las mismas dimensiones, ¿cuál de las áreas es menor, la azul o la roja?



El siguiente ítem permite evaluar el concepto de polígono y además tiene que ver con los procesos *Comunicar* y *Razonar y argumentar*:

Explique por qué la siguiente figura no es un polígono.



Segundo ciclo, Medidas

Introducción

En el Segundo ciclo se pretende una idea más clara de lo que es la medición, su importancia y su utilidad en asuntos que tienen que ver con la vida cotidiana, particularmente en medidas de longitud, moneda, peso, tiempo y capacidad.

Este ciclo deberá afirmar el concepto de medición, así como ampliar el panorama en cuanto a las situaciones en las que se aplican las medidas. Se profundizará en las medidas estudiadas en el ciclo anterior y se estudiarán otras: superficie, volumen y temperatura. Por otra parte, se estudiará con detalle el sistema métrico decimal.

Lo anterior debe preparar para reconocer la presencia de la medición en diferentes contextos y para su uso en situaciones cotidianas, en diversas áreas de las Matemáticas y en otras disciplinas.

Propósito de la enseñanza

El propósito de la enseñanza en *Medidas,* para este ciclo, es ampliar el conocimiento que traen las y los estudiantes en esta área y prepararlo en la comprensión y la aplicación del sistema métrico decimal.

Habilidades generales

Las habilidades generales que se deberán lograr en el área de *Medidas* al finalizar el Segundo ciclo son:

- Realizar mediciones (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad, superficie, volumen, temperatura).
- Estimar medidas (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad, superficie, volumen, temperatura).
- Aplicar el sistema métrico decimal.
- Aplicar la medición en diversos contextos.

Las medidas permiten ampliar la contextualización de los objetos matemáticos y visualizar la utilidad de esta materia en diferentes dimensiones de la vida estudiantil.

Las distintas posibilidades de expresar las unidades de medida ofrecen ocasiones para apoyar el proceso *Representar*. En este ciclo las y los estudiantes pueden comunicar fácilmente los resultados obtenidos en la medición. La resolución de problemas y modelización se plantean de una manera muy sencilla y natural.

Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

4°Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Superficie • Metro cuadrado • Múltiplos • Submúltiplos • Estimación	1. Estimar áreas utilizando el metro cuadrado, sus múltiplos y submúltiplos. 2. Realizar conversiones entre este tipo de medidas.	▲ Se puede iniciar con un problema; por ejemplo: ☺ Se quiere una tapia alrededor de un patio de 10 m de ancho y 8 m de largo, si la altura de la tapia es de 3 m, ¿cuál es el área de la tapia que se quiere colocar?

• Conversiones		Al proponer más situaciones cercanas al entorno estudiantil, se desarrolla la confianza en la utilidad de las Matemáticas.
Moneda • Monedas • Billetes • Relaciones	3. Establecer la relación bancaria entre las monedas y billetes de todas las denominaciones. 4. Aplicar el uso de cantidades monetarias en diversas situaciones reales o ficticias.	▲ Proponga problemas del siguiente tipo: En un cajero electrónico Randall recibió el siguiente dinero en efectivo: tres billetes de ₡20 000, uno de ₡10 000, dos de ₡5000, cuatro de ₡2000 y 3 de ₡1000. ¿Cuál fue el monto total que despachó el cajero automático? ¿Cuántas monedas de ₡500 (o de ₡100, de ₡25, de ₡10) se necesitan para tener ₡10 000? (Se trabaja de manera implícita la proporcionalidad). Utilizar la calculadora en los cálculos complejos.
Temperatura • Grados Celsius • Grados Fahrenheit • Conversiones	5. Medir temperaturas en las escalas Celsius y Fahrenheit utilizando instrumentos apropiados. 6. Realizar conversiones de mediciones de temperatura entre estas dos escalas. 7. Aplicar la medición de temperatura a situaciones reales o ficticias.	▲Utilizar las diferentes escalas en la solución de problemas como por ejemplo: El punto de ebullición del agua al nivel del mar es 100 ºC. ¿Cuál es su punto de ebullición en grados Fahrenheit? Este ejemplo muestra la importante conexión que existe entre *Números* y *Medidas,* ya que el problema no podría resolverse si cada estudiante no tiene los conocimientos que le permitan manipular expresiones numéricas. Además muestra una esencial conexión entre Matemáticas y Ciencias.
Tiempo • Año • Mes • Semana • Hora • Minuto • Segundo • Conversiones	8. Estimar el tiempo utilizando años, meses, semanas, horas, minutos y segundos. 9. Medir el tiempo utilizando años, meses, semanas, horas, minutos y segundos. 10. Realizar conversiones entre estas medidas.	▲ Se pueden plantear retos donde se aplique el cálculo mental. Se da un año y se pide estimar la edad que tendría la persona que nació en ese año. También una persona da su edad en años y meses cumplidos, otra u otro estima el año y el mes en que nació. Se plantean problemas que permitan valorar sólo la estrategia empleada. Los cálculos se realizan por medio de la calculadora. Por ejemplo: Miguel en este momento tiene aproximadamente 348 meses y su esposa tiene 11 315 días. ¿Cuál de los dos tiene más edad?
Sistema métrico decimal • Longitud • Peso • Capacidad	11. Aplicar el sistema métrico decimal en situaciones reales o ficticias. 12. Realizar conversiones entre diversas unidades de medida.	El estudio del sistema métrico decimal puede introducirse mediante el uso de la historia de su implantación en Costa Rica. ▲ Hay que manipular instrumentos para medidas en metro, decímetros, decámetros. Trabajar con pesas y recipientes para los líquidos.

• Superficie	13. Resolver problemas que involucren diversas medidas.	▲ Introducir los cuadros de conversiones sin dejar de lado el cálculo mental (1 m = 100 cm.; 3 m = … cm).
Ángulos • Grados	14. Comparar ángulos a simple vista, usando un modelo. 15. Medir ángulos en grados. 16. Resolver problemas en los que se utilice la medición en grados.	▲ Cada estudiante puede construir un transportador: vuelta completa del círculo: 360 grados. Se divide en 2 (180º), en 4 (90º), en 6, en 12. ▲ Encontrar en el aula ángulos inferiores a 30º, superiores a 45º, superiores a 90º. ▲ Estimar el valor de un ángulo. Averiguar medidas de ángulos con el transportador. ▲ Plantear problemas que hagan conexión entre fracciones y medida de ángulos. El grado tiene su origen en la antigüedad, gracias a los babilonios cuya base de numaración era 60. Este tipo de problema conecta con el área de *Geometría*.

<table>
<tr><th colspan="3">5°Año</th></tr>
<tr><th>Conocimientos</th><th>Habilidades específicas</th><th>Indicaciones puntuales</th></tr>
<tr><td>Moneda</td><td>1. Aplicar el uso del sistema monetario nacional en situaciones ficticias o del entorno.</td><td>▲ Se pueden plantear problemas como el siguiente:

Una ensalada requiere de ½ kg de pepino, 750 g de tomate, 1 lechuga criolla, 100 g de zanahoria rallada y 50 g de cebolla. La siguiente tabla proporciona los precios en colones de estos ingredientes.

<table>
<tr><th>Ingrediente</th><th>Precio</th></tr>
<tr><td>Tomate</td><td>650 el kg</td></tr>
<tr><td>Cebolla</td><td>1000 el kg</td></tr>
<tr><td>Lechuga</td><td>250 la unidad</td></tr>
<tr><td>Zanahoria</td><td>350 el kg</td></tr>
<tr><td>Pepino</td><td>700 el kg</td></tr>
</table>

¿Cuánto cuesta el total de los ingredientes de la ensalada?

Con este tipo de problemas se pueden abordar temas como la salud y la buena nutrición, enfatizando en la riqueza de las frutas y vegetales para el buen funcionamiento del cuerpo humano. Además, tiene conexión con Números.</td></tr>
<tr><td>Diversas medidas

• Longitud

• Peso</td><td>2. Aplicar las diversas medidas en la resolución de problemas que se presenten en situaciones ficticias y del entorno.</td><td>Se puede trabajar con los mapas digitales de Internet para la creación de actividades como calcular la distancia entre dos pueblos, lo cual se puede aprovechar para insistir en la importancia de la escala.</td></tr>
</table>

• Capacidad • Superficie • Tiempo • Ángulos	3. Realizar estimaciones de diversas medidas.	Aquí se establece una conexión con *Números* y con la asignatura Estudios Sociales. Diversas actividades relacionadas con medidas pueden potenciar el respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas.

6°Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Volumen • Metro cúbico • Múltiplos • Submúltiplos • Conversiones • Relación decímetro cúbico - litro	1. Utilizar el metro cúbico, sus múltiplos y submúltiplos en diversas situaciones ficticias o del entorno. 2. Realizar conversiones de unidades cúbicas. 3. Establecer relaciones entre el decímetro cúbico y el litro, así como múltiplos y submúltiplos de ellos. 4. Aplicar esas relaciones en situaciones ficticias o del entorno.	▲ Plantear problemas como: En la comunidad en que vive Francisco se está racionando el agua todos los lunes, por lo que su mamá, el día anterior, llena 3 envases de 2 dm^3 cada uno. ¿Cuántos litros de agua recoge en total la mamá de Francisco? Este ejemplo muestra cómo utilizamos las Matemáticas en situaciones cotidianas. Se puede llevar el problema aun más allá y poner a cada estudiante a razonar sobre cuánta cantidad de agua necesita su familia diariamente y de esta forma concientizar sobre la importancia de racionar.
Diversas medidas • Longitud - Nanómetro • Masa • Capacidad • Superficie • Tiempo • Temperatura • Moneda: colones, dólares, euros	5. Aplicar las diversas medidas en la resolución de problemas dados en situaciones ficticias o del entorno. 6. Realizar estimaciones de diversas medidas. 7. Realizar conversiones monetarias: colones a dólares, colones a euros y viceversa.	▲Se introduce la unidad de medida de longitud denominada nanómetro, y se repasan las demás, utilizando problemas de mayor complejidad, con conversiones entre nanómetros (nm) y milímetros (mm). Por ejemplo, si un chip actualmente puede medir 30 nm, ¿cuál sería la medida de ese chip en mm? Se pide investigar los tipos de cambio y realizar conversiones en situaciones reales o ficticias; por ejemplo, de precios de artículos que aparecen en Internet, en periódicos u otros medios. El 23 de diciembre de 2011, el periódico *La Nación* publicó una noticia que decía “En este 2011 se dio una reducción del 50% del área afectada por incendios forestales en el país. En otras palabras, el área quemada pasó de 18 683 hectáreas en el 2010 a 9 500 en el 2011.” Esta información puede servir para redactar un problema que conecta con situaciones de la vida real y que además puede hacer conexión con el área de *Relaciones y Álgebra*. Puede utilizarse para explicar que existe otro tipo de unidades para medir superficie e indicar la relación entre esta unidad y el kilómetro cuadrado. Lo anterior conecta con uno de los ejes transversales: *Cultura Ambiental para el Desarrollo Sostenible*. Se plantean problemas como el siguiente, de forma tal que la atención se centre en la estrategia de resolución y no en la labor de cálculo:

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Una pequeña empresa tiene una cuenta en colones en la que hay ₡ 6 568 535. Para realizar transacciones en el extranjero necesita abrir una cuenta en dólares, para ello decide tomar una octava parte del monto depositado en la primera cuenta. Además, debe transferir a otra empresa la suma de 1370 euros. Después de esto, ¿cuánto dinero le queda a la empresa en su cuenta en colones? (Es importante que cada estudiante investigue el tipo de cambio del dólar y el euro con respecto al colón en ese día o semana).</td></tr>
<tr><td></td><td>8. Plantear problemas contextualizados que involucren, para su solución, diversos tipos de medidas y sus respectivas conversiones.</td><td>▲ Se busca el planteo de problemas contextualizados que requieran el uso de diferentes tipos de medidas. Se puede presentar a la clase una información determinada para que la contextualicen y puedan así enunciar un problema.

Se les proporciona el siguiente cuadro de información acerca de la capacidad de tres recipientes:

<table>
<tr><td>Recipiente</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Capacidad</td><td>1,7 litros</td><td>1600 cm^3</td><td>1,8 dm^3</td></tr>
</table>

Elaboración propia

Luego, se les propone formular un problema donde se tome en cuenta uno o más de los datos proporcionados en el cuadro.

Un ejemplo de problema:

Pedro irá de gira educativa con sus compañeros a una empresa que fabrica confites, para esto se pide que cada estudiante lleve a la gira un recipiente vacío para guardar los confites que regalará la empresa. Pedro tiene tres recipientes: dos cilíndricos y uno cúbico, las indicaciones de los recipientes muestran que tienen respectivamente las siguientes capacidades 1,7 litros, 1600 cm^3 y 1,8 dm^3. ¿Cuál recipiente debe escoger Pedro para poder recoger más confites?</td></tr>
</table>

Indicaciones metodológicas

Generales para el ciclo

1. Los métodos que se utilizan en este ciclo serán semejantes a los del ciclo anterior pero se debe ampliar la complejidad de las actividades.

2. En este ciclo se pretende retomar el sentido de las operaciones de conservación y de transitividad, con lo cual es necesario proponer actividades que refuercen lo estudiado en el ciclo anterior.

3. Es necesario que el educador o educadora enfatice que medir es comparar con respecto a un patrón (unidad de medida) y que este patrón puede ser arbitrario. La historia del sistema métrico decimal es útil para evidenciar el carácter social de la medición.

4. A este nivel pueden realizarse en el *trabajo extraclase* algunas actividades de medición para ser realizados en la casa. Por ejemplo, elaborar la receta de un pastel y el presupuesto para hacerlo (implica datos de peso, temperatura, moneda, volumen, tiempo y relaciones entre ellos). Otra actividad útil es investigar qué unidades de medida se han utilizado en Costa Rica.

5. Se puede pedir a la clase fabricar diferentes instrumentos de medición: cinta métrica de cartulina, medida de un litro, reloj de arena, etc.

6. En este ciclo debe aprenderse que a menudo las medidas pueden calcularse mediante el uso de fórmulas y que no siempre se requiere obtenerlas de manera directa usando instrumentos; por ejemplo: áreas, cantidades de dinero, etc.

7. Se puede utilizar la calculadora como una herramienta para simplificar el trabajo de cálculo.

8. La medición de algunos atributos (longitud, área, volumen) tiene conexión evidente con la geometría; esto debe evidenciarse en las actividades de aprendizaje que se realicen en el aula.

9. Es relevante tener presente que la medición implica operaciones de orden psicológico; las más importantes son la conservación de la cantidad y la transitividad entre cantidades. La primera se refiere a la invariancia de la cantidad a medir; por ejemplo una varilla mide lo mismo si está sobre el suelo o si se la levanta y se la lleva a otra parte, los niños y las niñas de menor edad pueden tener dificultades con la conservación en la medición de algunos atributos. La transitividad permite comparar cantidades y ordenarlas. Por ejemplo, si Luis mide más que Miguel y Miguel mide más que Ana, sabremos que Luis mide más que Ana (transitividad de la desigualdad); o si un objeto pesa lo mismo que otro y éste a su vez pesa lo mismo que un tercero, entonces el primero y el tercero pesan lo mismo (transitividad de la igualdad).

Cuarto año

1. En este año se repasan las medidas estudiadas en el Primer ciclo, pero con problemas de mayor complejidad, de acuerdo con el desarrollo de los niños y las niñas y su conocimiento de los números.

2. Se introduce la medida de superficies. Al respecto debe asimilarse que aunque a menudo se usan los términos superficie y área como sinónimos, en realidad no son la misma cosa aunque están relacionados. El área es la medida (extensión) de la superficie de una figura.

3. Debe quedar claro que las fórmulas para calcular áreas proporcionan una manera de medir áreas a través de medidas de longitud.

4. Para iniciar con la medición de temperaturas, primero deben realizarse actividades donde se puedan comparar sin necesidad de medir. Por ejemplo, se pueden colocar recipientes con agua, con diferentes temperaturas (hay que cuidar que no sea alta para evitar lesiones) y se pide que toquen el agua de los distintos recipientes. Esto permitirá percatarse que uno está “más frío” o “más caliente”, o “más frío que uno pero más caliente que otro”, etc.

5. En cuanto al sistema métrico decimal, además de poder realizar conversiones entre unidades es conveniente que cada estudiante conozca en qué circunstancias se utiliza una u otra unidad de medida. Por ejemplo, cuando se trata de longitud, ¿cuál es la unidad más apropiada para medir la distancia entre dos ciudades: el metro, el centímetro o el kilómetro?, ¿para medir el ancho de la tapa de un libro?, ¿y para medir la longitud del lado de su aula?

Quinto año

1. En el área de medidas este año constituye un repaso de las medidas estudiadas en los años anteriores. Los problemas a tratar aquí serán de mayor complejidad de acuerdo con el avance del conocimiento en las otras áreas.

2. Es primordial seguir fomentando la estimación de medidas. La estimación ayuda a enfocarse en el atributo que debe ser medido, también ayuda a familiarizarse con las unidades de medida y promueve el cálculo mental.

3. Pueden plantearse problemas con base en información obtenida en contextos reales. Por ejemplo: la imagen abajo es parte de un cartel publicitario, el precio de la piña es por unidad y el de los demás productos se da por kilogramo.

Imagen tomada de *La Nación*, 6 de marzo de 2012, p. 6A

Emilia compró una piña, 1½ kg de papaya, 1,8 kg de aguacate y 700 g de tomate. ¿Cuál es el precio de la compra antes de agregar el impuesto de ventas? Este problema conecta con *Números.*

Sexto año

1. Lo mismo que en los años anteriores, debe ejercitarse la estimación de medidas, así como el uso de instrumentos. Por otra parte, debe enfatizarse que usualmente cuando se usan instrumentos para medir se comenten errores; esto puede ser inducido por problemas en el instrumento o por la propia persona que hace la medición. Se puede solicitar medir alguna longitud y anotar todas las medidas; posteriormente se puede evidenciar la variabilidad de la mediciones y analizar los datos con medidas de posición. Esto conecta con *Estadística y Probabilidad*.
2. Además del repaso de las diferentes medidas aumentando el nivel de los problemas, se introduce la medición de volúmenes. Volumen es la característica de los cuerpos al ocupar un espacio, la capacidad está relacionada con el volumen: la capacidad de un recipiente coincide con el volumen del espacio interior delimitado por las paredes del mismo.
3. Debe quedar claro que las fórmulas para calcular volúmenes proporcionan una manera de medirlos a través de medidas de longitud.
4. Un problema como el que se propone en la tercera indicación para 5° Año puede ser realizado aquí ampliándolo con el cálculo del pago total si se considera además el impuesto de ventas (13% actualmente).

5. En este nivel es importante vincular los conocimientos de *Medidas* con otras materias de la malla curricular. Por ejemplo, en la elaboración de proyectos para feria científica (conexión con la materia de Ciencias) y en la ubicación de lugares geográficos en mapas (conexión con Estudios Sociales).

Indicaciones de evaluación

La estimación y la comparación de medidas, así como el uso de instrumentos de medición pueden ser evaluadas de manera natural en el *trabajo cotidiano*. Es importante poner atención al uso correcto de los instrumentos y el análisis de los resultados de las mediciones. También conviene evaluar si se identifica apropiadamente el tipo de medición que requiere el atributo a ser medido y el instrumento que permite realizar tal medición.

Como *trabajo extraclase* se recomiendan tareas cortas que permitan la resolución de problemas donde se aplique la estimación, la comparación y el cálculo de medidas en contextos reales. Por ejemplo, proponer en 6º Año la elaboración de una tabla de productos que venden en los negocios, utilizando diversos tipos de medidas con la indicación de los precios por unidad. Se completaría una tabla como la siguiente:

Producto	**Unidad de medida**	**Precio**

Con esta información cada estudiante planteará al menos dos problemas.

Para la evaluación mediante tareas cortas (*trabajo extraclase*) y *pruebas* se deben tener presentes las siguientes indicaciones.

- ✓ Para evaluar el cálculo de medidas se pedirá el uso de instrumentos como regla graduada, compás, relojes, balanzas, etc. También, en el caso de las monedas, se pedirá la obtención del resultado de transacciones sencillas que involucren la compra y venta de objetos.

- ✓ Lo mismo que en el Primer ciclo, la evaluación debe permitir potenciar el cálculo y la estimación de medidas, así como la comparación entre ellas y su aplicación en diferentes contextos.

- ✓ Para evaluar la habilidad de comparar medidas se les puede solicitar que comparen dos pesos y que estimen cuál es la razón entre ellos (uno aproximadamente el doble del otro, o si son casi iguales, etc.). Esto se puede hacer de manera oral en el *trabajo cotidiano*.

- ✓ El tipo de evaluación y los mecanismos utilizados serán análogos a los del Primer ciclo, sólo que se aumenta el nivel de complejidad y se agrega la medición de áreas, volúmenes y temperatura. Es importante evaluar el uso de las medidas en el contexto de las conexiones con otras áreas y disciplinas, así como la conversión entre medidas.

- ✓ Un ítem como el siguiente permite evaluar varias habilidades, establecer conexiones con otras áreas y además promueve ejes transversales de todas las asignaturas:

  Un niño entre 9 y 13 años necesita consumir 12 mg de vitamina B3 (Niacina) al día. En la siguiente tabla se presentan algunos alimentos y la cantidad de Niacina que contienen.

Alimento	**Cantidad de alimento**	**Niacina (en mg)**
Arroz blanco común, cocido	1 taza	2,32
Aguacate	30 gr	0,54
Huevo entero, crudo	1	0,03
Maní	30 gr	3,80
Papa horneada	1 (150gr)	2,17

  Elabore dos menús que tengan al menos tres de estos alimentos y que cubran cada uno la cantidad de Niacina que necesita un niño de 10 años diariamente. El menú puede contener un poco más de la niacina necesaria, a lo sumo 1,5 mg de exceso.

Segundo ciclo, Relaciones y Álgebra

Introducción

En el Primer ciclo cada estudiante desarrolló el sentido de número y algunas habilidades relacionadas con el uso de símbolos y relaciones, tales como reconocer patrones numéricos y no numéricos, conjeturar, comparar y ordenar números naturales, utilizar distintas representaciones para los números naturales, identificar expresiones matemáticas que representan relaciones entre cantidades y procesos como la aplicación de distintas estrategias para resolver problemas matemáticos y de comunicación.

En el Segundo ciclo se busca la profundización de estos aprendizajes, como por ejemplo determinar términos de una sucesión a partir de su ley de formación o bien determinar la ley de formación al analizar la relación entre los términos de la sucesión.

Se amplía el conjunto de números al considerar fracciones no negativas y se utilizan nuevos símbolos matemáticos como las desigualdades, para hacer comparaciones entre expresiones numéricas o simbólicas.

Se introducen nuevos conceptos estrechamente relacionados con el lenguaje algebraico y el funcional, como por ejemplo la relación de proporcionalidad directa, razón y proporción. Además, aumenta el grado de abstracción al iniciar la representación simbólica de cantidades matemáticas que varían.

El uso de mapas con escala coadyuva al desarrollo de los conceptos de razón y proporción, así como el de distintas representaciones.

También se utiliza el primer cuadrante del plano de coordenadas cartesianas para representar pares ordenados de números que satisfacen cierta relación matemática.

Finalmente, se espera seguir trabajando las actitudes y creencias acerca de las matemáticas desarrolladas en el ciclo anterior.

Propósitos de la enseñanza

El propósito de la enseñanza en *Relaciones y Álgebra* para este ciclo es desarrollar en cada estudiante habilidades para la comprensión y utilización de expresiones matemáticas, así como su capacidad para plantear, representar simbólicamente y resolver problemas dados en diversos contextos.

Habilidades generales

Las habilidades generales que deberá tener cada estudiante en *Relaciones y Álgebra* al finalizar el Segundo ciclo son:

- Analizar patrones numéricos y no numéricos.
- Pasar de representaciones verbales a numéricas.
- Representar relaciones entre cantidades variables.
- Determinar el valor desconocido en una expresión numérica.
- Analizar gráficas de figuras con escala.
- Identificar distintas representaciones de una proporción numérica.
- Utilizar letras para representar cantidades variables.
- Aplicar regla de tres y porcentaje en la solución de problemas.
- Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada.

En este ciclo se fortalecerán las actitudes de participación activa y colaborativa, autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas y respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas. Sin embargo, dado que este ciclo tiene un manejo más abstracto es necesario trabajar la perseverancia.

En cuanto a los procesos, se exige una mayor argumentación por parte del estudiantado. Se pondrá atención a la exploración de patrones, la formulación de conjeturas, el razonamiento matemático y el uso correcto del lenguaje matemático en la comunicación oral y escrita. Estos procesos fortalecen la utilización de la representación de múltiples entidades matemáticas de otras áreas.

Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

4° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Sucesiones • Patrones	1. Analizar patrones en sucesiones con figuras, representaciones geométricas y en tablas de números naturales menores que 1 000 000.	▲ Se pueden proponer sucesiones recursivas y sucesiones que requieren dos operaciones para que cada estudiante explore, conjeture e identifique su patrón. Por ejemplo: 3, 7, 23, 86, 343, … (cuadruplicar el número y restar 5 al resultado). Otro ejemplo es la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …. (cada término es la suma de los dos términos anteriores). Este tipo de ejercicio requiere de un mayor esfuerzo, por esta razón usted puede presentar la actividad como un desafío que implica ser perseverante. La búsqueda de patrones es una herramienta muy importante. Cada estudiante puede compartir la estrategia utilizada para identificar el patrón en un ambiente de respeto mutuo. Para la construcción de sucesiones con figuras se recomienda la utilización de materiales concretos, principalmente los que son reciclables, para desarrollar una *Cultura ambiental para el desarrollo sostenible*. ▲ Las sucesiones de Fibonacci resultan muy interesantes porque fortalecen el cálculo mental. Al introducir el tema de sucesiones, resulta motivador dar una breve reseña de los aportes del matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250) (conocido como Fibonnacci) en su obra *Libro del Ábaco* publicada en el año 1202. Un problema famoso planteado por él en dicha obra es el de la reproducción de conejos: suponga que la vida de los conejos es eterna y que cada mes una pareja de conejos procrea una nueva pareja, que es fértil a los dos meses. Si se comienza con una pareja de recién nacidos, ¿cuántas parejas de conejos se tendrá al final de 1 año?

		 **Imagen cortesía de FreeDigitalPhotos.net** Los primeros números de Fibonacci son: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 Se observa que cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores. La sucesión anterior se conoce como sucesión de Fibonacci mientras que los números que aparecen en ella se llaman números de Fibonacci. Esta sucesión aplicaciones en las artes, arquitectura, mercado financiero, y con la razón aurea. Realmente un tema interesante para un trabajo de investigación.
	2. Aplicar sucesiones y patrones para resolver problemas contextualizados.	
Representaciones	3. Representar una expresión matemática dada en forma verbal utilizando números y letras. 4. Construir tablas que cumplan las especificaciones dadas en forma verbal. 5. Plantear y resolver problemas formulados verbalmente.	▲ Dictar algunas frases para que cada estudiante las escriba utilizando números, símbolos y operaciones matemáticas: Dicte por ejemplo: a. El triple de cinco, más dos. (Se espera que la respuesta sea $3 \times 5 + 2$) b. Cinco menos siete veces cuatro. c. Cuatro veces seis es menor que veinte y siete. d. Doscientos cincuenta y ocho dividido por dos es mayor que ciento quince. ▲ Se solicita al estudiantado construir una tabla con dos columnas de tal forma que la segunda columna dependa de la primera. La primera columna contiene los números impares menores que quince, ordenados en forma ascendente. Coloque en la segunda columna números que son cuatro veces los de la primera columna, menos diez. Pedro tiene el doble de la edad de su hermana Alicia. Hace cinco años Alicia tenía dos años de edad. ¿Cuántos años tiene Pedro actualmente? Se estimula a cada estudiante para que comparta la estrategia utilizada para plantear y resolver el problema.

<table>
<tr><td>Relaciones</td><td>6. Identificar el número que falta en una expresión matemática, una figura o en una tabla.</td><td>Complete la tabla:
<table><tr><td>9</td><td>18</td><td>27</td><td>45</td><td>63</td><td>81</td></tr><tr><td>7</td><td>14</td><td>21</td><td>35</td><td>49</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Propiedades de las operaciones</td><td>7. Resolver problemas aplicando las propiedades de conmutatividad y asociatividad de la suma y la multiplicación y la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.</td><td>Proponga ejercicios donde cada estudiante decida qué propiedad debe aplicar y logre explicar a los demás su decisión. Con esto se pretende apoyar el proceso Comunicar.

David compró 10 naranjas y 15 bananos para compartir con sus amigos. Cada fruta tiene un costo de 90 colones. Determine la cantidad de dinero que pagó David por la compra.

Si se utiliza la propiedad distributiva:

$60\times(10+15) = 60\times10 + 60\times15 = 600 + 900 = 1500$

Permita que cada estudiante proponga sus propios ejemplos y que comparta sus estrategias de solución en un ambiente de respeto y cordialidad, favoreciendo la Vivencia de los derechos humanos para la democracia y la paz.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">5° Año</td></tr>
<tr><td>Conocimientos</td><td>Habilidades específicas</td><td>Indicaciones puntuales</td></tr>
<tr><td>Relaciones
Cantidades constantes
Cantidades variables
Dependencia
Independencia
Escalas
Ecuaciones</td><td>1. Distinguir entre cantidades variables y constantes.</td><td>▲ Como ejemplo, en una situación de compra de un artículo establezca el precio como constante, el número de unidades compradas y la cantidad de dinero pagada como variables.

El costo de ½ kg de queso es de ₡1000, el de 1 kg ₡2000, el de 1½ kg ₡3000. ¿Qué relación existe entre los kilogramos de queso y su costo?

Nota: El kilogramo (símbolo kg) es la unidad básica de masa del Sistema Internacional de Unidades (SI), que equivale a la masa del prototipo de platino iridiado que se encuentra en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en París. En Costa Rica se acostumbra utilizar el kilogramo para peso, y así lo utilizaremos en este programa.

Luego se puede apoyar el tema con algunas de las fórmulas de áreas de figuras geométricas, donde se identifica la cantidad variable y la constante, la variable dependiente y la independiente.

Lo anterior se conecta con las áreas de Geometría y Medidas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>2. Identificar y aplicar relaciones entre dos cantidades variables en una expresión matemática.</td>
<td>▲ Proponga representaciones tabulares como la siguiente:
<table>
<tr><td>50° F</td><td>$\left({}^{0}F - 32\right) \times 5 \div 9 = {}^{0}C$</td><td>$10\,{}^{0}C$</td></tr>
<tr><td>55° F</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>60° F</td><td></td><td>$\frac{140}{9}\,{}^{0}C$</td></tr>
<tr><td>65° F</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>70° F</td><td></td><td></td></tr>
</table>
donde apliquen la conversión de grados entre temperatura (Fahrenheit, Celsius) y utilicen tanto la expresión tabular como la verbal. Utilice valores mayores o iguales a 32 para grados Fahrenheit para que el resultado no sea negativo.

Imagen con derechos adquiridos por el MEP

Que cada estudiante identifique la variable independiente y la dependiente en la expresión matemática dada en la tabla.

▲ Utilizar fracciones.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>3. Determinar el valor desconocido en una ecuación matemática dada.</td>
<td>▲ Iniciar con operaciones con cajitas y posteriormente ofrezca ejemplos con letras.

Calcular el valor desconocido *n* en la expresión matemática $72 \div n = 8$

Se espera que cada estudiante asigne un valor a la variable (letra) utilizando operaciones inversas (sumas y restas o multiplicación y división).</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>4. Analizar gráficas de figuras con escala.</td>
<td>Utilizar un mapa con una escala dada y solicitar que calculen la distancia entre dos puntos (localidades) en él. Usar inicialmente un mapa simple (casi lineal). Este tipo de actividad se conecta con Estudios Sociales.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
Imagen propiedad del MEP
Es importante discutir acerca de la conveniencia de escoger la unidad de medida. Además, conviene utilizar instrumentos como: termómetro, regla, transportador, para que identifiquen las escalas utilizadas en ellos. Esto propicia la conexión con el área de Medidas.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>5. Determinar relaciones de dependencia entre cantidades.</td>
<td>▲ Para determinar una relación de dependencia entre cantidades, se puede plantear un problema donde cada estudiante deduzca que al duplicarse o triplicarse la variable independiente, la otra también se duplica o triplica. De forma análoga, para el caso en que la variable independiente se reduzca a la mitad o a la tercera parte, con la otra sucede lo mismo.

▲ Otro ejemplo de dependencia: El perímetro de un cuadrado en función de la medida de su lado.

▲ En general, utilice las fórmulas de áreas que son conocidas por el estudiantado, como relaciones entre variables.</td>
</tr>
<tr>
<td>Representaciones
• Tablas
• Algebraicas</td>
<td>6. Representar mediante tablas relaciones entre dos cantidades que varían simultáneamente.</td>
<td>▲ Brindar tablas para que cada estudiante complete con el número indicado, al encontrar la relación (la mitad, triple, doble, u otra operación) entre las cantidades.

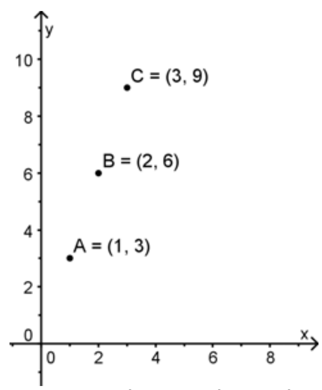
<table><tr><td>Perímetro del cuadrado (cm)</td><td>8</td><td>12</td><td>20</td></tr><tr><td>Lado del cuadrado (cm)</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>
¿Qué perímetro correspondería a un lado de 17 cm?
¿Qué lado correspondería a un perímetro de 56 cm?</td>
</tr>
</table>

	7. Representar una expresión matemática dada en forma verbal utilizando números y letras.	▲ Se puede proponer la construcción de un diccionario matemático de términos simbólicos y lenguaje cotidiano. ▲ Se sugiere no contemplar el uso de la letra x debido a que puede confundir con el símbolo de la multiplicación. ▲ Dictar algunas frases como las sugeridas abajo, para que cada estudiante las escriban utilizando números, símbolos matemáticos y letras que representen las variables: a. El triple de un número aumentado en dos. (se espera que escriba $3\times a + 2$). b. Cinco más tres veces un número. c. La diferencia entre dos números distintos. d. Un número es al menos igual a cinco, pero no es mayor que veinte.

6° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Relaciones • Razón • Proporción directa • Porcentaje • Regla de tres	1. Analizar la proporción entre cantidades numéricas. 2. Plantear y resolver problemas aplicando porcentajes y regla de tres.	▲ Ilustre el tema con ejemplos donde compara cantidades con cien. Por ejemplo, si un estudiante obtuvo un 85 de 100 puntos en el examen de matemática, entonces su rendimiento en el examen fue de $85 \div 100$, es decir, 0,85 o bien 85%. Fabio desea comprarse un celular. Su costo sin el impuesto de ventas es de 53 000 colones en la tienda Súper Ganga y en la tienda Garantía el valor es de 62 000 colones con un 15% de descuento. ¿Cuál de las dos tiendas le ofrece un mejor precio? ▲ Para formular los problemas, utilice datos obtenidos en periódicos o en los informes del Estado de la Nación. ▲ Enfatice al estudiante una fracción propia como una proporción. ▲ Puede ilustrar el tema con una representación gráfica donde cada estudiante deduzca la representación fraccionaria de un porcentaje. Escriba porcentajes en diferentes notaciones. Presente tablas para que completen, con la notación que falta. Esto favorece el proceso *Representar*. En la figura que sigue aparecen los precios de promoción de un supermercado para algunos productos. Los datos que aparecen son: el precio normal del producto, el porcentaje de descuento y la cantidad economizada por el comprador. a. Compruebe si la cantidad economizada corresponde al porcentaje de descuento que aparece en el anuncio. b. ¿Cuál es el porcentaje de mi ahorro si compro 2 ½ kg de aguacates y 8 chiles dulce? (Considerando el precio normal y la cantidad a pagar)

		 **Imagen tomada del periódico La Nación, 19 de junio de 2012** Una página importante para conseguir precios de frutas y verduras, sugeridos para las ferias del agricultor es http://web.cnp.go.cr/. En ella usted encontrará lista de precios en formato Excel. Utilice material concreto, principalmente los que son reciclables, para reforzar esta idea de totalidad. Esto favorecerá el desarrollo de una *Cultura ambiental para el desarrollo sostenible.* En el año 2003 Costa Rica emitió 6474,64 toneladas de dióxido de carbono a la atmósfera y en el 2004 fue de 6405,10. ¿Qué porcentaje de toneladas de dióxido de carbono bajó Costa Rica en el año 2004? Se recomienda aprovechar la oportunidad para hablar acerca de las consecuencias del dióxido de carbono en la salud. Esto favorece una *Educación para la salud* y una *Cultura ambiental para el desarrollo sostenible.*  **Imagen con derechos adquiridos por el MEP** El impuesto general sobre las ventas es un impuesto sobre el valor agregado en la venta de mercancías y en la prestación de algunos servicios específicamente indicados en la Ley No. 6826 del 8 de noviembre de 1982 y sus reformas. El monto del impuesto se determina sobre el precio neto de la venta y actualmente es de 13%. Que cada estudiante plantee un problema utilizando esta situación.
	3. Plantear y resolver problemas aplicando proporcionalidad directa.	▲ Proponer ejemplos donde cada estudiante establezca la razón entre dos cantidades. Por ejemplo, comparar el área de un rectángulo dado con su altura, o la calificación obtenida en Matemática con la calificación en Español.

		Fernando por cada 8 horas diarias de trabajo gana 16 650 colones. Si hasta el momento ha ganado 333 000 colones, ¿cuántas horas ha trabajado? ▲ Sugerir ejemplos relacionados con un contexto donde el estudiante deduce la proporcionalidad directa al observar que si una cantidad aumenta la otra aumenta o si disminuye la otra disminuye proporcionalmente.  **Imagen con derechos adquiridos por el MEP** En el Restaurante Coma Saludable una familia de 6 personas gastó 19 645 colones en un almuerzo. ¿Cuánto dinero gastaría una familia de 4 personas si consumen la misma proporción y el mismo tipo de comida que la primera familia?
Sucesiones	4. Analizar sucesiones y patrones con números, figuras y representaciones geométricas.	▲ Para este nivel las sucesiones deben llevar un grado mayor de complejidad donde la ley de formación (o patrón) puede incluir dos operaciones, además del simbolismo matemático apropiado. a. Para la sucesión $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots$ solicitar el término número 15. b. $a(n)=\frac{n+2}{n^{2}}$ es el término número *n* de una sucesión. Solicite a cada estudiante construir una tabla con los primeros 10 términos. ¿Cuál es el término número 35? Use la calculadora para la parte b. Este tipo de actividades son poco frecuentes, ya que implican un mayor esfuerzo cognitivo. El educador debe insistir en la importancia de que cada estudiante enfrente el problema que se le plantea, dado que esto le ayuda a reforzar la manipulación de instrumentos matemáticos y promueve el razonamiento, lo cual favorece la perseverancia y aumenta la autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas.

	5. Plantear y resolver problemas aplicando sucesiones y patrones.	Una colonia de bacterias cuenta inicialmente con 8 bacterias. Si la cantidad de bacterias es duplicada cada 24 horas, ¿qué cantidad de bacterias tendrá la colonia al final de 1 semana?
Representaciones • Algebraica • Plano de coordenadas	6. Representar algebraicamente una expresión matemática dada verbalmente. 7. Identificar y representar en un plano de coordenadas puntos que satisfacen una relación entre dos cantidades que varían simultáneamente.	▲ Puede dictar frases como: a. El doble de la suma de un número y tres es ciento treinta y tres. b. El triple de la diferencia de un número y cinco es quince. c. El trece por ciento de un número es restado de cien d. El siete por ciento de un número es adicionado al número. e. La velocidad de un objeto es cinco veces su desplazamiento. Que cada estudiante las escriba utilizando números, operaciones y símbolos matemáticos. ▲ Presente pares ordenados con una ley de formación o patrón oculto que cada estudiante encuentra, conforme localiza los puntos en el plano. Por ejemplo:  ▲ Se podría utilizar un geoplano en lugar de un plano de coordenadas.
Ecuaciones • Ecuaciones de primer grado • Inecuación de primer grado	8. Identificar si un número es solución de una ecuación dada. 9. Plantear y resolver problemas aplicando ecuaciones de primer grado.	Carlos tiene que empacar 64 mandarinas en bolsas de 4 unidades. ¿Cuántos paquetes logró formar? ▲ Se busca que cada estudiante deduzca el concepto de ecuación y de incógnita y comparta con su clase la estrategia que utilizó para resolverlo. ▲Las ecuaciones son del tipo: a. $a \times m = b$ b. $n \div a = b$ c. $a \div m = b$ d. $m + a = b$ e. $a - n = b$ f. $m - a = b$ con a y b números dados, m,n incógnitas.

		▲También es conveniente manejar la resolución de una ecuación como una especie de adivinanza matemática en la que se pretende encontrar un número desconocido. Esto permite ir afinando un algoritmo. ▲Solicite a cada estudiante que proponga ejemplos que involucren ecuaciones del tipo mencionado. ▲ Modele matemáticamente situaciones sencillas que sean adecuadas para el nivel. El tipo de cambio del dólar, el cual puede ser modelado mediante la relación $C = d \times p$ donde C es la cantidad de colones, d representa la cantidad de dólares y p es el precio en colones del dólar. El Cine Vista Bella, cobra 1250 colones por cada entrada en los días martes y miércoles, lo que corresponde a la mitad del precio normal. Solicite que cada estudiante proponga un problema con esta situación. Aquí cabe resaltar los aportes del matemático griego Diofanto de Alejandría (aproximadamente 200-284 d.C.), considerado el padre del álgebra, en relación con el tratamiento de las ecuaciones. En efecto, Diofanto introdujo un simbolismo algebraico para las ecuaciones (notación sincopada), por cierto un simbolismo bastante complicado si lo comparamos con el actual. Pero él también estableció reglas para multiplicar expresiones algebraicas, las leyes de signos (más por menos es menos, etc.) y reglas para multiplicar potencias, además de proponer y resolver varios problemas.
	10. Identificar si un número es solución de una inecuación dada. 11. Plantear y resolver problemas aplicando inecuaciones de primer grado.	▲ Se puede vincular las relaciones de dependencia entre las variables y las ecuaciones mediante el planteo de problemas donde haya una situación de compra de un artículo a un precio dado, y con ello determinar cuántas unidades se pueden comprar con cierta cantidad de dinero; o bien, ¿cuál es la mayor cantidad de unidades que se pueden comprar con cierta cantidad de dinero?

Indicaciones metodológicas

Generales para el ciclo

1. Es fundamental repasar los conocimientos y habilidades logrados en el ciclo anterior, mediante problemas que se relacionen con los nuevos conocimientos.

2. Es conveniente dar tiempo para que cada estudiante analice sucesiones y patrones. El análisis contempla identificar, conjeturar, utilizar ensayo y error, comparar soluciones y argumentar las estrategias utilizadas.

3. Se espera que cada estudiante utilice símbolos matemáticos en sus argumentaciones, por ejemplo, los símbolos de +, -, ×, ÷, =, <, >, al analizar sucesiones o patrones numéricos.

4. Para lograr habilidades relacionadas con el análisis y aplicación de patrones, es recomendable utilizar recursos variados tales como: recortes de revistas, periódicos, papel cuadriculado, cartulina, geoplano, soma, papel de construcción y objetos que se encuentran en el entorno del estudiantado.

5. Cuando se utilizan recursos como el geoplano o el cubo soma, hay que dar tiempo para que el estudiantado se familiarice con ellos, antes de proceder a realizar las tareas específicas.

   El cubo soma es un rompecabezas geométrico con siete piezas formadas con cubos. Al unir las piezas se forma un cubo mayor. Fue creado por Piet Hein en 1936, y sus piezas se pueden identificar con números o bien con letras, lo que permite conectar *Relaciones y Álgebra* con *Geometría.*

Siete piezas del cubo soma

Cubo soma armado

Elaboración propia

6. La idea central del ciclo es la de variable. Cada estudiante debe empezar a asignar letras que representen nombres de objetos matemáticos. Esto permite abstraer y generalizar los casos particulares estudiados.

7. Es recomendable que los materiales concretos utilizados sean reciclables para fomentar una *Cultura ambiental para el desarrollo sostenible*, un eje transversal del Ministerio de Educación Pública.

8. También es importante fomentar un ambiente de respeto por las ideas presentadas por cada estudiante en sus razonamientos y argumentaciones, y así promover la *Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz.*

Cuarto año

1. En el Primer ciclo, la atención se centró en habilidades para la identificación y construcción de patrones y sucesiones. En este ciclo, además de aumentar la complejidad de las sucesiones dadas, se espera que cada estudiante conjeture, compare las soluciones obtenidas y comunique las estrategias, utilizando los símbolos de suma, resta, multiplicación, división, menor que, mayor que.

2. Para las sucesiones, los números utilizados y el nivel de complejidad será mayor que el de los años anteriores.

3. Para la habilidad de identificar el valor faltante en una expresión matemática, una figura o una tabla, hay que tener en cuenta posibles errores, principalmente en representaciones numéricas. Por ejemplo, algunos podrían responder que el número que falta en la expresión matemática $34 + 57 = \square + 81$ es 91 en lugar de 10 pues $34 + 57$ es igual a 91. Hay que detectar y corregir este tipo de error, utilizando la igualdad como un equilibrio en una balanza, como se recomendó en el ciclo anterior. Además es elemental que cada estudiante evalúe la pertinencia del resultado encontrado. Utilice la cajita (valor faltante) en el cualquiera de los miembros de la igualdad. Por ejemplo: $34 + \square = 60$.

4. Como las y los estudiantes ya aprendieron la división en el área de *Números* en 3^{er} Año, se puede utilizar valor faltante con la multiplicación o la división. Por ejemplo: $2 \times \square = 30$; $\square \div 5 = 4$.

5. También es importante utilizar otras figuras en lugar de las cajitas, como en el ejemplo dado en la indicación puntual correspondiente a la habilidad 6.

6. La habilidad 3 conecta con la asignatura de Español y es importante que usted solicite a cada estudiante que comunique las representaciones numéricas obtenidas. Puede dictar expresiones como: quince menos que el doble de doscientos treinta y ocho. En este caso hay que revisar si el operador de resta fue utilizado correctamente y si el número doscientos treinta y ocho fue escrito correctamente (238 en lugar de 20038).

7. Para la habilidad 7, verificar si está utilizando correctamente la propiedad distributiva de la multiplicación respeto a la suma. Es común encontrar, inclusive en la enseñanza secundaria, la aplicación incorrecta de esta propiedad. Por ejemplo, en $2 \times (3 + 5)$ se multiplica el 2 por 3, pero no se multiplica el 2 por 5. El estudiante puede comprobar que al multiplicar 2 por 3 y sumar 5 se obtiene 11, resultado diferente que si realizara la operación de la agrupación primero: $2 \times (3 + 5) = 2 \times 8 = 16$. Es interesante observa el proceso reversible: $16 = 6 + 10 = 2 \times 3 + 2 \times 5 = 2 \times (3 + 5)$. Hay que tratar este tipo de error con la metáfora de la balanza, con el equilibrio en los dos “lados” de la balanza.

Quinto año

1. Proponer actividades en las que la cajita antes utilizada para valor faltante sea remplazada por una letra.

2. Dicte expresiones matemáticas en forma verbal para que las escriban utilizando constantes, variables y los símbolos de suma, resta, división, multiplicación, igualdad, mayor que, menor que, mayor o igual que, menor o igual que. Por ejemplo: la edad de Pedro es el doble de la edad de su hermana Ana; Juan es al menos cinco años mayor que su primo Ricardo; el volumen de un cono la tercera parte del volumen del cilindro de igual base y altura que el cono.

3. Las fórmulas conocidas para calcular áreas u volúmenes de figuras geométricas son pertinentes para distinguir entre cantidades variables y cantidades constantes. Por ejemplo: si m representa el largo de un rectángulo y n representa su ancho, entonces el número 2 es una cantidad constante en la igualdad que permite calcular el perímetro p del rectángulo: $p = 2 \times m + 2 \times n$, mientras que m,n, p son cantidades variables. En este caso m,n son variables independientes mientras que p es variable dependiente. Para fórmulas del cálculo en dónde aparecen números irracionales, se puede utilizar su valor aproximado. Por ejemplo, utilizar 3,14 como aproximación para π.

4. Para la habilidad 3, utilice ecuaciones sencillas para que calculen el valor desconocido representado por una letra. Por ejemplo, plantee problemas que impliquen en calcular a, b, c, d en: $35 + a = 50$¸ $b \div 8 = 12$; $c \times 7 = 63$; $d - 12 = 47$.

Sexto año

1. En 6° Año, para las habilidades relacionadas con sucesiones y patrones (habilidades 4 y 5), se espera que cada estudiante conjeture, compare las soluciones obtenidas y comunique sus estrategias utilizando los símbolos de suma, resta, multiplicación, división, menor que, mayor que y letras para representar las variables que correspondan.

2. Para las sucesiones, el nivel de complejidad será mayor que el de los años anteriores. Se recomienda la utilización del criterio general para el enésimo término de una sucesión numérica. Por

ejemplo: dada la sucesión cuyo enésimo término es $a(n) = \dfrac{n-2}{n^2}$, construya una tabla con los primeros 5 términos. ¿Cuál es el término número 57? Para esta última pregunta sería conveniente utilizar una calculadora. También se puede preguntar por el enésimo término de una sucesión, si son dados algunos de sus términos. Por ejemplo: encontrar el enésimo término de la sucesión $\frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \ldots$

3. Para la habilidad 2 es importante resaltar que un porcentaje es un caso particular de una proporción.

4. Las expresiones matemáticas en forma verbal que serán dictadas, contendrán más elementos que las de quinto año, pues se agregan los porcentajes y las proporciones en general.

5. Para la habilidad 7 la relación puede ser dada en forma simbólica o bien verbal. Es recomendable que cada estudiante construya una tabla y que posteriormente grafique los puntos en el plano de coordenadas. Las escalas de los ejes, principalmente las del eje de las ordenadas, deben ser escogidas con cuidado. Por ejemplo, para la relación "la distancia recorrida por un auto es directamente proporcional al cuadrado del tiempo de viaje, con constante de proporcionalidad igual a 200", podemos utilizar la siguiente escala: cada centímetro en el eje de las abscisas representa 1 hora mientras que cada centímetro en el eje de las ordenadas representa 500 kilómetros.

6. Para la proporcionalidad, porcentajes y regla de tres es recomendable utilizar recortes de revistas, periódicos y datos estadísticos obtenidos, por ejemplo, del Instituto Nacional de Estadística y Censos (INEC) o del Estado de la Nación, para contextualizar los problemas planteados.


Censo 2011 revela que 2,4% de los ticos son analfabetas

86.000 costarricenses todavía no saben leer ni escribir

Imagen tomada del periódico La Nación, 17 de junio de 2012

7. Se deben proponer actividades de análisis de noticias en dónde aparecen usos incorrectos de proporciones u porcentajes. Por ejemplo, la siguiente publicidad que apareció en el periódico La Nación, un periódico costarricense de gran circulación, el domingo 11 de marzo de 2012.

I

Imagen tomada de: http://periodico.nacion.com/doc/nacion/viva-11marzo2012/2012031101/?key=66a0e280eb79fd9628095ea0f6f3d261#8

Se puede solicitar a cada estudiante que analice la publicidad para ver si logran detectar que 70% de 25 500 colones no es 12 750 colones. Otras noticias se relacionan con el uso de escalas convenientes en representaciones gráficas con el fin de manipular al lector.

Indicaciones de evaluación

Para evaluar el *trabajo cotidiano*, igual que en el ciclo anterior, es importante observar y registrar la forma y el grado de participación de cada estudiante en las actividades propuestas.

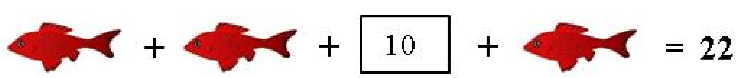
Los *trabajos extraclase* deberán estar orientados al análisis de patrones, la identificación del número que falta en una expresión matemática, la representación tabular y gráfica de dos cantidades en que una depende de la otra, y a la resolución de problemas relacionados con interés, porcentaje, regla de tres y proporcionalidad.

Un posible *trabajo extraclase* para 6° Año consiste en que cada estudiante consiga listas de precios de productos de la canasta básica que se encuentran en oferta. Posteriormente, que utilicen las listas para hacer una nueva lista con el tipo y la cantidad de productos a comprar y que calculen el ahorro absoluto y porcentual con la compra. Si los productos son frutas y verduras, cada estudiante puede comparar los precios en oferta con los sugeridos por el Consejo Nacional de Producción para las ferias del agricultor (http://www. cnp.go.cr), con tal de analizar si los precios de las ofertas son realmente confiables.

Para la *evaluación* mediante tareas cortas (*trabajo extraclase*) y *pruebas* tenga presente las siguientes indicaciones.

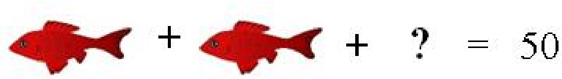
- ✓ Para evaluar el análisis de patrones solicite a cada estudiante utilizar objetos que son parte de su entorno, y proponga algún criterio para que formen patrones al ordenar aquellos objetos que tienen una misma forma o propiedad.

- ✓ En la identificación del número que falta en una expresión matemática es conveniente utilizar distintas representaciones para la expresión. Por ejemplo: si los peces rojos cubren un mismo número en la figura que sigue,



  ¿cuál es el número?

  ¿Cuál es el número que falta en la figura abajo, suponiendo que los peces siguen cubriendo el mismo número anterior?



- ✓ Para evaluar las proporciones es valioso combinar con la metáfora de la balanza. Por ejemplo: si los siguientes bloques pesan lo mismo, ¿cuántos bloques cúbicos son necesarios para equilibrar 3 conos? Si cada bloque cúbico pesa 5 kilogramos (peso), ¿cuánto pesan los 3 conos?

Elaboración propia

- ✓ En las representaciones en un plano de coordenadas de relaciones entre dos cantidades variables es importante que cada estudiante utilice números fraccionarios para construir la tabla. Además, se puede evaluar el uso correcto de las escalas seleccionadas para los ejes.
- ✓ En el 6° Año es significativo evaluar representaciones verbales, simbólicas y tabulares, así como el paso de una representación a otra.
- ✓ En las *pruebas escritas*, las habilidades relacionadas con interés, porcentaje, regla de tres y proporcionalidad deben evaluarse utilizando problemas contextualizados.
- ✓ En cuanto a la resolución de problemas, es importante evaluar la comprensión del problema, la estrategia utilizada para resolverlo y la comunicación de la solución utilizando los símbolos matemáticos adecuados.

Segundo ciclo, Estadística y Probabilidad

Introducción

En los años previos al segundo ciclo se ha sensibilizado sobre la importancia de analizar e interpretar datos generados en su entorno para tener un mejor entendimiento de la realidad. En el presente ciclo deben tomarse en cuenta estos antecedentes como una oportunidad para profundizar y ampliar las expectativas en materia del análisis de datos, de modo que se pueda generar una cultura sobre la temática y su rol en la sociedad.

Por lo anterior, se incluyen procedimientos más sofisticados para la recolección de información, así como el uso de frecuencias absolutas y porcentajes en cuadros y gráficos apropiados. También se amplía el uso de medidas estadísticas con la incorporación de la media aritmética para analizar la tendencia central de los datos y el recorrido como una primera aproximación para la medición de su variabilidad.

En relación con los conceptos vinculados al azar, se aprovecha la intuición generada en el primer ciclo para profundizar en conceptos concretos relacionados con eventos y sus representaciones. Se introduce el concepto de probabilidad determinado como una proporción de resultados en un experimento y algunas de sus propiedades básicas. De este modo, se genera un mayor potencial para la toma de decisiones al enfrentar situaciones de incertidumbre.

Propósito de la enseñanza

El propósito de la enseñanza en *Estadística y Probabilidad* para este ciclo es propiciar en cada estudiante la capacidad de recolectar datos mediante la medición o la interrogación por medio de un cuestionario y resumirlos mediante cuadros, gráficos o medidas estadísticas que le ayuden a responder interrogantes y resolver problemas.

Además, se introduce al estudiantado en el cálculo básico de probabilidades en función de juegos aleatorios y problemas sencillos.

Habilidades generales

Las habilidades generales que debe tener cada estudiante al finalizar el Segundo ciclo son:

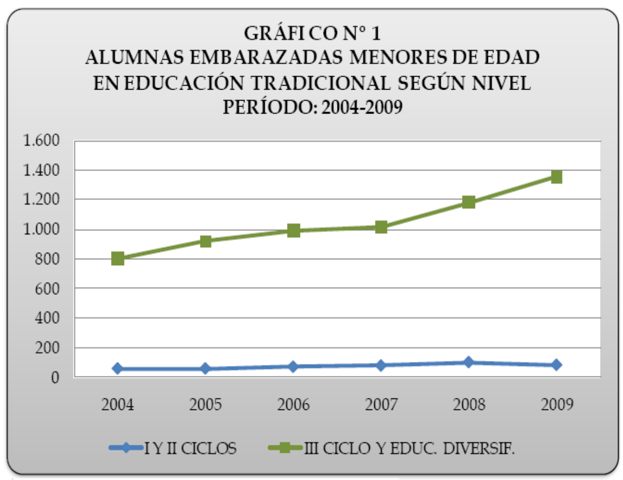
- Interpretar información estadística del contexto que haya sido representada mediante diferentes técnicas.
- Utilizar diferentes estrategias para el proceso de recolección de datos: observación, interrogación, medición y cuestionario.
- Combinar el uso de estrategias para resumir datos: tabular, gráfica o medidas de resumen.
- Identificar eventos más probables, menos probables o igualmente probables de acuerdo con el número de resultados simples pertenecientes a cada evento.
- Determinar probabilidades elementales vinculadas con eventos particulares.
- Plantear y resolver problemas vinculados con situaciones aleatorias.
- Plantear y resolver problemas que requieran de recolección, ordenamiento, presentación y análisis de datos vinculados con diversos contextos.

Se espera desarrollar una fuerte motivación e interés hacia las Matemáticas, por medio de la utilidad que se puede identificar en la aplicación de los conceptos propuestos, lo cual favorece su integración al proceso educativo y su vinculación al trabajo en equipo. Al mismo tiempo, debido a que la resolución de los problemas que se proponen implica una gran inversión de tiempo y esfuerzo en la recolección y análisis de los datos se estimula la perseverancia hacia la búsqueda de respuestas. Además, se consigue aumentar su autoestima al construir su propio conocimiento.

Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

<table>
<tr><td colspan="3">4to Año</td></tr>
<tr><td colspan="3">Estadística</td></tr>
<tr><td>Conocimientos</td><td>Habilidades específicas</td><td>Indicaciones puntuales</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Datos
• Uso
• Tipos de datos cuantitativos
- Por conteo
- Por medición
• Fuentes de error en los datos</td><td>1. Interpretar información que ha sido resumida en dibujos, diagramas, cuadros y gráficos en diferentes contextos.</td><td>▲ Se propone plantear algún tipo de representación de modo que se realice una lectura de su contenido. Un ejemplo podría ser el siguiente:

Observe la siguiente representación gráfica, analice la información que suministra y resuma en un párrafo los principales elementos que se observan.



FUENTE: Departamento de Análisis Estadístico, MEP.

▲ Una vez que se ha efectuado el análisis conviene realizar una sesión de discusión sobre la información que se genera, se les puede pedir que respondan preguntas relacionadas con esta información.

Además del análisis estadístico correspondiente, se debe aprovechar la información del gráfico para analizar el eje transversal Educación Integral de la Sexualidad.</td></tr>
<tr><td>2. Identificar diferencias entre datos cuantitativos, según las estrategias de recolección de información: por conteo o por medición.

3. Identificar posibles errores en los datos recolectados.</td><td>▲ Se sugiere plantear algunas interrogantes que involucren la recolección de datos correspondientes a características cuantitativas, por ejemplo:

Defina una estrategia para recolectar información que ayude a responder cada una de las siguientes interrogantes.</td></tr>
</table>

		a. ¿Qué es más probable, que una persona del grupo tenga un peso de 50 kg o más o que su peso sea menor de 50 kg? b. ¿Cuál es la moda o sea el número de estudiantes más común por grupo en la escuela? c. Determinar qué es más variable: el número de gajos o el número de semillas de un grupo de 15 mandarinas. d. Determinar si el ancho de las puertas de las aulas de la escuela es el mismo para todas ellas. ▲ El propósito de la actividad es que identifiquen que algunos datos cuantitativos se obtienen por conteo mientras que otros se obtienen por medición, por lo que se requiere un instrumento de medición para determinar los valores. ▲ Es necesario discutir sobre los errores que se pueden generar en los procesos de recolección de información que se utilizarían para los ejemplos anteriores.
Recolección de información • Experimentación por medición **Representación** • Gráfica: diagramas de puntos **Medidas de posición** • Moda • Media aritmética • Máximo • Mínimo **Medidas de variabilidad** • El recorrido	4. Recolectar datos del entorno por medio de la medición. 5. Emplear los diagramas de puntos para representar grupos de datos cuantitativos. 6. Resumir un grupo de datos mediante el empleo de la moda, la media aritmética (o promedio), el máximo y el mínimo de un grupo de datos e interpretar estas medidas en relación con la información recabada. 7. Identificar el recorrido de un grupo de datos como la diferencia entre el máximo y el mínimo.	Proponga la siguiente lectura: Las primeras **unidades de longitud** que usó el hombre estaban en relación con su cuerpo, como el paso, el palmo, la pulgada, el pie, etc. Estas unidades tienen, entre otros, el grave inconveniente de que no son las mismas para todos.  **Imágenes con derechos adquiridos por el MEP** Así, la longitud de un paso **varía** de un hombre a otro. Por esta razón el hombre ideó unas unidades **invariables**. Al principio estas unidades no eran universales, cada país tenía sus propias unidades e incluso dentro de un mismo país las unidades de medida eran diferentes según las regiones. Como consecuencia del aumento de los intercambios comerciales aumentó también la necesidad de disponer de unas unidades de medida que fueran **fijas**, **invariables** y **universales**. **Fuente:** **http://www.ceibal.edu.uy/contenidos/areas_conocimiento/mat/midiendolongitudes/primeras_unidades_de_medida.html** ▲ Plantee el siguiente problema y proporcione los instrumentos que se requieran para resolverlo.

Proceda a resumir la longitud del paso de un grupo de compañeros (10 o más) y utilice la información para identificar un valor que pudiera ser utilizado como unidad de medida.

Imagen con derechos adquiridos por el MEP

▲ Después que hayan enfrentado el problema y encontrado alguna alternativa para resumir la información recabada, en el proceso de clausura se deben brindar estrategias que permitan resumir mejor el patrón de variación de los datos por medio de una medida estadística. Ante la poca efectividad de la moda, ¿cómo hacer para representar todos los datos por medio de un valor que simbolice su posición en la recta? Se sugiere proponer el empleo de la media aritmética o promedio, la cual equivale a sumar todos los valores y dividir esa suma entre el total de datos; ésta podría utilizarse como unidad de medida del paso.

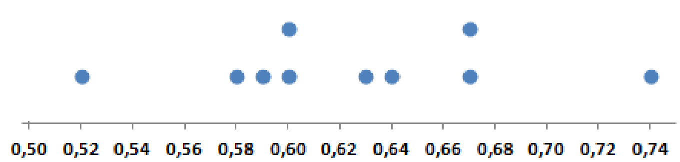
Dentro del mismo proceso de clausura, se pueden plantear las siguiente interrogantes:

a. ¿De qué manera se pueden representar los datos para evidenciar mejor su comportamiento variable?
b. ¿Cuál es la mayor diferencia entre las longitudes de los pasos obtenidos?

Después de realizar una plenaria con las respuestas que se pudieran obtener, se deben proporcionar las siguientes técnicas para responder estas interrogantes:

a. La construcción y el análisis de los diagramas de puntos, para presentar dicha información y determinar visualmente su ubicación y dispersión. Para el ejemplo descrito, el gráfico podría ser de la forma:

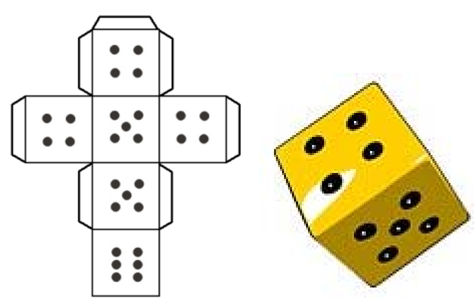
Longitud del paso de 10 estudiantes



b. Determinación del recorrido general de los datos, como la diferencia entre el mínimo y el máximo: Recorrido = Máximo – Mínimo.

No es necesario enfatizar en las diferencias entre las medidas de posición y las de variabilidad, lo principal es la interpretación que se ofrezca a cada una de esas medidas.

		Esta situación muestra la conexión primordial que existe entre las áreas de *Medidas, Números y Relaciones y Álgebra* con *Estadística,* ya que se deben realizar mediciones para recolectar los datos y representar esas mediciones en una recta numérica. A partir de este año, es adecuado utilizar herramientas tecnológicas para simplificar los análisis que se deben realizar. Por ejemplo, mediante el uso de una calculadora se puede determinar fácilmente el promedio o media aritmética de un conjunto de datos. Pero además, si se tiene acceso a computadoras, se puede emplear una hoja de cálculo para favorecer el proceso.

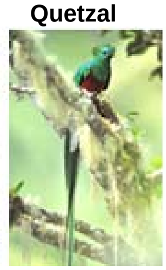
4to Año		
Probabilidad		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Situaciones o eventos aleatorios **Eventos** • Resultados a favor de un evento • Representación de eventos • Eventos más probables, igualmente probables y eventos menos probables	1. Reconocer situaciones aleatorias en diferentes situaciones del contexto. 2. Identificar los distintos resultados simples de un experimento aleatorio. 3. Identificar los resultados a favor de la ocurrencia de un evento. 4. Representar eventos mediante la identificación de sus resultados simples. 5. Determinar eventos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples.	▲ Se puede pedir al grupo ofrecer ejemplos de situaciones aleatorias. Si se plantea el experimento de seleccionar una persona del grupo en forma aleatoria (por medio de una rifa), ¿cuáles serían los posibles resultados de esta selección? ¿Cuántos resultados son? ▲ Se pretende continuar con la identificación de los elementos que constituyen los resultados simples de un experimento y que se pueden resumir por medio de diagramas o del conteo simple. Además de juegos con dados o monedas se pueden plantear problemas que pudieran simular hechos reales, por ejemplo, permita que los estudiantes construyan un dado similar al siguiente:  **Elaboración propia** Una vez que lo hayan hecho proceda a plantear el siguiente problema: Con el dado construido previamente, indique a sus estudiantes que lo lancen varias veces y que procedan a responder las siguientes interrogantes: a. Sin considerar los números repetidos ¿Cuántos resultados en general se pueden obtener en este experimento? b. ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener?

c. ¿Cuál de los resultados es más probable?
d. ¿Cuál de los resultados es menos probable?
e. ¿Será posible obtener un tres?
f. ¿Será posible obtener un número mayor de tres?

Costa Rica es un país privilegiado en cuanto a la variedad de su flora y fauna. Específicamente en aves, es posible encontrar verdaderas joyas de la biodiversidad. Cuatro de las más imponentes y que se encuentran en peligro de extinción son la lapa verde, el quetzal, la lapa roja y el tucán.

Lapa verde

Quetzal



Lapa Roja

Tucán

Imágenes con derechos adquiridos por el MEP

Suponga que en una reserva biológica conviven estas cuatro especies de aves, se han marcado para su estudio especímenes hembra de cuatro lapas verdes, seis quetzales, seis lapas coloradas y diez tucanes (cada una de las especies se numeró de uno en adelante). Un zoólogo coloca una trampa para escoger aleatoriamente una de las aves del refugio para analizar su estado de salud. Con esta información realice las acciones que se solicitan:

a. Determine el número total de posibles resultados en la selección de una de las aves.
b. Indique ¿qué especie de ave tiene mayor probabilidad de ser seleccionada? ¿Cuál tiene menor probabilidad?
c. ¿Cuál de los siguientes eventos es más probable? A: el ave seleccionada es un quetzal o B: el ave seleccionada es una lapa roja. Justifique la respuesta.
d. ¿Es más probable que el ave seleccionada sea una lapa (verde o colorada) a que sea un tucán?

▲ Se debe enfatizar en la argumentación dada para cada una de las respuestas.

Mediante el problema anterior se pretende sensibilizar sobre los recursos en fauna con que cuenta el país y la importancia de conservarlos. Esto viene a contribuir con el eje transversal *Cultura Ambiental para el Desarrollo Sostenible*. Se debe aprovechar el ejercicio para sensibilizar sobre la importancia de la conservación de la flora y la fauna.

En los dos problemas planteados previamente, la argumentación de las respuestas es un elemento fundamental sobre el que debe regir el análisis en los procesos de clausura. Se espera que la actividad estudiantil genere la habilidad para identificar que son más probables aquellos eventos que incluyen más resultados simples.

5to Año		
Estadística		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Población y muestra	1. Valorar la importancia de la estadística en la historia 2. Identificar los conceptos de población y muestra. 3. Reconocer la importancia del muestreo en el análisis de datos.	▲ Es conveniente iniciar con el análisis de algunos fragmentos históricos sobre el desarrollo de la Estadística. Por ejemplo: Los comienzos de la estadística pueden ser hallados en el antiguo Egipto, cuyos faraones lograron recopilar, hacia el año 3050 antes de Cristo, prolijos datos relativos a la población y la riqueza del país. De acuerdo al historiador griego Heródoto, dicho registro de riqueza y población se hizo con el objetivo de preparar la construcción de las pirámides. En el mismo Egipto, Ramsés II hizo un censo de las tierras con el objeto de verificar un nuevo reparto… Pero fueron los romanos, maestros de la organización política, quienes mejor supieron emplear los recursos de la estadística. Cada cinco años realizaban un censo de la población y sus funcionarios públicos tenían la obligación de anotar nacimientos, defunciones y matrimonios, sin olvidar los recuentos periódicos del ganado y de las riquezas contenidas en las tierras conquistadas. Para el nacimiento de Cristo sucedía uno de estos empadronamientos de la población bajo la autoridad del imperio. **Fuente: http://www.eumed.net/cursecon/libreria/drm/1a.htm** Con base en el anterior fragmento responda indique ¿por qué los egipcios y los romanos recolectaban esta información? ¿Qué aportes podía dar la información recabada para el desarrollo de estos pueblos? ▲ Para introducir los conceptos de población y muestra, conviene plantear problemas similares a los siguientes: Se desea realizar un estudio para determinar si en la escuela se prefieren las frutas sobre otros tipos de comidas, ¿qué estrategia se podría utilizar para resolver el problema? En una bolsa de arroz de dos kilogramos se indica que contiene el 95% de granos enteros, pero no estamos seguros de que sea así. ¿Qué estrategia podemos utilizar para averiguar si la afirmación es cierta? ▲ En el proceso de clausura, se requiere evidenciar la dificultad que conlleva trabajar con todos los elementos, especialmente en el caso del arroz. Mientras tanto si se selecciona una parte de la totalidad de los elementos, se debe tener certeza que la parte seleccionada es una buena representación del grupo total. Una vez realizada esta reflexión se deben definir los conceptos de población y muestra. ▲ En estas interrogantes se espera que las y los estudiantes afiancen su confianza en la utilidad de las Matemáticas.

<table>
<tr>
<td>

Recolección de información

- El cuestionario y fuentes de error
- Base de datos
- Gráfica: barras y circulares

Medidas de posición

- Moda
- Media aritmética
- Máximo

  Mínimo

Medidas de variabilidad

- El recorrido

</td>
<td>

4. Reconocer la importancia del cuestionario en los procesos de selección de información.
5. Identificar fuentes potenciales de errores en la recopilación de datos por medio del cuestionario.
6. Diseñar cuestionarios simples enfocados hacia la búsqueda de información.
7. Recolectar datos por medio de la aplicación de un cuestionario y resumir la información correspondiente en una base de datos codificada.
8. Analizar la información recolectada por medio de un cuestionario mediante la elaboración de cuadros, gráficos con frecuencias absolutas y el cálculo de medidas de posición y de variabilidad.

</td>
<td>

▲ El uso de cuestionarios es básico dentro de los procesos de recolección de información. Para potenciarlos se pueden plantear problemas que requieran recolectar información de varias características al mismo tiempo. Por ejemplo:

Se busca determinar las preferencias alimenticias del estudiantado con respecto a cuatro alimentos particulares: frutas, ensaladas (de hortalizas), hamburguesas y papas fritas. Se debe realizar un análisis estadístico que permita clasificar estos productos de acuerdo con la preferencia de las y los estudiantes del grupo. Se recomienda medir la preferencia por el consumo de cada producto por medio de los términos Mucho, Regular y Poco, además incluir el sexo de cada estudiante que responde las preguntas. Diseñe una estrategia que permita recolectar la información necesaria, impleméntela, resuma la información y lleve a cabo el análisis correspondiente.

▲ Aunque se debe buscar una estrategia y se espera que se pueda sugerir el planteo de varias preguntas a la clase, durante el proceso de clausura se debe orientar en la elaboración de un cuestionario sistematizado, similar al siguiente:

Cuestionario sobre la preferencia alimenticia.

Nombre:____

Sexo: Masculino _____ Femenino ___________

Indique su preferencia por consumir cada uno de los siguientes productos, marque con una X dentro del cuadro

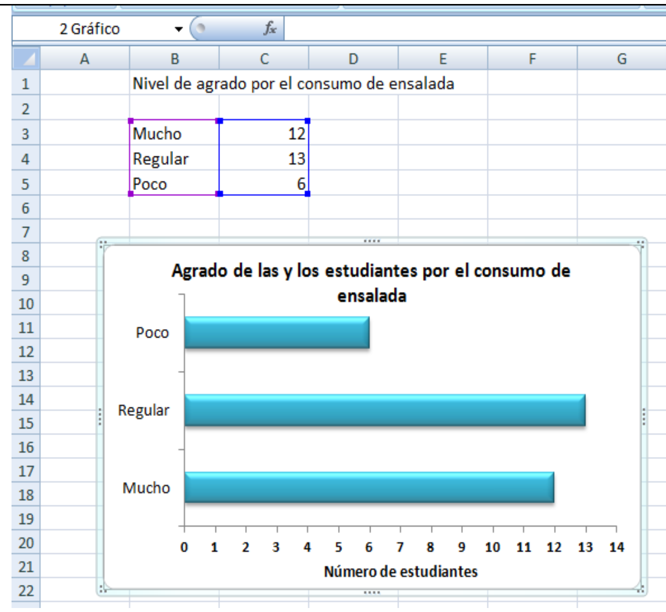
Producto	Mucho	Regular	Poco
Frutas			
Ensaladas			
Hamburguesas			
Papas fritas			

Imágenes con derechos adquiridos por el MEP

Muchas gracias

Para este tipo de problemas, el uso de la computadora ayuda a simplificar el proceso, ya sea para la elaboración de cuadros o representaciones gráficas, tal como se ilustra.

</td>
</tr>
</table>



▲ Discutir sobre los posibles errores que se podrían generar al utilizar el cuestionario en la recolección de datos y proponer estrategias para reducirlos.

▲ Para finalizar la actividad, se propone la siguiente lectura, sobre una encuesta aplicada a 786 estudiantes de Primaria.

> (…) A todos ellos se les consultó sobre los principales productos que ingerían en la merienda, si estaban acostumbrados a comer a deshora, qué productos les gustaba más y cuáles eran sus alimentos comerciales preferidos. Al preguntarles a los niños qué alimentos adquirían con su dinero, más de la mitad dijo preferir las papas fritas, galletas, chocolates, helados y otros alimentos ricos en grasas saturadas. Luego venían las bebidas gaseosas y jugos, recién en tercer lugar estaban el yogurt y la leche. Estos datos ayudan a explicar la creciente epidemia de obesidad infantil.
>
> El consumo de frutas es cada vez menos frecuente, por lo que creemos que en pocos años más tendremos niños con problemas de articulaciones y columna. Además, se adelantará la edad de aparición de las enfermedades cardiovasculares y subirán los niveles de colesterol.

Fuente: http://triunviratumltda.blogspot.com/2006/06/alimentacin-sana-vs-comida-chatarra.html

Proceda a generar un debate sobre los resultados de este estudio con respecto a los que obtuvieron en el análisis del grupo. Aproveche para motivar sobre la importancia de una sana alimentación, tal como se establece en el eje transversal *Educación para la Salud*.

		Se requiere evidenciar el papel fundamental que tiene la *Estadística* para la representación de los datos en cuadros, tablas y gráficos. Además estos instrumentos constituyen una forma de modelar el nivel de agrado por consumir estos productos. La información resumida por estos medios constituye un valioso instrumento que se puede utilizar para argumentar sus respuestas. ▲ En otros ejemplos de cuestionarios se puede incluir información cuantitativa que permite utilizar medidas para resumir la información.

5to Año		
Probabilidad		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Eventos • Resultados a favor de un evento • Eventos seguros, probables o imposibles • Eventos más probables, igualmente probables y eventos menos probables	1. Identificar el número de resultados favorables de un evento dado. 2. Determinar eventos seguros, probables o imposibles en situaciones aleatorias particulares. 3. Interpretar los conceptos de eventos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples.	▲ Se recomienda iniciar esta sección con el empleo de los resultados que se generaron previamente con problemas similares al siguiente. Considere nuevamente los resultados de la encuesta alimentaria que se realizó anteriormente. Si una o un estudiante del grupo es seleccionado aleatoriamente, de acuerdo con los resultados sobre el nivel de agrado por el consumo de ensalada determine: a. El número de resultados a favor de que le agraden mucho las ensaladas. b. ¿Qué es más probable, que le agraden poco o que le agraden mucho las ensaladas? ▲ Se requiere que identifiquen los resultados a favor de cada evento, de acuerdo con los resultados de la encuesta. Por medio de este problema se conectan los resultados de los análisis estadísticos con los contenidos sobre probabilidades. ▲ Por medio de trabajos en subgrupos, se entrega un par de dados de diferentes colores a cada subgrupo y se les pide que experimenten con ellos para resolver interrogantes vinculadas con el lanzamiento de los dos dados. Al lanzar dos dados: a. Determine el número de resultados posibles. Para ello se les recomienda que cada resultado lo representen con un par de números de la forma (2,5) donde el 2 representa el resultado del primer dado y el 5 el resultado del segundo dado. b. Si se suman los puntos obtenidos con los dos dados, determine el número de resultados favorables vinculados con los siguientes eventos: • Obtener un tres. • Obtener un seis.

<table>
<tr><td></td><td></td><td>

Obtener un uno.
Obtener un número menor que 4.
Obtener un número menor que 13.

c. Clasifique los eventos anteriores en evento seguro, probable o imposible según el número de resultados a favor.

d. Para los siguientes casos indique cuál evento es más probable:

Obtener un tres u obtener un once.
Obtener un cuatro u obtener un seis.

e. Al sumar los puntos, ¿cuál número tiene mayor probabilidad de salir?

En general en este año se deben formular situaciones de aprendizaje (juegos o situaciones de la cotidianidad) que permitan identificar el número de resultados a favor de un evento determinado y con base en ese conocimiento tomar decisiones. Una activa participación estudiantil en este ciclo será un factor fundamental en su desarrollo cognitivo y en la adquisición de las habilidades propuestas.
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">6to Año</td></tr>
<tr><td colspan="3">Estadística</td></tr>
<tr><td>Conocimientos</td><td>Habilidades específicas</td><td>Indicaciones puntuales</td></tr>
<tr><td>Porcentajes

Frecuencias porcentuales
Comparaciones entre grupos
</td>
<td>1. Resumir y clasificar grupos de datos utilizando la frecuencia porcentual.

2. Identificar la frecuencia porcentual como herramienta fundamental para los análisis comparativos entre dos o más grupos de datos.</td>
<td>▲ La frecuencia absoluta no siempre es una buena estrategia para analizar los datos. Plantee el siguiente problema:

Suponga que se realizó una encuesta para determinar el nivel de agrado por el consumo de frutas (mucho, regular, poco) entre los hombres y mujeres de un grupo de sexto grado y los resultados se resumen en el siguiente cuadro:

Relación con el agrado de las y los estudiantes por las frutas según el sexo
<table>
<tr><th>Agrado</th><th>Hombres</th><th>Mujeres</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>Mucho</td><td>9</td><td>7</td><td>16</td></tr>
<tr><td>Regular</td><td>5</td><td>3</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Poco</td><td>4</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>18</td><td>12</td><td>30</td></tr>
</table>
De acuerdo con esta información, ¿quiénes tienen más preferencia por el consumo de frutas, los hombres o las mujeres?

Considerando los conocimientos previos, se espera que perciban que los hombres tienen una mayor predilección por las frutas, pues es mayor el número de hombres que prefieren las frutas. No obstante, dicha afirmación es falsa, pues el número total de hombres en el grupo es muy superior al de mujeres.

Hay que orientar el proceso. Para ello se podría consultar ¿quién tiene menos preferencia por el consumo de frutas? En este sentido se pide reflexionar que los hombres tienen menos
</td></tr>
</table>

preferencia, lo cual les lleva a una contradicción y a la necesidad de replantear el problema.

Es necesario orientar hacia la necesidad de que consideren el cálculo de porcentajes para cada sexo tal como se indica.

Distribución absoluta y porcentual en relación con el agrado de las y los estudiantes por las frutas según el sexo

Agrado	Hombres Absoluto	Hombres %	Mujeres Absoluto	Mujeres %	Total
Mucho	9	50,0	7	58,3	16
Regular	5	27,8	3	25,0	8
Poco	4	22,2	2	16,7	6
Total	18	100,0	12	100,0	30

Con esta información se puede concluir que las mujeres tienen una mayor preferencia por el consumo de frutas. En la etapa de clausura, se debe señalar la importancia de usar los porcentajes en los análisis comparativos entre las frecuencias de dos o más grupos de datos, pues los valores absolutos pueden engañar.

Para este problema el uso de la calculadora permite determinar los porcentajes de una manera muy simple y rápida. Hay que recordar que en este tipo de problemas los cálculos no son el fin, sino el medio para resolver el problema y argumentar las respuestas.

Diagramas lineales

3. Utilizar diagramas lineales para representar tendencias en series de tiempo.

▲ Los gráficos lineales se utilizan fundamentalmente para representar series de tiempo, las cuales constituyen un grupo de datos ordenados de acuerdo con el tiempo de ocurrencia.

Utilice los datos que se proporcionan para resumir gráficamente la información correspondiente a la cantidad de nacimientos de hombres y mujeres en el país entre el año 2000 y el 2009 empleando una escala apropiada (una unidad por diez mil nacimientos). Comente los resultados.

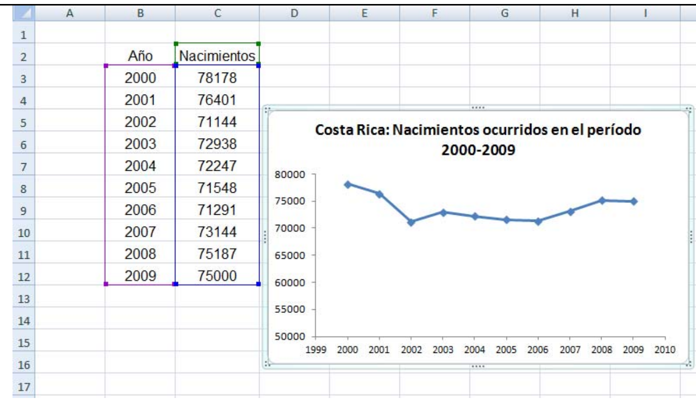
Nacimientos en Costa Rica, 2000-2009

Año	2000	2001	2002	2003	2004
Total	78 178	76 401	71 144	72 938	72 247

Año	2005	2006	2007	2008	2009
Total	71 548	71 291	73 144	75 187	75 000

Fuente: Centro Centroamericano de Población

Aunque estos gráficos se pueden construir en forma manual, si se tiene acceso a computadoras el proceso se simplifica y cada estudiante puede concentrarse en el mensaje que los datos proporcionan.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>


▲ Es esencial que el análisis que se realice esté centrado en la tendencia de los datos, de modo que identifiquen el descenso de los nacimientos que se experimentó entre los años 2000 y 2002 y que después de ese año el número de nacimientos no varió de forma significativa entre un año y otro.

Se debe evidenciar la importante conexión que existe entre la *Estadística, Relaciones y Álgebra* (plano cartesiano) *y* las Ciencias Sociales. Este vínculo no sólo contribuye a facilitar el entendimiento de las formas de representación gráfica de la información, sino que permite llenar de significado los conceptos aprendidos en las lecciones.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Planteamiento y resolución de problemas</td>
<td>4. Plantear y resolver problemas vinculados con diferentes contextos utilizando análisis estadísticos.</td>
<td>
▲ Se busca que las y los estudiantes puedan plantear problemas dentro del contexto del colegio o de la comunidad y diseñar estrategias que podrían ser implementadas para resolver la problemática (aunque no es necesario llevarlas a la práctica).

En este ciclo es fundamental enfatizar en las distintas fases que comprende la resolución de problemas.
</td>
</tr>
</table>

6to Año		
Probabilidad		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Probabilidades • Definición clásica o laplaciana de probabilidad	1. Determinar la probabilidad de un evento como la proporción de resultados favorables del evento entre el total de resultados.	▲ Para generar las condiciones necesarias para definir el concepto de probabilidad, pueden realizarse actividades como las siguientes: El profesor plantea siguiente problema a Carlos y Ana. Se incluyen frutas dentro de dos bolsa tal como se muestra en las figuras:  Caso 1  Caso 2 Se plantea la interrogante que si se seleccionaran aleatoriamente una fruta de la bolsa en cada caso, ¿en cuál sería más probable seleccionar una naranja?. Carlos le dice a Ana que de acuerdo con lo que se ha venido estudiando entre más resultados hay a favor de un evento, mayor es la probabilidad, por ello en el caso 2 sería más probable obtener una naranja. ¿Está usted de acuerdo con el argumento de Carlos? Justifique matemáticamente su respuesta. ▲ Se pretende que identifiquen el concepto de probabilidad como una medida relativa, para el problema anterior deben identificar que en mayor tres de siete que cuatro de diez. ▲ Para complementar el problema anterior, introduzca en una caja o en una tómbola cuatro bolas de color rojo, tres azules y tres blancas (o cualesquiera otros colores, pero trate de mantener la relación). Luego proponga el siguiente problema: Determinar cada uno de los siguientes valores: a. Proporción de bolas rojas que hay en la caja (equivale a la razón de bolas rojas entre el total de bolas). b. Proporción de bolas azules que hay en la caja (equivale a la razón de bolas azules entre el total de bolas). c. Proporción de bolas blancas que hay en la caja (equivale a la razón de bolas blancas entre el total de bolas). Si se extrae una bola aleatoriamente, ¿qué evento es más probable para cada una de las siguientes parejas? a. La bola extraída es roja; la bola extraída es azul. b. La bola extraída es blanca; la bola extraída es azul. Compare los resultados de las proporciones con los eventos más probables y menos probables anteriores. ¿Qué conclusión se puede extraer?

		▲ En el proceso de clausura o cierre de esta actividad se propone realizar un foro de discusión donde se expongan las ideas más importantes. Después de esta actividad se debe definir el concepto de probabilidad como la proporción de casos favorables de un evento entre el total de casos. Aquí debe quedar claro que esta definición es válida siempre que todos los resultados sean igualmente probables. Presentar nuevas situaciones que les ayuden a reafirmar el concepto.
Propiedades de las probabilidades • La probabilidad de cualquier evento es un valor numérico entre 0 y 1 inclusive • La probabilidad de un evento seguro es 1 y de un evento imposible es 0	2. Deducir mediante situaciones concretas los valores que puede tomar la probabilidad de un evento cualquiera, de un evento seguro y de un evento imposible. 3. Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones.	▲ Para la misma situación establecida al inicio del tema, mediante trabajo en subgrupos pedir que se resuelva el siguiente problema. Determine un evento imposible y un evento seguro y responda las siguiente preguntas: a. ¿Cuál es la probabilidad de un evento seguro? b. ¿Cuál es la probabilidad de un evento imposible? c. Si se suman las probabilidades de obtener una bola roja, de obtener una bola azul y de obtener una bola blanca, ¿cuál es el resultado? d. ¿Podría ocurrir que un evento cualquiera tenga una probabilidad mayor que la unidad? e. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar la probabilidad de un evento? ▲ Con los resultados generados en cada subgrupo plantear una lluvia de ideas para determinar las principales conclusiones sobre el estudio. Finalmente se requiere precisar las propiedades básicas, en el sentido que una probabilidad es un valor entre cero y uno, además que la probabilidad de un evento seguro es uno y la de un evento imposible es cero. Seguidamente, para reforzar el conocimiento adquirido, proporcione algunos problemas adicionales. Las probabilidades se pueden utilizar para representar situaciones aleatorias. Al final del ciclo, debe quedar claro que en las situaciones aleatorias no es posible conocer el resultado que se va a obtener, caso contrario de las situaciones deterministas. No obstante, por medio de las probabilidades se puede modelar cuáles resultados tienen mayor posibilidad de ocurrencia, lo cual facilita la toma de decisiones.

Indicaciones metodológicas

Generales para el ciclo

1. En este ciclo es decisivo complementar las habilidades adquiridas previamente con la adquisición de nuevas estrategias de recolección, resumen y análisis de datos. Por esta razón, se requiere perfilar situaciones vinculadas con las realidades concretas que impliquen nuevos retos para el análisis de los datos. Las habilidades de lectura de información desarrolladas en el Primer ciclo deben ser dirigidas hacia un análisis crítico y objetivo de la información que proporcionan los datos.

2. En relación con el manejo de situaciones aleatorias y de la probabilidad, este ciclo permite dar un salto cualitativo, pues de una idea intuitiva sobre probabilidad se llega a calcular probabilidades como una proporción de resultados favorables entre el total de posibles resultados. Esto posibilita que cada estudiante pueda tener una mejor comprensión de las situaciones aleatorias; por ello es importante estructurar problemas simples vinculados con la toma de decisiones.

3. Aunque se incorporan estrategias que pueden llevar a situaciones muy complejas para este nivel escolar, conviene que cada docente las dosifique, pues únicamente se pretende introducir hacia el uso de las técnicas para recolectar y resumir información. Por ejemplo, la elaboración y aplicación adecuada de un cuestionario es un trabajo para especialistas en el tema, por lo que se busca a este nivel acercar al estudiantado hacia el conocimiento del recurso y el tipo de datos que proporciona.

4. Se debe identificar aquella información del entorno que tiene mayor potencial para ser utilizada en los análisis, de modo que permita explorarla, analizarla, interpretarla y criticarla.

5. El ritmo de avance en materia de los análisis aleatorios y probabilísticos es pausado, pues la temática así lo obliga. Pero es fundamental generar situaciones que propicien las habilidades planteadas. Es conveniente considerar situaciones aleatorias con un número pequeño de resultados, pues lo que se pretende es generar la comprensión de ciertas propiedades e interrelaciones básicas y que puedan ponerse en práctica.

6. Al igual que se realizó en el Primer ciclo, el concepto de dato como unidad primaria y el de variabilidad como fuente principal de los análisis estadísticos deben tener un rol trascendente dentro de la discusión general. Por la complejidad que implica la medición de la variabilidad, únicamente se determina el recorrido de los datos como una primera aproximación; medidas de variabilidad más precisas se abordarán en la Secundaria. No obstante, debido a que la variabilidad forma parte de todos los análisis estadísticos, es conveniente proponer situaciones en las cuales se comparen grupos de datos con variabilidades diferentes, lo que permitiría lograr una mejor comprensión sobre la relevancia del concepto.

7. Aunque se trabaja en la construcción de cuadros y gráficos, así como en la determinación de algunas medidas de resumen, se enfatiza nuevamente en que son únicamente herramientas y que lo fundamental radica en el mensaje general y específico que se desea suministrar. Es necesario visualizar estos elementos como un vehículo para proporcionar ese mensaje y ofrecer una respuesta concreta al problema original. Por esta razón hay que buscar estrategias que permitan favorecer una adecuada representación gráfica y tabular, y en este sentido las computadoras son un recurso muy valioso. Acá se puede emplear la calculadora para simplificar cálculos, así como la computadora por medio de una hoja de cálculo.

8. En relación con el punto anterior, aunque los gráficos en tres dimensiones tienen mucha aceptación en diversos sectores no se debe recomendar su uso, ya que en algunas ocasiones se prestan para la confusión. Hay que recordar que el propósito de un gráfico es suministrar información de la forma más simple posible y por ello cualquier elemento que pueda confundir o distorsionar la información debe descartarse.

9. Otro error común es la denominada "*falacia del jugador*", por medio de la cual se cree que en una situación de probabilidades fijas un evento que ha ocurrido puede afectar las probabilidades futuras de ocurrencia. Por ejemplo, se cree que un número que haya logrado el premio mayor de la Lotería Nacional en un sorteo tiene menos probabilidad de obtener ese mismo premio en el sorteo siguiente. Esto es falso, pues sin tomar en cuenta las series, en cada sorteo de la Lotería Nacional hay 100 números todos ellos igualmente probables, por lo que la probabilidad de que un número particular salga favorecido en cada sorteo es independiente del sorteo.

10. Por lo anterior, en las situaciones en que se identifiquen errores en la utilización de recursos estadísticos o probabilísticos es necesario presentar contraejemplos que pongan en evidencia las incongruencias sobre interpretaciones a las que dicho error podría conducir. Por ejemplo, es el caso del siguiente cuadro, donde se desea identificar quiénes tienen un mayor agrado por las frutas.

Relación con el agrado de las y los estudiantes por las frutas según el sexo

Agrado	Hombres	Mujeres	Total
Mucho	9	7	16
Regular	5	3	8
Poco	4	2	6
Total	**18**	**12**	**30**

Puede surgir la idea equivocada de que los hombres presentan un mayor agrado por las frutas que las mujeres (nueve hombres contra siete mujeres señalan que les agrada mucho las frutas). Una forma de corregir esa idea equivocada consiste en preguntarles que indiquen a quiénes les agrada menos las frutas, pues si utilizan el mismo razonamiento llegarán a una contradicción, ya que a cuatro hombres contra dos mujeres les agrada poco las frutas. Esto provoca la necesidad de replantearse el problema por medio del cálculo de porcentajes tal como se señaló en las indicaciones puntuales.

Una forma de enfocar esta misma situación y conectarla con el tema de probabilidades consiste en plantear:

a. Si se selecciona a una estudiante del grupo, ¿cuál es la probabilidad de que le agraden mucho las frutas?
b. Si se selecciona a un estudiante del grupo, ¿cuál es la probabilidad de que le agraden mucho las frutas?

Debido a que la respuesta a la pregunta a. es 0,58 y la respuesta a la pregunta b. es 0,50 aproximadamente, es claro que es más probable que a las mujeres les agrade las frutas.

11. Es conveniente recordar que para facilitar la interpretación, tanto los cuadros como los gráficos deben llevar un título suficientemente explícito que permita hacer una lectura sin necesidad de buscar más información.

12. En el análisis de las probabilidades los juegos de azar permiten establecer ejemplos que favorezcan la comprensión. Por ello deben estar presentes en todo momento, manteniendo siempre su carácter lúdico. No obstante, es pertinente complementar con otros problemas del contexto estudiantil para visualizar la utilidad práctica de la disciplina.

13. Los problemas establecidos deben tener un nivel de dificultad acorde con las habilidades que se desean generar, para incrementar paulatinamente su nivel de dificultad. Al igual que en el Primer ciclo, las situaciones de aprendizaje no pueden ser simplemente la repetición de las actividades previas, sino más bien incorporar un reto adicional.

14. Por las características que tienen estas áreas (Estadística y Probabilidad), se deben incluir diversas situaciones que ayuden a crear conciencia sobre tópicos transversales del plan de estudios.

Cuarto año

1. El análisis de diversos tipos de representaciones (dibujos, diagramas, cuadros o gráficos) que han sido publicadas en diversos medios de comunicación, aunque su construcción no haya sido analizada, permite favorecer la lectura de la información estadística. Para ello se recomienda que se propicie la participación estudiantil mediante preguntas concretas sobre el mensaje que transmite la representación.

2. Al incorporar la experimentación empleando mediciones dentro de los procesos de recolección de información cuantitativa, también genera un nuevo tipo de dato. Se recomienda enfatizar las diferencias en la forma en que se recolectan: unos se obtienen por conteo y otros por medición. Se caracterizan de esta manera pues en la Primaria no se pretende realizar una amplia discusión sobre el tema de datos continuos (este concepto no se debe mencionar), sino generar una idea intuitiva. Es importante hacer esta diferencia, pues el empleo de datos cuantitativos obtenidos por medición genera la necesidad de utilizar otras herramientas para resumirlos o clasificarlos. Esto se debe a que normalmente son muy diferentes unos de otros (sobre todo cuando las mediciones se dan con decimales), lo cual no ocurre así con los datos obtenidos por conteo. Por lo que no resulta eficiente construir cuadros de frecuencias o gráficos de barras simples.

3. Al trabajar con mediciones, se requiere evidenciar los posibles errores en los procesos de recolección de datos. Conviene dar énfasis en la precisión de los instrumentos que se utilizan para medir y el error humano que se puede producir al realizar la observación.

4. Respecto al problema relacionado con la medición del paso, o cualquier otro experimento similar, lo ideal es que sean las y los estudiantes quienes lleven a cabo la experimentación y propongan una estrategia para recolectar la información y resolver el problema. Se requiere estar atento para orientar el proceso. Lo recomendable sería que utilizaran una cinta métrica para determinar las mediciones en metros y centímetros, pero podrían utilizar otros instrumentos como reglas, el metro del docente, un cordón del zapato, etc.

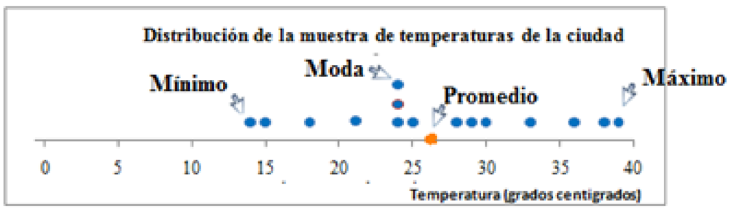
   Para el análisis de la información resultante, de acuerdo con el conocimiento previo que se tiene, se espera que busquen estrategias de representación de los datos por medio de un cuadro de frecuencias o un gráfico de barras. Acá deberán enfrentar nuevos retos, pues debido a la variabilidad de mediciones no es adecuado resumirlos mediante esas representaciones, y posiblemente la moda tampoco proporcione información de interés, ya que las frecuencias de los datos en estos casos regularmente son muy bajas, lo que no permite ver un patrón claro. En el caso de la moda podrían existir varios valores modales. De allí que los diagramas de puntos y el cálculo de la media aritmética son estrategias que permiten resumir de una mejor manera los datos.

5. Al analizar la media aritmética o promedio, es conveniente hacer hincapié en la importancia que tiene esta medida para los análisis estadísticos, debido a que es una de las medidas que más se utiliza para resumir conjuntos de datos.

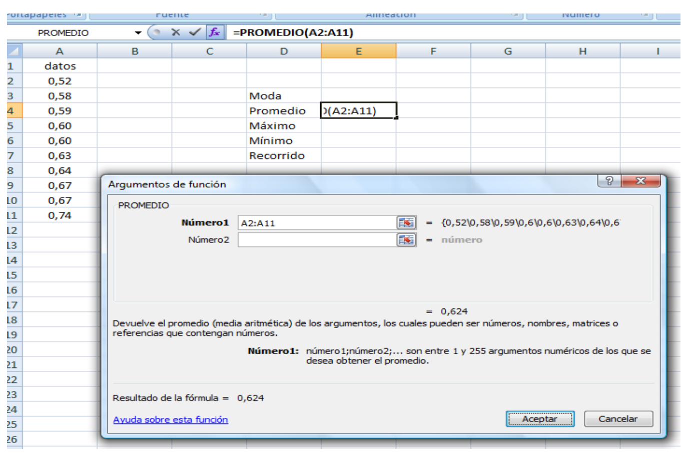
6. En el análisis de las medidas de la longitud del paso, se espera que además de la representación gráfica estén en capacidad de completar e interpretar la información del siguiente cuadro.

Medidas	**Longitud del paso**
Moda(s)	
Promedio	
Mínimo	
Máximo	
Recorrido	

7. Conviene integrar las diferentes técnicas que se vayan utilizando, por ejemplo es valioso identificar en un gráfico las principales medidas de posición estudiadas hasta el momento, pues dichas medidas tienen su interpretación gráfica, tal como muestra la siguiente ilustración. Observe el siguiente diagrama para resumir los datos de una muestra de días en los que se midió la temperatura en cierta ciudad.



8. En este año, se debe iniciar con el uso de la tecnología como una herramienta para favorecer los cálculos y las representaciones. La calculadora y la computadora son instrumentos de mucho valor práctico que le permiten a cada estudiante concentrarse en los análisis y la argumentación.



9. Para complementar el problema de las aves planteado en el área de *Probabilidad*, se puede plantear otro problema similar al siguiente:

   Una caja contiene cuatro bolas azules, dos bolas rojas y una bola blanca. Si se concibe el experimento de extraer una bola sin ver su color (aleatoriamente):

   a. Determine el número de resultados simples que se pueden obtener.
   b. De todos estos resultados, ¿cuántos son favorables para el resultado de obtener una bola azul?
   c. ¿Qué otros resultados posibles pueden presentarse?
   d. ¿Qué es más probable, obtener una bola blanca u obtener una bola roja? ¿Por qué?

Quinto año

1. Para favorecer las habilidades correspondientes a los conceptos de población y muestra, se requiere generar problemas donde se pueda identificar sin mucha complicación la población total. En las indicaciones puntuales se incluyen dos problemas muy ilustrativos. El primero se relaciona con la totalidad de estudiantes de la escuela, donde se podrían establecer diferentes estrategias para muestras; por ejemplo, seleccionar cinco estudiantes de cada grupo por medio de rifas, seleccionar un grupo por nivel (si la escuela fuera muy grande), entre otros. El segundo se refiere a la totalidad de granos de arroz de una bolsa. Ante la imposibilidad de analizar todos los granos, la necesidad de una muestra queda muy clara. En este caso una forma de selección de una muestra es elegir pequeñas cantidades de arroz de distintas partes de la bolsa hasta completar un pequeño recipiente (por ejemplo una tapa de una botella plástica de refresco) cuya cantidad de granos pueda ser analizada.

Imagen con derechos adquiridos por el MEP

Nota: Esta actividad fue planteada por el Licenciado Javier Quirós, en la tesis Contribución a una propuesta metodológica de la enseñanza de la Estadística en Octavo año de la Enseñanza General Básica. Escuela de Matemática, UCR, 2010.

2. En el proceso de diseñar y aplicar el cuestionario para recolectar datos, es necesario tener claro que es una introducción al empleo de este recurso. Por esta razón hay que simplificar su uso para resolver situaciones muy concretas donde se puedan bosquejar unas pocas preguntas preferiblemente cerradas que incluyan escalas simples o abiertas de respuesta breve. No obstante, hay que procurar que cumplan ciertas normas básicas en el empleo de este recurso, como la introducción, el orden de las preguntas, la redacción, entre otras.

3. En relación con el problema sugerido en las indicaciones puntuales sobre la preferencia alimenticia, una vez recolectada la información mediante la aplicación del cuestionario se requiere ordenarla adecuadamente para poder realizar el análisis posterior. Aquí conviene sugerir nuevamente la construcción de una base de datos, similar a las que se utilizaron en el Primer ciclo, sólo que para este problema se incluyen varias características. Se puede utilizar una hoja de cálculo para facilitar la construcción de esta base de datos.

			Nivel de preferencia por			
Número	**Nombre de cada estudiante**	**Sexo**	**Frutas**	**Ensal.**	**Hamb.**	**Papas fritas**
1	Abarca Lewis Manolín	M	P	P	M	M
2	Álvarez Moín Libertad	F	R	P	R	M

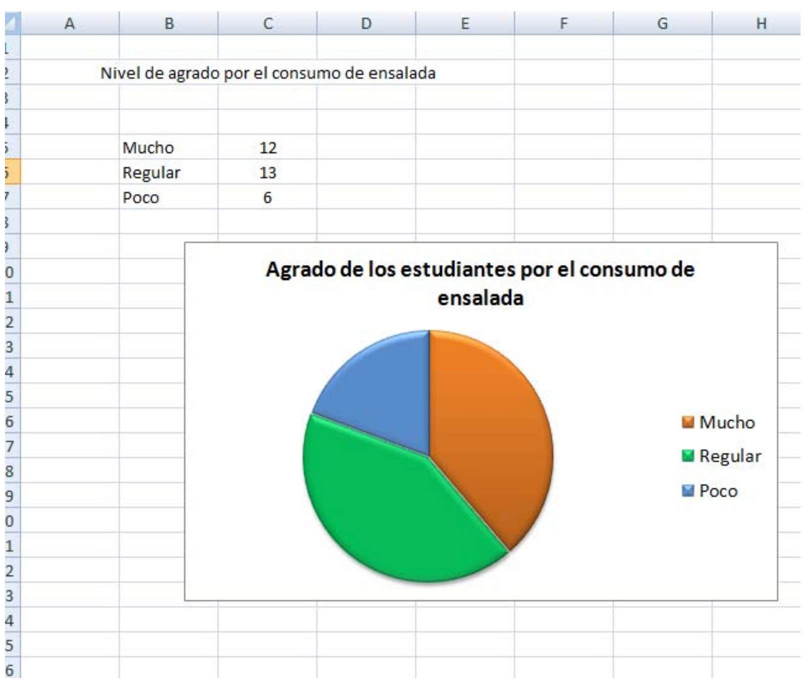
Es importante que adquieran la habilidad de utilizar códigos para no poner toda la palabra dentro del cuadro. Aquí se pueden utilizar códigos para representar los datos. El sexo: F y M representan femenino y masculino respectivamente y el agrado: M, R y P representan respectivamente mucho, regular y poco. Pero también se pueden utilizar números para codificar, por ejemplo: 0: masculino y 1: femenino; 0: poco, 1: regular y 2: mucho. Por lo que la base sería de la forma siguiente:

		Nivel de preferencia por			
Nombre de cada estudiante	**Sexo**	**Frutas**	**Ensal.**	**Hamb.**	**Papas fritas**
Abarca Lewis Manolín	0	0	0	2	2
Álvarez Moín Libertad	1	1	0	1	2

Con la información recabada y resumida en la base de datos deben proceder a resumir la información y a extraer las conclusiones correspondientes, presentando argumentos para clasificar la preferencia alimenticia en el grupo. Nuevamente el uso de la computadora se constituye en una herramienta fundamental para realizar esta labor.

4. Para complementar la identificación de los conceptos de población y muestra, así como el uso del cuestionario, es conveniente que se haga referencia a distintos tipos de encuestas que se aplican en el país: encuestas de hogares, encuestas políticas, encuestas de mercadeo, entre otras. Para su implementación es primordial el muestreo, pues resulta muy difícil consultar toda la población de interés; además la información en estas encuestas es recolectada mediante la aplicación de un cuestionario que incluye una gran cantidad de preguntas. Esta información se puede consultar en la dirección electrónica www.inec.go.cr.

5. En relación con los gráficos circulares o de pastel, se pretende únicamente que cada estudiante esté en capacidad de interpretar la información que se suministra. Si se cuenta con una computadora es posible discutir su elaboración, pero no se recomienda entrar en una construcción manual pues requiere de gran inversión de tiempo y esfuerzo.

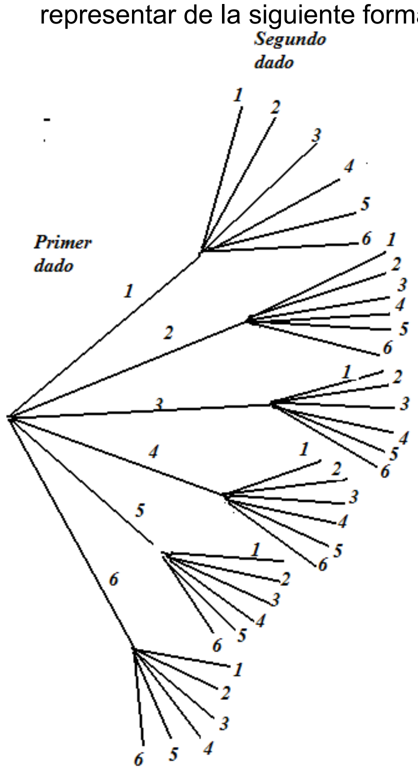


6. Hay que hacer notar que en los gráficos circulares es difícil identificar el ordenamiento de las categorías a no ser que sean muy diferentes entre sí. En el ejemplo de la gráfica anterior, cuesta identificar cual segmento tiene mayor área, si el que corresponde a “Mucho” o el que corresponde a “Regular”. Por ello, los gráficos de barras son un mejor instrumento de representación de información. El alcance de los gráficos circulares se evidencia en la conexión que se realiza con la *Geometría.*

7. En el área de *Probabilidad*, respecto al problema vinculado con el lanzamiento de dos dados, se debe evidenciar que en total hay 36 resultados posibles (36 pares) al lanzar dos dados.

Imagen con derechos adquiridos por el MEP

Además de la enumeración en pares de la forma: (2,2), (2,3), …, (6,6), los resultados se pueden representar de la siguiente forma:



Resultados posibles al lanzar dos dados

	Segundo dado					
Primer dado	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Al sumar los puntos se obtienen números entre 2 y 12. Las y los estudiantes deben identificar que un evento seguro incluye a todos los resultados del experimento mientras que un evento imposible no tiene resultados a favor. La forma en que razonan o argumentan las respuestas merece especial atención dentro de la acción docente.

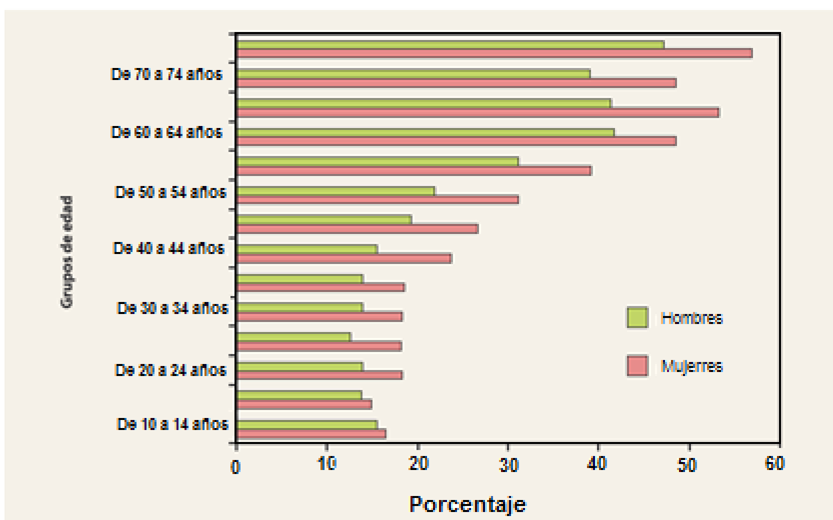
Sexto año

1. Plantear problemas para que sean resueltos en subgrupos. Las y los estudiantes tienen que diseñar y ejecutar una investigación que requiera de la recolección y análisis de información. Necesitan formular las preguntas que se deben responder o llevar a cabo procesos para la recolección, el resumen, la presentación de datos y el análisis descriptivo de la información cuantitativa y cualitativa, además de generar las conclusiones correspondientes. Hay que cerciorarse que se pongan en práctica las habilidades propuestas.

2. Es imprescindible prestar atención a los errores comunes dentro de los análisis estadísticos. Por ejemplo, un error común es el empleo de frecuencias absolutas para realizar análisis comparativos entre grupos. Por ejemplo, de acuerdo con la información de un colegio, para un año particular desertaron 45 estudiantes de 9° Año y únicamente 10 de 10° Año. Esto podría hacer pensar que los niveles de deserción son mayores en 9° que en 10°, lo cual no resultó cierto pues la matrícula inicial para 9° Año fue de 398 estudiantes y para 10° de 81; los porcentajes de deserción fueron de 11,3% y 12,35% respectivamente. Este ejemplo permite identificar que aunque en muchos análisis estadísticos se utiliza la frecuencia absoluta, no es una herramienta adecuada cuando se realizan comparaciones entre grupos. Para estos casos es preferible utilizar la frecuencia porcentual.

3. En relación con el punto anterior, es muy importante generar la capacidad de realizar análisis comparativos con información que ha sido publicada en algún medio de comunicación. Por ejemplo, considere la siguiente representación gráfica y analice los porcentajes de analfabetismo para determinar si:

Costa Rica: Porcentaje de analfabetismo entre la población indígena, por grupos de edad, según sexo.



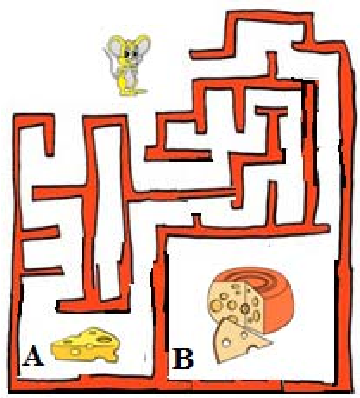
Fuente: Elaborado por la Unidad de Investigación del INAMu con base en el IX Censo de Población 2000, INEC

a. ¿Existen diferencias en los porcentajes de acuerdo con la edad? Justifique.
b. ¿Existen diferencias en los porcentajes de acuerdo con el sexo? Justifique.

Se esperaría que se pueda identificar que los porcentajes de analfabetismo aumentan a medida que las personas tienen más edad. Y que para todos los grupos de edad, los porcentajes de analfabetismo son mayores entre mujeres que entre hombres. Estos hechos deben ser resaltados, en el sentido de distinguir la importancia de que el sistema educativo llegue a todos los sectores y por igual entre hombres y mujeres. Esto ayuda a destacar los ejes transversales de *Educación Integral de la Sexualidad* y *Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz*.

4. Es importante esbozar problemas en los cuales, además de aprender en el proceso de resolución, puedan entretenerse. Un ejemplo que permite determinar si han adquirido el concepto clásico de probabilidad es el siguiente:

   Se ubica un ratón en el inicio del laberinto para el cual hay tres puertas que conducen a dos recintos A y B en los que se encuentran trozos de queso. Se supone que el ratón elegirá aleatoriamente la puerta, y es igualmente probable que elija cualquiera de las tres puertas, pero una vez que haya ingresado por una de ellas no puede salir y debe continuar su camino hasta el recinto correspondiente. De acuerdo con esta situación, utilice probabilidades para determinar cuál de los recintos tiene más probabilidad de que el ratón ingrese en él.



Elaboración propia

5. Mediante la definición clásica de probabilidad, que establece que la probabilidad de un evento se determina como la razón (o proporción) de casos favorables entre el total de casos, se pretende favorecer la capacidad para deducir algunas propiedades importantes. En las indicaciones puntuales se incluye un problema para el cual se deben deducir estas propiedades, el cual corresponde a la selección de bolas de diferentes colores. Un problema contextualizado que permite realizar la misma actividad es el siguiente:

   Considere la información del cuadro (puede utilizar información recolectada en el mismo grupo):

Número de miembros por hogar para las y los estudiantes de la sección ____

Número de miembros	Número de estudiantes
2	1
3	3
4	9
5	6
6	2
7	1
10	1
Total	**23**

   Suponga que se selecciona aleatoriamente una o un estudiante:

   a. Determine un evento seguro, un evento imposible y un evento probable.
   b. Determine la probabilidad de cada uno de los eventos anteriores.
   c. De acuerdo con lo anterior, ¿cuál es el mayor valor y cuál el menor valor que puede tomar la probabilidad de un evento cualquiera?

Por ejemplo, un evento imposible sería que en el hogar de la o el estudiante seleccionado vivan 12 personas. Debido a que no hay estudiantes dentro de este grupo que cumplan esta condición la probabilidad es cero, lo cual va a ocurrir para todo evento imposible.

Un evento seguro podría ser que en el hogar de la o el estudiante seleccionado vivan menos de 11 personas. Por ser un evento seguro todo el estudiantado cumple esta condición, entonces la probabilidad es uno, lo cual sería válido para todo evento seguro.

Finalmente, un evento probable podría ser que en el hogar de cada estudiante seleccionado vivan menos de cinco personas. Debido a que 13 estudiantes cumplen con esta condición, la probabilidad sería 0,565.

De acuerdo con lo anterior se deduce que: el menor valor que puede tomar la probabilidad de un evento es cero, el mayor valor es uno, por lo que la probabilidad de cualquier evento es un número entre cero y uno.

Indicaciones de evaluación

Al igual que en el Primer ciclo, las diferentes actividades de evaluación están directamente vinculadas con las indicaciones puntuales que se incluyen en los programas. De acuerdo con lo anterior, se deben proponer problemas que involucren procesos de recolección, organización, resumen, representación y análisis de datos, o en su defecto el análisis de las situaciones aleatorias y su vínculo con las probabilidades. Por esta razón, las estrategias que se vayan a emplear deben potenciar el trabajo estudiantil hacia estos procesos.

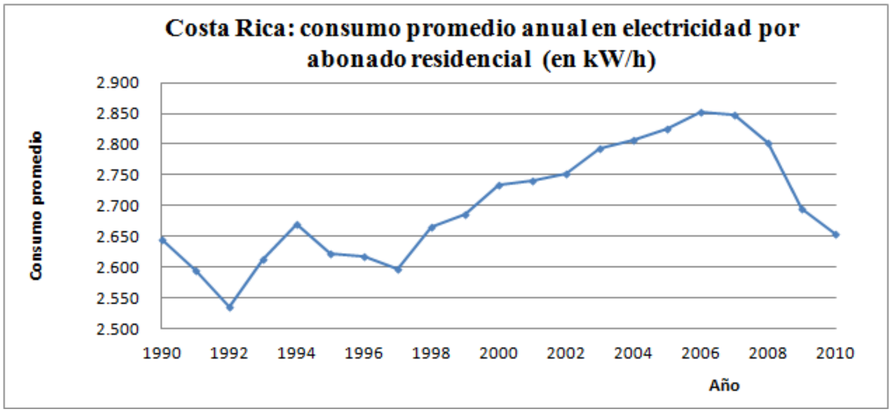
De acuerdo con lo anterior, dentro del marco regulatorio establecido por el Ministerio de Educación Pública se propone:

- ✓ Para evaluar el *trabajo cotidiano* se requiere establecer estrategias que permitan cuantificar el trabajo que realiza cada estudiante durante las distintas actividades propuestas. En *Estadística*, es fundamental evaluar la forma en que se implementan las técnicas para la: recolección de datos (observación, experimentación, medición o interrogación); ordenamiento de la información por medio de la generación de bases de datos, el uso frecuencias absolutas y porcentuales. la representación ya sea en forma tabular o gráfica y el uso de medidas. Pero ante todo, se requiere evaluar la forma en que se interpreta la información que comunican los datos en función de un problema particular. En *Probabilidad*, la evaluación debe enfocarse hacia la forma en que cada estudiante clasifica los eventos en más o menos probables de acuerdo con el número de resultados simples de cada uno, además la forma en que se utilizan estos resultados para determinar la probabilidad de un evento.

- ✓ En los *trabajos extraclase* proponer problemas que permitan evaluar la capacidad estudiantil para establecer el tipo de análisis estadístico que se requiere. Para *Estadística* es conveniente observar si cada estudiante utiliza la información obtenida para argumentar y comunicar sus ideas en función de las interrogantes del problema. En *Probabilidad* los problemas deben direccionarse hacia la respuesta a interrogantes sobre situaciones aleatorias o a la toma decisiones basadas en probabilidades.

- ✓ Sobre los mismos principios anteriores, en las *pruebas escritas u orales*, al igual que se indicó en el Primer ciclo, deben incluir ítems o preguntas con el mismo nivel de dificultad que las actividades de clase, con el ajuste adecuado para una prueba en función del tiempo que se puede otorgar. Por ejemplo, un ítem adecuado para el área de *Estadística* es el siguiente:

Observe la siguiente representación gráfica.



Fuente: http://www.estadonacion.or.cr/index.php/estadisticas/costa-rica/compendio-estadistico/estad-ambientales

Considere las siguientes afirmaciones:

I. *En 1992 se presentó el consumo promedio mínimo de electricidad por vivienda en este período.*
II. *A partir del 2006 el consumo promedio de electricidad por vivienda ha venido disminuyendo.*
III. *En general, se consumió más electricidad en el 2006 que en cualquiera de los otros años.*

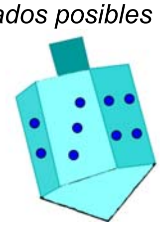
De las afirmaciones anteriores es (son) verdadera(s)

a) *Solo II*
b) *Solo I y II*
c) *Solo II y III*
d) *Todas*

Por su parte, el siguiente es un ejemplo de un ítem que se puede utilizar en *Probabilidad*: *se lanza una moneda de ₡100 y un trompo de cuatro caras numeradas de uno a cuatro, tal como se muestra en la figura:*

Al realizar este experimento, el número total de resultados posibles es

a) 8
b) 6
c) 4
d) 5



TERCER CICLO

Introducción al Tercer ciclo

El Tercer ciclo resume y amplía tópicos que se vieron en la educación Primaria y lo que es central los precisa matemáticamente, es decir los incorpora en términos más abstractos y donde se ofrece justificación matemática. También, como característica esencial introduce nuevos conceptos y habilidades en un nivel cognoscitivo superior. Debe prestarse mucha atención a la autoestima que tiene el estudiantado en su dominio de las Matemáticas pues este nuevo salto en abstracción y complejidad, en un entorno que resulta muy distinto para ellos por mucha razones, puede afectar su rendimiento. Por eso mismo también es crucial estimular la perseverancia.

Medidas se desarrollará de una forma transversal como parte de los problemas que aparecen en las otras áreas, es decir, se busca su presencia como una dimensión que sustente objetivos de contextualización (los objetos medibles), así como el refuerzo de oportunidades para el desarrollo de objetivos curriculares en esas áreas.

Mientras *Números* disminuye su valor relativo frente a las otras áreas, *Relaciones y Álgebra* ocupa un lugar significativamente mayor que el que tuvo en Primaria, lo que es característica de toda la educación Secundaria.

En el caso de *Números* se incluyen los números enteros, racionales, irracionales y reales, cada uno de estos sistemas numéricos posee especiales condiciones epistemológicas; por ejemplo, en los enteros el número negativo, en los reales su naturaleza tan distinta de los otros números. Se insiste en sus diferentes representaciones y también en su capacidad de intervenir en problemas del entorno. Con una buena aproximación a los irracionales se puede fortalecer el proceso de *Razonar y argumentar* (por ejemplo, al mostrar que $\sqrt{2}$ no es racional).

En *Geometría* se busca un enfoque más formal de los conceptos y propiedades aprendidas intuitivamente en la Primaria y se robustecen los aspectos deductivos que supone. En este ciclo se sigue con el tratamiento del sentido espacial, mediante la visualización y aplicación de características y propiedades de figuras geométricas tridimensionales. El tema de semejanzas y congruencias, que se introduce a partir de homotecias, siempre ha sido un terreno fértil para mostrar la argumentación matemática. En 9° Año se introduce el estudio básico de la trigonometría con problemas en contextos reales. En este ciclo se profundiza la conexión entre *Geometría* y *Relaciones y Álgebra*.

En *Relaciones y Álgebra* se introducen las ecuaciones de primer y segundo grados, tópicos que se asocian a la función lineal y cuadrática respectivamente (en 8° y 9° Año); se busca el dominio de varias representaciones matemáticas de las relaciones estudiadas. Si bien en la educación Primaria se buscó identificar y usar modelos matemáticos sencillos por medio de los conceptos y procedimientos presentes en esos niveles educativos, ahora se da un salto cualitativo en esos objetivos debido a las posibilidades que brindan los nuevos objetos matemáticos que se introducen. En este ciclo se persigue potenciar el reconocimiento de modelos matemáticos que están presentes en diversos contextos. Se establece además un enfoque que fomenta las conexiones entre las funciones estudiadas y las relaciones algebraicas simbólicas y su manipulación.

En *Estadística y Probabilidad* se plantea un enfoque más formal de los conceptos y propiedades desarrolladas en la educación Primaria y se refuerzan las habilidades para la recolección de datos, interpretación de la información y la medición estadística en diversas situaciones. También, se profundiza en el estudio y cálculo de las probabilidades, con la introducción de nuevos conceptos. Esta área permite insistir en la utilidad de las Matemáticas en diferentes áreas del conocimiento y es muy sencillo motivar acciones colaborativas en el desarrollo de muchas de las tareas matemáticas que plantea.

Tercer ciclo, Números

Introducción

Al ingresar al Tercer ciclo cada estudiante trae la habilidad de comparar y operar tanto números naturales como números con expansión decimal hasta la diezmilésima. La potenciación se trabaja en 6° Año pero con ejemplos muy básicos, principalmente de cuadrados y cubos perfectos. Con respecto a las fracciones, domina sus diferentes representaciones y su operatoria. Conoce algunos conceptos de la teoría de números, como por ejemplo número primo, compuesto, divisores, múltiplos, entre otros.

La conceptualización de los números enteros, racionales, irracionales y reales junto con su operatoria, son temas fundamentales en este ciclo y en toda la enseñanza Secundaria.

En este ciclo se aborda el cálculo de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potenciación y radicación para los números enteros, racionales e irracionales, dando un especial énfasis al cálculo operatorio y a las diferentes representaciones de los números reales. Se introducen los números enteros negativos en 7° Año, los racionales en 8º Año y los irracionales y reales en 9º Año.

Esta área tiene una conexión directa con las otras áreas matemáticas (*Medidas, Geometría, Relaciones y Álgebra y Estadística y Probabilidad*), así como con las otras materias que se imparten a este nivel, por lo que es fundamental seguir trabajando los conocimientos respectivos a través de la resolución de problemas contextualizados.

Todo esto prepara al estudiante para que pueda utilizar los números reales en sus diferentes representaciones y los aplique tanto en el cálculo operatorio como en el planteamiento y resolución de problemas en contextos variados.

Propósito de la enseñanza

El propósito de la enseñanza de los *Números* en este ciclo es que el estudiantado adquiera la habilidad de utilizar los números reales en cualquiera de sus representaciones, que elabore estrategias para realizar cálculos con ellos y que plantee y resuelva problemas en diversos contextos en los que se involucren estos números.

Habilidades generales

Las habilidades generales que deberán adquirirse en *Números* al finalizar el Tercer ciclo son:

- Realizar cálculos usando números reales en sus diferentes representaciones.
- Utilizar conocimientos de teoría de números en la resolución de problemas contextualizados o propios de esta rama.
- Utilizar diferentes representaciones para identificar y representar números racionales e irracionales.
- Identificar y utilizar la potenciación y radicación en diferentes contextos.
- Comparar números reales en sus diferentes representaciones.
- Seleccionar y aplicar métodos y herramientas para calcular y operar con números reales.
- Utilizar la estimación, el cálculo mental, el papel y lápiz o la calculadora, según sea el caso, para el cálculo de operaciones con números enteros, racionales y reales.
- Plantear y resolver problemas en diferentes contextos donde se requiera el uso de las operaciones y representaciones numéricas.

Se fortalecerán actitudes y creencias positivas hacia las Matemáticas, pues en esta área se puede evidenciar de manera natural la utilidad de las mismas, mediante problemas en contextos reales.

Se debe hacer énfasis en que el trabajo operatorio con los números utilizando diferentes representaciones permite desarrollar el proceso *Representar*. Además, al trabajar con nuevos números (negativos, racionales e irracionales) se amplía la cantidad de opciones para conectarlos con otras áreas de las Matemáticas u otras Ciencias. Por ejemplo, al resolver algunas ecuaciones en 8º Año sólo se puede considerar la posibilidad de soluciones racionales mientras que en 9° se pueden considerar también las posibles soluciones irracionales.

Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

<table>
<tr><th colspan="3">7° Año</th></tr>
<tr><th>Conocimientos</th><th>Habilidades específicas</th><th>Indicaciones puntuales</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Números Naturales

• Operaciones:
- Suma
- Resta
- Multiplicación
- División
- Potencias

• Combinación de operaciones</td><td>1. Calcular expresiones numéricas aplicando el concepto de potencia y la notación exponencial.</td><td>▲ Se puede introducir el tema expresando, como repaso, múltiplos de 10 como potencias de base 10. Luego se realiza la representación de productos con factores iguales como potencia y viceversa, para identificar luego cuadrados y cubos perfectos. Posteriormente se trabaja con ejercicios básicos de operaciones; por ejemplo, verificar si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas:
$(5+7)^2 = 5^2 + 7^2$
$(6-2)^2 = 6^2 - 2^2$
$(8 \cdot 3)^2 = 8^2 \cdot 3^2$
$(9 \div 3)^2 = 9^2 \div 3^2$</td></tr>
<tr><td>2. Resolver una combinación de operaciones que involucre o no el uso de paréntesis.</td><td>▲ Es necesario retomar los algoritmos que permiten operar con números naturales. No se debe perder de vista que la habilidad de realizar operaciones con estos números será necesaria para abordar con éxito el trabajo con números enteros. Este repaso debe ir dirigido a corregir errores típicos que pueden surgir cuando las y los estudiantes resuelven una combinación de operaciones. El planteo de problemas en este sentido puede ser una herramienta que le permita a cada estudiante justificar procedimientos. Por ejemplo, se considera el siguiente problema:

Miriam va a la feria con su padre para comprar las frutas que llevarán como merienda durante la semana. Encuentran que el CNP sugiere, para esa semana, los precios que brinda en la siguiente tabla:
Consejo Nacional de Producción
SIIM PRECIOS sugeridos FERIAS DEL agricultor Costa Rica
10 MARZO - 11 MARZO 2012
<table>
<tr><th>PRODUCTO</th><th>UNIDAD MEDIDA</th><th>PRECIO COLONES</th><th>PRODUCTO</th><th>UNIDAD MEDIDA</th><th>PRECIO COLONES</th></tr>
<tr><td>APIO VERDE</td><td>KG</td><td>600</td><td>LIMON MESIN</td><td>UND</td><td>---</td></tr>
<tr><td>AYOTE SAZON</td><td>KG</td><td>400</td><td>MANGA</td><td>KG</td><td>600</td></tr>
<tr><td>AYOTE TIERNO</td><td>UND</td><td>400</td><td>MARACUYA</td><td>KG</td><td>850</td></tr>
<tr><td>BANANO</td><td>UND</td><td>27</td><td>MORA</td><td>KG</td><td>1300</td></tr>
<tr><td>BROCOLI</td><td>KG</td><td>650</td><td>MELON</td><td>KG</td><td>300</td></tr>
<tr><td>CAMOTE</td><td>KG</td><td>1000</td><td>NARANJA</td><td>UND</td><td>45</td></tr>
<tr><td>CEBOLLA SECA</td><td>KG</td><td>825</td><td>ÑAMPI</td><td>KG</td><td>600</td></tr>
<tr><td>CEBOLLA TRENZA</td><td>KG</td><td>825</td><td>PAPA</td><td>KG</td><td>470</td></tr>
<tr><td>COLIFLOR</td><td>UND</td><td>800</td><td>PAPAYA</td><td>KG</td><td>325</td></tr>
<tr><td>COCO</td><td>UND</td><td>300</td><td>PEPINO</td><td>KG</td><td>400</td></tr>
<tr><td>CULANTRO CASTILLA</td><td>ROLLO</td><td>60</td><td>PIÑA</td><td>UND</td><td>675</td></tr>
<tr><td>CHAYOTE SAZÓN BLAN</td><td>UND</td><td>350</td><td>PLATANO</td><td>UND</td><td>135</td></tr>
<tr><td>CHAYOTE TIERNO CRIO</td><td>UND</td><td>390</td><td>REMOLACHA</td><td>UND</td><td>250</td></tr>
</table>
Imagen tomada de: http://web.cnp.go.cr/index.php/informacion-de-mercados/precios-nacionales-semanales/semanales/ferias-del-agricultor</td></tr>
</table>

		Ellos compran 1 piña, 5 kilogramos de papaya, 8 naranjas y medio kilogramo de moras. Plantee una combinación de operaciones que permita obtener el total a pagar, si pagan según los precios que sugiere el CNP. Luego resuélvala. Se espera que cada estudiante escriba la operación $$675 + 5 \cdot 325 + 8 \cdot 45 + 1300 \div 2 =$$ ▲ Un error común es realizar la primera operación que aparece de izquierda a derecha (en este caso la suma) y a dicho resultado aplicar la operación siguiente. Aquí el mismo contexto del problema debe propiciar, de forma natural, la necesidad de realizar primero los productos y cocientes correspondientes y finalmente sumar los resultados. De ese modo se propician oportunidades para adquirir confianza en la utilidad de las Matemáticas. ▲ Debe indicarse el cambio de simbología para la multiplicación, ahora se utilizará el punto. Un problema como el anterior permite discutir las ventajas para la salud de una alimentación sana. ▲ La combinación de operaciones no debe exceder de cuatro términos, donde en cada uno de ellos sólo se haga uso de un paréntesis. En el interior de cada paréntesis incluir a lo sumo dos diferentes tipos de operaciones. Por ejemplo: a. $24 \div 8 + 5 \cdot 3 =$ b. $7 - (5 - 2 \cdot 2) =$ c. $5\,(2^3 - 5) - 8 \div (7 - 2 \cdot 3) =$ d. $3^2\,(10 \div 2 + 9) - 3\,(12 \cdot 3) + 2^3(7 - 3 \cdot 2) =$
Teoría de números • Algoritmo de la división • Divisibilidad • Factor • Múltiplo • Números primos • Números compuestos • Descomposición prima	3. Aplicar el algoritmo de la división en la resolución de problemas.	▲ Para trabajar con el algoritmo de la división, se puede plantear un problema como el siguiente: Don Manuel va a poner losetas en el piso de una habitación que mide 4 metros por 3 metros, las losetas miden 30 cm por 15 cm. Se van a colocar de forma análoga a lo que se ve en la figura, con el lado mayor de la loseta paralelo al lado mayor de la habitación.  **Imagen con derechos adquiridos por el MEP**

<table>
<tr>
<td>

- Mínimo Común Múltiplo
- Máximo Común Divisor

</td>
<td></td>
<td>
Las losetas pueden cortarse para que encajen en los extremos de cada fila de ellas. Don Manuel le dio las dimensiones a su hijo y éste compró 135 losetas. Si no se quiebra ninguna, ¿le alcanzarán estas losetas a don Manuel?, ¿le sobrarán?, si es así, ¿cuántas? ¿Cuántas filas de losetas habrá que colocar?, ¿cuántas losetas por fila?

Se pide trabajar en el problema y exponer las estrategias usadas. En todo caso, para responder a las dos últimas preguntas se deberá emplear la división y analizar lo que sucede.

El algoritmo de la división se puede utilizar para demostraciones muy sencillas, como por ejemplo probar que todo número natural es par o es impar. Esto permite fortalecer el proceso Razonar y argumentar.
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>4. Aplicar los conceptos de divisibilidad, divisor, factor y múltiplo de un número natural en la resolución de problemas en diferentes contextos.</td>
<td>
▲ La teoría de números permite retomar los conceptos y propiedades numéricas estudiadas en la educación Primaria y darles un mayor nivel de profundidad.

▲ A través del uso de la pregunta dirigida se pueden repasar estos conceptos. Por ejemplo, el o la docente (D) escribe en la pizarra el número 120 y puede dirigir un diálogo con sus estudiantes de la siguiente forma:

D: ¿Qué números dividen al 120 y por qué?
Ester: Dos profe, ya que es un número par.
D: Correcto. ¿Dicho número tiene más divisores?
Allan: Sí, el tres, dado que sus cifras suman un número que es múltiplo de tres. También el cinco pues termina en cero.
D: ¿Este número es múltiplo de 10?
Melvin: Sí, porque $12 \cdot 10 = 120$.
D: Muy bien. (El o la docente escribe lo siguiente:)
a. $120 = 12 \cdot 10$
b. $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
c. $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
d. $120 = 2 \cdot 12 \cdot 5$

D: ¿Cuál de las representaciones anteriores corresponde a la descomposición en factores primos del número 120?

Xinia: La opción b. y c. ya que las otras contienen cantidades que no corresponden a números primos.

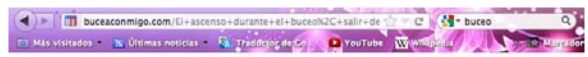
El uso de la pregunta dirigida en forma adecuada activa los procesos Comunicar y Razonar y argumentar. Por otra parte, permite fomentar un aprendizaje participativo y colaborativo.

▲ Luego, se pueden resolver problemas de nivel de reflexión, como los propuestos a continuación para reforzar el manejo de los conceptos.

Determinar todos los posibles valores de los dígitos a y b tales que el número de 5 cifras 1a2b1 es múltiplo de 3.

¿Cuántas cifras tiene el número $2^{15} \times 5^{17}$?
</td>
</tr>
</table>

		Escriba todos los números mayores que 5000 y menores que 11 000 que tienen el producto de sus dígitos igual a 343.
	5. Identificar números primos y compuestos.	Se puede desarrollar este tema por medio del componente histórico, proponiendo investigaciones acerca del uso de la Criba de Eratóstenes, o bien los métodos utilizados por los matemáticos de la antigüedad para generar números primos. Por ejemplo: el matemático suizo Euler (1707-1783) propuso una fórmula que sirve para obtener números primos: $$P(n) = n^2 - n + 41.$$ Sin embargo, para n = 41 el resultado es un número compuesto.
	6. Descomponer un número compuesto en sus factores primos.	▲ Se puede plantear el siguiente problema: Escriba todos los números menores que 1000 en los que el producto de sus dígitos sea 30. ▲ Es importante que cada estudiante tenga claro cómo descomponer un número en sus factores primos, pues es común observar errores. Por ejemplo: Forma correcta $\begin{array}{r\|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ \hline & 2^3 \cdot 5 \end{array}$ Forma incorrecta $\begin{array}{r\|l} 40 & 4 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ \hline & 4 \cdot 2 \cdot 5 \end{array}$ Donde 4 no es un factor primo.
	7. Obtener el Mínimo Común Múltiplo de dos números aplicando el algoritmo correspondiente. 8. Obtener el Máximo Común Divisor de dos números aplicando el algoritmo correspondiente.	▲ Se puede introducir el tema a través de problemas como los siguientes: Lorena es una estudiante que utiliza una red social cada 6 días. Su amigo Luis accede cada cinco días y su hermano Alex ingresa cada 8 días. Si ellos coincidieron en su visita a esta red social el día 24 de julio, ¿en qué fecha vuelven los tres a coincidir? Damaris desarrolla un proyecto de bien social brindando ayuda a familias necesitadas. En su barrio, ella recogió 12 paquetes de frijoles, 18 paquetes de arroz y 30 tipos diferentes de pastas (fideos, caracolitos, lasaña, etc.). Ellos quieren hacer un pequeño diario que contenga la misma cantidad de productos con el mayor número de ellos posible sin que sobre alguno. a. ¿Cuántos paquetes podrán hacer con estas características? b. ¿Cuántos productos de cada tipo (arroz, frijoles y pastas) tendrá dicho diario? ▲ Es necesario que se compartan las diferentes estrategias que usaron para resolver esta situación. Luego se establecen los conceptos y los algoritmos.

	9. Plantear y resolver problemas donde se utilice el Mínimo Común Múltiplo y el Máximo Común Divisor.	▲ Se puede proponer problemas análogos a los que permitieron introducir los problemas de la habilidad anterior.
Números enteros • Enteros negativos • Concepto de número entero • Relaciones de orden • Recta numérica • Valor absoluto • Número opuesto	10. Identificar números enteros negativos en contextos reales.	▲ Muchas situaciones en contextos reales proporcionan información que tiene que ver con los números negativos: temperaturas, ubicación sobre o bajo el nivel del mar, déficit económico, etc. Aunque en muchas ocasiones estas situaciones no presentan explícitamente el signo menos (–), se pueden modelar matemáticamente utilizando dicho signo. Se puede proponer información como la siguiente para que cada estudiante dé un modelo:  **El ascenso durante el buceo, salir del agua** Para iniciar el ascenso, se debe inspirar lentamente o dejar entrar un poco de aire en el chaleco para comenzar a ascender. Es necesario estar de cara al compañero para comprobar el ritmo de ascenso y el estado del otro. Se debe controlar la cantidad de aire que entra en el chaleco ya que la expansión de éste hará que se acelere la ascensión. Un cálculo adecuado consiste en ascender 15 metros por minuto hasta 5 metros de profundidad. En este punto muchos buceadores realizan una parada de seguridad de 3 minutos por precaución. Los últimos 5 metros hasta la superficie deben recorrerse en 1 minuto. Si se realiza una inmersión de descompresión, debe asegurarse que se realizan todas las paradas de seguridad establecidas. **Fuente: http://buceaconmigo.com/El+ascenso+durante+el+buceo%2C+salir+del+agua_5_42_9_98_es.html** Posteriormente, se implementan problemas donde se aproveche las formas gráficas de representación para su solución: El yak es un animal que habita en las montañas del Tibet a unos 5000 m sobre el nivel del mar y el cachalote vive 5900 m más abajo. Determine la altura en la que suele vivir este último. Respuesta: 900 m bajo el nivel del mar. La temperatura promedio en la ciudad de San José es de 25 °C durante la estación lluviosa. Ciudades como Nueva York pueden experimentar hasta 30 °C menos. Describa a qué temperatura puede estar dicha ciudad. Respuesta: podría experimentar temperaturas de hasta 5 °C bajo cero. Esta actividad permite usar las formas de representación gráfica en la resolución de problemas. Se debe utilizar esto para establecer la existencia y representación de los números enteros negativos, así como otros contextos reales donde suelen ser usados.

9. Plantear y resolver operaciones y problemas utilizando las relaciones de orden en los números enteros.

10. Ubicar números enteros en la recta numérica.

▲ Se puede plantear problemas donde se apele intuitivamente al ordenamiento de cantidades, luego establecerá las relaciones de orden en los números enteros. Por ejemplo:

En Santiago de Chile se ha registrado el promedio mensual (redondeado al entero más cercano) de las temperaturas durante el último año, como se muestra en la siguiente tabla:

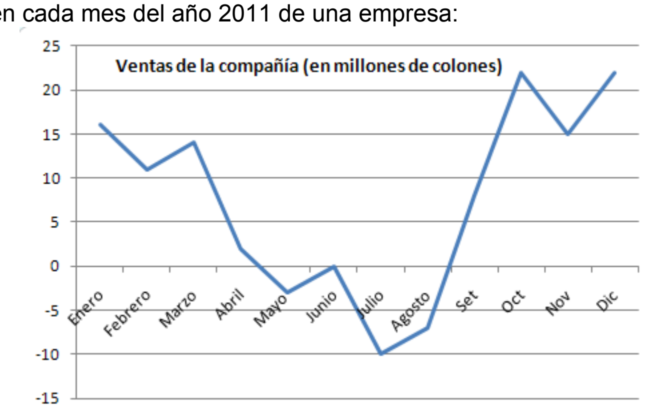
Mes	**Temperatura**
Enero	22°C
Febrero	30°C
Marzo	29°C
Abril	19°C
Mayo	10°C
Junio	5°C
Julio	-6°C
Agosto	-9°C
Setiembre	0°C
Octubre	-2°C
Noviembre	6°C
Diciembre	10°C

a. ¿Cuál fue el mes donde hubo menor temperatura?
b. ¿Cuál fue el mes donde hubo mayor temperatura?
c. ¿Cuándo hubo mayor temperatura, en julio o en noviembre?
d. Ordene las temperaturas de menor a mayor.
e. Dibuje un termómetro donde se representen las temperaturas correspondientes a cada mes.

Este tipo de problemas establece conexiones con otras áreas y asignaturas. Por ejemplo, se podría elaborar una línea de tiempo con los años en que ocurrieron hechos históricos relevantes antes y después de nuestra era. También, una representación de las temperaturas promedio característica de los climas que se presentan en el mundo. Después se puede establecer la noción de recta numérica a partir de dichas representaciones.

▲ Posteriormente, se pueden plantear problemas para reforzar la comprensión de estas relaciones en la recta numérica. Por ejemplo, en la interpretación de la información que ofrecen ciertos gráficos estadísticos:

En el siguiente cuadro aparecen las ganancias o pérdidas en cada mes del año 2011 de una empresa:



		a. ¿En qué meses la empresa tuvo pérdidas? b. ¿En qué meses la empresa tuvo ganancias? c. ¿En qué meses no hubo ni ganancias ni pérdidas? d. ¿Cuál es la ganancia total en los primeros seis meses? e. ¿Cuál es la ganancia total en el segundo semestre? f. ¿Cuál fue la situación de la empresa en los meses de mayo, junio, julio y agosto? Este problema permite establecer conexiones con *Estadística y Probabilidad*.
	11. Determinar el opuesto y el valor absoluto de un número entero.	▲ Se puede iniciar con un problema que permita establecer la diferencia entre el valor relativo y el valor absoluto de un número entero. Por ejemplo: Carolina sale de su casa y se dirige al hogar de su mamá que se ubica 2 km al Sur del suyo. Luego de saludarla y conversar con ella, le informan que su hermano Andrés (quien estudia en el extranjero y llevaba más de 5 años de no visitar a su familia) llegó a Costa Rica y que se encuentra en su casa de habitación, a 750 m Norte de la casa de su mamá por lo que ellas se dirigen para darle la bienvenida. Considerando como punto de referencia la casa de Carolina: a. Determine su ubicación actual en metros. b. Determine la distancia en metros que hay entre la casa de Carolina y la de su hermano. ▲ Se definirá el valor absoluto de un número entero como la distancia que existe entre el número y el cero en la recta numérica. ▲ Es necesario utilizar el símbolo "–" (símbolo de resta) para denotar el cálculo del opuesto de un número dado. Así el opuesto de -31 se denotaría simbólicamente $-(-31) = 31$ y el opuesto de 24 $-(24) = -24$ o bien $-24 = -24$ ▲ Es conveniente verificar las propiedades con ejemplos numéricos, tal como: un número entero y su opuesto tienen el mismo valor absoluto. $\lvert -6 \rvert = \lvert 6 \rvert$ Después de asimilar las operaciones con números enteros se puede proponer la verificación de las siguientes propiedades: $\lvert a \cdot b \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert$ $\lvert a + b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$
Operaciones, cálculos y estimaciones • Suma • Resta • Multiplicación	12. Resolver problemas aplicando sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números enteros.	▲ Para el caso de la suma y la resta, se puede esclarecer el concepto mediante el planteo de problemas. Por ejemplo: Buceando, Edwin se encontraba a 9 m bajo el nivel del mar. Si Edwin descendió 8 m más, ¿a qué profundidad estaba? Pedro debe a Juan ₡250 000 y le cancela ₡110 000. ¿Cuánto le queda debiendo Pedro a Juan?

• División • Potencias • Raíces • Combinación de operaciones		▲ Aunque para resolver los problemas anteriores no se requiere estrictamente el uso de números negativos, se deberá utilizar como una forma de modelizar que será útil en diversas circunstancias. Así, en la etapa de discusión se representarán los datos con números enteros positivos o negativos, de manera que se puedan enunciar estrategias que permitan establecer los algoritmos correspondientes. ▲ En el caso del producto, se debe enfatizar la razón de la ley de signos. Para ello, el docente puede plantear problemas como el siguiente: Determine el resultado de la operación 5 · -4. Se espera que cada estudiante utilice la noción de producto como suma sucesiva y que verifique, con operaciones similares, que se sigue cumpliendo la tendencia en el signo del resultado. $5 \cdot -4 = -4 + -4 + -4 + -4 + -4 = -20$ Sería interesante introducir la historia de los números negativos al comenzar su estudio. ▲ Cuando se trata el producto de dos números enteros negativos, se puede utilizar la noción de número opuesto para justificar el signo que posee el resultado. Observe: $-3 \cdot -2 = -(3) \cdot -2 = -(-2 + -2 + -2) = -(-6) = 6$ ▲ La división es con cociente entero y residuo cero.
	13. Simplificar cálculos mediante el uso de las propiedades de conmutatividad y asociatividad de la adición y multiplicación.	▲ Por ejemplo si se desea resolver la operación $5 + -7 + 5 + -10$ un estudiante puede resolver primero $5 + 5$ luego $-7 + -10$ y finalmente se suman los resultados. Esto se justifica por la conmutatividad y la asociatividad de la suma y permite simplificar los cálculos.
	14. Calcular potencias cuya base sea un número entero y el exponente sea un número natural. 15. Utilizar las propiedades de potencias para representar el resultado de operaciones con potencias de igual base.	▲ Es importante la deducción de las propiedades de potencias a partir de su definición. Esto se puede lograr por medio del planteo de problemas análogos al siguiente: Represente el resultado de la operación $3^{25} \cdot 3^{31}$. Aquí se pretende que ante la imposibilidad de brindar un resultado, se busque una representación alternativa del resultado: 3^{56}. Además es importante que se comuniquen las estrategias utilizadas con el fin de lograr un aprendizaje más activo y colaborativo. Las propiedades a deducir son:

		a. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ b. $a^m \div a^n = a^{m-n}$ c. $(a^m)^n = a^{m.n}$ d. $a^0 = 1,\ a \neq 0$ ▲ Hacer hincapié en la diferencia entre las expresiones del tipo -5^2 y $(-5)^2$ ya que la primera representa el opuesto de 5^2 (resultado negativo) y la segunda que -5 se eleva a la dos (resultado positivo).
	16. Identificar la relación entre potencias y raíces como operaciones inversas.	▲ Se pueden proponer problemas tipo reto matemático. Por ejemplo: ¿Qué número multiplicado por sí mismo 5 veces da como resultado 32? ¿Qué número multiplicado por sí mismo 3 veces da como resultado 64? ▲ Luego se establece la relación existente entre la potenciación y la radicación así como la simbología utilizada: $(-7)^3 = -343 \leftrightarrow \sqrt[3]{-343} = -7\cdot$ ▲ También se debe reforzar el concepto con ejemplos del tipo: $(-5)^2 = 25 \leftrightarrow \sqrt{25} = \lvert -5 \rvert = 5$ ▲ Es importante proponer a cada estudiante ejemplos que generen discusión acerca de la veracidad de ciertas proposiciones. Por ejemplo: ¿Son correctas las siguientes igualdades? $\sqrt{-4} = -2,\ \sqrt[3]{-8} = -2.$ Sobre esto se pretende que se argumenten las posiciones tomando como base la relación existente entre la potenciación y la radicación.
	17. Calcular la raíz de un número entero cuyo resultado sea entero.	▲ En esta habilidad, es fundamental el proceso de obtener la raíz sin el uso de la calculadora mediante la descomposición en factores primos y el uso de las siguientes propiedades de radicales: $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} \lvert x \rvert & \text{para } n \text{ par} \\ x & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$ $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$
	18. Calcular resultados de operaciones con números enteros en expresiones que incorporen la combinación de operaciones con paréntesis o sin ellos.	▲ Las operaciones combinadas no deben exceder de dos términos, en cada uno de ellos sólo se hará uso de a lo sumo un paréntesis. En el interior de cada paréntesis sólo incluir a lo sumo dos diferentes tipos de operaciones. En algunos ejemplos, incluir potencias y raíces exactas. A continuación algunos ejemplos:

		a. $32\left(-\sqrt{49}+5^3\right)=$ b. $3(-4+5\cdot-3)+5\left(-27\div-9-\sqrt{25}\right)=$ c. $((-2)^3+11)-3(16-9\cdot-2)=$
	19. Resolver problemas en los que se apliquen las operaciones con números enteros.	Por ejemplo: Hernán recibió hoy de su madre ₡5000, además ayer había prestado a tres compañeros ₡500 a cada uno para que compraran un refresco; los tres le pagaron hoy lo que le debían. Con el dinero que ahora tiene pretende comprar tres naranjas que le cuestan ₡200 cada una y quiere también comprar un CD que cuesta ₡5700. Modele mediante una combinación de operaciones con números enteros la situación propuesta. Obtenga el resultado de efectuar las operaciones. ¿Le alcanza a Hernán el dinero que tiene para comprar las naranjas y el CD?

<table>
<tr><th colspan="3">8° Año</th></tr>
<tr><th>Conocimientos</th><th>Habilidades específicas</th><th>Indicaciones puntuales</th></tr>
<tr>
<td>Números racionales

• Concepto de número racional

• Representaciones

• Relaciones de orden</td>
<td>1. Identificar números racionales en diversos contextos.</td>
<td>▲ Se pueden proponer problemas como el siguiente.

Aquí aparecen los precios de los combustibles.

PRECIOS NACIONALES (*)
LOCAL PRICES (*)

Precios en colones al consumidor en estaciones de servicio
Rigen a partir del 02 de Febrero del 2012
<table>
<tr><th>PRODUCTOS PRODUCTS</th><th>PRECIO / litro sin imp. Único cost / litre without tax</th><th>Imp. único Tax</th><th>Margen Promedio de Estaciones de Servicio Local Services stations Average Margin</th><th>Precio / litro total Total Cost / litre</th></tr>
<tr><td>Gasolina Super
Super Gasoline</td><td>351,7460</td><td>213,0000</td><td>50,5548</td><td>615,0000</td></tr>
<tr><td>Gasolina Plus 91
Plus 91 Gasoline</td><td>346,3730</td><td>203,5000</td><td>50,5548</td><td>600,0000</td></tr>
<tr><td>Diesel 50
Diesel 50</td><td>403,7050</td><td>120,2500</td><td>50,5548</td><td>575,0000</td></tr>
</table>

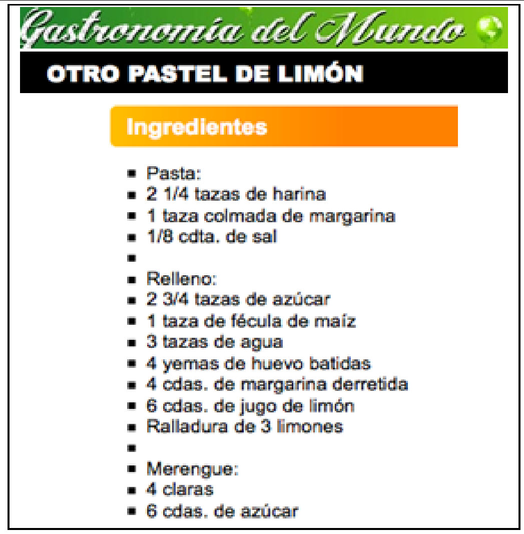
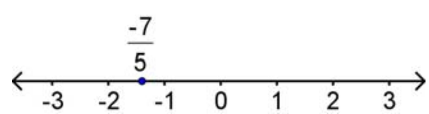
Imagen tomada de:
http://www.recope.go.cr/info_clientes/precios_productos/

Si en la gasolinera pido que me vendan ₡10 000 en gasolina Plus 91, ¿cuántos litros me dan?

▲ Problemas como éste permiten introducir la necesidad de utilizar otros números diferentes a los enteros.

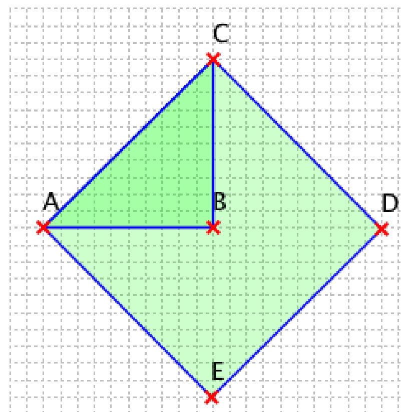
▲ Cada estudiante debe tener claro que los números enteros también son números racionales.</td>
</tr>
</table>

		▲ Es importante que cada estudiante pueda resolver situaciones en contexto en las que se involucre la noción de división. Esto permitirá en la etapa de clausura establecer su representación por medio de fracciones. Se deben implementar ejemplos que originen números enteros y no enteros (no se debe olvidar contemplar situaciones que involucren números negativos). Por ejemplo: Si camino 10 m en dirección Oeste y me devuelvo una cuarta parte de dicho recorrido, ¿cuánto me desplacé con respecto al lugar del que salí? Juan contrajo una deuda de ₡17 500. Su padre, un hermano y un amigo deciden ayudarle a pagarla por lo que se reparten la deuda equitativamente entre ellos tres. ¿Cuánto debe pagar cada uno?
	2. Realizar aproximaciones decimales de números racionales. 3. Identificar los números racionales representados con expansión decimal exacta y con expansión decimal periódica.	▲ Inicialmente, se debe procurar que el estudiante efectúe divisiones sin el uso de la calculadora. Esto permite enfatizar cómo es que se obtienen las representaciones decimales de los números racionales. De paso, se puede visualizar la infinitud de los decimales de algunos números racionales. $\frac{21}{4} = 21 \div 4 = 5{,}25$ $\frac{4}{3} = 4 \div 3 = 1{,}33333\ldots = 1{,}\overline{3}$ $\frac{9}{11} = 9 \div 11 = 0{,}818181\ldots = 0{,}\overline{81}$ $\frac{7}{6} = 7 \div 6 = 1{,}166666\ldots = 1{,}1\overline{6}$ ▲ Esta noción de infinitud es fundamental en los números racionales e irracionales que se tratan en el próximo año escolar. ▲ Al aproximar fracciones por medio de su expansión decimal, se debe aclarar que la calculadora da una aproximación (en el caso de los decimales periódicos), por lo que la notación mediante el uso de la raya del periodo o bien la notación fraccionaria asegura la exactitud en la representación del número racional.
	4. Identificar y aportar ejemplos de representaciones distintas de un mismo número racional.	▲ Por ejemplo $\frac{7}{5} = 1{,}4 = 1\frac{2}{5} = 1 + \frac{2}{5}$. ▲ Se pueden idear problemas donde se haga uso de representaciones numéricas adecuadas para el desarrollo de actividades cotidianas. Por ejemplo: Ana encontró en Internet una receta cuyos ingredientes aparecen a continuación.

		 Gastronomía del Mundo OTRO PASTEL DE LIMÓN Ingredientes - Pasta: - 2 1/4 tazas de harina - 1 taza colmada de margarina - 1/8 cdta. de sal - - Relleno: - 2 3/4 tazas de azúcar - 1 taza de fécula de maíz - 3 tazas de agua - 4 yemas de huevo batidas - 4 cdas. de margarina derretida - 6 cdas. de jugo de limón - Ralladura de 3 limones - - Merengue: - 4 claras - 6 cdas. de azúcar **Imagen tomada de: http://www.arecetas.com** Ana manifiesta que no comprende la forma en que aparece la información pues no está descrita en la forma tradicional. ¿De qué forma se puede ayudar a Ana para que comprenda los datos de la receta?
	5. Comparar y ordenar números racionales en notación decimal, fraccionaria y mixta. 6. Representar números racionales en la recta numérica, en cualquiera de sus representaciones.	Usar la estimación mental y la calculadora para realizar tal representación. ▲ Para ubicar $\frac{-7}{5}$ en la recta numérica se pueden utilizar algunas de sus representaciones: $$\frac{-7}{5} = -1{,}4 = -1\tfrac{2}{5}$$ 
Operaciones, cálculos y estimaciones • Suma • Resta • Multiplicación • División • Potencias • Raíces	7. Aplicar la suma y resta de números racionales en diversos contextos. 8. Aplicar la multiplicación y división de números racionales en diversos contextos. 9. Utilizar las propiedades de conmutatividad y asociatividad de la suma y multiplicación para simplificar cálculos con números racionales.	▲ Se puede formular problemas como el siguiente: Ademar compró 3 metros de plástico para forrar cuadernos. El necesitó $1\frac{1}{5}$ m para forrar algunos, su hermano Randall utilizó 0,6 m y su hermana Hellen usó $\frac{1}{3}$ m. a) ¿Cuánto plástico utilizaron para forrar los cuadernos? b) ¿Cuánto plástico sobró? ▲ Es importante retomar lo trabajado respecto al uso de diversas representaciones de un número, así como la amplificación y simplificación de fracciones para justificar el empleo del mínimo común múltiplo en el desarrollo de estas operaciones: Representaciones: $$1\tfrac{1}{5} = \frac{6}{5},\ \ 0{,}6 = \frac{6}{10}$$

• Combinación de operaciones	10. Calcular el resultado de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números racionales en cualquiera de sus representaciones.	Operación: $$\frac{6}{5}+\frac{6}{10}+\frac{1}{3}=$$ Mínimo Común Múltiplo de 5, 10 y 3 es 30. Amplificación de las fracciones por 6, por 3 y por 10 respectivamente: $$\frac{36}{30}+\frac{18}{30}+\frac{10}{30}=\frac{64}{30}$$ Simplificación: $$\frac{64}{30}=\frac{32}{15}$$ Así ellos gastaron $\frac{32}{15}$ m (aproximadamente 2,13 m). ▲ En la etapa de clausura o cierre, se detalla el algoritmo que permite sumar y restar fracciones heterogéneas por medio del Mínimo Común Múltiplo de sus denominadores. ▲ Se debe trabajar con suma y resta de números racionales en cualquiera de sus notaciones.
	11. Efectuar operaciones con potencias de base racional y exponente entero.	▲ Generalización de las propiedades verificadas en 7°Año. Es necesario formalizar las siguientes propiedades: a. $a^{-n}=\dfrac{1}{a^{-n}}, a\neq 0$ b. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n}=\dfrac{a^{n}}{b^{n}}, b\neq 0$ c. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}, a\neq 0, b\neq 0$
	12. Calcular raíces *n*-ésimas de un número racional.	▲ Las raíces calculadas deben dar como resultado un número racional. ▲ Si el número racional está representado en su forma fraccionaria, es fundamental el proceso de obtener la raíz sin el uso de la calculadora mediante la descomposición en factores primos del numerador y el denominador. El docente debe introducir el uso de la siguiente propiedad: $$\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$
	13. Calcular resultados de operaciones con números racionales de expresiones donde haya combinación de ellas con paréntesis o sin ellos.	▲ En la prioridad de operaciones, plantear operaciones que no excedan los dos términos. Por ejemplo: $$-\frac{3}{4}+5^{-1}\div -1{,}3=$$ ▲ Si se contempla el uso de paréntesis, las expresiones deberán contener como máximo dos y que cada uno de ellos contenga solamente dos términos (dos factores a lo sumo cada término). A continuación algunos ejemplos:

<table>
<tr><td></td><td></td><td>$$-2\left(\frac{-5}{3}+5\cdot\frac{1}{2}\right)$$
$$2\frac{1}{3}\left(-1{,}4-2\div\sqrt{\frac{1}{4}}\right)-5\left(\frac{-2}{3}\cdot\frac{-1}{4}-1\right)$$</td></tr>
<tr><td></td><td>14. Desarrollar estrategias para el cálculo mental de resultados de operaciones con racionales.</td><td>▲ Deben usarse ejercicios apropiados, por ejemplo:
$$\frac{-8}{7}-\frac{5}{7}$$
$$\frac{-9}{4}+\frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{6}-\frac{5}{6}+-3$$
$$\frac{-1}{5}\cdot -4$$
Solicitar a cada estudiante juzgar si los resultados de las estimaciones son razonables y que argumente su posición.</td></tr>
<tr><td></td><td>15. Seleccionar métodos y herramientas adecuados para la resolución de cálculos, según el problema dado.</td><td>▲ Dependiendo del problema se pueden utilizar diferentes estrategias de cálculo, por ejemplo:
<table><tr><td>Cálculo mental</td><td>1,5 kg a ₡2000 cada kilogramo.</td></tr><tr><td>Papel y lápiz</td><td>1,5 kg a ₡2450 cada kilogramo.</td></tr><tr><td>Calculadora</td><td>1,75 kg a ₡2225 cada kilogramo.</td></tr></table></td></tr>
<tr><td></td><td>16. Plantear y resolver problemas en los que se requiera de la aplicación de operaciones con números racionales.</td><td>▲ Conviene proponer operaciones para que los estudiantes planteen problemas. Por ejemplo:
Se pide a las y los estudiantes que planteen un problema en el que se involucre la siguiente combinación de operaciones:
$$\frac{3}{2}\cdot 5-\frac{2}{3}\cdot 3$$</td></tr>
</table>

9° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Números reales • Números irracionales • Concepto de número real • Representaciones • Comparación • Relaciones de orden • Recta numérica	1. Identificar números irracionales en diversos contextos.	▲ Para introducir los números racionales se puede comenzar con el siguiente problema. Suponga que en la siguiente figura el segmento BC mide 1 m, ¿cuánto mide el área del cuadrado ACDE?  ▲ La discusión llevará de manera natural a concluir que el área es 2 m^2, viendo que el cuadrado está constituido por cuatro triángulos congruentes de área 0,5 m^2. Si no se conoce el teorema de Pitágoras, no se sabrá de antemano cuánto es *x*, la medida del lado del cuadrado, pero debido a que el área es 2 y el lado es *x* entonces $x^2 = 2$. A continuación se pregunta al grupo qué tipo de número es *x* y éste deberá concluir que no es un número entero puesto que no hay un entero que multiplicado consigo mismo dé 2. ¿Será un racional? Esta posibilidad puede descartarse realizando una demostración, que servirá además para repasar conceptos de teoría de números. Finalmente se concluye que los números como *x* que no son racionales se llaman irracionales, que *x* se denota por $\sqrt{2}$. Se indica que π es otro número irracional y que hay muchos otros. Se puede ilustrar, por medio de reseñas históricas, que el surgimiento de este tipo de números aparece en la solución de problemas en los que los números racionales no son suficientes.
	2. Identificar números con expansión decimal infinita no periódica.	▲ Lo que se desea es mostrar números decimales diferentes a los números naturales, enteros y racionales. Es importante considerar el reconocimiento de patrones de construcción que generen números decimales con expansión infinita no periódica, por ejemplo: "0,1010010001… (cada vez agregar un cero más antes de escribir 1)". Esto permite establecer conexiones con el área de *Relaciones y Álgebra*.

3. Realizar aproximaciones decimales de números irracionales.

4. Reconocer números irracionales en notación decimal, en notación radical y otras notaciones particulares.

La calculadora debe usarse para que cada estudiante pueda observar más rápidamente el desarrollo; sin embargo, se debe aclarar que la calculadora tan solo ofrece una aproximación.

▲ Se implementará el procedimiento de cálculo de raíces, visto en años anteriores, para identificar aquellas raíces que corresponden a números irracionales.

▲ Se puede desarrollar una actividad para obtener una aproximación de *e*. Se pide a cada estudiante que complete la siguiente tabla con ayuda de la calculadora. Se puede explorar con valores de *n* mayores a los suministrados.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	
2	
: .	
100	
: .	
950	
: .	
5000	

Luego, se pueden realizar preguntas como por ejemplo,

a. ¿qué sucede conforme aumenta el valor de *n*?
b. ¿los resultados obtenidos son números racionales?

Finalmente, en el cierre se menciona que la actividad desarrollada es una forma de aproximar el número irracional *e* por medio de números racionales y el o la docente puede proponer la realización de una pequeña investigación acerca de sus orígenes.

El trabajo con números irracionales puede ofrecer oportunidades para activar el proceso *Razonar y argumentar*. Por ejemplo, al mostrar que $\sqrt{3}$ no es un número racional.

5. Comparar y ordenar números irracionales representados en notación decimal y radical.

▲ Plantear ejemplos del tipo:

a. Determine entre qué par de números enteros consecutivos se encuentra $\sqrt{29}$.
b. Determine tres números irracionales representados con radicales que se encuentran entre los números 7 y 8.

6. Identificar números reales (racionales e irracionales) y no reales en cualquiera de sus representaciones y en diversos contextos.

Se puede utilizar la calculadora. Se debe hacer énfasis en las diferentes representaciones de un número real, por ejemplo:

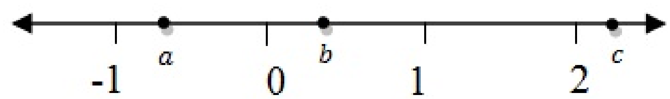
a. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707106\ldots$
b. Verificar que $\sqrt{5^2-7^2} \neq 5-7$

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
c. Al resolver la operación 5 ÷ 23 en la calculadora da como resultado 0,2173913043…, el cual se puede malinterpretar como un número irracional, de ahí la importancia de las diferentes representaciones de un número real.

▲ También es importante comentar que hay números, como por ejemplo $\sqrt{-1}$ y $\sqrt{-25}$ que no son reales.

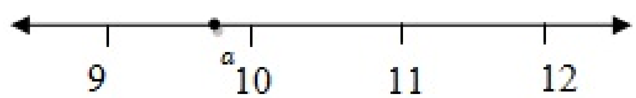
Se debe realizar un análisis de posibles errores que se pueden cometer al calcular ciertas expresiones. Por ejemplo, analizar lo incorrecto en el siguiente procedimiento:

$$\sqrt{25} = \sqrt{(-5)^2} = -5.$$
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>7. Representar números reales en la recta numérica, con aproximaciones apropiadas.</td>
<td>
▲ Usar la estimación mental o la calculadora para realizar tal representación. Por ejemplo:

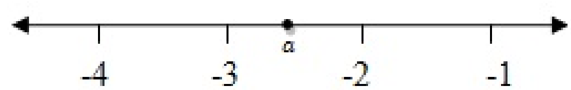
Dadas las coordenadas a, b, c, como se muestra en la figura:


coloque un punto en un lugar aproximado a
a. $|a|$
b. $b + 1$
c. $\frac{c}{3}$
</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Cálculos y estimaciones

• Suma
• Resta
• Multiplicación
• División
• Potencias
• Radicales</td>
<td>8. Estimar el valor de la raíz de un número entero.

9. Determinar números irracionales con representación radical entre dos números enteros consecutivos.</td>
<td>
▲ Trabajar ejemplos del tipo:


Un posible valor de a es

( ) $\sqrt{10}$ ( ) $\sqrt{101}$ ( ) $\sqrt{95}$ ( ) $\sqrt{80}$


Un posible valor de a es
( ) $\sqrt[3]{-10}$ ( ) $\sqrt[3]{-6}$ ( ) $\sqrt[3]{\frac{-3}{2}}$ ( ) $\sqrt[3]{-10}$
</td>
</tr>
<tr>
<td>10. Utilizar la calculadora para resolver operaciones con radicales.</td>
<td>
▲ Este es uno de los usos adecuados para la calculadora, en un tema en que no tiene sentido la realización de cálculos sin ese tipo de soporte.

Se debe aprovechar la calculadora científica para trabajar con expresiones con radicales. La respuesta puede darse en cualquier representación. Además, se pueden resolver problemas como:
</td>
</tr>
</table>

		Hallar el valor de *x* en la ecuación $x^7 = 5 \quad \text{o} \quad x^6 = 5$ Calcule el valor de *m* tal que $5^m \cdot 5^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{3125}$
Cantidades muy grandes y muy pequeñas	11. Utilizar los prefijos del Sistema Internacional de Medidas para representar cantidades muy grandes y muy pequeñas. 12. Utilizar la calculadora o software de cálculo simbólico como recurso en la resolución de problemas que involucren las unidades.	▲ Se muestra a continuación los prefijos del sistema internacional de medidas a utilizar: mega (10^6) giga (10^9) tera (10^{12}) peta(10^{15}) exa (10^{18}) zeta (10^{21}) yota (10^{24}) micro (10^{-6}), nano (10^{-9}), pico (10^{-12}), femto (10^{-15}), atto (10^{-18}), zepto (10^{-21}). ▲ Un problema que puede ser utilizado en relación con este tema es el siguiente: Gmail es un servicio de correo electrónico gratuito que ofrece una capacidad de almacenamiento de más de 7 Gb y Google afirma que esta cifra seguirá en aumento. Si un disco compacto (CD) tiene una capacidad de almacenamiento de 650 Mb, ¿cuántos discos compactos (CD) equivaldrían a la capacidad de almacenamiento de Gmail? ▲ Para resolver este problema hay recordar que un Gigabyte equivale a $2^{30} = 1\,073\,741\,824$ bytes y un Megabyte equivale a $2^{20} = 1\,048\,576$ bytes Por lo tanto, la capacidad de almacenamiento de Gmail es de más de 11 discos compactos. ▲ No introducir el uso de notación científica. Las nanomedidas pueden introducirse aquí mediante una breve historia y su conexión con el uso de Nanotecnologías. La nanotecnología es el estudio, diseño, creación, síntesis, manipulación y aplicación de materiales, aparatos y sistemas funcionales a través del control de la materia a nano escala, y la explotación de fenómenos y propiedades de la materia a nano escala. Cuando se manipula la materia a una escala tan minúscula de átomos y moléculas, se demuestran fenómenos y propiedades totalmente nuevas. Por lo tanto, científicos utilizan la nanotecnología para crear materiales, aparatos y sistemas novedosos y poco costosos con propiedades únicas. (…) La nanociencia está unida en gran medida desde la década de los 80 con Drexler y sus aportaciones a la "nanotecno-

		logía molecular", esto es, la construcción de nanomáquinas hechas de átomos y que son capaces de construir ellas mismas otros componentes moleculares. Richard Feynman, premio Nobel de Física, es considerado el padre de la "nanociencia". En 1959 propuso fabricar productos con base en un reordenamiento de átomos y moléculas. En ese año, escribió un artículo que analizaba cómo los ordenadores trabajando con átomos individuales podrían consumir poquísima energía y conseguir velocidades asombrosas. (…) Podemos decir que muchos progresos de la nanociencia estarán entre los grandes avances tecnológicos que cambiarán el mundo. **Fuente:** **http://www.euroresidentes.com/futuro/nanotecnologia/nanotecnologia_que_es.htm**

Indicaciones metodológicas

Generales del ciclo

1. Los cálculos operatorios permiten desarrollar habilidades o destrezas numéricas y mayores posibilidades de realizar procesos de plantear y resolver problemas en contexto. De ahí que sea valioso dar énfasis al cálculo mental y a la estimación.

2. En el Tercer ciclo el sentido numérico está estrechamente asociado a operaciones y cálculos; este permite decidir cuál es la estrategia más adecuada para enfrentar un problema: cálculo mental, estimación aproximada, trabajo sistemático con papel y lápiz o el uso de calculadora o incluso la computadora. También, es fundamental la representación múltiple de los números: fracciones, razones o porcentajes, etc.

3. El uso de los números muy grandes o muy pequeños debe analizarse desde situaciones científicas, tecnológicas o económicas. Por ejemplo, se pueden buscar noticias como la siguiente:

   PROYECTO CON CAPACIDAD DE 305 MW COSTARÁ $1.200 MILLONES

   ICE busca socio para levantar gigante energético en Reventazón

   Imagen tomada de: http://www.nacion.com/2011-03-21/ElPais/NotasSecundarias/ElPais2718677.aspx

   A través de esta noticia se pueden realizar preguntas generadoras como por ejemplo:
   a. ¿A cuánto equivale 305 MW?
   b. ¿A cuántas casas se le puede dar energía eléctrica con este proyecto (investigar cuanto consume una casa en promedio)?
   c. ¿Cuál es el costo del proyecto en colones?

4. Para introducir los diferentes números se deben proponer problemas relacionados con situaciones en contexto. En algunos casos esto puede ser difícil, entonces un problema matemático interesante o un aspecto de la historia de las Matemáticas puede ser útil.

5. Cuando se sugiere un problema, es importante que cada estudiante tenga el tiempo suficiente para experimentar y conjeturar, así como para poder describir los resultados obtenidos. En la etapa de clausura, debe cuidarse que los datos brindados y la respuesta tengan sentido real.

6. Aunque se hace un énfasis en los cálculos operatorios, no tiene sentido proponer operaciones enormes y con muchos paréntesis. Además, esto no aporta mucho al conocimiento real de las y los estudiantes y puede causar distracciones y fobia hacia las Matemáticas, pues no encuentran en estas operaciones ni practicidad, ni aplicabilidad en contextos reales ni interés matemático.

7. La calculadora científica se puede utilizar a partir de 7°Año. Esta es una herramienta que puede utilizarse cuando aparecen números muy grandes en los cálculos para que la o el estudiante se concentre en los aspectos clave de la resolución de problemas, como la elaboración de estrategias, la comunicación y elaboración de conjeturas. También puede ser indispensable para la comprobación de resultados en las operaciones.

Sétimo año

1. Cuando se introduce el concepto de número negativo, se debe tener en cuenta que éste entraña dificultades de tipo cognitivo. De hecho, la historia así lo refleja. La siguiente es una breve reseña histórica relacionada con estos números.

   > Ni los calculistas babilónicos o egipcios, ni los pensadores griegos y ni los matemáticos árabes dispusieron de la noción general de números negativos.
   >
   > Los primeros en utilizar cantidades negativas fueron los matemáticos indios, quienes desde los siglos VI y VII de nuestra era los empleaban para necesidades contables. En contraposición a los bienes, representados con números positivos, las deudas se anotaban como cantidades negativas, las cuales se desvinculaban de lo "concreto" y de las circunstancias que habían ocasionado su aparición, con lo que se establecía así una utilización general de las cantidades negativas.
   >
   > Cualquier anotación de deudas y de bienes sólo se puede efectuar si existe una situación de equilibrio, una situación en la que los bienes compensan las deudas. Dicho de manera más general: no puede haber números negativos sin la presencia del cero.
   >
   > Un milenio después de los matemáticos indios, las cantidades negativas no habían podido forzar las puertas del imperio de los números en Occidente. Podemos preguntarnos por qué los matemáticos o los calculistas contables de Europa occidental, que disponían del cero desde el siglo XIV, no produjeron desde esta época los números negativos al igual que sus homólogos indios.
   >
   > Sería necesario esperar hasta finales del siglo XV para ver aparecer en Occidente entes numéricos no positivos; entes cuyas reglas de empleo se establecen –las reglas de los signos–, pero cuya existencia como cantidades reales, es decir como números, se niega. Designados como *numeri absurdi*, durante mucho tiempo se rechazará su consagración: ser considerado como soluciones posibles de una ecuación. Para el propio Descartes, la raíz de una ecuación que no era positiva se consideraba como una "raíz falsa".
   >
   > En cuanto a la representación gráfica de una función, hubo que esperar hasta mediados del siglo XVII para que el matemático inglés John Wallis osara atribuir coordenadas negativas a los puntos de una curva.

   Tomado de: Guedj, D. (2011) *El imperio de los números.* Blume, Barcelona.

2. Proponer una actividad donde se introduzca la existencia de otros tipos de números diferentes a los conocidos. Por ejemplo, en el planteo de operaciones como 6 – 11 o 11 – 40 se puede discutir las razones para considerar que dicha operación no tiene sentido y dejar latente la inquietud de que el resultado de estas operaciones puede ser representado por un nuevo tipo de número.

3. Algunos problemas pueden ayudar en la conceptualización de número negativo; por ejemplo:

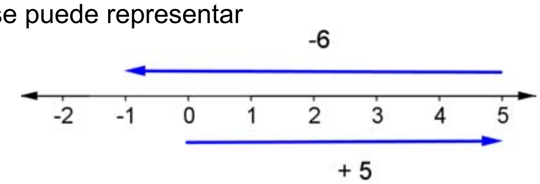
   Ana compró un celular en ₡53 500 y un disco en ₡11 500. Al llegar a la caja se da cuenta que lleva ₡60 000 para pagar. ¿Es suficiente la cantidad de dinero que posee Ana para pagar? Si no es suficiente, ¿cuánto dinero le haría falta? Respuesta: no lleva dinero suficiente, pues le hacen falta ₡5000.

   Luis se dirige a la pulpería que se ubica a 100 m al Este de su casa. Luego visita a una tía que se encuentra a 200 m al Sur de la pulpería. Si se toma como referencia la casa de Luis, determine la dirección de la casa de la tía. Respuesta: se ubica 100 m Oeste de la casa de Luis.

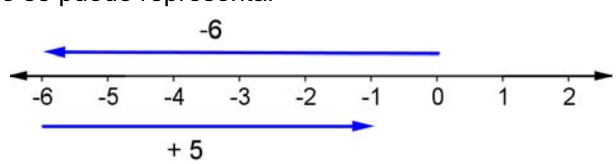
4. El algoritmo de la división establece que si a, b son enteros positivos entonces existen únicos q, r enteros positivos, tales que $b = a \cdot q + r$ con $0 \leq r < a$. A q se le llama cociente y a r se le llama residuo. Por ejemplo, en la expresión $49 = 9 \cdot 5 + 4$, los valores 5 y 4 se pueden hallar realizando el procedimiento de división habitual $49 \div 9$.

5. Conviene utilizar la representación de la suma y la resta de números enteros en la recta numérica para afianzar desde otra perspectiva estos algoritmos. Por ejemplo:

   a. La operación 5 + -6 se puede representar



   b. La operación -6 – -5 se puede representar



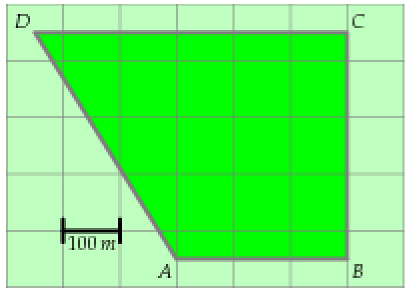
   donde el símbolo de resta representa un cambio de dirección en el desplazamiento que sugiere el segundo término. En este caso se desplazó hasta -6 y luego no se siguió el desplazamiento hacia la izquierda (como lo sugeriría el número -5) sino que se movió en la dirección contraria.

Octavo año

1. En general, la introducción de los números racionales en 8º Año representa menos dificultades que la de los enteros negativos en 7º Año. Esto se debe a que ya se han trabajado los números fraccionarios, aunque positivos, en la enseñanza Primaria. Introducir los racionales negativos no es más que una ampliación del tipo de números a los que se le puede asignar un valor negativo.

2. Es conveniente plantear problemas que permitan resolver problemas a través del uso de las operaciones con números racionales, estableciendo conexiones con otras áreas. Por ejemplo, este problema conecta con el área de *Geometría*.

Un terreno cuadrangular de vértices A, B, C, D se muestra a continuación:



Si la quinta parte de dicho terreno se dedicará a zonas verdes y tres octavos a una zona de parqueo, ¿qué extensión de terreno queda libre para otros usos?

3. Por ejemplo, si se desea resolver la operación

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{2}{3}$$

al utilizar la asociatividad y conmutatividad se puede resolver primero

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$$

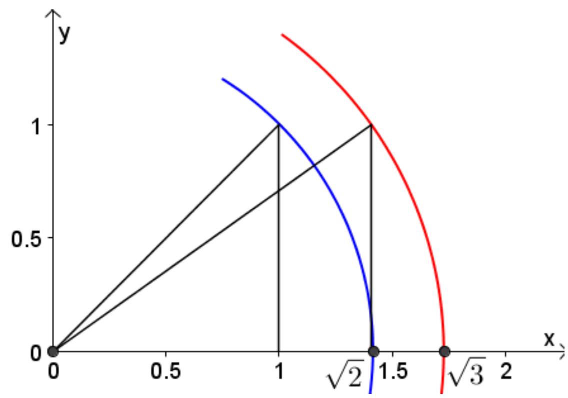
lo que permite simplificar los cálculos.

4. Un énfasis especial debe dársele a las múltiples representaciones para los números racionales. En este sentido es importante proponer problemas que contengan información numérica con múltiples representaciones.

Noveno año

1. Al comenzar el estudio de los números irracionales es apropiado probar que $\sqrt{2}$ no es un número racional. Es una demostración sencilla que puede ser seguida por las y los estudiantes y que repasa conocimientos de la teoría de números. Para la demostración de que raíz cuadrada de 2 no es racional, primero se repasa la descomposición de los números enteros en números primos. Se puede deducir que si 2 es un factor de un número entero *m*, entonces m^2 tiene 2 como factor un número par de veces. Ahora:
2.
   - Si $\sqrt{2}$ fuera racional, entonces $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ con *m* y *n* enteros.
   - Elevando al cuadrado: $2=\frac{m^2}{n^2}$.
   - Multiplicando por n^2: $2n^2=m^2$.
   - Por lo dicho arriba, m^2 tiene un número par de veces a 2 como factor (o no lo tiene), mientras que $2n^2$ tiene un número impar de veces a 2 como factor.
   - Conclusión: $\sqrt{2}$ no puede ser racional.
3. El trabajo con números irracionales puede permitir algunas demostraciones para activar el proceso *Razonar y argumentar*. Por ejemplo, se puede replicar los argumentos de la prueba de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ para probar que $\sqrt{3}$ también es irracional. La clave de la prueba está en el hecho de que la igualdad $3n^2=m^2$ no se puede cumplir si *m* y *n* son enteros puesto que en el lado derecho hay un número par (que puede ser cero) de factores iguales a 3, mientras que en el lado izquierdo hay un número impar de factores iguales a 3.

3. Con respecto a la representación en la recta numérica de un número irracional, se puede utilizar la calculadora para determinar una aproximación del número y luego ubicarlo en la recta numérica. Luego de estudiar el teorema de Pitágoras, se puede proponer como un problema en donde se tenga que utilizar la regla y el compás para representar $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ en la recta numérica (esto permite conexión con *Geometría*), como se muestra en la siguiente figura (el arco azul corta al eje en $\sqrt{2}$ y el arco rojo en $\sqrt{3}$).



4. En la Antigüedad, los matemáticos buscaban expresar cantidades dadas como el cociente de dos números naturales (Pitagóricos), y ante inconsistencias encontradas para casos particulares hubo que desarrollar una nueva teoría que involucraba la manipulación de otros tipos de números. Se puede mencionar una breve historia de algunos números irracionales, como por ejemplo:

   a. La leyenda sobre Hipaso de Metaponto (500 a.C.), quien se cree fue el primero en descubrir la existencia de números irracionales, al descubrir que no se podía expresar la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado (la cual corresponde al número denotado actualmente como $\sqrt{2}$). Este hecho generó su expulsión de la Escuela Pitagórica y su condena a muerte.

   b. Hubo numerosos intentos fallidos en la Antigüedad por expresar la razón entre la medida de la circunferencia y su diámetro como una medida racional, hasta que en 1767 el matemático alemán Johann H. Lambert (1728 – 1777) determinó la irracionalidad del número π.

   c. Un número irracional que aparece en la naturaleza, en el arte y el diseño es el denominado número áureo, que se representa con la letra griega ϕ (fi) en honor a Fidias (490-431 a.C.), escultor griego de la Antigüedad, quien lo usó en sus obras.

Indicaciones de evaluación

En cuanto al *trabajo cotidiano* es importante evidenciar el progreso estudiantil al trabajar tópicos relacionados con las operaciones con números enteros, racionales e irracionales, particularmente en lo concerniente a su desenvolvimiento en la resolución de problemas del entorno. Es recomendable que las operaciones estén asociadas a problemas con un contexto cercano a la realidad estudiantil, para así evaluar diferentes niveles de complejidad (reproducción, conexión y reflexión) y no sólo operaciones representadas simbólicamente.

Para el *trabajo extraclase*, se pueden asignar tareas que permitan seguir activando los procesos de *Razonar y argumentar* y *Representar* en temáticas como la resolución de problemas por medio del uso de las operaciones básicas y los conceptos de teoría de números. Para algunas de las habilidades que sugieren en sus indicaciones puntuales un abordaje por medio del uso de la Historia de las Matemáticas, se puede elaborar una pequeña investigación cuyo alcance se defina previamente. Por ejemplo, al estu-

diarse la criba de Eratóstenes, se puede proponer investigar su origen y recopilar otros aportes realizados por este matemático.
Para este ciclo la *evaluación* en el área de *Números*, debe tener presentes las siguientes indicaciones.

- ✓ En el cálculo de operaciones con números enteros, racionales y radicales, las operaciones deben ser sencillas y con la cantidad de paréntesis que se establecen en las indicaciones. El nivel de las operaciones debe ser coherente con lo trabajado en el aula.

- ✓ En este ciclo se seguirá evaluando la aplicación de las operaciones en la resolución de problemas, generalizando a números enteros, racionales e irracionales en cualquiera de sus representaciones.

- ✓ La calculadora es útil en la simplificación de cálculos complejos o extensos y no se debe usar para resolver ejercicios básicos de operaciones. Para evaluar el uso correcto de la calculadora se puede realizar una sección en el examen (un problema o varios) donde el uso de este instrumento facilite su resolución.

- ✓ En las *pruebas escritas* es muy importante implementar ítems que integren varias habilidades. La mayoría de conocimientos se pueden evaluar a un nivel de reproducción. Sin embargo, conocimientos alusivos a resolución de problemas donde se apliquen las operaciones con números enteros y racionales, Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo, así como la combinación de operaciones con números enteros y racionales deben ser evaluados en la parte de desarrollo, utilizando ítems con un nivel de dificultad de conexión y reflexión. A continuación algunos ejemplos:

Sin utilizar la calculadora, ordene de mayor a menor los siguientes números:

$$-2, -2+5, \sqrt{15}, \sqrt{15}-2, \sqrt{15}+2$$

En seguida se ofrece un cuadro que muestra la extensión en km² que tiene cada una de las provincias de Costa Rica.

Con base en esa información, responda lo siguiente:

a. ¿Cuál es la razón entre la superficie de las provincias que tienen costas con respecto a las que no las tienen?
b. ¿Cuál es la razón entre la superficie de las provincias que limitan con Nicaragua con respecto a las que limitan con el Océano Pacífico?

Provincia	**Extensión (km^2)**
San José	4965,9
Alajuela	9757,5
Heredia	2657,9
Cartago	3124,6
Limón	9188,2
Guanacaste	10 140,7
Puntarenas	11 265,6

Tercer ciclo, Geometría

Introducción

Al ingresar a este ciclo las y los estudiantes tienen la habilidad de reconocer figuras geométricas, identificar sus elementos constituyentes y realizar algunas construcciones sencillas; además, son capaces de reconocer y aplicar diferentes características de los triángulos y los cuadriláteros, incluyendo el cálculo de sus perímetros y áreas. Deben tener un conocimiento básico de diversos polígonos y de la circunferencia, reconocer los cuerpos sólidos y poder establecer algunas conexiones elementales entre ellos y las figuras planas por medio de problemas.

En este ciclo se reforzarán estas habilidades y se avanzará en profundidad en el conocimiento de características y propiedades de las figuras geométricas. Particularmente, se profundizará en la abstracción y, aunque no se pretende un estudio axiomático de la geometría, sí se dará énfasis a la argumentación deductiva. También, se introducirán nociones de geometría analítica y la noción de transformación geométrica en el plano, mediante la *homotecia,* de puntos y figuras poligonales. Este tema es de suma trascendencia, no sólo para introducir las nociones básicas de semejanza como puntos, ángulos y segmentos homólogos, sino también para visualizar los “movimientos de objetos” en el plano. Además, el desarrollo de habilidades referidas a este tema tiene gran relevancia en la resolución de problemas de diferente índole y en actividades como el arte y el dibujo técnico, entre otras.

Con respecto al desarrollo de la congruencia y la semejanza de triángulos no se quiere partir el tema en dos, sino más bien hacer un vínculo con el tema de la homotecia, para así entender la congruencia de triángulos como la homotecia de razón 1 o -1 aplicada a un determinado triángulo y la semejanza de triángulos como la homotecia de razón diferente de 1 o -1. La importancia de los criterios de congruencia y semejanza radica en que servirán como herramientas para la argumentación de los resultados obtenidos por las y los estudiantes en la resolución de problemas, es por esto que se debe enfatizar en el vocabulario y la simbología matemática.

Asimismo, es fundamental la aplicación del teorema de Pitágoras en diferentes contextos y espacios como por ejemplo en el cálculo de la diagonal de una caja (tres dimensiones) o en figuras en el plano de coordenadas. Además, la utilización del teorema de Pitágoras en el plano coordenado logrará introducir de forma natural la fórmula de la distancia entre dos puntos conociendo sus coordenadas, al visualizarse como un caso particular de éste.

Lo anterior prepara para un estudio en mayor profundidad de otras transformaciones en el plano que se realizará en el Ciclo diversificado.

Propósito de la enseñanza

El propósito en *Geometría* para este ciclo es profundizar el conocimiento de propiedades de las figuras geométricas, introducir el estudio básico de la trigonometría y ampliar la capacidad de abstracción y razonamiento matemático.

Habilidades generales

Las habilidades generales que deberán ser adquiridas en *Geometría* al finalizar el Tercer ciclo son:

- Identificar relaciones entre los conceptos básicos de la geometría (puntos, rectas, segmentos, rayos, ángulos).
- Aplicar diversas propiedades y transformaciones de las figuras geométricas.
- Utilizar nociones básicas de geometría analítica.

- Aplicar las razones trigonométricas básicas (seno, coseno, tangente) y las relaciones entre ellas en diferentes contextos.
- Visualizar y aplicar características y propiedades de figuras geométricas tridimensionales.

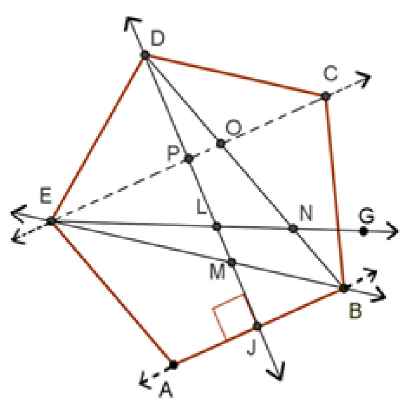
Se fortalecerán las cinco actitudes centrales que plantea este currículo. En la resolución de los problemas se busca el uso de la intuición y la puesta en práctica de habilidades adquiridas, sin embargo también se quiere ir más allá de lo alcanzado por la intuición, introduciendo conceptos y desarrollando habilidades nuevas. Es vital el fomentar la perseverancia al enfrentar problemas en los que se requiera una integración de habilidades y un mayor análisis. Para enfrentar con éxito estas condiciones es fundamental la participación activa y colaborativa.

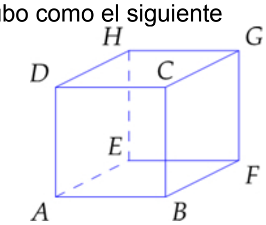
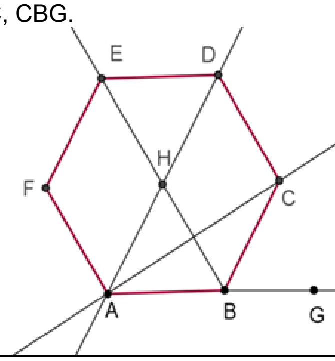
Históricamente, la Geometría ha estado asociada a fines prácticos y a las necesidades técnicas de la época, desarrollando conocimientos concretos y prácticos en distintas áreas y en diversos oficios. Una actitud de confianza en la utilidad de las Matemáticas se puede realizar con facilidad por medio de problemas contextualizados y relacionados con el entorno. Con esto se logrará una mayor autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas y el respeto, aprecio y disfrute de las mismas.

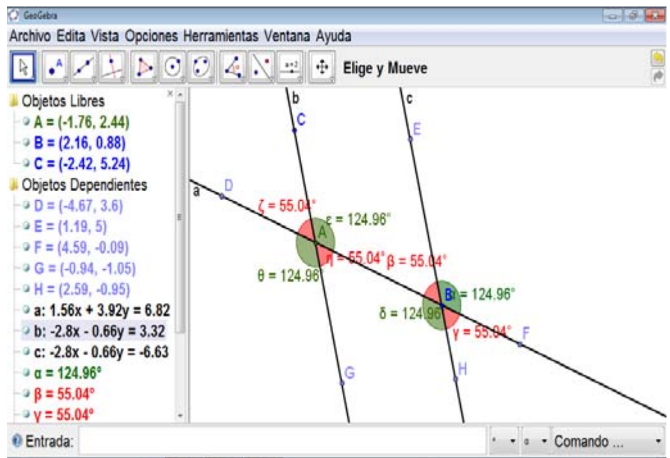
En cuanto a los procesos, *Plantear y resolver problemas* se desarrollará en íntima conexión con *Medidas* y con otras áreas como el Álgebra, la Física, las Ciencias Sociales, entre otros, porque se busca que los problemas propuestos no estén aislados de la realidad, sino más bien que estén conectados con actividades humanas donde se necesiten los conocimientos geométricos. La mayoría de objetos geométricos son medibles y por eso la mayor cantidad de problemas pueden utilizar unidades de medida para así trabajar transversalmente el área de *Medidas*.

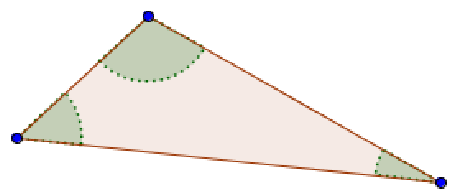
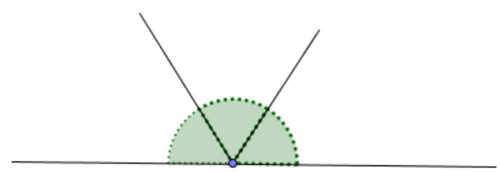
También se fortalecerá el proceso *Razonar y argumentar* en un nivel básico. Las y los estudiantes podrán respaldar sus razonamientos y conclusiones con argumentos matemáticos válidos y podrán hacer algunas demostraciones sencillas. Por ejemplo, podrán probar que dos triángulos son semejantes con algún criterio de semejanza válido, o usando las coordenadas de los vértices de un triángulo podrán clasificarlos de acuerdo con la medida de sus ángulos y con la medida de sus lados.

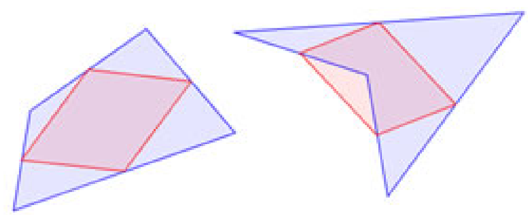
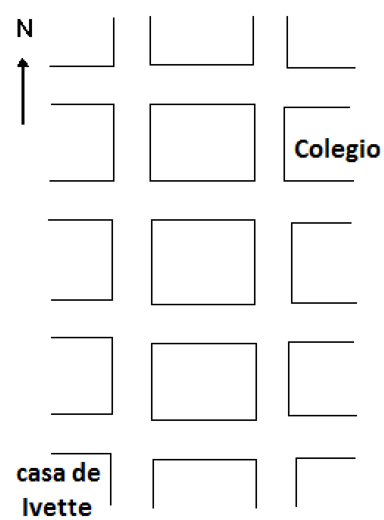
Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

7° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Conocimientos básicos • Punto - Puntos colineales y no colineales - Puntos coplanares y no coplanares - Punto medio • Recta - Segmento - Semirrecta - Rayo	1. Identificar en dibujos y objetos del entorno puntos, segmentos, rectas, semirrectas, rayos, planos, puntos colineales y no colineales, puntos coplanares y no coplanares. 2. Identificar y localizar el punto medio de un segmento. 3. Identificar y trazar rectas paralelas, perpendiculares, concurrentes en diferentes contextos. 4. Utilizar la notación simbólica de cada concepto estableciendo relación con su representación gráfica.	▲ Algunos de estos conceptos fueron vistos en Primer y Segundo ciclos, lo que se pretende ahora es profundizar en ellos, ver su representación gráfica y establecer su notación. Luego, que se interprete la representación gráfica de los conceptos en objetos del entorno, se puede también identificarlos en dibujos propuestos como el siguiente: 

- Rectas concurrentes - Rectas paralelas en el plano - Rectas perpendiculares en el plano • Plano	5. Enunciar relaciones entre los conceptos geométricos mediante notación simbólica.	Si el pentágono que muestra la figura es regular, identificar y escribir la notación de a. Un segmento b. Una recta c. Una semirrecta d. Un rayo e. Tres puntos colineales f. Tres puntos no colineales g. Dos rectas concurrentes h. Dos rectas perpendiculares i. Dos rectas paralelas
Visualización espacial • Caras • Aristas • Vértices • Rectas y segmentos paralelos • Rectas y segmentos perpendiculares • Planos paralelos • Planos perpendiculares	6. Reconocer en figuras tridimensionales diversos elementos como caras, aristas, vértices. 7. Establecer relaciones entre los diversos elementos de figuras tridimensionales: vértices, caras y aristas, rectas y segmentos paralelos perpendiculares, planos paralelos y perpendiculares.	▲ Esto sigue a lo estudiado previamente, incluso puede idearse una actividad que permita introducir los conceptos básicos de la geometría plana en el contexto del repaso de los elementos del cubo que fueron estudiados en ciclos anteriores. ▲ A partir de un cubo como el siguiente  se pueden realizar preguntas como éstas: a. ¿Qué aristas comparten el punto (vértice) C? b. ¿Qué pares de planos son paralelos? c. ¿Qué pares de planos son perpendiculares? d. Señale un par de rectas paralelas. e. Señale un par de rectas perpendiculares. Estas preguntas pueden responderse de manera intuitiva y permitirán establecer los conceptos apropiados y la notación correspondiente.
Ángulos • Llano • Adyacentes • Par lineal • Opuestos por el vértice • Congruentes • Complementarios • Suplementarios	8. Reconocer en diferentes contextos ángulos llanos, adyacentes, los que forman par lineal y los opuestos por el vértice. 9. Identificar ángulos congruentes, complementarios, suplementarios en diferentes contextos. 10. Determinar medidas de ángulos sabiendo que son congruentes, complementarios o suplementarios con otros ángulos dados. 11. Aplicar la relación entre las medidas de ángulos determinados por tres rectas coplanares dadas.	▲ Se deben aprovechar estos contenidos para repasar el concepto de ángulo y la clasificación de los mismos ya estudiados en primaria. Se agregará el ángulo llano. ▲ Se pueden utilizar algunos conceptos desarrollados en primaria (polígonos regulares) para proponer problemas. Por ejemplo: Si el hexágono que se le presenta a continuación es regular, entonces determine las medidas de los ángulos: EHB, EHD, DAB, ABC, CBG. 

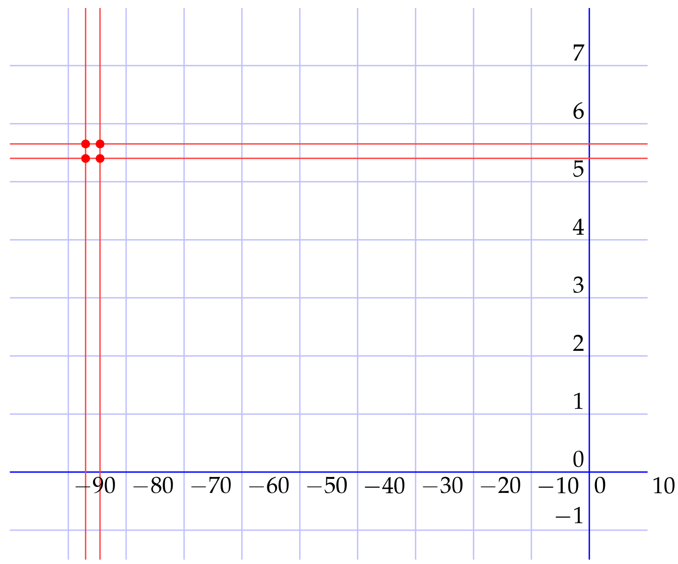
	12. Obtener y aplicar medidas de ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal a ellas, conociendo la medida de uno de ellos.	▲ Puede también identificar una pareja de ángulos adyacentes, una pareja de ángulos opuestos por el vértice y un par lineal. Asimismo, se podría preguntar cuál es la relación de medida entre los ángulos $\measuredangle DEB$ y $\measuredangle EBA$, así como $\measuredangle EDA$ y $\measuredangle DAB$, y así buscar una correspondencia según la cual $\overline{ED}$ y $\overline{AB}$ son segmentos paralelos. Asimismo, se puede utilizar la tecnología con el uso de un software adecuado para obtener de forma dinámica (moviendo un lado del ángulo) la representación gráfica de varios ángulos y de sus medidas (grados sexagesimales). Esto con el fin de establecer clasificaciones y relaciones entre los mismos. 
Triángulos • Desigualdad triangular • Ángulos internos • Ángulos externos	13. Aplicar la desigualdad triangular. 14. Aplicar la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo. 15. Determinar medidas de ángulos internos y externos de un triángulo, conociendo medidas de los otros ángulos.	▲ La desigualdad triangular se puede introducir por medio de un problema como el siguiente, que también puede servir para introducir los conocimientos relacionados con ángulos internos y con ángulos externos. En la casa de Cristian luego de una remodelación sobraron cuatro pedazos de cerca de 3,8 m; 4,3 m; 7,3 m y 8,1 m. Cristian desea utilizar ese material que sobró para hacer una cerca triangular para su perro Colitas, pero no sabe cuáles tres pedazos escoger para formar un triángulo. Intente ayudarle a Cristian. Se pide realizar dibujos tomando como escala al centímetro como metro. Luego se pueden plantear varias interrogantes: a. ¿Cuáles escogencias sirven y cuáles no? b. ¿Por qué algunas sirven y otras no? De las opciones de escogencia que sirven, se solicita medir los ángulos internos y sumarlos. ¿Cuál ha sido la suma aproximada de los ángulos internos de los triángulos? Como ejercicio se pueden proponer tripletas de números para determinar si corresponden a los lados de un triángulo.

		▲ Luego, se pide proponer una estrategia para saber cuál de los triángulos encontrados le proporcionaría más área a Colitas. Por último, se realiza la etapa de clausura o cierre para establecer las propiedades de desigualdad triangular, suma de los ángulos internos y suma de los ángulos externos. Con este tipo de problemas se busca la conexión con el área de *Medidas* y enfatizar en el proceso *Razonar y argumentar*. ▲ Para verificar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180° (ángulo llano), se puede pedir que se construya en cartón un triángulo cualquiera y se recorte sus esquinas.  Luego, pueden comprobar el teorema uniendo las esquinas de la siguiente manera:  Aquí es importante que se comuniquen las conclusiones al resto de la clase.
Cuadriláteros • Áreas • Suma de medidas de ángulos internos • Suma de medidas de ángulos externos	16. Aplicar la propiedad de la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero convexo. 17. Aplicar la propiedad de la suma de los ángulos externos de un cuadrilátero convexo. 18. Resolver problemas que involucren ángulos, triángulos, cuadriláteros, sus propiedades y cálculo de áreas.	▲ Debe iniciarse con un repaso del cálculo de áreas de cuadriláteros mediante un problema como el siguiente: Calcule el área aproximada de la Isla del Coco, utilizando algún mapa de Costa Rica. La idea es que se visualice la Isla del Coco como un cuadrilátero (por ejemplo: rectángulo) y, tomando en cuenta la escala del mapa, se aproxime su área. También, para una mejor estimación se podría dividir el mapa en varias figuras de áreas conocidas (triángulos, trapecios, cuadrados, rectángulos, etc.) y comparar los diferentes resultados del grupo. Con este ejercicio se estimula la creatividad. ▲ Se puede trabajar en subgrupos de la clase y comparar las medidas para ver quiénes dan la mejor aproximación. Nota**:** La isla del Coco tiene aproximadamente 7,6 km de largo y 4,4 km de ancho, por lo tanto su área es aproximadamente 33,44 km^2. Problemas como éste se relacionan de modo natural con unidades de medida y escala. Además, permiten desarrollar los procesos *Comunicar* y *Razonar y argumentar.*

		Este tipo de actividades requiere de la participación estudiantil activa, es fundamental fomentar experiencias de aprendizaje para aprender de los propios errores y compartir las diferentes estrategias con toda la clase. ▲ Se debe relacionar la propiedad de la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero convexo con la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo.
	19. Utilizar software de geometría dinámica para la visualización y la verificación de propiedades geométricas.	A través de la tecnología y una guía apropiada, se propone que se “conjeture” sobre algunas propiedades de los cuadriláteros. Por ejemplo: dado cualquier cuadrilátero, los puntos medios determinan un paralelogramo.  Una vez hecha la conjetura, deberá ser comunicada a toda la clase y argumentar sobre su validez. Es importante generar comentarios sobre los posibles errores que se cometan e indagar el porqué de los mismos.
Geometría analítica • Ejes cartesianos • Representación de puntos • Representación de figuras	20. Representar puntos y figuras geométricas en un plano con un sistema de ejes cartesianos. 21. Determinar algebraicamente el punto medio de un segmento. 22. Ubicar puntos en el interior y en el exterior de figuras cerradas en un plano con un sistema de ejes cartesianos.	▲ En primer lugar se puede introducir la representación de puntos en el plano por medio de un problema como el que se presenta a continuación: El siguiente croquis muestra la comunidad en donde vive Ivette. Las cuadras miden aproximadamente 100 metros de Este a Oeste y 50 metros de Norte a Sur.  Si Ivette asiste al colegio de su comunidad:

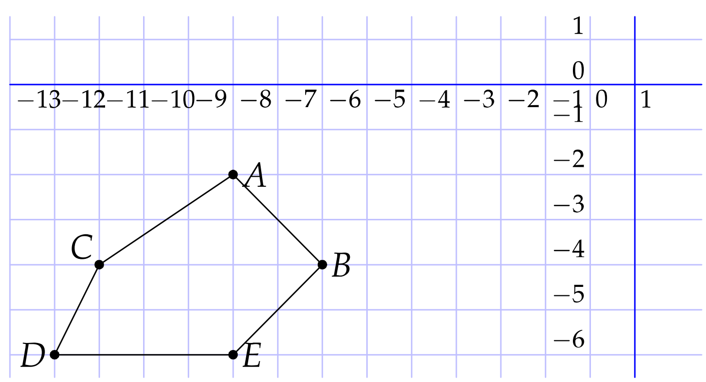
a. ¿Cuál es el trayecto más corto de su casa al colegio, a través de las calles? ¿Es el único trayecto con igual longitud?
b. ¿Cómo dar una dirección del colegio tomando como referencia la casa de Ivette?

▲ Otra manera de introducir el tema de forma natural es con la ubicación de lugares en el mapa mediante paralelos y meridianos. Por ejemplo, la Isla del Coco está ubicada entre los paralelos 5°30” y 5°34” de latitud Norte y entre los meridianos 87°1” y 87°6” longitud Oeste.

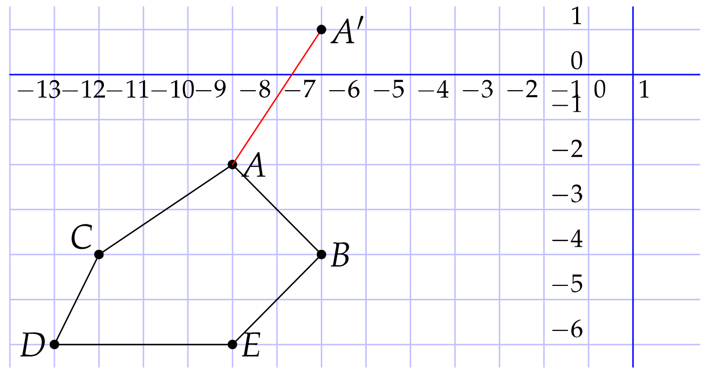


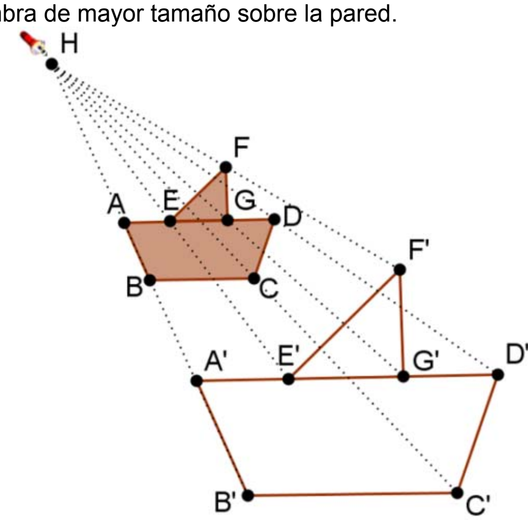
▲ También se pueden proponer diferentes tipos de triángulos y cuadriláteros ubicando puntos con coordenadas en un sistema de ejes cartesianos. Por ejemplo, ubicar los puntos que representan los vértices del polígono, unir los puntos con segmentos y de esta manera identificar la figura y calcular su área.

Coordenadas: $A(-8,-2)$; $B(-6,-4)$; $C(-11,-4)$;$D(-12,-6)$; $E(-8,-6)$.



▲ Lo siguiente es trasladar puntos específicos mediante la suma o la resta de constantes enteras en las respectivas coordenadas de los puntos.

		$A(-8,-2)$ se traslada a $A(-8+2,-2+3)$.  ▲ Identificar también el movimiento de traslación al sumar y al restar una constante a una coordenada *x* o *y* de un punto. Considerar si un punto, dadas sus coordenadas y el trazo de una figura, se encuentra en el interior, el exterior o la frontera de dicha figura. Por ejemplo, el punto $A(-10,-2)$ está en el exterior de la figura y el punto $A(-9,-5)$ está en el interior.

8° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Transformaciones en el plano • Homotecias • Puntos homólogos • Segmentos homólogos	1. Trazar en un plano cartesiano la figura que se obtiene al someter un polígono dado a una *homotecia*. 2. Reconocer puntos, ángulos y lados homólogos de un polígono y el polígono que resulta al aplicar una homotecia.	▲Para iniciar, se puede plantear el siguiente problema: Un foco alumbra la figura de un barco y proyecta una sombra de mayor tamaño sobre la pared.  Se proponen las siguientes interrogantes: a. ¿Qué elementos permanecen invariantes? b. ¿Hay relaciones métricas entre los lados y ángulos de los dos barcos?

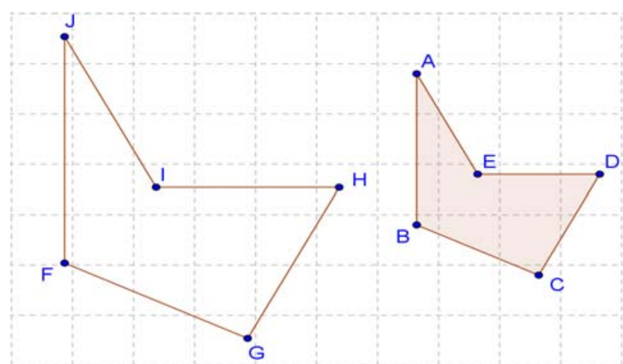
c. ¿Hay relaciones métricas entre las distancias del foco a la figura y de la figura a la sombra?

▲ Por último, se realiza la etapa de cierre con el concepto de homotecia utilizando un foco para alumbrar un objeto (la mano, un basurero, etc.) en la pared del aula. Se coloca el objeto a cierta distancia del foco (por ejemplo a 1 m de distancia en línea recta), de tal forma que se proyecte la sombra del objeto en la pared. Luego, se cambia la distancia (por ejemplo a 50 cm de distancia) de él, y así sucesivamente se acerca y se aleja el objeto en línea recta.

Es importante que se dialogue acerca de cuáles elementos permanecen invariantes y cuáles no.

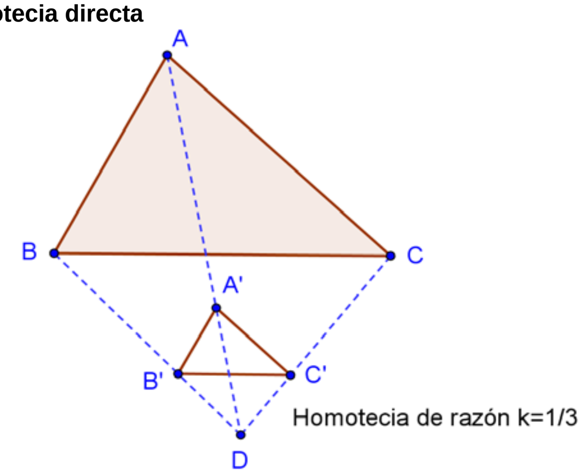
También es importante que se midan las distancias entre la lámpara y el objeto y entre la lámpara y la sombra. Se puede medir la longitud del objeto y la de la sombra para verificar que la razón entre las distancias es igual a la razón entre las longitudes.

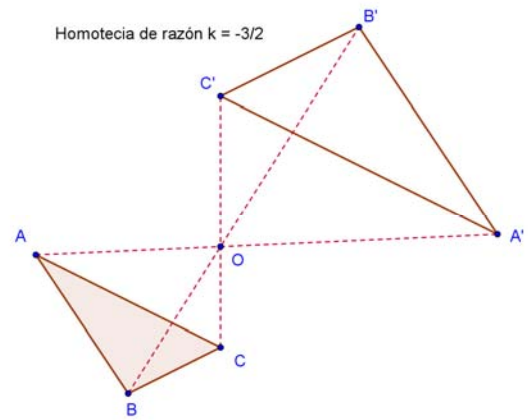
▲ Se deberán reconocer los puntos, ángulos y lados homólogos de un polígono y su homotecia. Por ejemplo en la siguiente figura, JIHGF es la imagen bajo una homotecia del pentágono ABCDE. A y J son puntos homólogos, el ángulo ABC es homólogo al ángulo JFG y el lado ED es homólogo al lado IH.



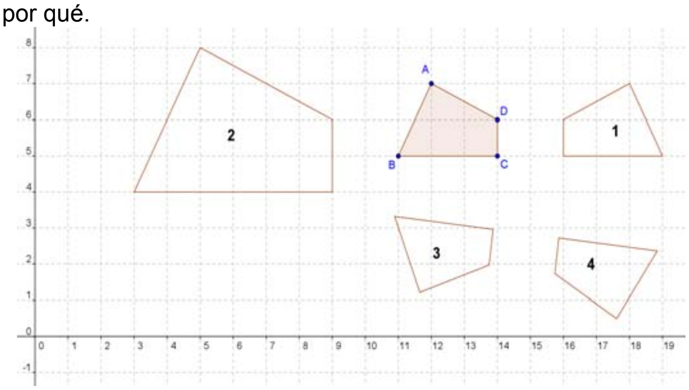
▲ Se deben desarrollar tanto homotecias directas ($k > 0$) como homotecias inversas ($k < 0$). Por ejemplo:

Homotecia directa



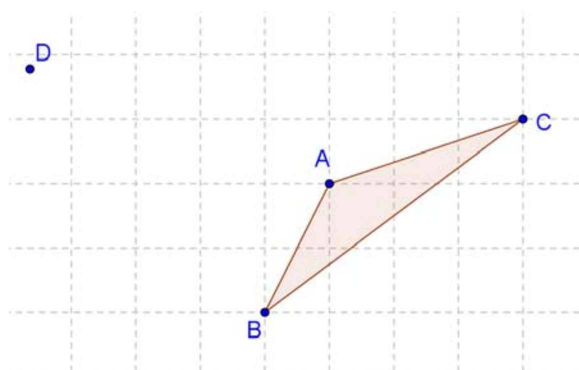
<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Homotecia inversa


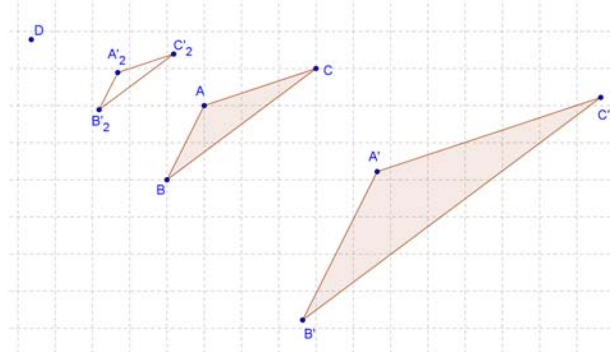
Este tipo de problemas requiere de una actitud perseverante y activa del estudiantado y la apropiada intervención docente formulando preguntas generadoras que encaminen a la comprensión de los conceptos.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>3. Reconocer pares de figuras homotécicas en el plano de coordenadas.</td>
<td>▲ Como ya se ha estudiado el tema de homotecia se puede plantear el siguiente problema:

Con base en la siguiente figura, se puede pedir que se identifique cuál o cuáles son homotecias del cuadrilátero ABCD, que se diga cuáles figuras son homotécicas y que se explique por qué.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Triángulos
Semejanza
Congruencias
Teorema de Thales</td>
<td>4. Construir una figura semejante a una figura dada sometiéndola a una homotecia de razón menor o mayor que 1.

5. Construir una figura congruente a una figura dada sometiéndola a una homotecia de razón igual a 1.

6. Identificar figuras semejantes en diferentes contextos.</td>
<td>Para introducir este tema se puede utilizar como elemento motivador una breve reseña sobre Thales de Mileto (siglo VI a. C.). Se le considera como el primer filósofo y como el primero de los Siete Sabios griegos. Aunque no existen evidencias claras, se ha dicho que Thales fue el primer matemático auténtico en el sentido de que fue el primero en preocuparse por la demostración de las propiedades de las figuras geométricas. Se cuenta que Thales midió la altura de las pirámides de Egipto observando las longitudes de sus sombras en el momento en que la sombra proyectada por un palo clavado verticalmente era igual a su altura (uso de la semejanza de triángulos).</td>
</tr>
</table>

	7. Identificar figuras congruentes en diferentes contextos. 8. Aplicar los criterios de semejanza: lado lado lado, lado ángulo lado y ángulo ángulo ángulo para determinar y probar la semejanza de triángulos. 9. Aplicar los criterios de congruencia: lado lado lado, lado ángulo lado y ángulo lado ángulo, para determinar y probar la congruencia de triángulos. 10. Resolver problemas que involucren la semejanza y congruencia de triángulos. 11. Utilizar software de geometría dinámica para visualizar propiedades relacionadas con la congruencia y semejanza de triángulos.	▲ Primero, es importante construir el concepto de congruencia y semejanza de figuras de forma intuitiva. Por ejemplo, se puede pedir que se dibuje en papel cuadriculado un triángulo rectángulo donde su altura sea el doble que su base.  Se pide a cada estudiante comparar un triángulo con el del resto de la clase para buscar quiénes construyeron triángulos “iguales” (con las mismas dimensiones). Tomando en cuenta que hayan diversas respuestas correctas, se puede preguntar: a. ¿Puede haber varios triángulos que cumplan estas condiciones? b. Si es así, ¿cómo se podrían agrupar de acuerdo con sus características? c. ¿Cuáles elementos de los triángulos construidos varían y cuáles no varían? ▲ Luego se introducen los conceptos de congruencia y semejanza mediante homotecias. Se proporcionan triángulo ABC:  Se pide que construyan dos triángulos sometiendo al triángulo ABC a una homotecia, desde D, de razón 2 y otra de razón $\frac{1}{2}$.



Luego, se proponen las siguientes interrogantes:

a. ¿Cuáles elementos permanecen invariantes y cuáles no?
b. ¿Qué razón existe entre las medidas de los lados de ambos triángulos?
c. ¿Qué razón existe entre las medidas de los ángulos de ambos triángulos?

Posteriormente se pide aplicarle dos homotecias, una de razón igual a 1 y otra de razón igual a -1. Tomar como centro para ambas homotecias el punto D.

Luego se realizan las mismas preguntas anteriores.

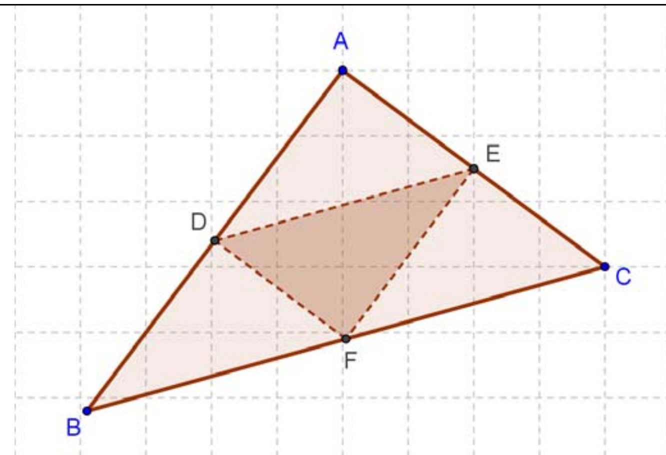
▲ Es importante que, mediante la observación de las medidas de los lados y de los ángulos, se puedan inferir las condiciones necesarias y suficientes para que dos triángulos sean congruentes y para que dos triángulos sean semejantes.

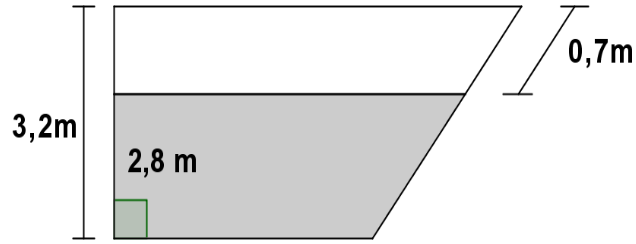
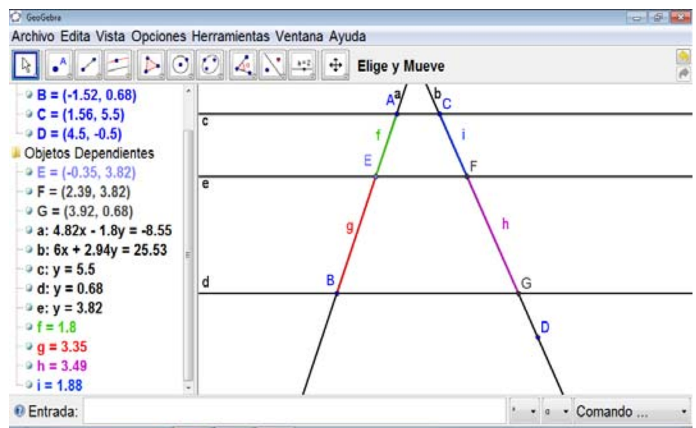
▲ Por último, se hace la clausura con los conceptos de congruencia y semejanza de triángulos, así como sus respectivos criterios.

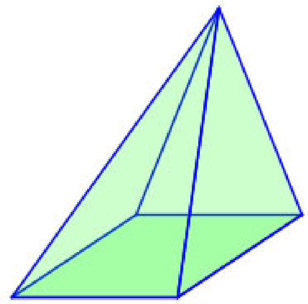
▲ La idea es hacer la relación y la diferenciación entre la congruencia y la semejanza de triángulos. No se quiere partir el tema en dos. Se debe entender que dos triángulos son congruentes si son homotécicos a través de una homotecia de razón 1 o -1 y que dos triángulos son semejantes si son homotécicos mediante una homotecia de razón diferente de 1.

Cada estudiante debe utilizar los criterios de congruencia y semejanza para argumentar sus conclusiones con respecto a un par de triángulos.

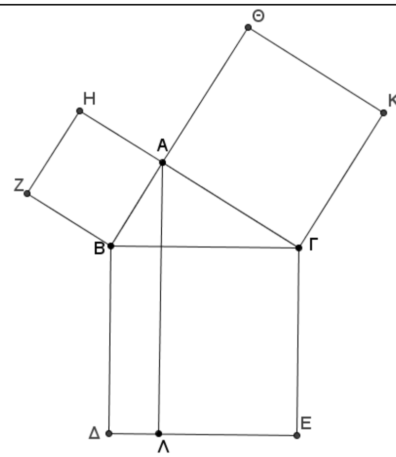
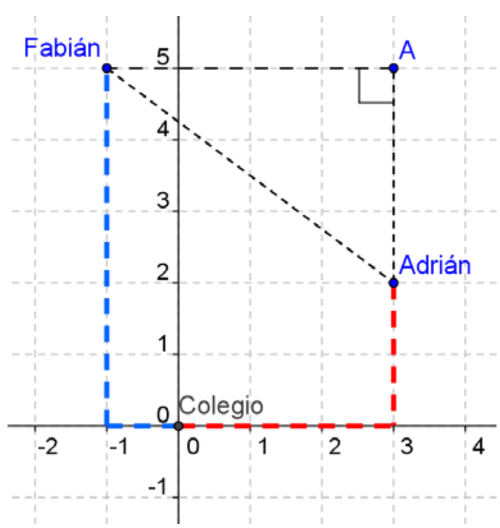
Si D, E y F son los puntos medios de los lados del triángulo ABC y AEFD es un rectángulo, encuentre un triángulo semejante al triángulo ABC y un triángulo congruente al triángulo DEF.

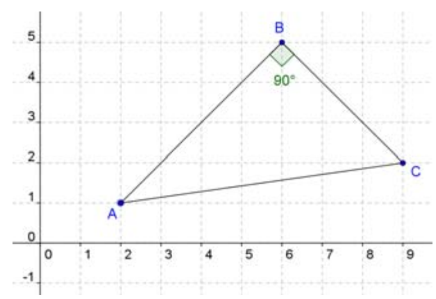
		 Existen varias alternativas correctas pero lo importante es la justificación que se realice para la solución. Es importante que se utilice vocabulario y simbología matemática en el proceso de argumentación, por ejemplo: a. El ∆ *ABC* ~ ∆ *ADE* por criterio lado-ángulo-lado, ya que $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=2$ y comparten el ángulo A que mide 90°. b. El $\Delta DEF \sim \Delta EDA$ por criterio lado-lado-lado, ya que *AD=EF, AE=DF* por ser AEFD un rectángulo y comparten el segmento *DE* (diagonal del rectángulo). Es conveniente utilizar un software de geometría dinámica o técnicas de doblado de papel (origami) para visualizar mejor estos conceptos.
	12. Aplicar el teorema de Thales en la resolución de problemas en diversos contextos.	▲ Para empezar se puede proponer el siguiente problema: Una piscina tiene un máximo de 3,2 m de profundidad. El día de hoy se indica que hay apenas 2,8 m de altura del agua en la parte más profunda. Ana quiere entrar a la piscina pero no sabe nadar, así que no quiere llegar a la parte más profunda. Ella calcula que mide aproximadamente 1,5 m de los pies a los hombros. La zona para bajar poco a poco es la parte inclinada y ella baja hasta apenas tocar el agua con los pies y calcula que es aproximadamente de 0,7 m. ¿Cuánto más deberá bajar Ana para que el agua le llegue a los hombros?

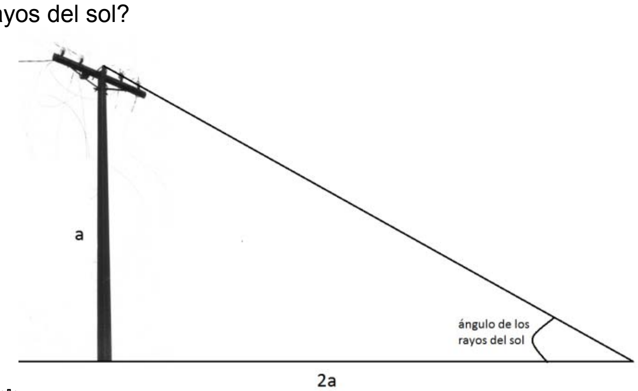
		 Se debe realizar la etapa de clausura con el enunciado del teorema después de enfrentar el problema. Este problema puede destacar la importante relación que existe entre *Geometría y Medidas*. También, utilizando la tecnología, se puede presentar una actividad donde la o el estudiante compruebe, mediante la manipulación dinámica de las dos rectas transversales, las proporciones entre las longitudes de los segmentos que se forman entre dos o más rectas paralelas cortadas por estas transversales.  Otro problema es aplicar los conceptos adquiridos para deducir el teorema de la paralela media, como un caso particular del teorema de Thales.
Visualización espacial • Pirámide recta - Caras laterales - Base - Apotemas	13. Identificar la base, las caras laterales, la altura, las apotemas y el ápice o cúspide de una pirámide. 14. Identificar las caras laterales, las bases y la altura de un prisma recto. 15. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de una pirámide recta de base cuadrada, rectangular o triangular.	▲Para introducir el tema se puede proponer un problema como el siguiente: Una pirámide recta de base cuadrada de 4 cm de lado tiene una altura de 6 cm. Si se hace un corte con un plano paralelo, ¿se puede obtener un triángulo como sección plana?, ¿un rectángulo no cuadrado?, ¿qué figuras se pueden obtener?

- Ápice (cúspide) - Altura • Sección plana • Prisma recto	16. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de un prisma recto de base cuadrada, rectangular o triangular.	 La discusión de este problema permite sistematizar los conocimientos propuestos, así como relacionarlos con otros vistos anteriormente.

9° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Triángulos • Teorema de Pitágoras	1. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas en diferentes contextos. 2. Encontrar la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, aplicando el teorema de Pitágoras.	▲ Se puede proponer el siguiente problema: Diego necesita comprar una escalera para subirse al techo de su casa. El techo está a una altura de 97 pulgadas. Para poder tener una buena estabilidad en la escalera al apoyarse en la pared, las patas de la escalera deben estar a una distancia de entre 30 y 40 pulgadas. ¿Cuál podría ser la medida aproximada de la escalera? El problema permite el uso de varias estrategias, como hacer un dibujo a escala en su cuaderno, utilizar una cinta métrica y realizar una simulación de la situación. Esto permite estimular la creatividad estudiantil. ▲ Es importante analizar tanto las soluciones como las estrategias utilizadas. Además hay que tomar en cuenta que hay gran variedad de soluciones correctas. ▲ Luego se hace la clausura enunciando el Teorema de Pitágoras. En el proceso de clausura, y como elemento histórico pedagógico, se puede utilizar el texto de Euclides (matemático griego del siglo IV a.C.) en el que se proporciona una demostración del Teorema de Pitágoras. La proposición 47 del Libro I de *Elementos* de Euclides es el conocido teorema de Pitágoras. Se transcribe a continuación tal como aparece en dicho texto: Proposición 47: En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

		 Por ejemplo se puede usar esta referencia histórica para ilustrar el teorema y además contextualizar una época y conocer los métodos que se usaban. ▲ Se puede comentar la demostración del teorema de Pitágoras brindada por Euclides. ▲ Se puede utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano y luego se hace la clausura enunciando la fórmula. Un ejemplo: ☺ Adrián y Fabián salen del colegio para su casa. Si Adrián camina 3 km hacia el Este y 2 km hacia el Norte y Fabián camina 1km al Oeste y 5 km al Norte, ¿a qué distancia se encuentra la casa de Adrián de la de Fabián? Se puede proponer una representación gráfica en un plano coordenado, en donde la casa de Fabián esté en el punto (-1,5) y la casa de Adrián esté en el punto (3,2), siendo el colegio el punto (0,0). Luego, utilizar el Teorema de Pitágoras. 

		▲ También se puede utilizar la representación cartesiana para determinar si un triángulo, dadas las coordenadas de sus vértices, es o no rectángulo. Para esto se puede utilizar la fórmula de la distancia entre dos puntos. Por ejemplo: Dadas las siguientes coordenadas de los vértices de un triángulo A(2,1), B(6,5) y C(9,2), clasifique el triángulo de acuerdo con la medida de sus ángulos y la medida de sus lados. Argumente su respuesta. Con la fórmula de la distancia entre dos puntos se obtiene que: La distancia de A a B es $d=\sqrt{(2-6)^2+(1-5)^2}=4\sqrt{2}$ La distancia de B a C es $d=\sqrt{(6-9)^2+(5-2)^2}=3\sqrt{2}$ La distancia de A a C es $d=\sqrt{(2-9)^2+(1-2)^2}=5\sqrt{2}$ y por lo tanto, como $(5\sqrt{2})^2=(4\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2$ entonces el triángulo es rectángulo y como las medidas de sus lados son diferentes se clasifica como escaleno. 
Trigonometría • Radianes • Seno • Coseno • Tangente • Razones trigonométricas de ángulos complementarios • Ángulos de elevación y depresión	3. Convertir medidas angulares de grados a radianes y viceversa. 4. Aplicar las razones trigonométricas básicas (seno, coseno, tangente) en diversos contextos. 5. Aplicar las relaciones entre tangente, seno y coseno. 6. Aplicar seno, coseno y tangente de ángulos complementarios. 7. Aplicar los conceptos de ángulos de elevación y depresión en diferentes contextos.	Se deben proponer problemas que utilicen conversiones de grados a radianes y viceversa, con esto se logra una conexión con el área de *Medidas*. ▲ Para iniciar se puede proponer el siguiente problema: Se quiere construir una rampa para personas con discapacidad en un colegio. Según la ley 7600 de Costa Rica, el ángulo adecuado para hacer estas rampas es de 15°. Si la altura que se quiere alcanzar es de 1,3 m: a. ¿A qué distancia debe comenzar la rampa? b. ¿Qué longitud tendría la rampa? La idea es que por medio de la experimentación y el diálogo se logre interiorizar la necesidad de aplicar razones trigonométricas básicas y relaciones trigonométricas. ▲ Luego se presentan formalmente las razones trigonométricas básicas y su aplicación en diversos contextos.

• Ley de senos	8. Aplicar que la suma de los cuadrados del seno y coseno de un ángulo es 1. 9. Aplicar la ley de senos en diversos contextos. 10. Resolver problemas que involucren las razones trigonométricas, sus propiedades y ángulos de elevación y de depresión.	El problema anterior también está relacionado con el eje transversal *Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz*, en cuanto a la accesibilidad para personas con discapacidad. Es importante distinguir en qué modo (grados, radianes) se está utilizando la calculadora científica para el cálculo de razones trigonométricas. ▲Se puede, de manera adicional, introducir el círculo trigonométrico y el uso de los radianes para establecer la conexión entre geometría analítica y trigonometría con el área de *Medidas*.
	11. Plantear problemas contextualizados que utilicen razones trigonométricas para su solución.	▲Se debe no sólo resolver problemas de trigonometría sino también plantearlos, puesto que al diseñar problemas de trigonometría se manejan las condiciones necesarias que se deben dar para el uso de las razones trigonométricas o ley de senos. Por ejemplo: ▲Se propone plantear un problema contextualizado que necesite para su solución la utilización de la razón trigonométrica seno. Para esto se puede dar un caso específico como el te: $sen\ 30° = \frac{1}{2}$. Para construir el problema, primero se tiene que tener claro que el escenario del problema debe originar un triángulo rectángulo, luego se debe saber que las medidas que intervienen en este problema son el cateto opuesto a un determinado ángulo del triángulo, la hipotenusa y el ángulo respectivo. ▲Alguien podría plantear el siguiente: En un determinado momento del día, la sombra de un poste de electricidad mide el doble de longitud que la altura misma del poste. ¿En ese momento, cuál es el ángulo de depresión de los rayos del sol?  De esta manera se puede activar directamente el proceso *Plantear y resolver problemas*.

Geometría del espacio • Pirámide recta • Apotema • Prisma recto • Área lateral • Área total	12. Identificar y calcular la apotema de pirámides rectas cuya base sea un cuadrado o un triángulo equilátero. 13. Calcular el área lateral y el área total de una pirámide recta de base cuadrada, rectangular o triangular. 14. Calcular el área lateral y el área total de un prisma recto de base cuadrada, rectangular o triangular.	▲ Se puede proponer un problema como el siguiente: La pirámide de Kefrén en Egipto es recta de base cuadrada. El lado de su base mide 215 m y su altura es 143 m. Para la clase de Estudios Sociales se quiere construir, en cartulina, una maqueta de dicha pirámide con una escala en la que 1cm equivale a 1 m. ¿Cuánto cartón se requiere? Dibuje el desarrollo plano de la pirámide que permite construir la maqueta. La situación refiere al cálculo del área de un triángulo de base 215 y una altura a determinar (apotema de la pirámide). A partir del trabajo estudiantil se realiza la etapa de clausura sistematizando el concepto de apotema piramidal y deduciendo, a través del problema, una fórmula para el cálculo del área lateral y luego del área total de una pirámide recta de base cuadrada.

Indicaciones metodológicas

Generales para el ciclo

1. Aunque no se pretende un aprendizaje completamente formal de las Matemáticas, sí es importante cierto grado de rigor propio de la disciplina, y por eso se deberá hacer un uso correcto de la terminología y la notación.

2. En este ciclo es necesario que las y los estudiantes se familiaricen con el sentido de la demostración en Matemáticas, esto se irá introduciendo paulatinamente a través de los tres años del ciclo. Para ello se harán demostraciones de algunos de los teoremas y se les solicitará la demostración de algunas propiedades de las figuras geométricas.

3. También, es primordial el papel de la conjetura. Se comenzará por realizar conjeturas, luego se procederá, en una primera etapa, a su verificación a través del cumplimiento en casos particulares (debe quedar completamente claro que la verificación de casos particulares hace más creíble la conjetura, pero que no demuestra la propiedad que se propone), luego se desarrollará la argumentación (en una segunda etapa) y finalmente la demostración de algunas de las conjeturas en una última etapa.

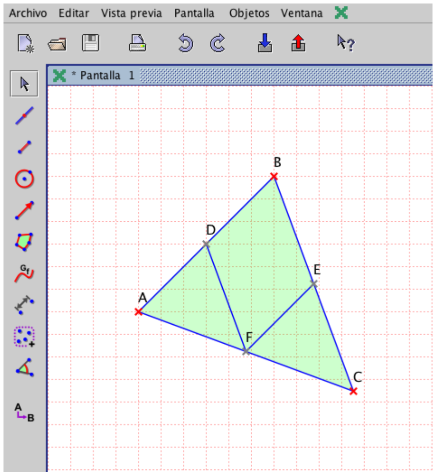
4. Algunas de las conjeturas que se realicen no serán correctas, aquí juega un notable papel el contraejemplo. Si alguien hace una conjetura que no es correcta, otras personas podrán brindar contraejemplos que permitan desechar o modificar la conjetura.

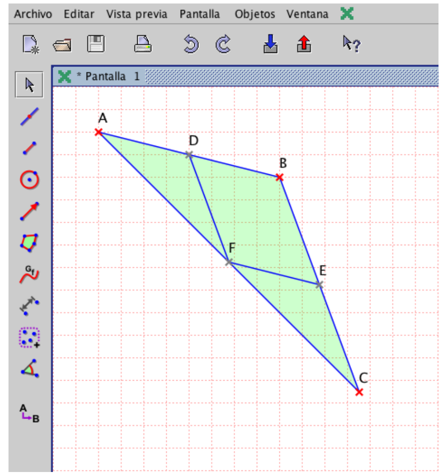
5. El error tiene un papel didáctico sustancial, ya que permite detectar dónde hay mayores dificultades de aprendizaje y visualizar mejores formas de abordar un conocimiento particular.

6. En muchas oportunidades se puede ligar la geometría sintética con la analítica, esto enriquece el trabajo y ayuda en la adquisición de las habilidades.

7. El uso de software de geometría dinámica es muy valioso. Se sabe que al dibujar cualquier figura geométrica en la pizarra, ésta es estática. A través de este recurso se puede trazar cualquier figura y cambiarla con sólo “arrastrar” o mover uno de los elementos que la componen. Esto permite que la visualización sea enriquecedora y que se trabajen procesos como la generalización y la modelización. Las figuras siguientes fueron generadas por un software, se dibujó un triángulo arbitrario y se marcaron los puntos medios de los lados, luego se trazaron los dos segmentos interiores que ahí se observan. Arrastrando los vértices se obtiene la figura de la derecha o cualquier otra. Obser-

vando parece que los dos triángulos ADF y FEC son congruentes; esta es una conjetura que pueden hacer las y los estudiantes para luego demostrarla.



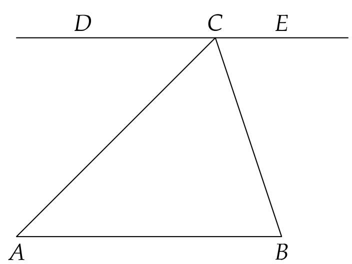


Sétimo año

1. Uno de los resultados que deberán ser demostrados en 7°Año es el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo:

   La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a $180°$.

   En primer lugar, pueden hacer doblado de papel o utilizar un software de geometría dinámica para hacer la conjetura correspondiente. Luego se procede a la demostración. Se considera el triángulo ABC dado en la siguiente figura:



   Se traza la recta auxiliar $\overleftrightarrow{DE}$ que pasa por C y es paralela a $\overleftrightarrow{AB}$. Dado que $\measuredangle ECB$ y $\measuredangle CBA$ son alternos internos entre paralelas, entonces $m(\measuredangle ECB) = m(\measuredangle CBA)$. Por la misma razón, $m(\measuredangle DCA) = m(\measuredangle CAB)$. Pero $\measuredangle ECB$, $\measuredangle BCA$ y $\measuredangle DCA$ forman un ángulo llano; es decir

$$m(\measuredangle ECB) + m(\measuredangle BCA) + m(\measuredangle DCA) = 180°$$

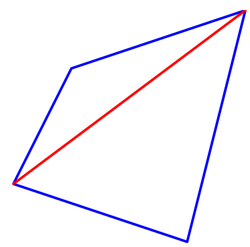
   Luego:$m(\measuredangle CAB) + m(\measuredangle BCA) + m(\measuredangle CBA) = 180°$. Esto es, la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo es igual a $180°$.

   Es conveniente que la demostración sea realizada por las y los estudiantes. Se les guiará para que la comunicación y la argumentación que proporcionen sean adecuadas, así como el uso de la terminología y la simbología.

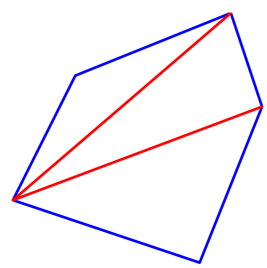
2. Para desarrollar el proceso *Razonar y argumentar* se pueden proponer problemas como el siguiente: escriba y exponga un argumento lógico para convencer a alguien que la distancia más corta entre una recta L y un punto P fuera de la recta es la longitud del segmento PQ donde Q está en L y $\overline{PQ}$ es perpendicular a L.

   El argumento girará en torno a la desigualdad triangular; basta tomar otro punto R en L y analizar el triángulo PQR.

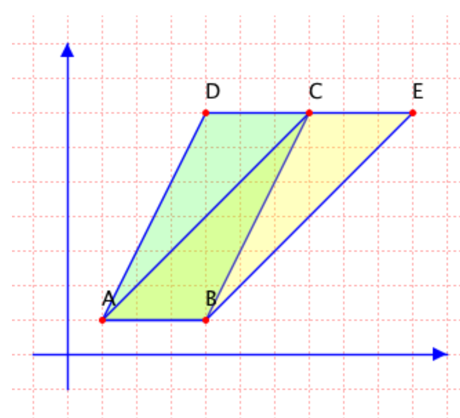
3. Se puede inferir la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero visualizándolo como dos triángulos adheridos en un lado en común (diagonal del cuadrilátero).



   Siguiendo este mismo procedimiento, como ejercicio adicional, se podrá inducir la fórmula de la suma de los ángulos internos de un polígono convexo.



4. Problemas como el siguiente permiten conectar la geometría sintética con la geometría analítica y refuerzan los conocimientos en ambos casos: dados los puntos A(1,1), B(4,1) y C(7,7), determine un punto D tal que ABCD sea un paralelogramo y un punto E tal que también ABEC sea un paralelogramo. Dibuje ambos paralelogramos en un sistema de coordenadas. Este ejercicio permite reflexionar sobre las características de un paralelogramo y además observar el orden correcto en la notación de la figura según sus vértices. En la siguiente figura se da la solución.



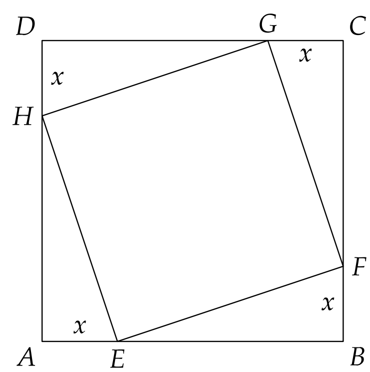
Octavo año

1. Una idea central en este año es introducir el concepto de homotecia y luego utilizarlo para introducir los conceptos de congruencia y semejanza. Conviene también que esto se ligue con la representación en el plano mediante el uso de coordenadas.

2. Con respecto a la homotecia, debe quedar claro que ésta es una transformación mediante la cual se obtiene una figura semejante a la figura a la que se le aplica. Esta semejanza preserva ángulos aunque puede cambiar la longitud de los segmentos; sin embargo, si A y B son los extremos de un segmento y A' y B' son las imágenes de A y B bajo una homotecia, entonces $A'B' = kAB$, donde k es una constante llamada razón de la homotecia. Por otra parte, dada una homotecia, si la imagen de cada punto *X* se denota por X', entonces todas las rectas XX' son concurrentes en un punto O llamado centro de la homotecia. El punto X' se llama homólogo del punto X y, de la misma manera, $\overline{A'B'}$ es el homólogo de $\overline{AB}$ y $\measuredangle A'B'C'$ es el homólogo de $\measuredangle ABC$. Estos son los conocimientos básicos que deben originar las habilidades que al respecto se proponen para 8° Año.

3. El tema de la semejanza se presta para reforzar el proceso de *Razonar y argumentar*, mediante la resolución de problemas basados en los criterios de semejanza. Por ejemplo:

   En la siguiente figura, ABCD es un cuadrado, ¿es EFGH un cuadrado?

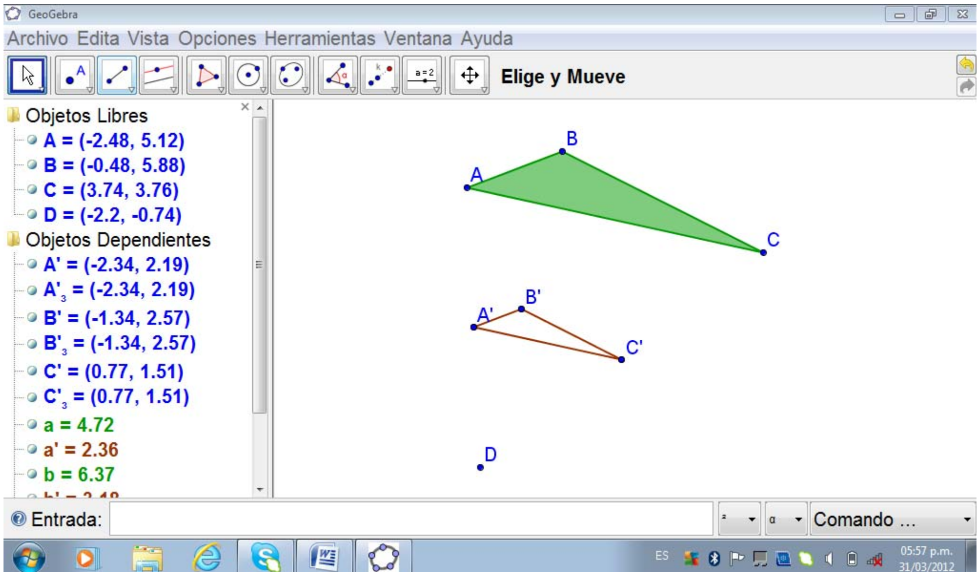
   En este problema se aplica el criterio de congruencia L-L-L para ver que los cuatro lados del cuadrilátero EFGH son congruentes. Se debe evidenciar que esto no es suficiente para probar que es un cuadrado (en ese caso todo rombo sería cuadrado). Debe además verificar que los ángulos son rectos.

4. En cuanto al estudio de las pirámides y prismas rectos, se trata, además de la identificación de sus elementos, de identificar las figuras que se forman cuando se cortan con un plano. Para esto pueden ayudar modelos con plastilina u otro material cortado de manera que se haga evidente qué sección plana se obtiene.

5. La siguiente actividad puede realizarse utilizando software de geometría dinámica. Permite establecer una conjetura y discutirse posteriormente su demostración. Con ayuda de un software de geometría dinámica, se les solicita:
   a. Dibuje un triángulo de medidas 3, 4 y 5.
   b. Por cada vértice trace una paralela al lado opuesto.
   c. Verifique que el triángulo formado por los puntos de intersección de estas rectas es semejante al triángulo inicial.
   d. ¿Cuál es la razón de semejanza?
   e. Arrastre los vértices del triángulo inicial para formar otro triángulo cualquiera.
   f. ¿Se conserva la semejanza, siempre o en algunos casos? En caso afirmativo, ¿cuál es la razón de semejanza?

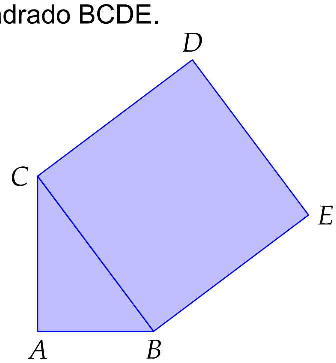
g. Pruebe la semejanza en los casos en que se dé.

6. El uso de software puede ser aprovechado para realizar, en primera instancia, conjeturas sobre los criterios de semejanza y congruencia. Luego, mediante la manipulación dinámica de los triángulos se pueden verificar dichas conjeturas.

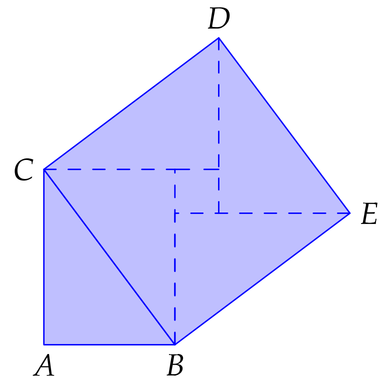


Noveno año

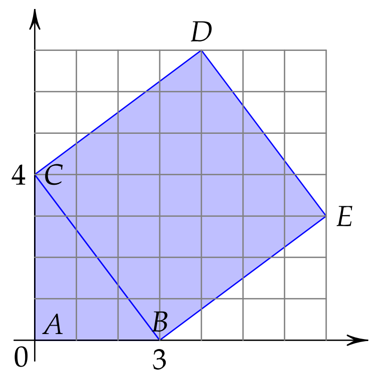
1. El teorema de Pitágoras se puede introducir también mediante una actividad como la siguiente: en la figura mostrada, ΔABC es rectángulo con ángulo recto en A y BCDE es un cuadrado. Si AB= 3 y AC=4, determine el área del cuadrado BCDE.



Se pueden utilizar varias estrategias para resolver el problema; puede abordarse utilizando geometría sintética, por ejemplo, construyendo el siguiente dibujo:



A partir de aquí se obtiene que el área es 25. A continuación se hace ver entonces que $\overline{BC}$ mide 5. Se puede pedir que se haga el mismo trabajo con otras medidas arbitrarias. Al final se hace el cierre enunciando el teorema de Pitágoras. El trabajo anterior se visualiza mejor si se utiliza un sistema de coordenadas apropiado:



2. Para desarrollar el proceso *Razonar y argumentar*, una buena actividad consiste en presentar la demostración de un teorema solicitar que se justifique cada paso.

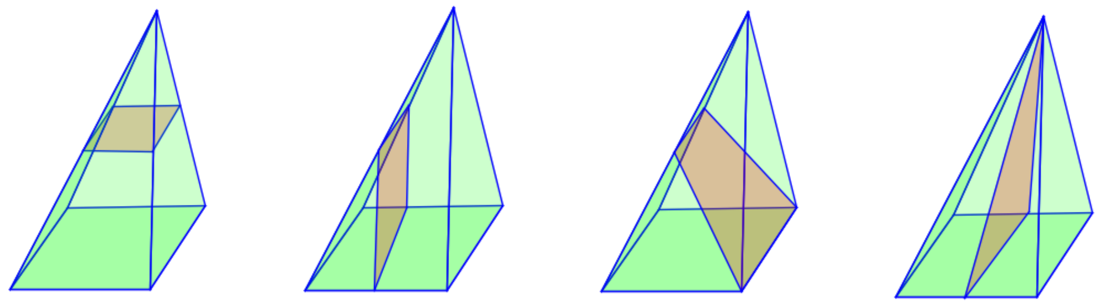
3. Dado que los elementos de trigonometría que se estudian en este año están ligados al triángulo rectángulo, deben aprovecharse las propiedades de éste en el estudio de las razones trigonométricas. En particular la relación $sen^2x + cos^2x = 1$ es una consecuencia del teorema de Pitágoras. Es una identidad que puede ser obtenida mediante una actividad apropiada. La idea es que tanto aquí como en otros temas se evidencien, donde sea posible, las conexiones existentes.

4. La ley de senos puede introducirse mediante un problema como el siguiente: tres torres, denotadas por P, Q y R están situadas a las orillas de un rio, dos a un lado y una al otro, como en la figura.

Imagen cortesía de FreeDigitalPhotos.net

Se sabe que las dos torres R y P que están del mismo lado se encuentran a 100 m una de la otra, mediante un instrumento se obtiene que $m(\measuredangle PRQ) = 20°$ y $m(\measuredangle RPQ) = 120°$. Si se quiere tender un cable desde la torre Q hasta la torre P, ¿cuántos metros de cable se requieren?
Las y los estudiantes propondrán sus estrategias, que estarán relacionadas con las razones trigonométricas. De esta forma, la etapa de clausura deberá llevar al enunciado de la ley de senos.

5. Algunas secciones planas de una pirámide se pueden ver en la siguiente figura:



Indicaciones de evaluación

En el *trabajo cotidiano* es necesario evaluar el uso apropiado del vocabulario y la simbología matemática, así como la forma de comunicar y exponer las ideas. También, el uso de instrumentos para construir las figuras y traslaciones.

Las habilidades referidas al uso de la tecnología deberán ser evaluadas de forma cualitativa y luego analizar la información recogida en cada actividad. Estas habilidades no serán evaluadas por medio de *pruebas escritas* o de *ejecución*, ya que por su naturaleza son necesarios otro tipo de técnicas.

Se recomienda proponer *trabajos extraclase* donde se apliquen los conocimientos adquiridos para resolver y modelizar diversos tipos de problemas geométricos. Por ejemplo, en 7º Años propone la elaboración de un plano de su casa y la estimación del área de la misma, así como de cada uno de los espacios en los que está dividida.

Para la evaluación mediante tareas cortas (*trabajo extraclase*) y *pruebas* se deben tener presentes las siguientes indicaciones.

- ✓ Debe considerarse el uso apropiado de las propiedades y teoremas, así como del vocabulario y la notación.

- ✓ En cuanto a los conocimientos básicos sobre puntos, segmentos, rectas y ángulos, la evaluación se da más a nivel de reproducción mediante el uso de ítems de reconocimiento, respuesta corta y selección única. Es importante el reconocimiento de puntos colineales en el entorno y en dibujos, así como del paralelismo y la perpendicularidad tanto entre segmentos y rectas como entre planos.

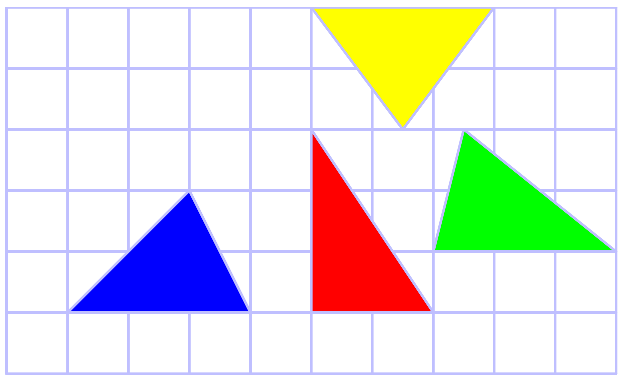
- ✓ Para evaluar las habilidades relacionadas con las medidas de ángulos se pueden utilizar diversos tipos de ítems; éstos pueden involucrar también ángulos internos y externos de un triángulo o de un cuadrilátero, especialmente en ítems de tipo resolución de problemas, tal como el siguiente:

  Un punto B se encuentra a $30°$ *al Noreste de un punto A, un punto C se encuentra a* $60°$ *al Noreste de A y a* $80°$ *al Noreste de B. Determinar la medida del ángulo BCA.*

- Las habilidades relacionadas con traslaciones y geometría analítica pueden ser evaluadas mediante ítems que tengan que ver con el trazado o el reconocimiento de figuras utilizando sistemas de coordenadas. Mediante el uso de la geometría analítica se pueden evaluar diversas habilidades como la estimación de áreas o medidas de ángulos; por ejemplo:

  De los triángulos que se presentan en la figura los que tienen la misma área que el azul son:

  a) Sólo el amarillo
  b) Sólo el verde
  c) Sólo el verde y el amarillo
  d) El verde, el amarillo y el rojo



- Para evaluar las habilidades de aplicación de conceptos y propiedades puede presentarse una situación contextualizada y solicitar que se esquematice geométricamente. Para ello la o el estudiante deberá seleccionar y utilizar de manera apropiada los conceptos, propiedades y algoritmos que correspondan a la situación.

- Es importante evaluar la ubicación de puntos y figuras en el plano coordenado así como calcular la distancia entre dos puntos enmarcados en diversos contextos, ya que estas habilidades le serán de mucha ayuda en la resolución de problemas en el Ciclo diversificado.

- Para evaluar homotecias es útil el uso de coordenadas; se puede, por ejemplo, dar una homotecia y pedir las coordenadas de los vértices homólogos de una figura al aplicarle la homotecia, también las longitudes de los lados de la figura homóloga conociendo los lados de la figura original.

- Se busca fortalecer los procesos de *Razonar y argumentar* y *Comunicar*; la evaluación debe favorecer este propósito. Los criterios de semejanza y congruencia se prestan bien para reforzar dichos procesos. Se pedirá utilizar el vocabulario y la simbología adecuada y respaldar las respuestas con criterios de semejanza o congruencia válidos.

- En cuanto a la visualización espacial, se puede describir una de las figuras estudiadas y pedir que se identifique la figura que se forma mediante un corte con un determinado plano.

- En el caso del teorema de Pitágoras, se debe evaluar no sólo en figuras donde aparecen de forma explícita las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo y hay que determinar la medida del otro lado (reproducción), sino que también deberá evaluarse la habilidad de utilizar el teorema en relación con otros conocimientos. También deberá evaluarse con el uso de coordenadas en el plano.

- La evaluación de los conocimientos relacionados con trigonometría es preferible realizarla mediante problemas contextualizados.

Tercer ciclo, Relaciones y Álgebra

Introducción

Al ingresar a este ciclo cada estudiante tiene la habilidad para resolver ecuaciones sencillas de primer grado, reconocer relaciones de dependencia entre dos cantidades variables, aplicar la regla de tres, porcentajes y proporcionalidad directa con el fin de solucionar problemas, calcular la distancia entre puntos ubicados en un mapa con escala y realizar operaciones que involucran suma, resta, multiplicación y división. También, puede comprender el concepto de variable e identificar cuantitativamente cambios en la variable.

El Tercer ciclo ampliará estas habilidades e incluirá otras que tienen que ver con el estudio de relaciones de diversos tipos (lineal, cuadrática, proporcionalidad inversa), así como el uso de distintas representaciones para las relaciones mencionadas (verbal, tabular, algebraica, gráfica).

En 7º Año se estudian las relaciones de proporcionalidad directa e indirecta, con una orientación que prepara hacia el estudio de las funciones. La relación de proporcionalidad entre las variables *x, y* del tipo $y = ax$ es un caso particular de funciones que serán abordadas en 8° Año.

Las relaciones de proporcionalidad son muy importantes para la identificación y utilización de modelos en diversos contextos. El uso de tecnologías adquiere aquí un lugar más relevante pues permitirá visualizar las gráficas de las relaciones que serán estudiadas.

Se espera que al concluir 7º Año cada estudiante utilice modelos sencillos de fenómenos y situaciones del contexto que tienen que ver con relaciones de proporcionalidad directa o inversa.

Las funciones cuadráticas, que también son casos particulares de relaciones, se introducen en 9º Año. El enfoque con el que se abordan las funciones lineales y cuadráticas privilegia la relación entre variables (dependientes e independientes) y sus distintas representaciones por medio de tablas, expresiones algebraicas y gráficas. Es un enfoque consistente con toda la preparación recibida desde la educación Primaria.

No se usa en este ciclo un enfoque abstracto por medio de conjuntos, sino un acercamiento más intuitivo. No se busca introducir nociones como dominio, ámbito, ni el estudio de propiedades como la inyectividad. Este tipo de tratamiento más formal se desarrollará en el Ciclo diversificado.

Adicionalmente, se trabajará en este ciclo con tareas que envuelven actividades de simbolización y la manipulación matemática correcta de expresiones algebraicas.

El enfoque propuesto fomenta las conexiones entre las funciones estudiadas y las relaciones algebraicas simbólicas y su manipulación. Por ejemplo, se integra el estudio de la función lineal con el uso y la resolución de ecuaciones de primer grado, la función cuadrática con las ecuaciones de segundo grado. Esta integración conceptual permite no sólo visualizar importantes conexiones entre estos temas sino darle significado a muchos de los procedimientos que deben estudiarse en el uso de expresiones simbólicas. Lo mismo ocurre con los tópicos de la factorización en los que se persigue mostrar su vínculo con las funciones estudiadas.

Se espera que al concluir este ciclo cada estudiante utilice modelos sencillos de fenómenos y situaciones del contexto relacionados con las funciones lineales y/o cuadráticas, además de tener un dominio apropiado de la manipulación de símbolos algebraicos y sus relaciones.

Propósitos de la enseñanza

El propósito de la enseñanza en el área de *Relaciones y Álgebra* para este ciclo es el desarrollo de habilidades para trabajar con relaciones y funciones matemáticas básicas, profundizar su comprensión de la noción de variable y del lenguaje algebraico, la manipulación adecuada de expresiones algebraicas, reconocer y aplicar modelos matemáticos sencillos que involucren las relaciones de proporcionalidad, y las funciones lineales y cuadráticas.

Habilidades generales

Las habilidades generales que deberá tener cada estudiante en *Relaciones y Álgebra* al finalizar este ciclo son:

- Establecer la ley de formación en sucesiones utilizando distintas representaciones.
- Analizar patrones numéricos y no numéricos.
- Identificar y utilizar distintas representaciones para relaciones de proporcionalidad.
- Efectuar operaciones con expresiones algebraicas.
- Utilizar distintas representaciones para las funciones lineales y cuadráticas.
- Utilizar las ecuaciones de primer y segundo grado para resolver problemas.
- Plantear problemas a partir de una situación dada.
- Identificar los modelos matemáticos que se adaptan mejor a una situación dada.

Las nuevas funciones matemáticas que se introducen ofrecen mayores oportunidades para identificar y usar modelos matemáticos del entorno, por lo que se amplían las posibilidades para mostrar la utilidad de las Matemáticas.

El uso de funciones lineales y cuadráticas dentro de situaciones en contextos reales fortalecerá la realización del proceso de *Resolver y plantear problemas*, lo que a su vez promoverá conexiones con distintas disciplinas y con otras áreas de las Matemáticas. También, se enfatizará el uso correcto del lenguaje matemático en la comunicación verbal y el uso de múltiples representaciones matemáticas como tablas, gráficas y símbolos matemáticos.

Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

7° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Sucesiones • Ley de formación • Patrones	1. Identificar la ley de formación de una sucesión utilizando lenguaje natural, tabular y algebraico. 2. Plantear y resolver problemas relacionados con sucesiones y patrones.	▲ Estos conceptos se introducen aquí para promover una recapitulación de aprendizajes realizados en la educación primaria en relación con esta área matemática. ▲ Proponer un problema contextualizado que repase todas las habilidades de sucesiones y representaciones estudiadas en los ciclos anteriores. Adriana recibe semanalmente 6500,00colones para cubrir sus gastos de estudio. Ella decide ahorrar 1800,00colones por semana, para formar un fondo de ahorro. Represente en forma tabular la cantidad total de dinero que ella gasta semanalmente, durante las 6 primeras semanas.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
Juan vende paquetes de prensas. La siguiente tabla contiene las ganancias generadas por la venta.

<table>
<tr><th>Cantidad paquetes</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td>Ganancias en colones</td><td>350</td><td>600</td><td>850</td><td>1100</td><td>1350</td></tr>
</table>

a. ¿Cuál es el precio de cada paquete de prensas?
b. Determine la ganancia fija que desde un inicio muestra la información del cuadro anterior.
c. ¿Cuánto dinero gana Juan por la venta de 321 paquetes de prensas?

▲ Durante la etapa de clausura se presenta la noción de ley de formación utilizando representación numérica, algebraica y tabular.

Si usted invierte inicialmente ₡20 000,00 en la cooperativa del Colegio y gana de interés compuesto anual de 10%, describa numéricamente, tabularmente y simbólicamente la sucesión que representa la cantidad de dinero anual que tendrá, si no hace retiros.

a. Numéricamente: 20 000,00 22 000,00 24 200,00 26 620,00 29 282,00 32 210,20 … (colones)

b. Algebraicamente: La cantidad de colones C(n) que tendré después de n años se modela por la expresión:

$$C(n) = 20\,000\,(1 + 0{,}1)^n$$

c. Tabularmente:

<table>
<tr><th>Año</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>…</th></tr>
<tr><td>Cantidad (colones)</td><td>20 000</td><td>22 000</td><td>24 200</td><td>…</td></tr>
</table>

Solicite al estudiantado proponer un problema con esta situación.

Por ejemplo, ellos podrían proponer: ¿Cuántos colones tendré después de 5 años, 8 años, 10 años?

Se recomienda el uso de calculadora para hacer los cálculos indicados en la representación algebraica.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Relaciones

• Proporcionalidad inversa
</td>
<td>
3. Identificar relaciones de proporcionalidad inversa en diversos contextos reales.
</td>
<td>
▲ Se recomienda plantear un problema para repasar el concepto de proporcionalidad directa.

La fiesta de aniversario de Rita tiene un costo de ₡ 36 000,00 si ella invita a 6 personas. ¿Cuánto costará la fiesta si ella decide invitar a 15 personas? Suponga que la relación es directamente proporcional.
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>▲ Se puede plantear un problema que involucre proporcionalidad inversa, particularmente relaciones que pueden ser expresadas en la forma

$$y=\frac{k}{x},\ \ y=\frac{k}{x^2}$$

con k constante de proporcionalidad.

Según la ley de gravitación universal propuesta por Newton, el efecto de la gravedad de la Tierra sobre un objeto (su peso) varía inversamente con el cuadrado de su distancia al centro del planeta. Suponga que el radio de la Tierra es 6400 km. Si el peso de un astronauta en la superficie de la Tierra es de 75 kg, ¿cuál será el peso de este astronauta a una altura de 1600 km sobre la superficie de la Tierra?

La relación anterior es un *modelo* matemático que relaciona el peso de un objeto con su distancia al centro de la Tierra.</td>
</tr>
<tr>
<td>Representaciones

- Verbal
- Tabular
- Gráfica
- Algebraica</td>
<td>4. Analizar relaciones de proporcionalidad directa e inversa de forma verbal, tabular, gráfica y algebraica.</td>
<td>Solicitea cada estudiante representar algebraicamente las expresiones:

a. La fuerza de atracción entre dos objetos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos.
b. La intensidad luminosa es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del objeto a la fuente de luz.
c. La energía cinética de un objeto es directamente proporcional a la masa del objeto y al cuadrado de su velocidad.

Las expresiones anteriores son modelos matemáticos de situaciones reales relacionadas con la Física.

▲ Dada una relación matemática de proporcionalidad en forma verbal, representarla en forma algebraica o tabular.

C varía directamente con *R* e inversamente con el cuadrado de *S*. Si *C* = 21 cuando *R* = 7 y *S* = 1,5, complete la tabla que sigue:

<table>
<tr><th>R</th><th>S</th><th>C</th></tr>
<tr><td>120</td><td></td><td>22,5</td></tr>
<tr><td>200</td><td>12,5</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>15</td><td>10,5</td></tr>
</table>

▲ Dada una representación tabular, pasarla a algebraica y extraer conclusiones sobre cantidades que no están en la tabla.

▲ Utilice fórmulas para determinar el área de superficies y el volumen de formas tridimensionales.
Por ejemplo:</td>
</tr>
</table>

		a. Área de un cuadrado de lado *x*: $A = x^2$ (el área *A* depende de la medida del lado *x*). Observe que el área es directamente proporcional al cuadrado de la medida del lado, con constante de proporcionalidad igual a 1. b. Volumen de un cubo de lado *x*: $V = x^3$. El volumen es directamente proporcional al cubo de la medida de su lado (arista) con constante de proporcionalidad 1. c. La longitud de una circunferencia de radio *r*: $C = 2\pi r$. La constante de proporcionalidad es 2π. A este nivel se utiliza 3,14 como aproximación para π. Se pueden utilizar también áreas de rectángulos, trapecios y perímetros de figuras planas. Las expresiones anteriores conectan *Relaciones y Álgebra* con *Geometría* y son modelos matemáticos para calcular áreas o volúmenes de objetos geométricos. ▲ A este nivel la representación gráfica de una relación de proporcionalidad inversa consistirá de puntos en el plano de coordenadas rectangulares pues no se han introducido todavía los números irracionales. Se recomienda el uso de software para la representación gráfica. La gráfica obtenida con el software aparecerá en forma continua en lugar de discreta.

8° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Funciones • Función lineal	1. Identificar situaciones dadas que pueden ser expresadas algebraicamente en la forma *y* = *ax* + *b*.	▲ Proponer un problema contextualizado que implique una relación del tipo $y = ax + b$. En el año 2011, para trasladarse en un taxi la tarifa era de ₡550 para el primer kilómetro y ₡200 para cada kilómetro adicional. a. Represente mediante una tabla la cantidad de dinero a pagar por la distancia recorrida en kilómetros. Utilice como valor inicial el primer kilómetro. b. Plantee una representación algebraica que sirva de modelo para esta situación. c. Represente en un sistema de ejes cartesianos la función descrita en el problema anterior. ▲ La representación simbólica encontrada en el problema anterior es un *modelo* del comportamiento real del costo de un servicio de taxi. Use números racionales para la representación tabular. ▲ Para la representación gráfica del problema anterior, es importante utilizar escalas diferentes en el eje horizontal (abscisas) y el vertical (ordenadas). Por ejemplo, cada centímetro puede representar un kilómetro en el eje de las abscisas mientras que cada centímetro puede representar ₡500 en el eje de las ordenadas.

Al trabajar con representaciones tabulares, en varias ocasiones se utilizan datos numéricos pequeños para una de las variables y datos muy grandes para la otra variable. En tales casos se sugiere utilizar diferentes escalas en los ejes.

La población de asalariados cubiertos por el seguro de salud de la Caja Costarricense de Seguro Social aparece indicada en la siguiente tabla:

Año	Número de asalariados
2000	726 048
2001	727 603
2002	754 731
2003	770 032
2004	800 123
2005	842 139
2006	896 419
2007	972 208
2008	1 054 497
2009	1 038 237
2010	1 075 528

Fuente: Programa Estado de la Nación 2011
http://www.estadonacion.or.cr/

La cantidad de asalariados A cubiertos por seguro de salud puede ser aproximada por la función

$$A(t) = 39\,908t + 678420$$

en donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente al año 2000. En este caso la gráfica correspondiente no pasa por los puntos que representan los datos de la tabla. La función anterior es un modelo lineal que aproxima los datos de la tabla.

¿En qué año la cantidad de asalariados cubiertos por el seguro de salud será 1 500 000 aproximadamente?

Este tipo de pregunta plantea la necesidad de introducir las ecuaciones lineales y de trabajar con *expresiones algebraicas*.

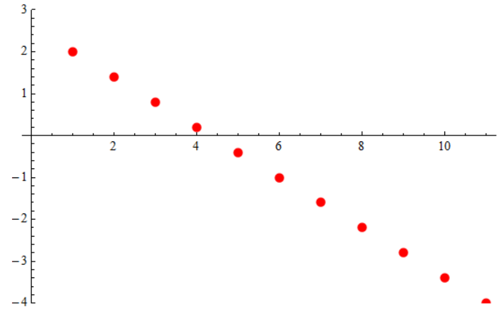
▲ En particular, una ecuación de primer grado de la forma $ax + b = c$ se relaciona con la función lineal con representación algebraica $y = ax + b$.

Resolver la ecuación $ax + b = c$ corresponde a determinar el valor de x para el cual el valor de la variable dependiente y en $y = ax + b$ sea igual a c. Esto debe quedar claro a cada estudiante.

Se recomienda desarrollar un diálogo acerca de la importancia de la seguridad social y la solidaridad.

2. Representar de forma tabular, algebraica y gráficamente una función lineal.

▲ La variable independiente x asume valores racionales pues estos son los números que se estudian en este año (no utilice números irracionales). La representación gráfica consistirá de puntos en el plano cartesiano.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>


▲Al trabajar con representaciones gráficas, en varias ocasiones se utilizan datos numéricos pequeños para una de las variables y datos muy grandes para la otra variable. En tales casos se sugiere utilizar diferentes escalas en los ejes.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Expresiones algebraicas

• Concepto de expresión algebraica

• Valor numérico

• Monomios

- Monomios Semejantes

- Operaciones con monomios

- Factor numérico y factor literal

• Polinomios

- Operaciones con polinomios

- Productos notables
</td>
<td>
3. Identificar una expresión algebraica.

4. Utilizar leyes de potencias para la simplificación de expresiones algebraicas.

5. Determinar el valor numérico de una expresión algebraica.
</td>
<td>
▲ Repase las leyes de potencias para simplificar expresiones algebraicas y de variables. Se pueden implementar ejemplos numéricos para generalizar la idea con variables.

<table>
<tr><th>Numérico</th><th>Algebraico</th></tr>
<tr><td>$\frac{5^7}{5^{11}} = \frac{1}{5^4}$</td><td>$\frac{y^7}{y^{11}} = \frac{1}{y^4}$ si $y \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$\left(3^7\right)^4 = 3^{7\cdot 4} = 3^{28}$</td><td>$\left(x^7\right)^4 = x^{7\cdot 4} = x^{28}$</td></tr>
</table>

Cada estudiante debe tener claro que una *variable* es un símbolo o letra que se utiliza para representar a un número desconocido, y que una *expresión algebraica* es una colección de variables y constantes (números) que son combinados con operaciones de suma, resta, división, multiplicación y potenciación. Ejemplos:

$$5x-1,\ 3x-5y^2, \frac{3+x}{1+2x^3}$$

▲ Se pueden aprovechar las relaciones ya estudiadas para reforzar la noción de valor numérico de una expresión algebraica.

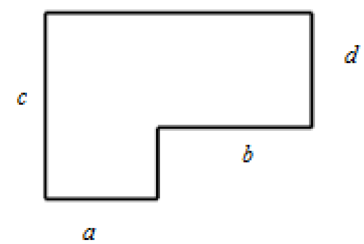
El área *A* de un rectángulo de base *b* y altura *h* es modelada por ecuación *A* = *b* · *h*. Calcule el valor de *A* cuando *b* = 2,75 ;*h* = 1,39.

La ley de Boyle establece que en un recipiente cerrado con temperatura constante la presión de un gas es inversamente proporcional a su volumen. El modelo es:

$$P = \frac{k}{V}$$

siendo *P* la presión en atmósfera y *V* el volumen en litros, *k* la constante de proporcionalidad. Calcule la presión cuando

V = *0,75* L, *k* = *30* L·atm.
</td>
</tr>
</table>

		Nota: Una atmósfera es una unidad equivalente a la presión que ejerce la atmosfera a nivel del mar. Es una unidad de presión que no pertenece al Sistema Internacional de Unidades. Este modelo tiene conexión con Química y Física. Por ejemplo, se utiliza para medir la presión en los neumáticos de los vehículos o en un cilindro que contiene gas.
	6. Reconocer monomios semejantes. 7. Efectuar operaciones con monomios: suma, resta, multiplicación y división. 8. Clasificar expresiones en monomios, binomios, trinomios y polinomios de más de tres términos. 9. Sumar, restar y multiplicar polinomios.	▲ Para reconocer los monomios semejantes es necesario identificar su coeficiente numérico y su factor literal. ▲ Muestre que las operaciones estudiadas son una generalización de las propiedades conocidas para los números naturales. Un terreno tiene la forma de la siguiente figura, con las medidas de los lados indicadas. Calcule el área total del terreno.  ▲ El ejemplo anterior se puede aprovechar para hablar de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma. El costo total de una pequeña empresa que produce lapiceros es la suma de los costos fijos y los costos variables. Suponga que cada lapicero le cuesta a la empresa ₡ 85,00, y que es vendido por ₡ 175,00. Si *x* es la cantidad de lapiceros producidos y vendidos, escriba la expresión que representa el costo total correspondiente, si los costos fijos de la empresa son de ₡ 2 500 000,00. Exprese los ingresos debidos a las ventas en términos de *x*, y calcule la ganancia de la empresa (ganancia = ingresos por ventas – costo total de producción). ▲ En la etapa de clausura se formalizan las operaciones con polinomios.
	10. Utilizar productos notables para desarrollar expresiones algebraicas.	▲ Considere únicamente los tres primeros productos notables $(a+b)^2$, $(a-b)^2$,$(a+b)(a-b)$. Es importante evitar utilizar expresiones complicadas cuando se utilizan los productos notables. Utilice a lo sumo dos distintas operaciones de suma y/o resta dentro del paréntesis. Por ejemplo: $$\left(2a+3b-c^2\right)^2$$ La expresión dentro del paréntesis puede ser agrupada de distintas formas: $$\left(2a+3b\right)-c^2;\ \left(2a-c^2\right)+3b;\ 2a+\left(3b-c^2\right).$$

		Calcule el área del cuadrado de lado $0{,}4a^3 + 5b^2$ centímetros, en términos de *a*, *b*. Es relevante usar figuras geométricas para justificar los desarrollos, conforme se propone en las indicaciones metodológicas. Esto permite hacer conexión con *Geometría* y abre espacio para mencionar la historia del Álgebra.
Ecuaciones • Ecuaciones del primer grado con una incógnita - Solución de una ecuación - Cero de una función - Raíz de una ecuación • Ecuaciones literales	11. Identificar la diferencia entre una expresión algebraica y una ecuación. 12. Comprobar si un número dado es solución de una ecuación. 13. Reducir una ecuación a otra que es equivalente a ella. 14. Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando ecuaciones de primer grado con una incógnita.	▲ Se puede comenzar este tema proponiendo problemas en los que necesariamente una ecuación sea el medio por el cual se planteen y resuelvan. El monte Everest (la montaña más alta del mundo) es 5413 metros más alto que el volcán Irazú (uno de los puntos más altos de Costa Rica). Si la suma de sus alturas es 12 283 metros, plantee una ecuación que permita calcular la altura de cada uno de ellos.  **Imagen propiedad del MEP** ▲ Para reducir una ecuación a otra forma equivalente utilice operaciones aritméticas. La habilidad implica el reconocimiento de que ambas ecuaciones tienen la misma solución. La inflación es una situación económica en la cual se incrementa los precios de los bienes y servicios. Suponga que la gasolina aumenta la misma cantidad *I* de colones cada año. Si el costo de la gasolina en cierto año es C_0 entonces el costo *C* después de *t* años es dado por la siguiente representación algebraica: $C = C_0 + It$ Solicitar a cada estudiante que plantee un problema con esta situación. La ecuación anterior es un modelo de costos. Un posible problema sería: si la gasolina aumenta 15% cada año, ¿cuántos colones costará al final de 5 años? Otra posibilidad es: si la gasolina aumenta 15% cada año, ¿cuánto tiempo será necesario para que duplique de precio?

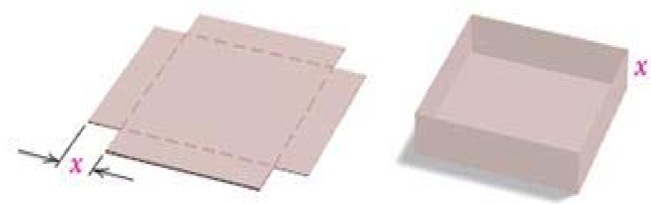
		Una pintura muy famosa es la Gioconda del artista Leonardo da Vinci. Esta pintura se encuentra en el Museo de Louvre en Paris, Francia. El cuadro tiene forma rectangular y su altura es 24 centímetros más que su ancho. El perímetro del cuadro es de 260 centímetros. Calcule la altura y el ancho del cuadro. Este tipo de problema tiene conexión con la *Geometría* (razón áurea), el arte, la historia, y confirma la utilidad de las matemáticas en diversos ámbitos de la vida.
	15. Relacionar una ecuación de primer grado con una incógnita de la forma *ax*+ *b* = *c* con la función lineal cuya representación algebraica es *y* = *ax* + *b*.	▲ Resolver la ecuación *ax* + *b* = *c* corresponde a determinar el valor de *x* para el cual el valor de la variable dependiente *y* en *y* = *ax* + *b* sea igual a *c*. Este valor de *x* se conoce como raíz de la ecuación. Cada estudiante debe tener claro que cuando *c* = 0, la raíz de la ecuación *ax* + *b* = 0 también se conoce como cero de la función representada algebraicamente por *y* = *ax* + *b*. La ecuación *ax* + *b* = *c* es equivalente a la ecuación *ax* + *b* – *c* = 0, es decir que la raíz de *ax* + *b* = *c* coincide con el cero de *y* = *ax* + *b* – *c*.
	16. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita. 17. Resolver ecuaciones algebraicas fraccionarias que se reducen a ecuaciones del primer grado con una incógnita. 18. Resolver ecuaciones literales para una de las letras.	▲ Las ecuaciones lineales a desarrollar deben ser de la forma que sigue, suponiendo que las expresiones están bien definidas: $ax = c, ax + b = c,\ ax + b = cx + d$ $ax \pm (cx \pm b) = d;\ a(bx \pm c) = d(ex \pm f)$ $ax \pm (bx \pm c) = dx \pm (ex \pm f)$ $\frac{x}{c} \pm a = \frac{b}{d};\ \frac{ax \pm b}{cx \pm d} = \frac{e}{f}$ $\frac{ax \pm b}{cx \pm d} = \frac{e}{f}$ ▲ Se recomienda implementar ejemplos donde se contemplen los casos en que la ecuación tenga solución vacía o que tenga infinitas soluciones.

<table>
<tr><td colspan="3">9° Año</td></tr>
<tr><td>Conocimientos</td><td>Habilidades específicas</td><td>Indicaciones puntuales</td></tr>
<tr>
<td>Funciones

• Función cuadrática</td>
<td>1. Identificar situaciones dadas que pueden ser expresadas algebraicamente en la forma $y = ax^2+bx+c$.

2. Representar tabular, algebraica y gráficamente una función cuadrática.</td>
<td>▲ Se sugiere proponer un problema en un contexto real que implique una relación del tipo $y = ax^2 + bx + c$.

Se cortan las esquinas de una lámina de cartón que mide 20 cm de largo por 10 cm de ancho, para hacer una caja rectangular sin tapa. ¿Cuáles son los valores posibles para la altura x de la caja para que su volumen sea igual a $24x$?



La población de asalariados cubiertos por seguro de salud de la Caja Costarricense de Seguro Social aparece indicada en la siguiente tabla:

<table>
<tr><th>Año</th><th>Número de asalariados</th></tr>
<tr><td>2000</td><td>726 048</td></tr>
<tr><td>2001</td><td>727 603</td></tr>
<tr><td>2002</td><td>754 731</td></tr>
<tr><td>2003</td><td>770 032</td></tr>
<tr><td>2004</td><td>800 123</td></tr>
<tr><td>2005</td><td>842 139</td></tr>
<tr><td>2006</td><td>896 419</td></tr>
<tr><td>2007</td><td>972 208</td></tr>
<tr><td>2008</td><td>1 054 497</td></tr>
<tr><td>2009</td><td>1 038 237</td></tr>
<tr><td>2010</td><td>1 075 528</td></tr>
</table>

Fuente: Programa Estado de la Nación 2011
http://www.estadonacion.or.cr/

La cantidad de asalariados A cubiertos por seguro de salud puede ser aproximada por el modelo matemático

$$A(t) = 1941t^2 + 20\,494t + 707\,542$$

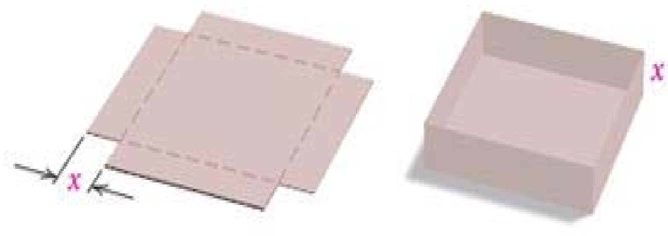
en donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente al año 2000 (este modelo aproxima mejor los valores de la tabla que el modelo lineal planteado en 8 Año). En este caso la gráfica correspondiente no pasa por los puntos que representan los datos de la tabla (es una curva que aproxima los datos).

¿En qué año la cantidad de asalariados cubiertos por el seguro de salud será 1 500 000 aproximadamente?

Este tipo de pregunta plantea la necesidad de introducir las ecuaciones de segundo grado y de trabajar con expresiones algebraicas, como por ejemplo la factorización.</td>
</tr>
</table>

		En particular, una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=d$ se relaciona con la función cuadrática con representación algebraica $y = ax^2 + bx + c$. Cada estudiante debe tener claro que resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = d$ corresponde a determinar el valor de x para el cual el valor de la variable dependiente y en $y = ax^2 + bx + c$ sea igual a d. Se recomienda generar un diálogo en la clase acerca de la importancia de la salud y de la cobertura del seguro social. ▲ La idea es introducir la función cuadrática como relación entre variables. No se debe tener un enfoque abstracto en 9º Año en cuanto a funciones, sino un enfoque más intuitivo. La representación tabular es más apropiada para realizar el paso hacia la representación gráfica. Al trabajar con representaciones tabulares, en varias ocasiones se utilizan datos numéricos pequeños para una de las variables y datos muy grandes para la otra variable. En tales casos se sugiere utilizar diferentes escalas en los ejes. Aspectos como dominio, ámbito, inyectividad, entre otros, tendrán un tratamiento más formal en 10º Año. Ejemplos de funciones cuyo criterio es $y = ax^2$: a. El área de un cuadrado de lado x cm es $A = x^2$ cm^2. b. El área de un círculo de radio r cm es $A = \pi r^2$ cm^2. c. En el instante $t = 0$ segundos se deja caer una bola desde cierta altura. La distancia recorrida por la bola después de t segundos es dada por $y = 4.9t^2$ Todos estos son *modelos* de distintas situaciones que se conectan con *Geometría* y Física.
Expresiones algebraicas • Factorización • División de polinomios • Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias • Racionalización	3. Factorizar y simplificar expresiones algebraicas. 4. Expresar $x^2 + px + q$ como $(x + h)^2 + k$. 5. Efectuar división de polinomios. 6. Efectuar operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias. 7. Racionalizar el denominador o numerador de expresiones algebraicas.	▲ Para la factorización completa utilice polinomios en una o dos variables con no más de cuatro términos. Las técnicas a utilizar son: a. Factor común y fórmula notable. b. Grupos y factor común. c. Grupos y diferencia de cuadrados. d. Trinomio cuadrado perfecto. e. Factorización por inspección del trinomio x^2+bx+c como un producto de la forma $(x+p)(x+q)$ con $p+q=b,\ pq=c$. ▲ Las fórmulas notables a utilizar son: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

		▲ Para la división de polinomios considere la división de: a. Binomio por monomio. b. Trinomio por monomio (en una o dos variables). c. Binomio por binomio. d. Trinomio por binomio (en una variable). e. Trinomio por trinomio (en una variable). ▲ Racionalizar expresiones algebraicas como: a. $\dfrac{2}{\sqrt[5]{a^3}}$ b. $\sqrt{\dfrac{2}{45y^7z^3}}$ para $y, z > 0$ c. $\dfrac{\sqrt{9+h}-3}{h}$ d. $\dfrac{9x-4y}{3\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$ e. $\dfrac{2+3\sqrt{x}}{3-5\sqrt{x}}$ ▲ La técnica de expresar el trinomio $x^2 + px + q$ como $(x + h)^2 + k$ se conoce como *completar cuadrados* y es muy importante para deducir la fórmula general con tal de encontrar raíces de una ecuación de segundo grado, y también para graficar. En ella se utilizan las fórmulas notables: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ Algunos ejemplos: a. $x^2 + 6x + 10 = \left(x^2 + 6x\right) + 10$ $= \left(x^2 + 6x + 9\right) - 9 + 10$ $= (x+3)^2 + 1$ b. $y^2 - 5y + 1 = \left(y^2 - 2\cdot\dfrac{5}{2}y\right) + 1$ $= \left(y - \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4} + 1$ $= \left(y - \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{21}{4}$ El procedimiento anterior requiere para su asimilación una actitud perseverante.

Ecuaciones • Ecuaciones de segundo grado con una incógnita - Raíces - Discriminante	8. Plantear y resolver problemas utilizando ecuaciones de segundo grado con una incógnita 9. Resolver ecuaciones que se reducen a ecuaciones de segundo grado con una incógnita.	▲ Se puede formular un problema cuya solución implique una ecuación de segundo grado. Se cortan las esquinas de una lámina de cartón que mide 20 cm de largo por 10 cm de ancho, para hacer una caja rectangular sin tapa. ¿Cuáles son los valores posibles para la altura *x* de la caja para que su volumen sea igual a $24x$?  En este caso tenemos $V = x(10 - 2x)(20 - 2x) = 24x.$ Al multiplicar se obtiene la ecuación $4x^2 - 60x + 200 = 24$, que simplificada queda $x^2 - 15x + 44 = 0.$ ▲ Para resolver una ecuación de segundo grado, se debe explicar con anterioridad el principio de producto nulo, para implementarlo en el algoritmo de resolución de este tipo de ecuación: $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$ La utilización de este principio le da relevancia a la factorización. Es importante aclarar que si se factoriza el trinomio por inspección de la siguiente forma: $x^2 + bx + c = (x+p)(x+q)$ donde $p+q=b,\ pq=c,$ entonces las raíces de la ecuación $x^2+bx+c=0$ son las soluciones de las ecuaciones de primer grado $x+p=0,\ x+q=0$, es decir, $x=-p,\ x=-q.$ Para ecuaciones de segundo grado, son útiles los siguientes principios: a. Si $x^2 = k$, $k \geq 0$, entonces $x = \pm\sqrt{k}$. b. Si *c* es real entonces $\sqrt{c^2} = \lvert c \rvert$. ▲ Se puede deducir la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita. ▲ Es conveniente relacionar el signo del discriminante con el número de raíces de la ecuación de segundo grado con una incógnita $ax^2 + bx + c = 0$.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Funciones

• Función cuadrática</td>
<td>10. Trazar la gráfica de una función cuadrática cuyo criterio es $y = ax^2 + bx + c$.</td>
<td>▲ La gráfica de la función con criterio $y = a(x - h)^2$ se obtiene de $y = ax^2$ al trasladar horizontalmente el origen de coordenadas al punto cuya abscisa es $x = h$. De esta forma el vértice de la parábola se ubica en $x = h$, $y = 0$.

La gráfica de $y = a(x - h)^2 + c$ se obtiene de $y = a(x - h)^2$ mediante translación vertical de c unidades hacia arriba (si c es positivo) o hacia abajo (si c es negativo). En este caso el vértice de la parábola se encuentra en $x = h$, $y = c$.

Aquí se observa la importancia de completar cuadrado, pues mediante transformaciones (translaciones y homotecias) se puede graficar $y = ax^2 + bx + c$ a partir de la gráfica de $y = x^2$.

Además, este tipo de estrategia conecta Relaciones y Álgebra con Geometría.</td>
</tr>
<tr>
<td>11. Analizar la influencia de los parámetros a, b, c en la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$, utilizando software.</td>
<td>Las calculadoras graficadoras y software con capacidad para graficar son muy importantes para visualizar las gráficas de funciones.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>12. Plantear y resolver problemas utilizando ecuaciones de segundo grado con una incógnita</td>
<td>Observe y analice los datos de la siguiente tabla:

Población de Costa Rica (en millones)
en el periodo 1960-2009

<table>
<tr><th>Año</th><th>Población (millones)</th></tr>
<tr><td>1960</td><td>1,334</td></tr>
<tr><td>1965</td><td>1,583</td></tr>
<tr><td>1970</td><td>1,822</td></tr>
<tr><td>1975</td><td>2,052</td></tr>
<tr><td>1980</td><td>2.349</td></tr>
<tr><td>1985</td><td>2,699</td></tr>
<tr><td>1990</td><td>3,078</td></tr>
<tr><td>1995</td><td>3,479</td></tr>
<tr><td>2000</td><td>3,931</td></tr>
<tr><td>2005</td><td>4,396</td></tr>
<tr><td>2009</td><td>4,579</td></tr>
</table>
Fuente: http://datos.bancomundial.org/indice/ios-indicadores-del-des

Un modelo cuadrático para la población aproximada de Costa Rica es $P(t) = 11\,418t^2 + 225\,697t + 1\,317\,503$ donde $P(t)$ representa el tamaño de la población en el instante t, t el tiempo en años, con $t = 0$ representando el año de 1960. Que cada estudiante proponga y resuelva un problema con la situación dada.

Se recomienda hablar acerca del aumento poblacional y sus consecuencias para el ser humano y el ambiente. Esto favorece la concientización acerca de una Cultura ambiental para el desarrollo sostenible y la Educación para la salud.

Un fabricante de componentes de computadoras produce un disco duro externo de 2.5 pulgadas. La capacidad de los discos duros varía de 20 GB a 200 GB. Un modelo de costo de producción de una unidad de disco duro puede ser la función con criterio dado por</td>
</tr>
</table>

		$$C(s)=\frac{1}{180}s^2-\frac{8}{9}s+\frac{680}{9}$$ donde s es la capacidad de la unidad de disco duro, en gigabytes. Que cada estudiante plantee un problema con la situación.  **Imagen cortesía de FreeDigitalPhotos.net** Ejemplo: encuentre la capacidad del disco duro que tiene el menor costo de producción. ¿Cuál es el costo mínimo de producción? ▲ Es importante que cada estudiante utilice distintos métodos para resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita: factorización por inspección; completando cuadrado; por fórmula; gráficamente y utilizando calculadora. La solución de una ecuación de segundo grado que tiene muchas aplicaciones en distintas áreas y disciplinas es el número de oro, cuya historia podrá estimular al estudiantado. En el libro VI de los *Elementos* de Euclides aparece por primera vez un estudio formal sobre lo que hoy se conoce como número áureo. Este número es la solución positiva de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$. Esta raíz es el número irracional $$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ que aparece en contextos bastante variados: obras arquitectónicas (como el Partenón), en la naturaleza (caracoles), en las pinturas (obras de Miguel Ángel, Durero y Leonardo Da Vinci), en el pentagrama (símbolo místico utilizado por los pitagóricos) y hasta en la música.

Indicaciones metodológicas

Generales para el ciclo

1. Es adecuado dar tiempo a cada estudiante para que analice sucesiones y patrones. El análisis contempla identificar, conjeturar, utilizar ensayo y error, comparar soluciones y argumentar las estrategias utilizadas.

2. Se espera que cada estudiante utilice símbolos matemáticos en sus argumentaciones, por ejemplo, los símbolos +, -, ●, ÷, =, <, >, ≤, ≥ al analizar sucesiones o patrones numéricos.

3. Debe indicarse al estudiantado el cambio de simbología para la multiplicación. Ahora se utilizará el punto en lugar del símbolo ×.

4. Para lograr habilidades relacionadas con sucesiones y patrones, es recomendable utilizar recursos variados tales como: recortes de revistas, periódicos, papel cuadriculado, cartulina, geoplano, soma, papel de construcción y objetos que se encuentran en el entorno de las y los estudiantes, que contengan patrones o bien para construir patrones.

5. Cuando se utilizan recursos como el geoplano o el soma, hay que dar tiempo para que cada estudiante se familiarice con ellos, antes de proceder a realizar las tareas específicas.

6. Es recomendable que los materiales concretos utilizados sean reciclables para fomentar una cultura ambiental para el desarrollo sostenible, valor transversal en el Sistema Educativo Costarricense.

7. El foco central de este ciclo consiste en un acercamiento más intuitivo a las funciones lineales y cuadráticas en sus distintas representaciones, utilizando los conocimientos de relaciones desarrollados en los ciclos anteriores.

8. Es importante fomentar un ambiente de respeto por las ideas presentadas por cada estudiante en sus razonamientos y argumentaciones y así promover la *Vivencia de los derechos humanos para la democracia y la paz*.

Sétimo año

1. Para las sucesiones y patrones, se esperan varias acciones en el trabajo estudiantil: la conjetura, el ensayo y error, la comparación de las soluciones obtenidas y comunicación las estrategias utilizadas mediante símbolos matemáticos y letras para representar las variables correspondientes.

2. Para las sucesiones, es relevante que cada estudiante haga cambios entre representaciones, principalmente la algebraica, utilizando letras para representar el término enésimo de la sucesión. Por ejemplo, se puede dar una representación verbal de la proporción y pedir a cada estudiante que complete una tabla. Si la energía cinética E de un objeto que se mueve es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad v, y si E = 24,75 J cuando v = 30 m/s, complete la siguiente tabla:

v	E
40	
	99
115	

3. Para dotar de contexto real a las relaciones de proporcionalidad, es recomendable utilizar recortes de revistas, periódicos y datos estadísticos obtenidos, por ejemplo, del Instituto Nacional de Estadística y Censos (INEC) o del Estado de la Nación.

4. En las representaciones de las proporciones, es necesario combinar proporciones directas e inversas. Por ejemplo, si la presión *P* de un gas ideal varía directamente con la temperatura *T* e inversamente con el volumen *V* del recipiente que lo ocupa, y si *P* = 30 atm cuando la temperatura es *T* = 28 ^{o}C y el volumen es *V* = 1,5 litros, completar la siguiente tabla.

T (^{o}C)	*V* (l)	*P* (atm)
15	0,75	
20		45
	0,4	58

Octavo año

1. La idea es introducir la función lineal como una relación entre variables. En particular, la función lineal con criterio de la forma *y* = *ax*, con *a* constante, es un caso particular de proporción directa vista en 6° Año. En 10° Año se dará un tratamiento más formal a las funciones.

   En algunos países como España, Francia y Portugal, la función lineal *y* = *ax*+ *b* con se b ≠ 0 conoce como función afín. El término lineal se reserva al caso de funciones con criterio de la forma *y* = *ax* en concordancia con la terminología utilizada en matemática para transformaciones lineales. Toda transformación lineal lleva el cero del dominio en el cero del ámbito, es decir, la imagen del cero es cero. En este programa utilizaremos el término lineal para ambos casos. De esa manera, se seguirá la terminología usada tradicionalmente en Costa Rica.

2. La representación tabular es la más apropiada para realizar el paso hacia la representación gráfica. A partir de una tabla con los pares ordenados que satisfacen la ecuación lineal se procede a la representación gráfica como puntos en el plano de coordenadas rectangulares.

3. Dictar expresiones matemáticas en forma verbal para que cada estudiante las escriba utilizando constantes, variables y los símbolos de suma, resta, división, multiplicación, igualdad, mayor que, menor que, mayor o igual que, menor o igual que.

4. Hay que aclarar el significado de los términos expresión algebraica, ecuación, identidad.
   a. Una ecuación es un enunciado matemático que afirma que dos expresiones matemáticas son iguales. Por ejemplo:

   $$2x+3=5,\ x^2+16=-1,\ \frac{2x-1}{3x+5}=2,\ (x+2)^2=x^2+4x+4,\ x=x$$

   b. Una identidad es una ecuación que es verdadera para todos los valores de las variables reales contenidas en ella. Ejemplos:

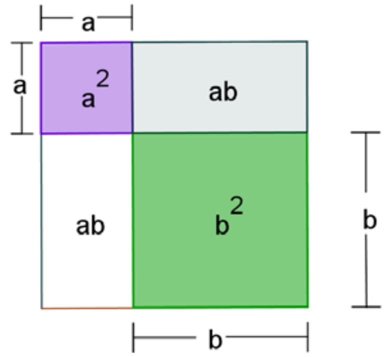
   $$3(x+2)=3x+6,\ (2x-3)^3=4x^2-12x+9$$

   c. Una expresión algebraica es una colección de variables y constantes (números) que son combinadas con operaciones de suma, resta, división, multiplicación y potenciación. Ejemplos:

   $$3x^5y+2ab^2-\frac{x^{1/3}b}{a^{2/5}y^2}$$

   También es fundamental que cada estudiante comprenda que una ecuación puede tener varias soluciones, una única solución o bien ninguna.

5. Para la habilidad 10, es pertinente dar una representación geométrica de las fórmulas notables consideradas, suponiendo que los números utilizados son todos positivos. Por ejemplo:



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Esta estrategia permite la conexión con *Geometría*. Se puede sugerir hacer lo mismo para las otras dos fórmulas notables: $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$, $(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$.

6. Recordar que en una ecuación, se pueden intercambiar las expresiones que aparecen del lado izquierdo y del derecho de la misma. Esto se debe a que la igualdad es una relación de equivalencia y, en particular, es simétrica: $a = b$ si y sólo si $b = a$. Por lo tanto,

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+ b)^2,\ a^2 – 2ab + b^2 = (a – b)^2,\ a^2 – b^2 = (a + b)(a – b)$$

Efectuar esto en esta dirección se conoce como factorización.

7. El tratamiento de errores algebraicos es fundamental en esta etapa. Un error muy frecuente es hacer $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Es importante asignar suficiente tiempo para potenciar la conjetura y el análisis de las expresiones con distintos valores numéricos, esto ayudará a la toma de decisiones y asimilación de las propiedades.

Noveno año

1. La idea es introducir la función cuadrática como una relación entre variables. En particular, la función cuadrática con criterio de la forma $y = ax^2$, con a constante, es un caso particular de proporción directa vista en 6° Año; y es directamente proporcional a x^2, siendo a la constante de proporcionalidad. En 10° Año se dará un tratamiento más formal a las funciones.

2. A este nivel, sigue siendo recomendable el tratamiento de los datos mediante representaciones tabulares para luego pasar a representaciones gráficas. A partir de una tabla con los pares ordenados que satisfacen la ecuación lineal se procede a la representación gráfica como puntos en el plano de coordenadas rectangulares, y se une los puntos con una curva que es la representación gráfica de la función cuadrática.

3. Para contextualizar los problemas planteados relacionados con ecuaciones de segundo grado o con funciones cuadráticas, es recomendable utilizar recortes de revistas, periódicos y datos estadísticos obtenidos, por ejemplo, del Instituto Nacional de Estadística y Censos (INEC), del Estado de la Nación o de sitios web, como el ejemplo que aparece en las indicaciones puntuales.

4. Es bastante útil partir de la representación gráfica de la función $f(x) = x^2$ para construir la gráfica de la cuadrática general. Para la función prototipo $f(x) = x^2$ que servirá de modelo para representar la función cuadrática general, que cada estudiante tenga claro lo siguiente:

Si cambiamos x por $-x$ se obtiene el mismo valor de $y = f(x)$ pues $f(-x) = (-x)^2 = x^2$. Esto implica que la gráfica de la función prototipo es simétrica respecto al eje vertical *"y"* o sea $x = 0$, y por lo tanto basta graficar la parte correspondiente a $x \geq 0$. La otra parte sale por simetría respecto al eje vertical y.

Como $f(x) = x^2 \geq 0$ para todo x real y $f(0) = 0$, entonces el valor mínimo de la función ocurre cuando $x = 0$. La gráfica es una parábola que se abre hacia arriba y el origen es el vértice de la parábola. La función $f_a(x) = ax^2$ es una homotecia de la función prototipo. Si $a > 0$ la parábola se abre hacia arriba, si $a < 0$ la parábola se abre hacia abajo. La función $g(x) = ax^2 + c$ es una translación vertical de $f_a(x) = ax^2$ hacia arriba de c unidades si $c > 0$ y hacia abajo si $c < 0$.

La función $p(x) = a(x - h)^2$ es una translación horizontal de $f_a(x) = ax^2$, h unidades hacia la derecha si $h > 0$, o hacia la izquierda si $h < 0$. La recta vertical $x = h$ es el eje de simetría de la parábola, y su vértice se encuentra en el punto $(h,0)$.

5. Se sugiere deducir la fórmula general para las soluciones de una ecuación cuadrática, mediante la técnica de completar cuadrados.

$$0 = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Si $a \neq 0$, lo anterior implica que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

De lo anterior se deduce que

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Es importante que cada estudiante concluya que el valor $b^2 - 4ac$, conocido como discriminante Δ de la expresión cuadrática, determina si la ecuación tiene dos raíces, una raíz o ninguna raíz real.

6. Para la función con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$, completamos cuadrados para obtener:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

que representa una parábola con vértice en el punto:

$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = \left(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

- La parábola es cóncava hacia arriba si a es positivo y cóncava hacia abajo si a es negativo.
- La recta vertical $x = \frac{-b}{2a}$ es el eje de simetría de la parábola.
- Si la parábola interseca el eje de las abscisas entonces su vértice se encuentra en el punto medio de las intersecciones.

7. Se pueden establecer analogías aritméticas para deducir los procedimientos correspondientes y resolver operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias. Por ejemplo:

   Aritméticamente: $\frac{15}{4}\cdot\frac{6}{75}=\frac{2\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2^2\cdot 3.5^2}=\frac{3}{2\cdot 5}=\frac{3}{10}$

   Algebraicamente: $\frac{x^2+x}{x^2-10x+25}\cdot\frac{x^2-25}{x^3+2x^2+x}=\frac{x(x+1)(x+5)(x-5)}{x(x-5)^2(x+1)^2}=\frac{x+5}{(x-5)(x+1)}$

8. Para las operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias (suma, resta, multiplicación, división) utilice solamente dos expresiones cuyo numerador y denominador sean monomios, binomios o polinomios de no más de cuatro términos (con una o dos variables). Por ejemplo:
   - $\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x+1}$
   - $\frac{x+1}{x^2-4}+\frac{2}{x-2}$
   - $\frac{1}{x-5}-\frac{4}{(x-5)^2}$
   - $\frac{x^2+x}{x^2-10x+25}\div\frac{x^3+2x^2+x}{x^2-25}$

9. Para las ecuaciones de segundo grado, cada estudiante debe tener claro que resolver la ecuación $ax^2+bx+c=d$ corresponde a determinar el valor de *x* para el cual el valor de la variable dependiente *y* en $y=ax^2+bx+c$ sea igual a *d*. Este valor de *x* se conoce como una solución o raíz de la ecuación $ax^2+bx+c=d$. Cuando $d=0$, la raíz de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ también se conoce como cero de la función representada algebraicamente por $y=ax^2+bx+c$ y geométricamente representa a la abscisa del punto en donde la curva correspondiente corta el eje *x*. La ecuación $ax^2+bx+c=d$ es equivalente a la ecuación $ax^2+bx+c-d=0$, es decir, la raíz de $ax^2+bx+c=d$ coincide con los ceros de $y=ax^2+bx+c-d$.

10. Ejemplos de ecuaciones que se reducen a ecuaciones del segundo grado (habilidad 9):

    $az^4 + bz^2 + c = 0$, haciendo $x = z^2$

    $as+b\sqrt{s}+c=0$, haciendo $x=\sqrt{s}$

11. Para la habilidad 11 se recomienda el uso de software graficador. Por ejemplo, a través de la variación del parámetro *b* en la representación algebraica de la función cuadrática $f(x) =ax^2 + bx + c$ se puede observar y conjeturar acerca del movimiento del vértice de la parábola.

Indicaciones de evaluación

En el *trabajo cotidiano* es importante evaluar el uso apropiado del vocabulario y la simbología matemática, el grado de participación de cada estudiante en las actividades propuestas, así como la forma de comunicar y exponer sus argumentos.

Los *trabajos extraclase* deberán estar orientados al análisis de relaciones de proporcionalidad, la manipulación correcta de expresiones algebraicas, los diversos cambios de representaciones para las funciones lineales o cuadráticas y la resolución de ecuaciones derivadas de contextos reales.

Un posible *trabajo extraclase* para el 9° Año consiste en que cada estudiante investigue acerca de situaciones que pueden ser modeladas por funciones lineales o cuadráticas. Además se les solicitaría utilizar distintas representaciones para los modelos encontrados y proponer un problema para uno de éstos.

Para la evaluación mediante tareas cortas (*trabajo extraclase*) y *pruebas* se deben tener presentes las siguientes indicaciones.

- ✓ Para evaluar las habilidades relacionadas con sucesiones, proponga una sucesión en forma tabular y solicite la expresión algebraica que representa la ley de formación para la sucesión dada.

- ✓ Para la habilidad de analizar relaciones de proporcionalidad, dicte una situación que tiene que ver con proporcionalidad directa, inversa o combinada. Cada estudiante escribe la representación algebraica correspondiente y plantea un problema para la situación planteada.

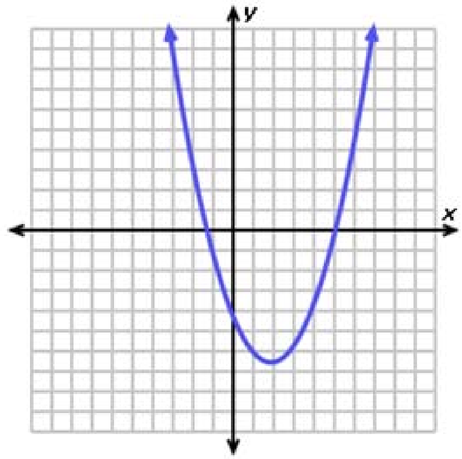
- ✓ Para las expresiones algebraicas es importante evaluar posibles errores algebraicos que son comunes, como por ejemplo, $-a^n$ es positivo si *n* es par y *a* es no nulo, $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$; $(a+b)^2=a^2+b^2$, $\sqrt{a^2}=a$, entre otros. Estos aspectos deben ser evaluados de forma continua y sistemática en el *trabajo cotidiano*.

- ✓ La evaluación de las funciones lineales debe contemplar cambios de representaciones. Por ejemplo, dado un problema en forma verbal: “la edad de Ana es ocho años menos que el triple de la edad de José”, escriba la representación algebraica correspondiente si *y* es la edad de Ana y *x* es la edad de José. Para la situación, plantee un problema cuya solución tenga sentido. Otra posibilidad es plantear el problema en forma verbal y que cada estudiante complete una tabla: “existen ocho pájaros en cada árbol y once pájaros en el piso”. Si *x* representa el número de árboles y *p* el número de pájaros, complete la tabla:

x	*p*
15	
17	
	51

- ✓ Para las funciones cuadráticas también es importante evaluar cambios de representaciones. Por ejemplo: el movimiento de un objeto es descrito por la ecuación $y=a(x-h)^2+b$, *x* representa el tiempo, *y* representa la distancia recorrida por el objeto. Grafique la trayectoria del objeto en el siguiente cuadriculado si el vértice de la parábola es (3,2) y (7,6) pertenece a la curva.

  El proceso inverso sería dar una gráfica en el plano cuadriculado y solicitar el criterio de la parábola.



- ✓ Un tipo de evaluación de representaciones funcionales consiste en hacer pareo entre un conjunto dado de gráficas contra un conjunto dado de tablas o bien de criterios algebraicos.

- ✓ Para las ecuaciones, incluya aquellas que no tienen solución, las que tienen solución única y las que tienen infinitas soluciones, como por ejemplo:

$$x^2+9=0, x^2-6x+9=0,\ x^2-2=-\left(2-x^2\right)$$

Tercer ciclo, Estadística y Probabilidad

Introducción

En la Primaria se cultivó la adquisición de importantes destrezas relacionadas con el análisis de datos y habilidades para recolectar, resumir y presentar la información. También, se introdujo el análisis intuitivo de situaciones aleatorias y la determinación de probabilidades a un nivel básico. Estos elementos constituyen un insumo fundamental para articular un trabajo más especializado durante este ciclo.

Es conveniente tener presente que las y los estudiantes provienen de contextos educativos diversos, por lo tanto es necesario establecer una base común en cuanto a conceptos y habilidades básicas. Por esta razón, este ciclo comienza con una estandarización o nivelación, el establecimiento de un lenguaje común sobre los conceptos básicos y la formalización de algunas definiciones.

Así será viable fortalecer integralmente las habilidades previas sobre recolección, resumen, presentación y análisis de información. Al mismo tiempo se profundizará en el estudio de las situaciones aleatorias y el cálculo de probabilidades, con nuevos conceptos y el fortalecimiento de los adquiridos.

No se pretende formar especialistas en el análisis estocástico (*Estadística y Probabilidad*), sino propiciar una cultura en la comprensión, la valoración y el uso adecuado de la información.

Propósito de enseñanza

El propósito de la enseñanza en este ciclo es reforzar en las y los estudiantes las habilidades adquiridas en Primaria para identificar e interpretar la información que se genera en el entorno y así tener evidencia que permita resolver un problema y justificar esa respuesta ante la clase.

Por otro lado, se promueve utilizar los principios básicos de probabilidad para controlar las intuiciones sobre el azar y resolver problemas asociados con éstos.

Habilidades generales

Las habilidades generales que deberá desarrollar cada estudiante en *Estadística y Probabilidad* al finalizar el Tercer ciclo son:

- Interpretar información que ha sido generada por medio de análisis estadísticos o probabilísticos provenientes de diversas fuentes.
- Utilizar técnicas simples para la recolección de datos que sean insumo para un análisis de información relacionado con problemas concretos.
- Utilizar diferentes estrategias para resumir grupos de datos en forma tabular, gráfica o con medidas estadísticas.
- Responder interrogantes que requieran de recolección, ordenamiento, presentación y análisis de datos.
- Identificar eventos provenientes de situaciones aleatorias particulares y determinar probabilidades asociadas a ellos.
- Utilizar la definición laplaciana de probabilidad para deducir las propiedades de las probabilidades vinculadas con el tipo de evento: seguro, probable e imposible.
- Utilizar la definición frecuencial o empírica de probabilidad para resolver problemas vinculados con fenómenos aleatorios.
- Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones en condición de incertidumbre.
- Valorar la importancia de la historia en el desarrollo de la Estadística y la Probabilidad.

- Utilizar técnicas de análisis estadístico o probabilístico para la resolución de problemas del contexto.

Por medio de la adquisición de las anteriores habilidades se pretende favorecer una cultura en la comprensión de la información que rodea a cada estudiante, esto le permitirá apreciar la utilidad de la disciplina y el disfrute de plantear y resolver problemas en estas áreas. También, se ofrece la oportunidad de identificar y usar modelos, simular situaciones de la vida cotidiana por medio de representaciones gráficas o tabulares o la determinación de medidas de estadísticas para llevar a cabo una adecuada interpretación del fenómeno en estudio.

Además, el trabajo en equipo permitirá desarrollar destrezas colaborativas y la perseverancia.

Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

<table>
<tr><td colspan="3">7° Año</td></tr>
<tr><td colspan="3">Estadística</td></tr>
<tr><td>Conocimientos</td><td>Habilidades específicas</td><td>Indicaciones puntuales</td></tr>
<tr><td>La Estadística</td><td>1. Reconocer la Estadística como una herramienta imprescindible para el análisis de datos dentro de diferentes contextos y áreas científicas.

2. Analizar el desarrollo histórico de la disciplina.

3. Analizar información estadística que ha sido resumida y presentada en cuadros, gráficas u otras representaciones vinculadas con diversas áreas.</td><td>▲ Para favorecer estas habilidades, se debe motivar sobre la importancia de la Estadística en el desarrollo científico de otras disciplinas. Para ello se requiere proporcionar ejemplos de usos de la Estadística en áreas como: Biología, Medicina, Economía, Educación, entre otras. Para ello se puede recurrir a ejemplos de representaciones tabulares, gráficas o de otra naturaleza que evidencie estas aplicaciones. Seguidamente se muestran algunos ejemplos.

CUADRO 2.1
CENTROAMÉRICA

Extensión territorial, población y densidad de población. 2010
<table>
<tr><th>País</th><th>Extensión en km²</th><th>Población</th><th>Densidad de población</th><th>Densidad ponderada a/</th><th>Razón de densidad b/</th></tr>
<tr><td>Belice</td><td>22.970</td><td>313.000</td><td>14</td><td>14</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Costa Rica</td><td>51.100</td><td>4.563.539</td><td>89</td><td>173</td><td>1</td></tr>
<tr><td>El Salvador</td><td>21.040</td><td>6.183.002</td><td>294</td><td>969</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Guatemala</td><td>108.900</td><td>14.361.666</td><td>132</td><td>387</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Honduras</td><td>112.100</td><td>7.621.106</td><td>68</td><td>120</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Nicaragua</td><td>130.000</td><td>5.822.395</td><td>45</td><td>159</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Panamá</td><td>75.520</td><td>3.508.382</td><td>46</td><td>75</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Centroamérica</td><td>521.630</td><td>42.373.090</td><td>81</td><td></td><td></td></tr>
</table>
a/ Densidad ponderada de la población: Σ(Pob. (i)*Dens.(i))/ Σ(Pob.(i)), donde I se refiere a cada una de las divisiones administrativas.

b/ Densidad de la división administrativa mayor sobre la densidad de las dos siguientes.

Fuente: Estimaciones y proyecciones de población de cada país.

Imagen tomada de:
http://www.estadonacion.or.cr/images/stories/informes/region_004/cap02_demografico.pdf</td></tr>
</table>

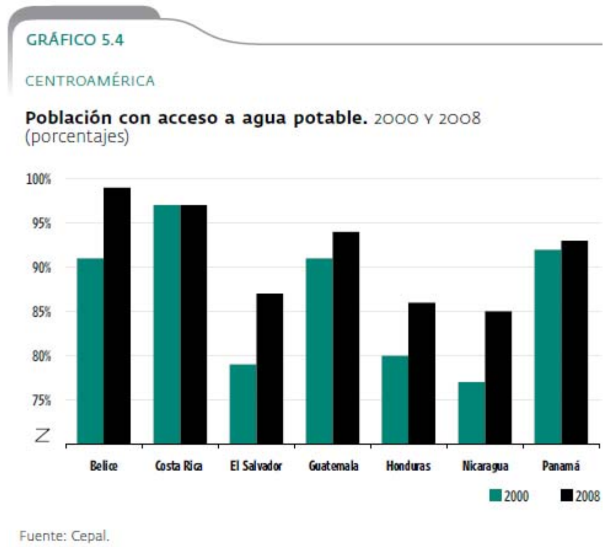


Imagen tomada de:
http://www.estadonacion.or.cr/images/stories/informes/region_004/cap05_ambiental.pdf

▲ Para complementar lo anterior se puede sugerir una situación como la siguiente:

En el documento sobre las personas con discapacidad en América Latina se incluye el siguiente párrafo:

> La perspectiva de derechos humanos permite considerar a las personas con discapacidad como individuos que necesitan diferentes servicios para gozar de una situación que los habilite para desempeñarse como ciudadanos activos y participantes. Esto significa crecer dentro de una familia, asistir a la escuela con compañeros, trabajar y participar en la toma de decisiones sobre aquellas políticas y programas que más los afectan.

Además se incluye el siguiente cuadro (sin título):

País	Población	Prevalencia de la discapacidad	Estimación de personas con discapacidad
Costa Rica	4,399,000	5.4	237,546
El Salvador	6,999,000	1.5	104,985
Guatemala	12,911,000	3.7	477,707
Honduras	7,362,000	2.7	196,774
Nicaragua	5,600,000	10.3	576,800
Panamá	3,288,000	11.3	37,154
Total	40,834,000		1,623,966

Fuente: Situación de salud en las Américas. Indicadores básicos 2006 OPS-OMS y División de Población de Naciones Unidas.

Tomado de:
http://www.minsa.gob.ni/bns/discapacidad/docs/epidemiiol/La%20discapacidad%20en%20Centro%20America.pdf

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Comente la información del cuadro de acuerdo con lo que establece el tema Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz, que se incluye en los programas de estudio. Se necesita evidenciar que cerca del 5,4% de la población tiene algún tipo de discapacidad, por lo que se requiere que el país ofrezca las condiciones adecuadas para que estas personas puedan incorporarse a la sociedad de manera efectiva.

Las actividades anteriores posibilitan enfocar la acción docente hacia la importancia que tiene la Estadística como herramienta para el análisis de información de diferentes temáticas, lo que corresponde al proceso Conectar. Además estas representaciones gráficas también se asocian con Geometría y Relaciones y Álgebra.

Para complementar este aspecto se podría hacer un pequeño recuento histórico sobre algunos conceptos, por ejemplo, podría analizarse de dónde proviene el término estadística:

La palabra Estadística procede del vocablo “Estado”, pues era función principal de los Gobiernos de los Estados establecer registros de población, nacimientos, defunciones, impuestos, cosechas... La necesidad de poseer datos cifrados sobre la población y sus condiciones materiales de existencia han debido hacerse sentir desde que se establecieron sociedades humanas organizadas.

Fuente:
http://www.estadisticaparatodos.es/historia/histo_esta.html</td>
</tr>
<tr>
<td>Conocimientos básicos
Unidad estadística
Características
Datos u observaciones
Población
Muestra
Variabilidad de los datos
Variables cuantitativas y cualitativas</td>
<td>4. Identificar los conceptos: unidad estadística, características o variables, observaciones o datos, población y muestra, para problemas estadísticos vinculados con diferentes contextos.

5. Identificar el tipo de dato cuantitativo o cualitativo correspondiente a una característica o variable.

6. Identificar la importancia de la variabilidad para el análisis de datos.</td>
<td>▲ En esta sección se busca definir los conceptos fundamentales dentro de los análisis estadísticos. Se recomienda plantear algunos problemas que permitan identificar esos conceptos. Por ejemplo:

Se desea realizar dos investigaciones que pretenden:
a. Determinar el estado de salud de las y los estudiantes de los colegios de la comunidad, por lo que se debe identificar: sexo, edad, estatura, peso, presión arterial, tipo de sangre, condición de fumador, entre otros.
b. Caracterizar las viviendas de la comunidad de acuerdo con: área de construcción (m^2), área del lote (m^2), tipo de material de construcción (block, madera, ladrillo, etc.), número de dormitorios, número de baños, color de pintura, entre otros.

De acuerdo con esta caracterización, responda las siguientes interrogantes:

a. ¿Cuál es el sujeto u objeto de estudio (unidad de estudio) en cada caso?
b. ¿Qué características de cada uno de esos sujetos u objetos se van a analizar?
c. ¿Cuáles de esas características proporcionan datos numéricos?</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
<ol type="a" start="4">
¿Cuáles de esas características proporcionan datos no numéricos?
¿Cuál es la importancia de los datos para atender cada problema?
¿Quiénes constituyen la totalidad de unidades de estudio para cada investigación?
¿Es factible conseguir la información de todas estas unidades en poco tiempo?
¿Qué otra alternativa podría utilizarse para no consultar a todas las unidades de estudio?

Se espera poder dar respuesta a estas interrogantes. Para complementar este trabajo, se debe realizar una actividad plenaria para sistematizar cada uno de los conceptos y definir los términos en cada caso. Además, plantear problemas de reproducción para ratificar el aprendizaje alcanzado.
▲ Para valorar la importancia de la variabilidad dentro de los análisis estadísticos, se recomienda proponer un problema que ilustre el efecto que se produce cuando esté presente o ausente la variabilidad en un grupo de datos. Por ejemplo:
☺ Analice cada una de las siguientes situaciones y resuelva el problema que se genera en cada caso:
<ol type="a">
Caracterizar a las y los estudiantes del grupo de acuerdo con la variable: número de miembros del hogar.
Caracterizar a las y los estudiantes del grupo de acuerdo con la variable: color del pantalón o enagua que utiliza regularmente para asistir al colegio.

▲ Se deben identificar las diferencias en cuanto a la variabilidad de los datos en cada caso, de modo que se pueda identificar que el grupo de datos más variable genera una mayor complejidad para resumir y analizar los datos obtenidos.
▲ Mediante este tipo de actividades se desea identificar las creencias de cada estudiante en relación con el efecto de la variabilidad de los datos para los estudios estadísticos.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Recolección de información

La experimentación
Interrogación

Frecuencia

Absoluta
porcentual

</td>
<td>
<ol start="7">
Recolectar datos del entorno por medio de experimentación o interrogación.
Utilizar representaciones tabulares para resumir un conjunto de datos.
Determinar medidas estadísticas de resumen: moda, media aritmética, máximo, mínimo y recorrido, para caracterizar un grupo de datos.

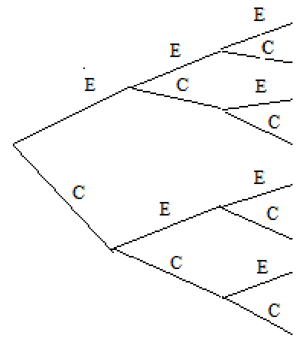
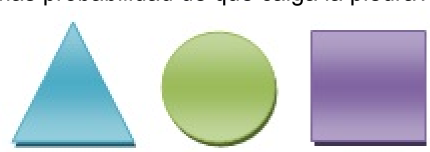
</td>
<td>
▲ Los siguientes problemas pueden ser abordados para potenciar estas habilidades:
☺ ¿Cuáles son los meses en los que se presenta el mayor y menor número de cumpleaños en el grupo?
☺ Suponga que la información siguiente corresponde al número de miembros de los hogares de una muestra de 50 familias.
<table>
<tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>9</td><td>7</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>5</td><td>7</td></tr>
<tr><td>7</td><td>5</td><td>5</td><td>2</td><td>10</td><td>5</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>8</td><td>8</td><td>4</td><td>2</td><td>8</td><td>4</td><td>8</td><td>6</td><td>6</td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td>7</td><td>3</td><td>6</td><td>7</td><td>6</td><td>7</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>9</td><td>6</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Representación • Tabular: cuadros de frecuencia absoluta y porcentual **Medidas de posición** • Moda • Media aritmética • Mínimo • Máximo		Realice un análisis comparativo entre la información anterior con respecto a los hogares de las y los estudiantes del grupo. Observe que con este tipo de actividades se promueven los procesos *Representar, Comunicar* y *Razonar y argumentar.*

8° Año		
Estadística		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Recolección de información • La experimentación • Interrogación **Frecuencia** • Absoluta • Porcentual **Representación** • Tabular: cuadros de frecuencia absoluta y porcentual • Gráfica: barras, circulares, lineales y diagramas de puntos **Medidas de posición** • Moda	1. Recolectar datos del entorno por medio de experimentación o interrogación. 2. Utilizar representaciones tabulares o gráficas con frecuencias absolutas o porcentuales, simples o comparativas. 3. Utilizar un software especializado o una hoja de cálculo para favorecer la construcción de cuadros y gráficos. 4. Caracterizar un grupo de datos utilizando medidas estadísticas de resumen: moda, media aritmética, máximo, mínimo y recorrido.	▲ Se recomienda iniciar con el planteamiento de problemas similares a los siguientes: Identificar si existen diferencias en las estaturas entre hombres y mujeres dentro del grupo. ¿Cuál es el nivel de agrado que tienen las y los estudiantes por las frutas (mucho, regular, poco, nada)? ¿Hay diferencias por sexo? ▲ Para resolver el primer problema, hay que observar que la característica de interés es la estatura, por lo que se requiere realizar las mediciones. Para ello se puede utilizar una cinta métrica y una escuadra, tal como se muestra.  **Imagen con derechos adquiridos por el MEP**

• Media aritmética • Mínimo • Máximo • Recorrido		Los datos obtenidos deberán ser divididos en dos grupos según el sexo y luego resumidos. Por la gran variabilidad no es adecuado utilizar un cuadro de frecuencias simple, sino más bien es necesario orientar a las y los estudiantes hacia la construcción de diagramas de puntos. ▲ En este problema se puede recurrir al empleo de medidas de posición para resumir los datos, entre ellas la media aritmética, el mínimo y el máximo. ▲ Para el segundo problema, la unidad estadística también está construida por cada estudiante y la característica de interés es el agrado por las frutas, que se categoriza en cuatro valores: mucho, regular, poco o nada. Los datos pueden ser recolectados por medio de la interrogación o un cuestionario pequeño. Con ello se tendrá información para todo el grupo. Para responder la primera interrogante del problema se pueden utilizar técnicas similares a las empleadas en el primer problema. Para responder la segunda interrogante se hace necesario realizar un análisis comparativo entre hombres y mujeres. Esto se puede efectuar mediante cuadros o gráficos, pero debe ser mediante las frecuencias porcentuales, pues las frecuencias absolutas solamente son comparables si la cantidad de hombres y de mujeres son iguales. Observe que con este tipo de actividades se promueven varios procesos. En primer lugar, el uso de representaciones tabulares, gráficas o mediante datos concretos, la comunicación de ideas mediante el análisis de la información y la argumentación al momento de ofrecer una respuesta a un problema en función del comportamiento de los datos recolectados. Para el cálculo de la media aritmética se puede recurrir al uso de la calculadora. Pero además, debido a que el uso de cuadros y gráficos constituye una herramienta para resumir y presentar datos para su posterior análisis, su elaboración puede ser simplificada mediante el uso de la computadora.

8^{avo} Año		
Probabilidad		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
El azar • Aleatoriedad • Determinismo	1. Identificar la presencia del azar en situaciones aleatorias. 2. Identificar diferencias entre situaciones aleatorias y deterministas.	▲ Para iniciar la discusión sobre el rol del azar, conviene utilizar alguna técnica que permita identificar las ideas o creencias del grupo. Por ejemplo, se podría generar una lluvia de ideas para cumplir este propósito. Estas creencias deben servir como punto de referencia para los análisis siguientes. ▲ Seguidamente conviene plantear interrogantes para identificar fenómenos aleatorios y deterministas dentro del contexto estudiantil. Se deben identificar las diferencias entre ellos y plantear otros ejemplos. Se puede diseñar una actividad en la que se plantean dos juegos o situaciones: una determinista y una aleatoria que se repiten reiteradamente con el propósito de identificar el determinismo o la aleatoriedad según corresponda. Por ejemplo: Discuta junto con sus compañeros cuáles de las siguientes opciones representan situaciones deterministas y cuáles representan situaciones aleatorias, argumente las razones por la que clasifica cada situación. a. ¿En qué día de la semana nació el profesor de Matemáticas? b. ¿Qué día de la semana será pasado mañana? c. El próximo bebé que nazca en el Hospital de la Mujer será una mujer. d. Identificar el lugar exacto donde caerá una piedra al lanzarla fuertemente hacia arriba. e. Sacar una bola negra de una caja que contiene cinco bolas negras. f. En el próximo año lloverá menos en el mes de agosto que en el presente año. g. Determinar el ganador en el juego “*Zapatito cochinito cambia de piecito*”. Esto se puede complementar con algunas situaciones históricas.
Espacio muestral • Espacio muestral, puntos muestrales y su representación	3. Identificar el espacio muestral y sus puntos muestrales como resultados simples en una situación o experimento aleatorio y representarlos por medio de la numeración de sus elementos o de diagramas.	▲ Proponer situaciones aleatorias para que sean analizadas en función de las habilidades que se desean desarrollar. Por ejemplo: Considere un juego en el que se lanza una moneda tres veces. Determine todos los posibles resultados del experimento. Para identificar cada resultado puede emplear terna de datos, por ejemplo, ECC significa que se obtuvo escudo en el primer lanzamiento y corona en los otros dos. ▲ Se debe caracterizar cada terna como un elemento individual o resultado simple que se le llama *punto muestral* y la reunión de todos los resultados o puntos muestrales con el nombre de *espacio muestral*. Los espacios muestrales de experimentos que tienen un número pequeño de resultados se pueden representar entre llaves { } o mediante diagramas de otro tipo. Por ejemplo:

		{EEE, EEC, ECE, ECC, CEE, CEC, CCE, CCC} 
Eventos • Resultados favorables a un evento • Eventos simples y compuestos • Evento seguro, evento probable, evento imposible	4. Determinar eventos y sus resultados a favor dentro de una situación aleatoria. 5. Clasificar eventos en simples o compuestos. 6. Identificar eventos seguros, probables e imposibles en una situación aleatoria determinada.	Las agrupaciones de puntos muestrales en un determinado espacio muestral se llaman *eventos* o *sucesos*. Considere nuevamente el juego en el que se lanza una moneda tres veces. a. Determine los resultados simples o puntos muestrales a favor de cada uno de los siguientes eventos: A: Obtener al menos un escudo (un escudo o más). B: Obtener tres coronas. C: Obtener menos de dos coronas. b. Identifique los puntos muestrales que incluye cada uno de los siguientes eventos: D: Obtener más de tres escudos. E: Obtener tres o menos coronas. c. De acuerdo con las posibilidades de ocurrencia de los eventos A, B, C, D y E anteriores, determine: i. ¿Cuál o cuáles se pueden considerar como situaciones deterministas o seguras? ii. ¿Cuál o cuáles se pueden considerar imposibles? ▲ Se requiere precisar los conceptos de eventos seguro, probable o imposible de acuerdo con las posibilidades de ocurrencia al realizar un experimento. Además, que se pueda diferenciar entre un evento simple para el cual solamente incluye un punto muestral y un evento compuesto que incluye dos o más puntos muestrales.
Probabilidad • Eventos más probables, menos probables e igualmente probables • Definición clásica (o laplaciana)	7. Diferenciar entre eventos más probables, menos probables e igualmente probables, de acuerdo con los puntos muestrales a favor de cada evento. 8. Determinar la probabilidad de un evento como la razón entre el número de resultados favorables entre el número total de resultados. 9. Valorar la importancia de la historia en el desarrollo de la teoría de probabilidad.	▲ Para el análisis del concepto de probabilidad se recomienda plantear un problema que permita valorar las percepciones o creencias que se traen. Así se pueden nivelar los conocimientos básicos del grupo. Un juego trata de hacer caer una piedra sobre una figura geométrica desde una distancia de 5 metros. Las figuras geométricas son: un círculo de diámetro 20 cm, un cuadrado de 20 cm de lado y un triángulo equilátero de 20 cm de lado. Si la piedra puede caer aleatoriamente en cualquier lugar, ¿en cuál figura tiene más probabilidad de que caiga la piedra? 

		Este problema permite conectar los conceptos de Probabilidad con el cálculo de áreas en *Geometría*. Se puede identificar que es más probable la figura que tiene mayor área. ▲ Conviene realizar un análisis sobre las ideas del grupo alrededor de los términos más probable o menos probable. Es importante que se vinculen estos términos con la frecuencia de puntos muestrales a favor de los eventos. Esto permite sentar las bases para repasar el concepto clásico de probabilidad. El siguiente ejemplo es muy ilustrativo, para continuar con la discusión dada: Al lanzar dos dados Cindy y Karla realizan el siguiente juego: Cindy gana si la suma de los puntos es 2, 3, 4, 5, 10, 11 y 12, mientras que Karla gana si la suma de los puntos es 6, 7, 8 o 9. Karla reclama que al tocarle menos números Cindy va a ganar el mayor número de veces; no obstante, proceden a jugar. Después de jugar 20 veces, Cindy únicamente ha ganado en 7 oportunidades. De acuerdo con lo anterior, responda las siguientes interrogantes. a. Para un juego particular, es decir un lanzamiento de los dados, ¿cuántos puntos tiene el espacio muestral? Se considera punto muestral un resultado simple al lanzar los dados, por ejemplo (3,5) significa que en el primer dado se obtuvo un tres y en el segundo un cinco. b. ¿Serán los puntos muestrales igualmente probables? ¿O existe duda de que unos resultados son más probables que otros? c. ¿Cuántos puntos muestrales están a favor del evento A: Cindy gana el juego y del evento B: Karla gana el juego? d. Determine la proporción de resultados a favor del evento A (es decir la razón entre el número de resultados a favor de A entre el total de resultados) y la proporción de resultados a favor de B. Con base en estos valores indique quién tiene más probabilidad de ganar, Cindy o Karla. e. ¿A qué conclusiones se llega respecto a la inquietud planteada por Karla, sobre que Cindy tiene más probabilidad de ganar el juego porque se le asignaron más números? Se requiere realizar un debate donde se discutan los resultados obtenidos, en función de los argumentos empleados para justificar las respuestas. Además aprovechar las situaciones para precisar el concepto de probabilidad de un evento como la proporción de casos a favor del evento o sea la razón de puntos muestrales a favor del evento entre el total de puntos muestrales. Es importante hacer la indicación que para poder utilizar esta definición se debe cumplir que los resultados (del experimento) o puntos muestrales deben ser igualmente probables. Para valorar la importancia de la historia en el desarrollo de la probabilidad, se puede mencionar el rol de Laplace en la definición clásica del concepto de probabilidad.

Reglas básicas de probabilidad

- La probabilidad de cualquier evento es un valor numérico entre 0 y 1
- La probabilidad de un evento seguro es 1 y de un evento imposible es 0

10. Deducir las propiedades de las probabilidades que están vinculadas con valores que puede tomar la probabilidad para evento seguro, probable e imposible.

11. Plantear y resolver problemas vinculados con el cálculo de probabilidades.

12. Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones en problemas vinculados con fenómenos aleatorios.

▲ A partir de la definición laplaciana o clásica de probabilidad, y de los conceptos de evento probable, imposible y seguro, es conveniente que la acción estudiantil esté dirigida hacia la deducción de algunas de las propiedades básicas que cumplen las probabilidades. Un problema que puede orientar el análisis es el siguiente:

Considere el juego en el que se lanzan dos dados numerados de uno a seis. Se considera la diferencia absoluta entre los resultados de los dados. Determine:

a. El número de puntos muestrales vinculados con el evento A: obtener un número menor de seis.
b. El número de puntos muestrales vinculados con el evento B: el resultado es cero.
c. El número de puntos muestrales a favor del evento C: obtener un seis.
d. ¿Cuál de los posibles resultados de la diferencia absoluta de puntos es el más probable?

Con base en los resultados de este ejercicio responda:

a. ¿Cuál es la probabilidad de ocurrencia de los eventos A, B o C citados anteriormente?
b. En general, ¿cuál es la probabilidad de un evento seguro?
c. En general, ¿cuál es la probabilidad de un evento imposible?
d. Para un evento que resulta probable, ¿en qué rango numérico se puede decir que se encuentra su valor probabilístico?

▲ A partir de las respuestas se deben sistematizar las propiedades básicas, es decir que la probabilidad de un evento es un valor entre cero y uno, la probabilidad del evento imposible es cero y del evento seguro es uno.

▲ Se requiere dirigir la acción estudiantil hacia el planteo de problemas vinculados con el cálculo de probabilidades, para ello la acción docente debe motivar el planteamiento de situaciones genéricas como la lotería nacional, los juegos de dados, el Tico-Bingo, entre otros. Pero además, proponer problemas del contexto donde el análisis de probabilidades permita la toma de decisiones. Por ejemplo:

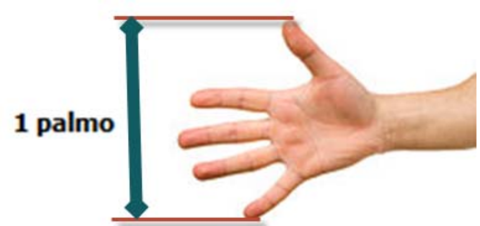
Se desea determinar cuál de tres candidatos tiene más probabilidad de salir ganador en las elecciones estudiantiles del colegio. Se realiza una encuesta una semana antes de realizar las elecciones para conocer la intención del voto, para ello se seleccionó una muestra de 10 estudiantes por nivel. Los resultados se presentan en el siguiente cuadro:

Intención de voto para las elecciones estudiantiles de una muestra de 10 estudiantes por nivel

	Candidatos		
Nivel	A	B	C
Sétimo	4	3	3
Octavo	2	5	3
Noveno	6	2	2
Décimo	1	5	4
Undécimo	0	0	10
Total	13	15	22

		Se sigue el supuesto de que la muestra es representativa de la población total de estudiantes y de cada uno de los niveles. Además, la intención de voto se mantendrá para la elección. De acuerdo con esta información responda las siguientes interrogantes: a. ¿Cuál candidato tendría una mayor probabilidad de ganar las elecciones? b. ¿Cuál o cuáles candidatos tendrían mayor probabilidad de ganar las elecciones si únicamente votaran estudiantes del Tercer ciclo? Para este problema es muy importante enfatizar los supuestos que se realizaron, pues para poder generalizar un resultado de una muestra hacia la población se requieren muchos más elementos de los que se han analizado hasta ahora. El problema también es un buen ejemplo de la forma en que se pueden combinar técnicas estadísticas como el muestreo y la aplicación de un cuestionario, para desarrollar probabilidades. Proceso involucrado: *Conectar*. Problemas relacionados con elecciones estudiantiles motivan a involucrarse en estos procesos, como una forma de realizar una vida estudiantil más allá del recibir lecciones. Así se promueve el eje transversal *Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz.*

9° Año		
Estadística		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Variables cuantitativas • Discretas • Continuas	1. Establecer diferencias entre variables cuantitativas: discretas y continuas. 2. Clasificar variables cuantitativas en discretas o continuas.	Proponer problemas que involucren el análisis de variables cuantitativas discretas y continuas. Por ejemplo: Suponga que se realiza una encuesta a una muestra de hogares de la comunidad en la que se localiza el colegio. La encuesta incluye las siguientes preguntas relacionadas con la vivienda: ¿Cuál es el área de construcción? ¿Cuántos dormitorios? ¿Cuál es el material predominante en las paredes? ¿Hace cuánto tiempo se construyó? ¿Cuántos servicios sanitarios posee? ¿Cuál es el estado general de la vivienda: bueno, regular, malo? ¿Cuánto mide de frente el lote? ¿Cuántas personas habitan en ella? Con respecto a las preguntas anteriores: a. Determine la unidad estadística y las características que involucra el estudio. b. Identifique las características cuantitativas y las cualitativas.

		c. Agrupe las características cuantitativas de acuerdo con la estrategia de recolección empleada: conteo o medición. ▲ El problema anterior es eminentemente descriptivo, tiene como propósito diferenciar entre los distintos tipos de características dependiendo del tipo de datos que pueden generar. Para las características cuantitativas se debe observar que unas de ellas se obtienen por conteo y normalmente generan números enteros, mientras que las otras corresponden a mediciones que teóricamente podrían tomar cualquier valor real, aunque normalmente se representan con aproximaciones decimales. La determinación de datos por medio de mediciones muestra una clara conexión entre las áreas de *Estadística y Medidas*. Pero además, debido a que los datos correspondientes a estas mediciones anteriores se expresan en forma decimal, también se puede evidenciar la conexión entre *Estadística* y *Números*.
Distribuciones de frecuencia • Clases o intervalos • Frecuencia absoluta • Frecuencia relativa y porcentual • Representación tabular • Representación gráfica - Histogramas - Polígonos de frecuencia	3. Reconocer la importancia de agrupar datos cuantitativos en clases o intervalos. 4. Resumir un grupo de datos cuantitativos por medio de la elaboración de un cuadro de distribuciones de frecuencia absoluta y relativa (o porcentual). 5. Interpretar la información que proporciona un cuadro de distribución de frecuencias al resumir un grupo de datos cuantitativos. 6. Resumir la información proporcionada por una distribución de frecuencias mediante un histograma o un polígono de frecuencias (absolutas o relativas), e interpretar la información que proporcionan estas representaciones gráficas. 7. Utilizar algún software especializado o una hoja de cálculo para apoyar la construcción de las distribuciones de frecuencia y sus representaciones gráficas.	▲ Para continuar con el análisis de las variables continuas, se recomienda plantear la siguiente situación. En la Antigüedad se utilizaban unidades de medida que estaban relacionadas con el cuerpo humano, dos de ellas son el palmo y el codo. El palmo es la longitud entre el pulgar y el meñique con la mano abierta (también conocida como cuarta),  **Imagen con derechos adquiridos por el MEP** y el codo correspondía a la longitud desde el codo hasta el extremo de los dedos.  **Imagen con derechos adquiridos por el MEP** Proceda a realizar un análisis estadístico para determinar si existen diferencias entre hombres y mujeres respecto a la longitud del codo y del palmo (cuarta) entre estudiantes del grupo.

		▲ Se debe orientar sobre la necesidad de agrupar los datos en clases, pues las mediciones que se pudieran generar presentan mucha variabilidad, por lo que no es viable resumir estos datos empleando cuadros o gráficos de frecuencia simple. Los problemas que se enfrenten al resumir esta información permiten que se introduzcan las distribuciones de frecuencia de clases para agrupar esta información. En este tipo de problemas intervienen diferentes procesos. Primeramente, la resolución de problemas está presente al momento de estructurar la situación y en la forma de abordarlos por parte del estudiantado. Luego la representación por medio de cuadros o gráficos para resumir los datos recolectados. Además se establecen conexiones con otras áreas matemáticas como *Medidas* y *Números* en cuanto a las mediciones y con *Geometría* y *Relaciones y Álgebra* con las representaciones gráficas. Por último se desarrolla la argumentación, debido a que la información que proporcionan las representaciones gráficas permite argumentar las respuestas a los problemas.

9no Año		
Probabilidad		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Muestras aleatorias	1. Identificar la importancia del azar en los procesos de muestreo estadístico.	▲ Se pueden considerar algunos problemas similares al siguiente: Una organización desea realizar una selección de 15 estudiantes entre el total de estudiantes de 9° Año para que participen en un nuevo programa de salud integral. El requisito que pide la organización patrocinadora del programa es que la selección de las y los estudiantes se realice de forma aleatoria. Proporcione una estrategia de selección aleatoria. ▲ Algunas de las posibles soluciones que se podrían aportar podrían ser: a. Realizar un listado con cada estudiante de noveno y realizar una rifa para seleccionar 15 de ellos. b. Seleccionar por medio de una rifa una determinada cantidad de estudiantes de cada grupo de 9° Año, de modo que entre todos los seleccionados sumen 15 estudiantes. No obstante, podrían darse soluciones mucho más ingeniosas. Se requiere estar alerta de que efectivamente la solución propuesta sea aleatoria (cada estudiante de 9° Año tiene una probabilidad de ser seleccionado). ▲ Se debe realizar un análisis de las soluciones aportadas en la clase y con base en ellas sistematizar el concepto de muestreo aleatorio, como aquel proceso de selección de una muestra sobre una población por medio del cual todos los grupos tienen una probabilidad (no nula) de ser seleccionados. El azar juega un rol fundamental en el proceso de conexión entre la *Probabilidad* y la *Estadística*. Un ejemplo de ello lo constituye la selección de muestras estadísticas aleatorias.

		Aunque realizar un análisis completo del muestreo estadístico aleatorio es muy complejo para discutirlo en secundaria, es posible plantear problemas sencillos para motivar su importancia. ▲ En el análisis de las muestras aleatorias es importante enfatizar en el uso del muestreo aleatorio para la implementación de encuestas a nivel nacional. Es muy valioso que los jóvenes conozcan de la existencia de encuestas de este tipo, debido a que aportan datos estadísticos que deben estar dentro del análisis de temas transversales planteados para todas las asignaturas.
Probabilidad frecuencial • Estimación de probabilidad: empleo de la frecuencia relativa (concepto frecuencial o empírico) • Introducción a la ley de los grandes números	2. Identificar eventos para los cuales su probabilidad no puede ser determinada empleando el concepto clásico. 3. Utilizar el concepto de frecuencia relativa como una aproximación al concepto de Probabilidad, en eventos en los cuales el espacio muestral es infinito o indeterminado. 4. Identificar que las propiedades de las probabilidades que están vinculadas con evento seguro, probable e imposible también son válidas para la definición frecuencial.	▲ Lo establecido hasta este punto en materia de probabilidades limita el análisis de situaciones en las que se conoce con detalle el espacio muestral. Desafortunadamente eso no siempre ocurre pues en muchas ocasiones el espacio muestral es muy grande, es indefinido o incluso es infinito. Analice cada uno de los siguientes problemas y proponga una estrategia para encontrar una solución. a. Una persona se dirige a un supermercado a comprar un litro de aceite, y aunque el contenido del recipiente dice 1000 ml se tiene la duda que efectivamente estos recipientes contengan esta cantidad, por lo que se desea determinar la probabilidad de que el recipiente tenga menos de un litro tal como dice la etiqueta. ¿Cómo se podría enfrentar este problema? b. Existe la creencia entre la población que en un embarazo cualquiera es igualmente probable que la criatura sea niño o niña; no obstante, los datos indican que en una población hay más mujeres que hombres. ¿Cómo comprobar si efectivamente son igualmente probables? c. Se ha afirmado que la probabilidad de que una persona fumadora muera de una enfermedad asociada con el consumo del cigarrillo es de aproximadamente un medio. ¿De qué manera se podría estimar dicha probabilidad? ▲ Se debe reflexionar sobre estas interrogantes para obtener respuestas posibles. Al analizarlas la acción docente debe orientarse a la sistematización del concepto de *probabilidad frecuencista* o *probabilidad empírica*, como la *frecuencia relativa* del evento en relación con una muestra aleatoria, que se determina por la razón entre los resultados favorables en la muestra entre el total de elementos muestreados. ▲ Para complementar el análisis se sugiere generar situaciones aleatorias en las que el espacio muestral sea indeterminado o infinito. Por ejemplo: Diferentes estudios han demostrado que las madres que fuman cuando están embarazadas tienen una mayor probabilidad de tener hijos con bajo peso y por ende con mayor probabilidad de tener complicaciones de salud. Tomando como referente la información del artículo Factores de riesgo en el bajo peso

al nacer, publicado en Revista Cubana de Medicina General Integral (julio-septiembre, 1995), seguidamente se simuló un escenario basado en esta relación con una muestra aleatoria de 1000 partos.

Relación entre fumar durante el embarazo y el bajo peso al nacer en los niños

Madres	Bajo peso al nacer		Total
	Sí	No	
Fumadoras	46	307	353
No fumadoras	39	608	647
Total	**85**	**915**	**1000**

Tomando como referente esta información, estime:

a. La probabilidad que una madre que fumó durante el embarazo tenga un niño con bajo peso.
b. La probabilidad que una madre no fumadora tenga un niño con bajo peso.
c. ¿Cuántas veces más probable es que una mujer que fumó durante el embarazo tenga un niño con bajo peso respecto a una madre que no fumó en ese período?

Este problema debe servir de reflexión pues aunque la muestra fue simulada, científicamente se ha comprobado que las madres fumadoras tienen una mayor probabilidad de tener niños con bajo peso respecto a las madres no fumadoras. Esto se vincula con el tema *Educación para la Salud*.

▲ Es importante hacer notar que el valor de estas probabilidades corresponde a una aproximación sujeta a una situación particular, pues no se puede aplicar aquí la definición clásica de probabilidad, sino que se aproxima por medio de la frecuencia relativa de ocurrencias en el caso estudiado.

5. Identificar que, para un evento particular, su frecuencia relativa de ocurrencia se aproxima hacia la probabilidad clásica conforme el número de observaciones aumenta.

6. Resolver problemas vinculados con fenómenos aleatorios dentro del contexto estudiantil.

▲ Para ejemplificar la ley de los grandes números, se puede pedir que resuelvan el siguiente problema:

Tradicionalmente se ha creído que dentro de un parto simple es igualmente probable que nazca una niña o un niño. Suponga que en el período 2000-2010, en el cantón central de la provincia de Heredia se presentaron los siguientes datos respecto al sexo de los niños que nacieron.

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Hombres	963	1102	959	988	988	978
Mujeres	969	988	924	1009	927	924
Total	1932	2090	1883	1997	1915	1902

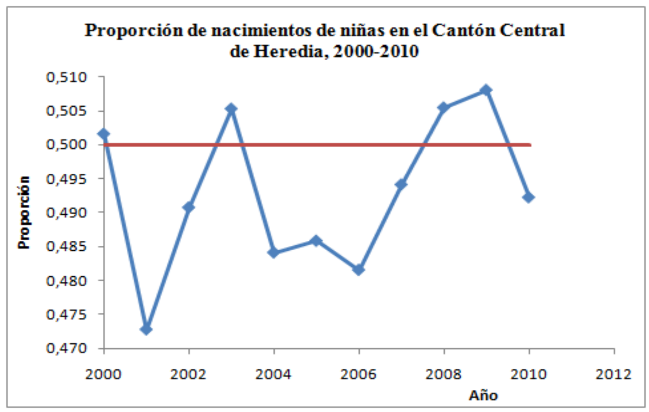
Año	2006	2007	2008	2009	2010
Hombres	925	939	958	951	944
Mujeres	859	917	979	982	915
Total	3790	3863	3945	3942	3869

Tomado de: www.ccp.ucr.ac.cr

a. Determine para cada uno de los años la probabilidad de que el producto de un parto cualquiera sea una niña.

b. Los datos anteriores ¿confirman o contradicen la creencia original de que la probabilidad de que nazca una niña es ½? Puede dibujar un gráfico de línea para visualizar mejor el patrón de variabilidad de los datos. Si los datos no apoyan dicha creencia, ¿cuál sería la mejor aproximación que usted puede dar para esta probabilidad?

▲ Conviene aquí que se realice una actividad plenaria donde cada subgrupo presente los resultados obtenidos y las conclusiones a las que han llegado. Se debe analizar la tendencia observada, la cual se muestra en el siguiente gráfico



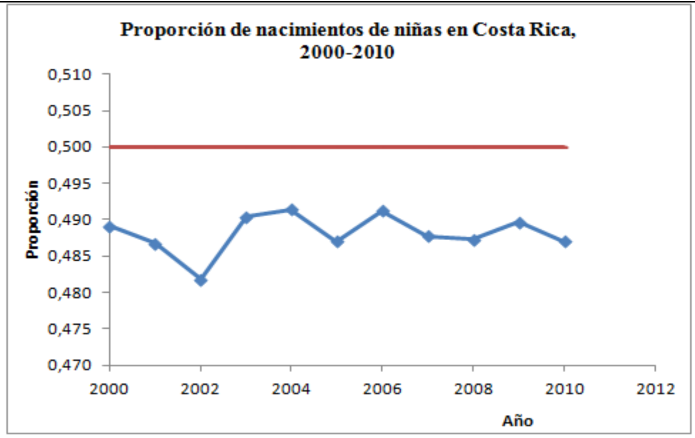
Como una segunda parte del problema, pídales que resuelvan nuevamente las interrogantes anteriores pero con los datos de todo el país:

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Hombres	39 943	39 214	36 868	37 172	36 747	36 701
Mujeres	38 235	37 187	34 276	35 766	35 500	34 847
Total	78 178	76 401	71 144	72 938	72 247	71 548

Año	2006	2007	2008	2009	2010
Hombres	36 274	37 471	38 553	38 278	36 382
Mujeres	35 017	35 673	36 634	36 722	34 540
Total	71 291	73 144	75 187	75 000	70 922

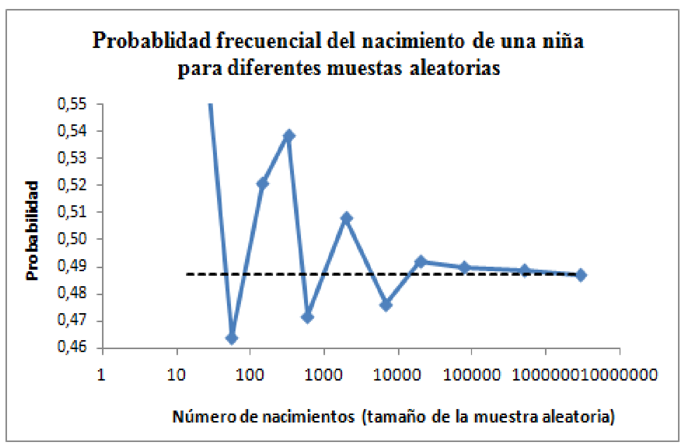
Analizar las conclusiones de las y los estudiantes con estos nuevos datos. Enfatizar en las diferencias entre lo que ocurrió en el cantón central de Heredia y lo que ocurrió en todo el país. Enfatizar en el valor de la probabilidad de que nazca una niña en un parto aleatoriamente seleccionado.

Se muestra así la representación gráfica de las proporciones correspondientes.



Para concluir, proporcione la siguiente información: de acuerdo con la información que aparece en la página web del Centro Centroamericano de Población, entre los años 1972 y 2010 se tienen registrados en el país un total de 2 877 695 nacimientos, de los cuales 1 402 063 fueron mujeres. ¿Qué proporción de los nacimientos ocurridos entre 1972 y 2010 fueron mujeres? ¿A qué conclusión llega sobre la creencia de que es igualmente probable el nacimiento de una niña que de un niño?

▲ Para el proceso de clausura, la acción docente debe centrarse en la articulación de las ideas aportadas con la intención de generar la ley de los grandes números desde un punto de vista intuitivo, en el sentido que entre más grande sea la muestra con la que se trabaja, más se aproxima la probabilidad frecuencial de un evento a su valor real. Una representación gráfica como la siguiente puede ayudar:



En este problema se puede analizar claramente la interacción con los procesos *Plantear y resolver problemas*, *Representar, Razonar y argumentar*, e incluso la relación con el área de *Números*.

▲ Este es un buen ejemplo de la forma en que por medio de un análisis matemático se puede valorar la veracidad de una creencia popular.

		Por otro lado, este tipo de problemas pueden ser analizados mediante el uso de la tecnología, ya sea por medio de una calculadora para simplificar los cálculos o de una hoja de cálculo con una computadora para realizar todo el análisis. Además, mediante el uso de una calculadora o una computadora es posible simular otras situaciones que permitan apreciar la ley de los grandes números. Por ejemplo, utilizando una hoja de cálculo es posible generar números aleatorios que permiten simular fenómenos de distinta naturaleza.

Indicaciones metodológicas

Generales para el ciclo

1. En este ciclo se lleva a cabo una transición entre la escuela y el colegio, lo que obliga a realizar un proceso de acoplamiento y estandarización de bases académicas. Durante 7° Año la principal actividad consiste en generar acciones tendientes a realizar esta labor y al mismo tiempo formalizar los conceptos tratados en Primaria que no fueron definidos ni sistematizados. Este proceso permitirá generar un lenguaje apropiado que sirva como referente para el trabajo de los siguientes dos años. Para realizar esta labor es fundamental que se revise detalladamente los programas de Primaria y las indicaciones que aparecen en ellos, pues este material es la base del trabajo a generar en el ciclo.

2. Se inicia mediante la discusión sobre una serie de conceptos vinculados con la *Estadística*. Se recomienda no centrarse en definiciones teóricas sino en la interpretación práctica sobre situaciones contextualizadas, para ello se pueden proponer problemas en los que los conceptos puedan identificarse claramente en el contexto; esto ayudará a comprender el significado de los mismos y utilizarlos adecuadamente. Posterior a esto se repasan diferentes estrategias para la recolección, ordenamiento, resumen y presentación de información. Para afianzar las habilidades vinculadas con el uso de estas estrategias es recomendable revisar nuevamente las indicaciones hechas en Primaria. De este modo se facilitará la nivelación en cuanto a las habilidades básicas.

3. Para 8° y 9° Año se considera el desarrollo de habilidades vinculadas con el manejo de información cuantitativa. Aunque este tema se trabajó preliminarmente en Primaria, acá se profundiza y se trabaja con su resumen por medio de distribuciones de frecuencia y los gráficos correspondientes para los casos de variables continuas. Para ello se requiere ofrecer problemas que impliquen la necesidad de utilizar los nuevos conceptos, de este modo las y los estudiantes podrán integrarlos más fácilmente a su vocabulario académico y utilizarlos para enfrentar nuevas situaciones.

4. En relación con el manejo de situaciones aleatorias, nuevamente se recomienda analizar la propuesta de Primaria para continuar con la dinámica de trabajo, incrementando el nivel de dificultad de los problemas planteados e incorporando nuevos asociados a los conceptos. La temática se comienza a abordar en 8° Año y se lleva a cabo el mismo proceso de transición y nivelación realizado en 7° Año con Estadística. En 9° Año se introduce la definición empírica de probabilidad y su relación con la ley de los grandes números. No es recomendable limitarse únicamente a los juegos de azar, se requiere adecuar situaciones al contexto estudiantil para favorecer una mayor comprensión de la incertidumbre en la vida cotidiana.

5. El uso de información recolectada por diversas fuentes juega un rol significativo en el trabajo estudiantil. Se recomienda generar problemas que impliquen el uso de esta información. Para esto Internet brinda una gran ayuda. A pesar de la gran cantidad de cálculos y la complejidad en la elaboración de algunos cuadros y gráficos, el énfasis de los estudios que se realicen en el aula se debe centrar en el análisis y la interpretación proporcionada por los datos (para ofrecer respuesta a pre-

guntas concretas sobre los problemas). Para ello el empleo del recurso tecnológico que se tenga a disposición se convierte en un elemento clave del proceso.

6. Debido a que en la Primaria se introdujo el uso de medidas estadísticas, en este ciclo se debe motivar su uso para caracterizar grupos de datos. No obstante, hay que tener presente que un análisis más detallado sobre el empleo de medidas estadísticas se realizará en la educación Diversificada.

7. Se requiere enfatizar el papel que juegan las representaciones tabulares y gráficas dentro de los análisis estadísticos y probabilísticos. Pero además la relevancia de que estas representaciones contengan suficientes elementos: título general, títulos secundarios, entre otros; de modo que un lector pueda comprender el mensaje que comunican sin necesidad de recurrir a más información.

8. Vinculado con el punto anterior, se considera la presentación de información por medio de cuadros, diagramas y gráficos como una estrategia de gran importancia para comunicar resultados de los análisis efectuados. Aunque los gráficos en tres dimensiones tienen mucha aceptación en diversos sectores no se recomienda su uso, pues en algunas ocasiones se prestan para la confusión. En este sentido conviene recordar que el propósito de un gráfico es suministrar una información de la forma más simple posible y por eso cualquier elemento que pueda confundir debe ser descartado.

9. Los problemas estadísticos y probabilísticos pueden ser desarrollados mediante la implementación de diversas técnicas. No es conveniente encasillar la actividad estudiantil en una sola forma de resolver un problema. Por ejemplo, en *Estadística* se pueden emplear cuadros, gráficas o medidas de resumen para abordar un problema, incluso combinar técnicas. Por esta razón, es necesario concentrarse en evaluar la rigurosidad y el detalle con que se ha realizado el análisis, así como la coherencia con la exigencia del problema.

10. Es menester prestar especial atención a los errores comunes dentro de los análisis estadísticos y probabilísticos, así como en interpretaciones inadecuadas. En aquellos casos en los que se identifiquen errores en la implementación de las técnicas o en la interpretación de los resultados, se pueden ofrecer ejemplos que pongan en evidencia las incongruencias sobre las interpretaciones a las que esos errores podrían conllevar. En estos casos el uso de contraejemplos se convierte en una herramienta de mucha utilidad.

Sétimo año

1. Se recomienda que cada estudiante realice una adecuada lectura de las representaciones que se aporten en la lección para valorar la importancia de la *Estadística* en diferentes campos. Para ello conviene formular algunas preguntas relacionadas con su contenido. Sin embargo, debe dársele especial importancia a la forma en que la *Estadística* ayuda a otras disciplinas científicas a recolectar, resumir, presentar y analizar la información que se genera.

2. Al introducir conceptos como unidad estadística, característica y observación (o dato), se amplía la propuesta planteada en Primaria, por lo cual se necesita que las actividades propuestas ejemplifiquen de forma acertada el rol que juega cada concepto y que las relaciones entre ellos queden claramente evidenciadas. Debe destacarse el tipo de dato que generan las diferentes características de las unidades estadísticas. Hay que recordar que los datos constituyen el objeto de análisis de la *Estadística*. Pero además, debe quedar claro que la *Estadística* no trabaja con datos aislados; un solo dato no es de interés desde un punto de vista estadístico, pues la disciplina ha sido desarrollada para determinar patrones de comportamiento en grupos de datos.

3. En Primaria también se insistió en fundamentar la variabilidad de los datos como fuente principal de los análisis estadísticos, esto debe ratificarse en este ciclo. Para ello, las características de las unidades estadísticas se catalogan como variables, pues sus observaciones o datos varían de una unidad estadística a otra. Se debe insistir en el estudiantado en que en ausencia de variabilidad en

los datos no se requieren estudios estadísticos; a medida que los datos presentan variabilidad surge la necesidad de buscar estrategias para resumir estos patrones y comprender el mensaje que transmiten.

En este sentido, los problemas planteados sobre el número de miembros de los hogares estudiantiles y sobre el color del pantalón o enagua que se utiliza para asistir al colegio son un ejemplo claro de lo anterior. Debido a que la totalidad de estudiantes debe asistir con uniforme al colegio, todos emplean el mismo color de pantalón o enagua; por ello los datos son todos iguales y la respuesta es única, no se requiere de más análisis. Por otro lado, el número de miembros de los hogares es muy variable, y por eso para comprender este patrón de variabilidad se requiere clasificar los datos, agruparlos y buscar algún tipo de representación como el cuadro, el gráfico o incluso el uso de medidas de resumen: promedio, moda, mínimo o máximo, incluso puede ser de interés determinar el recorrido debido a que representa la mayor diferencia en el tamaño de los hogares.

4. En relación con los análisis para la recolección y representación de información, en las indicaciones puntuales se plantean dos problemas: el primero relacionado con los meses del año en que se presenta la mayor frecuencia de cumpleaños y el segundo acerca del tamaño de los hogares respecto a una muestra hipotética de hogares. En la resolución de estos problemas se debe utilizar la interrogación para así recolectar la información necesaria. Los datos obtenidos deben ser organizados y clasificados para llevar a cabo un resumen de ellos y responder las interrogantes.

Para el primer problema, se debe determinar la frecuencia de estudiantes o número de estudiantes por mes, también puede determinar el porcentaje de estudiantes en cada mes. Dicha información puede ser representada por medio de un cuadro como el siguiente:

Mes de cumpleaños de estudiantes del grupo 7-X

Mes	Número de estudiantes
Enero	4
Febrero	2
Marzo	3
⋮	⋮
Total	**32**

Para el segundo problema, debido a que los totales de los grupos son diferentes se requiere realizar un análisis comparativo por medio de porcentajes, por lo que se espera que se pueda generar un cuadro similar al siguiente:

Comparación del número de personas por hogar entre una muestra de 50 hogares y los hogares de estudiantes del grupo

Número de personas	Muestra		Estudiantes	
	Total	Porc.	Total	Porc.
2	3	6,0	2	6,3
3	5	10,0	6	18,8
4	6	12,0	8	25,0
5	11	22,0	7	21,9
6	11	22,0	4	12,5
7	7	14,0	3	9,4
8	4	8,0	2	6,3
9	2	4,0	-	-
10	1	2,0	-	-
Total	**50**	**100,0**	**32**	**100,0**

Con los datos resumidos, se debe responder el problema argumentando con información estadística la respuesta. Se puede aprovechar este tipo de problemas para analizar otros aspectos como el patrón de variabilidad de cada grupo de datos, la tendencia central de los datos e incluso analizar el valor de las medidas de resumen.

5. El segundo problema se presta para realizar un análisis en función de las medidas de resumen para cada uno de los grupos:

Medidas	**Muestra**	**Estudiantes**
Moda(s)	5 y 6	4
Media aritmética	5,50	4,69
Máximo	10	8
Mínimo	2	2
Recorrido	8	6

Más trascendente que el cálculo de las medidas lo constituye la interpretación en cada caso, por ejemplo, mientras que en la muestra de hogares proporcionada hay dos valores que tienen la mayor frecuencia que son 5 y 6, entre los hogares estudiantiles el número de miembros que más se repite es 4. El número promedio de miembros por hogar en la muestra es 5,50 y entre los hogares estudiantiles es 4,69. Se debe hacer hincapié en que estos valores no deben necesariamente ser números enteros. En cuanto al valor máximo de miembros por hogar, en la muestra fue de 10 y entre los hogares de las y los estudiantes 8; del mismo modo el número mínimo de miembros por hogar fue 2 en ambos casos. Por último, la mayor diferencia entre el número de miembros de los hogares de los grupos fue de 8 en el caso de los hogares de la muestra y 6 en los hogares de las y los estudiantes.

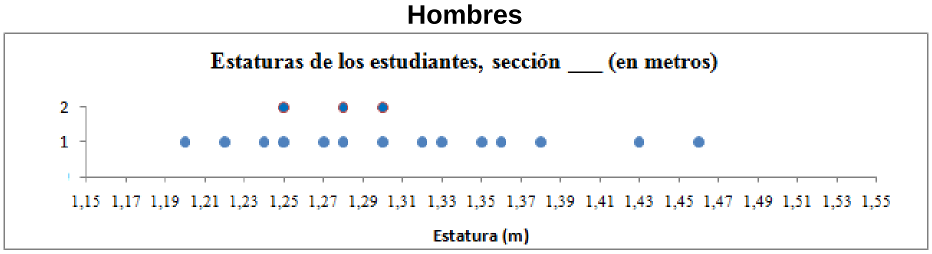
Aunque la interpretación de cada medida se puede considerar con otras palabras, lo fundamental radica en que el mensaje que comunica cada medida quede suficientemente claro. Por otra parte, el empleo de la calculadora o de hojas de cálculo en computadora constituyen un insumo vital para simplificar el trabajo y concentrarse en el análisis e interpretación de las medidas estadísticas.

Octavo año

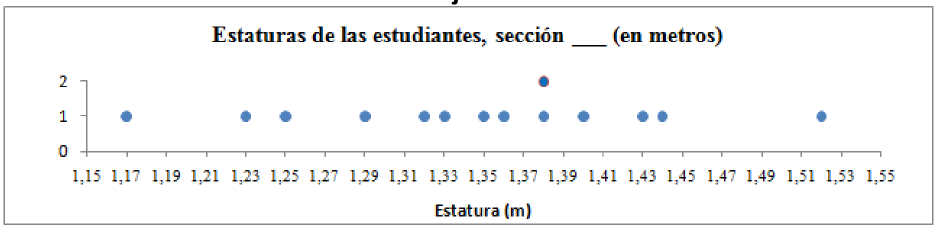
1. Al citarse la experimentación como una técnica de recolección de información, se hace referencia a la implementación de pequeñas actividades por medio de las cuales se generen datos a través de mediciones u observaciones. Un ejemplo de ello lo constituye la medición del codo o el palmo.

2. Respecto a este mismo problema, se requieren emplear técnicas diferentes de representación a las que se emplearon en 7° Año. Esto debido a que los cuadros de frecuencia no permiten observar claramente el patrón de variabilidad de los datos. Una técnica que se utilizó en Primaria y que se puede emplear nuevamente consiste en elaborar diagramas de puntos:

Hombres

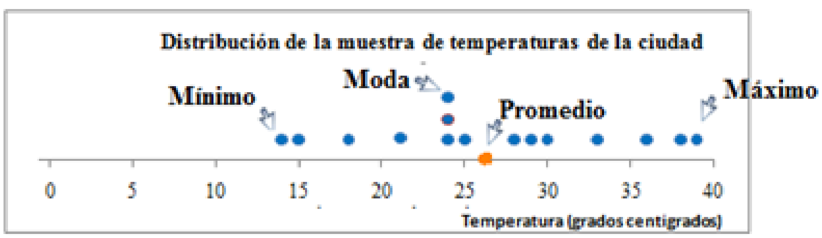


Mujeres



Con esta información se pueden identificar varias características de los datos, por ejemplo que las estaturas de las mujeres son más variables y se tienden a concentrar en datos más altos que los hombres, por lo que se podría fácilmente concluir sobre el problema.

3. Debido a que los datos anteriores fueron obtenidos por medición y emplean dos decimales, las medidas estadísticas de resumen constituyen una herramienta fundamental para realizar la comparación. Al igual que se realizó en 7° Año, el énfasis no debe centrarse en el cálculo sino en la interpretación y el mensaje que estas medidas proporcionan para resolver el problema. En este sentido, conviene integrar las diferentes técnicas que se vayan utilizando, por ejemplo, es valioso identificar en un gráfico las principales medidas de posición estudiadas hasta el momento, pues dichas medidas tienen su interpretación gráfica, tal como muestra la siguiente ilustración. Observe el siguiente diagrama para resumir los datos de una muestra de días en los que se midió la temperatura en cierta ciudad.

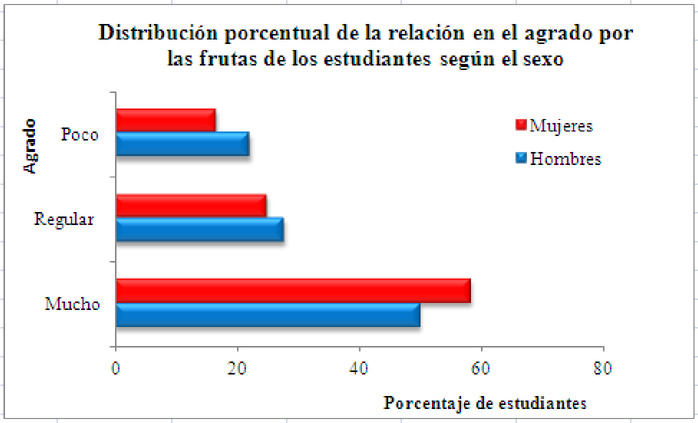


4. Los puntos 2. y 3. evidencian que los problemas estadísticos pueden ser abordados por diferentes técnicas, por lo que se requiere valorar la viabilidad de las estrategias empleadas en función de las interrogantes que generan los problemas.

5. En este mismo sentido, los datos recabados sobre el problema vinculado con el agrado por las frutas, pueden ser resumidos por distintas técnicas. Algunas de las posibilidades para realizar el análisis se ejemplifican a continuación:

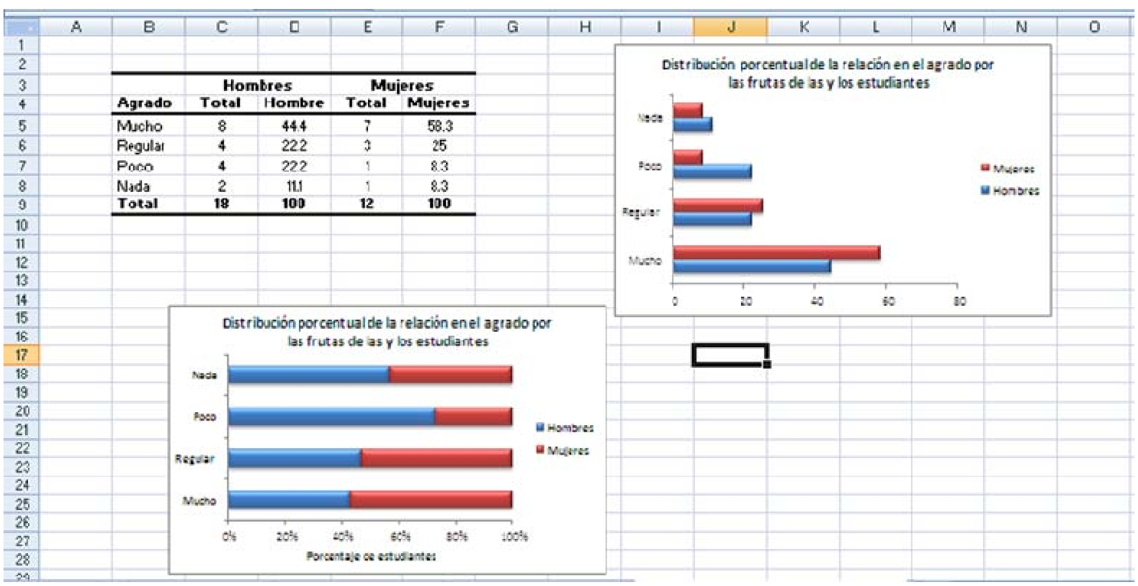
Distribución absoluta y porcentual de la relación en el agrado por las frutas de las y los estudiantes.

Agrado	Hombres		Mujeres	
	Total	Porcen.	Total	Porcen.
Mucho	8	44,4	7	58,3
Regular	4	22,2	3	25,0
Poco	4	22,2	1	8,3
Nada	2	11,1	1	8,3
Total	**18**	**100,0**	**12**	**100,0**



Cualquiera de estas representaciones proporciona la información necesaria para responder que sí existen diferencias por sexo.

6. Para favorecer las representaciones y los cálculos, además del empleo de una calculadora, es de vital importancia emplear programas de computadora, por ejemplo hojas de cálculo, editores de texto, programas graficadores u otras herramientas que pueden ayudar a mejorar la calidad de la representación y reducir el tiempo en su construcción.



7. Dentro del análisis probabilístico se recomienda iniciar con la discusión entre las diferencias de lo aleatorio y lo determinista. Se debe identificar que las situaciones aleatorias corresponden a conjeturas, que pueden ocurrir o no, y que su ocurrencia está sujeta a la incertidumbre mientras que en las deterministas su ocurrencia es posible de deducir con precisión.

8. Dentro de los ejemplos sobre la forma en que ha evolucionado históricamente el concepto de probabilidad, puede ser de interés el conocimiento sobre el empleo que los pueblos antiguos realizaban del hueso astrágalo, el cual se puede considerar como antecesor del dado.

Imágenes con derechos adquiridos por el MEP

La presencia del hueso astrágalo de oveja o ciervo en las excavaciones arqueológicas más antiguas parece confirmar que los juegos de azar tienen una antigüedad de más de 4000 años. Para más información se puede consultar la dirección:
http://www.oei.es/cienciayuniversidad/spip.php?article2118

9. Dentro de los términos que se tienden a utilizar con regularidad en el análisis de probabilidades se encuentran: "*al menos*" y "*a lo sumo*". Es común que se tienda a dar una interpretación equivocada, por ello se requiere aclararlos en función de su significado común. Por ejemplo, si en un evento se indica "*al menos tres*" significa que tres es un límite inferior, por lo que se tendría que el evento incluye de tres en adelante (mayor o igual a tres). Por el contrario, si para un evento se indica "*a lo sumo tres*", ahora tres es el límite superior, el evento incluye tres o menos (menor o igual que tres).

10. La definición de probabilidad utilizada aquí se denomina definición clásica o laplaciana en honor al matemático francés Pierre Simon Laplace (1749-1827).

En relación con el concepto de probabilidad, Laplace creó una curiosa fórmula para expresar la probabilidad de que el Sol saliera por el horizonte. Él decía que la probabilidad era de $\frac{d+1}{d+2}$ donde d es el número de días que el sol ha salido en el pasado. Laplace decía que esta fórmula podía aplicarse en todos los casos donde se desconocía el fenómeno, o donde lo que se conocía iba cambiando.

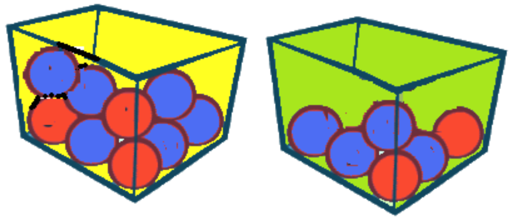
Su definición indica que para un evento A de un experimento cualquiera, en donde el espacio muestral incluye los resultados posibles $a_1,..,a_k$, los cuales se supone que son equiprobables (que ninguno tenga más oportunidades que otro), entonces la probabilidad de cada punto muestral es "$p = \frac{1}{k}$".

Para el evento A que incluye r puntos muestrales a su favor; entonces su probabilidad viene dada por:

$$P(A) = r \cdot p = \frac{r}{k} = \frac{\text{Casos favorables A}}{\text{Total de casos}}$$

Fuente:: http://es.wikipedia.org/wiki/Pierre_Simon_Laplace

11. Un ejemplo de un problema que ejemplifica la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre es el siguiente. Se le pide a una o un estudiante seleccionar una bola, y se le dice que si es roja se le otorgará un premio. Primeramente debe escoger entre la urna amarilla y la urna verde, que se suponen están cerradas, pero se sabe que en la urna amarilla hay tres bolas rojas y seis azules, mientras que en la verde hay dos rojas y cuatro azules. La selección de la bola debe realizarla en forma aleatoria. ¿Cuál de las urnas deberá seleccionar para tener la mayor probabilidad de ganar dicho premio? Justifique su análisis.



Elaboración propia

Noveno año

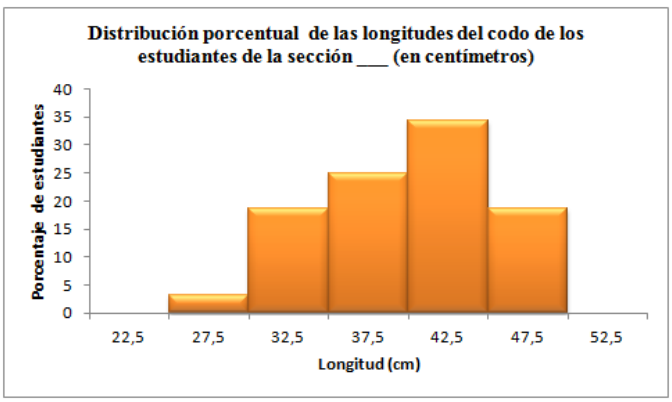
1. Desde el punto de vista estadístico el principal elemento que aparece en 9º Año está dado por la inclusión de variables continuas en los análisis. Aunque en los años anteriores se trabajó con mediciones, que corresponden a características continuas de las unidades estadísticas, es en 9º Año en que el concepto de continuidad es introducido en el área de *Números*, por ello se puede hablar con propiedad de variables continuas. No obstante, aunque en teoría una variable continua puede tomar cualquier valor real en un determinado rango, normalmente en la práctica se trabaja con números racionales, casi siempre expresados en forma decimal. Para ejemplificar un análisis con datos continuos, en las indicaciones puntuales se sugiere medir el codo y el palmo de las y los estudiantes. Para sistematizar la información se propone la construcción de distribuciones de frecuencia. Con la actividad propuesta se espera que, con la orientación docente, se pueda realizar una agrupación de datos y resumir la información tal como se indica a continuación para el caso de la variable longitud del codo.

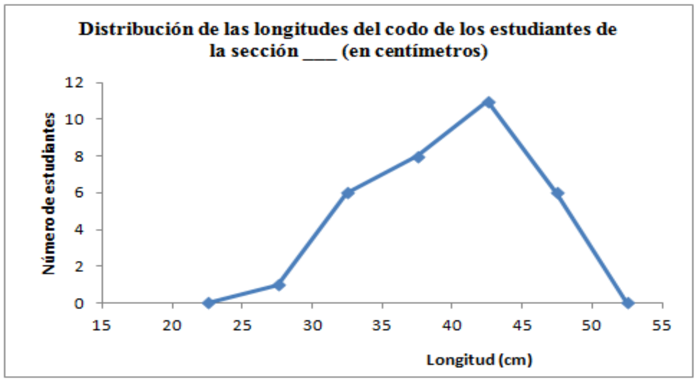
Distribución de las longitudes del codo de las y los estudiantes de la sección ___
(en centímetros)

Longitud del codo	Número de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
De 25 a menos de 30	1	3,13
De 30 a menos de 35	6	18,75
De 35 a menos de 40	8	25,00
De 40 a menos de 45	11	34,38
De 45 a menos de 50	6	18,75
Total	**32**	**100,00**

Las clases deben adaptarse a los datos obtenidos procurando una adecuada distribución de todos los datos, utilizando preferiblemente clases del mismo tamaño.

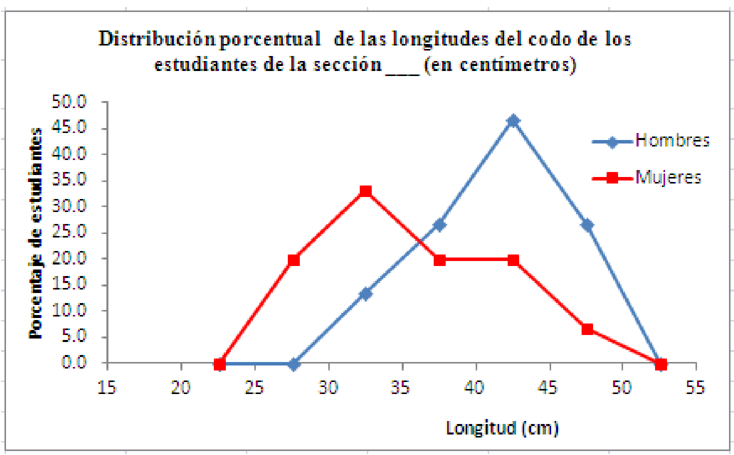
2. En relación con el punto anterior, para complementar las posibilidades de resumen de los datos continuos se requiere introducir la construcción de histogramas o polígonos de frecuencia para resumir la información. Tal como se muestra:



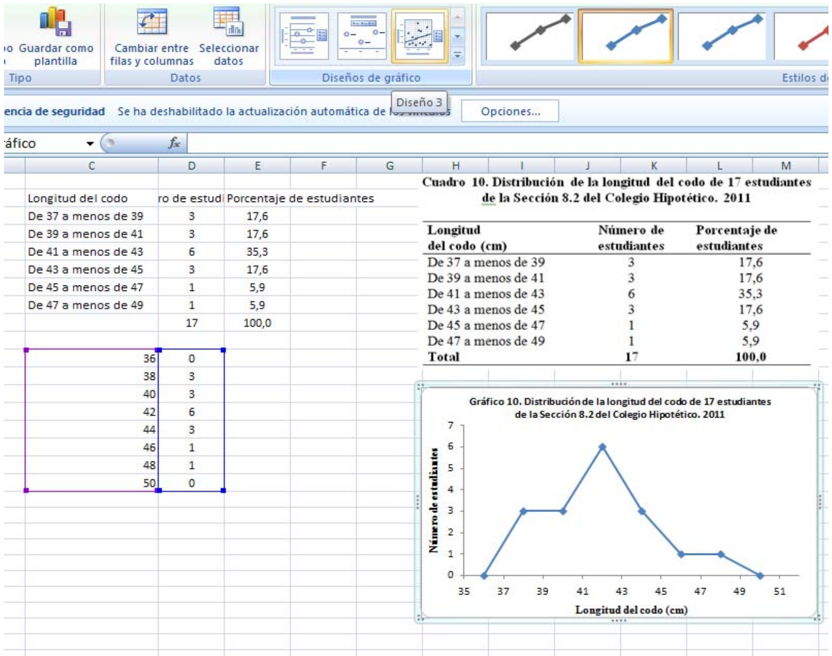


Al igual que se ha venido indicando, para efectos de representar los datos de las longitudes de los codos, únicamente se debe utilizar una de las representaciones, pues tanto el cuadro como los dos gráficos anteriores comunican la misma información, solamente que uno de ellos presenta valores absolutos y el otro valores porcentuales.

3. Para efectos del problema original, se debería realizar un análisis similar para cada sexo. En este caso, un análisis muy representativo lo constituye la construcción de un polígono de frecuencias de hombres y de mujeres en el mismo plano cartesiano. No obstante, para favorecer la comparación debe utilizarse las frecuencias porcentuales, con ello se tendría una adecuada representación del problema para extraer las conclusiones correspondientes, tal como se ejemplifica.



4. Al igual que se indicó para 7° Año, el énfasis de las distribuciones de frecuencias o sus representaciones gráficas debe centrarse en el análisis de la información y no en los procesos de construcción; por ello se recomienda utilizar la computadora para facilitar los procesos de construcción de cuadros y gráficos.



5. Para enfatizar en el uso del muestreo aleatorio para la aplicación de encuestas a nivel nacional, seguidamente se plantean dos ejemplos de la implementación de muestras aleatorias cuyos resultados pueden ser consultados en Internet.

a. En el año 2008 se realizó en Costa Rica la Primera Encuesta Nacional de Juventud, coordinada por el Consejo Nacional de Política Pública de la Persona Joven. Incluyó una muestra aleatoria de 2500 personas de 15 a 35 años. La información puede ser consultada en la dirección electrónica http://cpj.go.cr/docs/encuesta/informe-encuesta.pdf. La información sobre la encuesta se resume en el siguiente cuadro:

COSTA RICA: DISTRIBUCIÓN DE LA MUESTRA POR REGIÓN, PRIMERA ENCUESTA NACIONAL DE JUVENTUD

Estrato y zona	MMV - 2000		Muestra
	Población 15 a 35 años	Porcentaje	
GAM	748.586	53.9%	1 348
Resto de País Urbano	214.084	15,4%	385
Resto de País Rural	426.528	30.7%	767
Total	1.389.198	100.0 %	2 500

Fuente: Instituto Nacional de Estadística y Censos

b. En noviembre del 2009, la Asociación Demográfica Costarricense realizó la Encuesta Nacional de Salud Sexual y Reproductiva en el país actualizando datos en Salud Reproductiva a 10 años de la última Encuesta Nacional, y se puede consultar en la dirección electrónica http://www.adc-cr.org/adc_tasa_prevalencia.php.

   Entre otros resultados se presentan los siguientes:

   i. *Costa Rica continúa teniendo una de las tasas más altas de prevalencia de uso de métodos anticonceptivos de América Latina; un 81% de las mujeres de 18 años a 44 años entrevistadas indicaron usar algún método para planificar la familia.*
   ii. *En cuanto a los métodos anticonceptivos usados se presentan cambios muy importantes entre 1999 y el 2009:*
   Aumento en las esterilizaciones: la esterilización femenina pasó de 21% a 28% y la esterilización masculina de 0.5% a 5%, también aumentó el uso de los gestágenos inyectables de 6% a 8%. Por el contrario, bajó el uso del Dispositivo Intrauterino (DIU) de 6% a 2%; el uso de condones pasó de 11% a 8% y los métodos naturales de 9% a 7%. En cuanto al uso de los gestágenos orales hay una ligera variación, en 1999 su uso era de un 26% y en el 2009 de un 25%.
   iii. *Con respecto a la edad de la primera relación sexual, existen grandes diferencias entre generaciones, las mujeres entre 40 y 44 años tuvieron su primera experiencia sexual a los 18 años y las mujeres de 15 a 19 años a los 12 años.*

6. El concepto clásico de probabilidad se ha venido construyendo paulatinamente en función de la identificación de los puntos muestrales que están a favor de un evento dentro del espacio muestral. No obstante, ante lo limitado de la definición clásica o laplaciana se requiere introducir el análisis probabilístico con base en la definición frecuencista o empírica, por la cual se aproximan las probabilidades mediante una frecuencia relativa determinada a través de una muestra aleatoria. Es necesario puntualizar que este enfoque genera una aproximación a las probabilidades, aprovechando la noción intuitiva de la ley de los grandes números para identificar la evolución que esas probabilidades van experimentando a medida que se incrementa el tamaño de la muestra.

7. En este mismo sentido, para analizar la ley de los grandes números, en las indicaciones puntuales se sugiere emplear una actividad un poco extensa pero que resulta sumamente ilustrativa. Por ello se recomienda realizarla por completo y orientar la actividad estudiantil durante el proceso. Pero además se pueden proponer otras actividades para complementar el análisis del tema.

Indicaciones de evaluación

En este ciclo se debe orientar la evaluación hacia la identificación de la capacidad de cada estudiante para emplear los conceptos estadísticos y leer e interpretar las situaciones que se le presentan. Es esencial que se valoren las destrezas para establecer estrategias que permitan plantear y resolver problemas por medio de la recolección, el ordenamiento, la representación (cuadros, gráficos o medidas de resumen) y el análisis de la información que se genera al valorar los patrones de variación de los datos; además de aquellos fenómenos asociados con el azar.

De acuerdo con lo anterior:

- ✓ Para el *trabajo cotidiano* se recomienda plantear actividades que permitan evaluar los procesos de resolución de problemas estadísticos y probabilísticos durante el trabajo estudiantil. En *Estadística,* se requiere prestar atención a la forma en que las y los estudiantes integran estos conocimientos para posibilitar un análisis global de datos que genere conclusiones a las interrogantes del problema planteado. En *Probabilidad* se requiere evaluar la capacidad de las y los estudiantes para identificar situaciones aleatorias, determinar su espacio muestral y elementos, o emplear los principios de probabilidad frecuencista y la ley de los grandes números para determinar probabilidades de eventos particulares y así favorecer la toma de decisiones.

- ✓ En relación con los *trabajos extraclase* se requiere implementar estrategias por medio de los cuales, mediante el trabajo individual o en subgrupos, las y los estudiantes planteen y resuelven problemas llevando a cabo una análisis lógico de cada uno de ellos. En primer lugar, con una adecuada interpretación de la situación planteada, y en segundo lugar, siguiendo con el establecimiento de una estrategia para su abordaje y su respectivo análisis. Luego, la puesta en práctica de la estrategia que puede implicar varias etapas, desde la recolección de datos hasta la interpretación de la información que se desprende de ellos (los cuales debe pasar por procesos de ordenamiento, clasificación y representación en cuadros, gráficos o el cálculo de medidas). Finalmente, ofrecer respuestas a las interrogantes que se generaron del problema. Un análisis similar se debe realizar para el trabajo en Probabilidades, en las cuales las estrategias que se vayan a implementar deben tomar en cuenta los mismos aspectos regulados en la descripción del *trabajo cotidiano*. Los problemas planteados en los proyectos deben permitir desarrollar los procesos básicos que se han sugerido: *Razonar y argumentar, Plantear y resolver problemas, Conectar, Representar* y *Comunicar*.

- ✓ Por último, para las *pruebas escritas* en *Estadística,* las preguntas que se incluyan deberían estar orientadas hacia la identificación de las características de los datos y sus propiedades, pero también a la destreza lograda por cada estudiante para leer e interpretar información del contexto estudiantil, comunal o nacional representada por diferentes técnicas (cuadros, gráficos, esquemas). Estos ítems deben motivar al estudiantado para expresar su habilidad para el agrupamiento, clasificación y lectura de datos y la identificación de patrones para interpretar la información. Por ello, no interesa evaluar definiciones u otros aspectos teóricos, sino la implementación de esos principios en problemas concretos. A continuación se presenta un ejemplo:

  Considere la información del cuadro adjunto que corresponde a los datos de una encuesta aplicada a 400 estudiantes de Primaria y Secundaria de una comunidad. Esta encuesta tenía como propósito identificar el trabajo infantil con los oficios en su propio hogar tales como: cuidar a hermanos menores, cocinar, lavar, planchar, limpiar la casa, entre otros.

Relación entre el sexo y el trabajo infantil para una muestra aleatoria de 400 estudiantes de educación Primaria y Secundaria de cierta comunidad

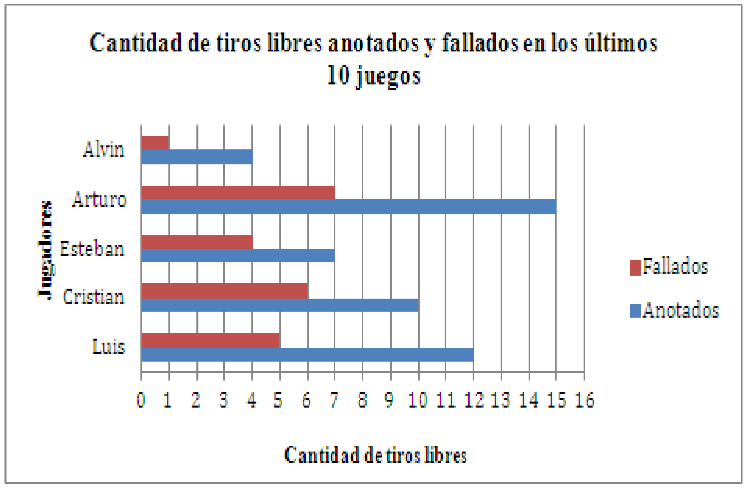
Trabajo infantil	**Sexo**		
	Niños	**Niñas**	**Total**
Hacen oficio en su hogar	100	84	184
No hacen oficio en su hogar	150	66	216
Total	**250**	**150**	**400**

Tomando en cuenta la información del cuadro se puede decir que:

a) *En términos relativos, los varones tienen una mayor participación en oficios domésticos.*
b) *En términos relativos, las mujeres tienen una mayor participación en oficios domésticos.*
c) *En términos absolutos, los varones tienen una menor participación en oficios domésticos.*
d) *En términos relativos, hombres y mujeres tienen igual participación en oficios domésticos.*

Aunque los problemas con el análisis de las probabilidades pueden diferir de los problemas eminentemente estadísticos, los principios básicos que los regulen deben ser los mismos. Por ello, las *pruebas escritas* deben orientarse hacia el adecuado uso de las herramientas probabilísticas para interpretar situaciones del contexto. Por ejemplo, observe el siguiente ítem:

Luis, Cristian, Esteban, Alvin y Arturo forman el equipo titular de baloncesto de su colegio. El siguiente cuadro presenta los tiros anotados y fallados por el equipo titular en los últimos 10 juegos.



De acuerdo a los datos anteriores y con el principio de probabilidad empírica, ¿quién tiene mayor probabilidad de anotar su primer tiro libre en el próximo partido?

a) Alvin
b) Arturo
c) Esteban
d) Luis

CICLO DIVERSIFICADO

Introducción al Ciclo diversificado

El Ciclo diversificado posee dos perspectivas: por un lado, profundiza, complementa y amplía los tópicos introducidos en el Tercer ciclo, y por el otro, aporta conceptos y procedimientos que serán relevantes para algunos estudiantes que proseguirán estudios superiores. En este ciclo los estudiantes asimilan conocimientos y habilidades matemáticas superiores, poseen un nivel cultural óptimo y por eso es un momento idóneo para cultivar el respeto y aprecio por las Matemáticas, provocar un sentido más amplio en la visualización de su utilidad y por lo tanto ampliar sus posibilidades para disfrutarlas. Es también una valiosa oportunidad para hacer más conexiones con otras materias y el entorno. Los niveles de expresión y comunicación matemática que se pueden lograr ahora son mayores que en los anteriores ciclos.

En este ciclo, *Medidas* y *Números* ocupan un tamaño muy pequeño pues son transversales a las otras áreas mediante su uso en problemas en contextos reales, mientras *Relaciones y álgebra* y *Estadística y probabilidad* aumentan significativamente, ocupando más del 70 por ciento de los tópicos del ciclo. *Geometría* ocupa un tamaño similar al que tenía en el Tercer ciclo.

En *Relaciones y Álgebra* se formaliza el concepto de función (tratamiento abstracto) introduciendo algunos elementos del lenguaje de los conjuntos numéricos. Además, se amplían las funciones estudiadas a las exponenciales y logarítmicas; el enfoque que se sigue con las funciones enfatiza su participación en el uso y diseño de modelos matemáticos, que ahora pueden ser más amplios. La modelización es uno de los rasgos importantes de este ciclo en esta área y busca completar una educación matemática con esa vocación desde el 1er Año escolar. El proceso *Plantear y resolver problemas* se acrecienta, para completar así la formación que servirá para abordar en la vida cotidiana problemas en distintos contextos con un cierto grado de matematización, así como sostener estudios superiores que impliquen con mayor intensidad este tipo de proceso.

En *Estadística y Probabilidad* se refuerzan y profundizan los conceptos desarrollados en el Tercer ciclo en cuanto a la utilización de medidas estadísticas de posición, y se introducen las medidas de variabilidad. Se formalizan las propiedades básicas del cálculo de probabilidades utilizando algunos elementos del lenguaje de conjuntos. Los tópicos que se desarrollan en esta área son instrumentales para visualizar la utilidad de las Matemáticas y el respeto por esta disciplina científica.

En este ciclo la Geometría es analítica con un especial énfasis en el estudio y representación de figuras geométricas en el plano (circunferencia, rectas, polígonos, etc.). También, se promoverá el desarrollo de habilidades relacionadas estrechamente con el sentido espacial (visualización, ubicación y movimiento). Esto permite concebir la naturaleza de la Geometría en la forma como se inscribe contemporáneamente en las Matemáticas y dotar a cada estudiante de elementos muy útiles para ciertas áreas de estudios superiores.

Con los mayores niveles de abstracción en que se trabaja en este ciclo es posible aumentar los procesos de razonamiento y argumentación, así como manejar una variedad mayor de representaciones matemáticas.

Ciclo diversificado, Geometría

Introducción

Al ingresar a este ciclo cada estudiante debe tener la habilidad de aplicar diversas propiedades de las figuras geométricas. Por otra parte, ya posee nociones básicas sobre trigonometría, geometría analítica, ubicación de puntos y figuras en el plano cartesiano y transformaciones en el plano (homotecia). También, tiene la habilidad de abstraer cuestiones geométricas y de argumentar usando propiedades matemáticas.

En el Ciclo diversificado se introducirá el estudio de la circunferencia desde el punto de vista analítico y la simetría de figuras en el plano cartesiano. Por otra parte, se profundizará en el estudio de los polígonos y de las transformaciones en el plano: rotaciones, traslaciones y reflexiones.

Los conceptos, procedimientos y propiedades en estos temas poseen grandes aplicaciones en la vida cotidiana, provocando el desarrollo de habilidades y competencias relacionadas estrechamente con la visualización, ubicación y movimiento en entornos, algo muy útil en artes gráficas, arquitectura, artesanía o simplemente en la manipulación ordinaria de las cosas que se encuentran dentro del espacio físico en el que se mueven las personas.

Se completa en este ciclo el conocimiento y el dominio de propiedades geométricas asociadas al progreso de la competencia matemática que se introduce y desarrolla en estos programas de Matemáticas desde un principio.

Este ciclo cierra la enseñanza media y se espera que al final el estudiantado tenga una idea cabal de lo que es la Geometría, sus métodos de trabajo, su relación con otras áreas y disciplinas y su importancia desde el punto de vista de la cultura general.

Propósito de la enseñanza

El propósito de la enseñanza de *Geometría* en este ciclo es estudiar analíticamente la circunferencia, algunos conocimientos relacionados con polígonos y algunas transformaciones en el plano.

Habilidades generales

Las habilidades generales que serán desarrolladas en *Geometría* durante este ciclo son:

- Representar las circunferencias de manera analítica y gráfica.
- Analizar relaciones de posición relativa entre rectas y circunferencias.
- Calcular áreas y perímetros de polígonos.
- Aplicar e identificar diversas transformaciones en el plano a figuras geométricas.
- Utilizar la geometría analítica para representar circunferencias y transformaciones.
- Identificar simetrías.
- Visualizar y aplicar características y propiedades de figuras geométricas tridimensionales.

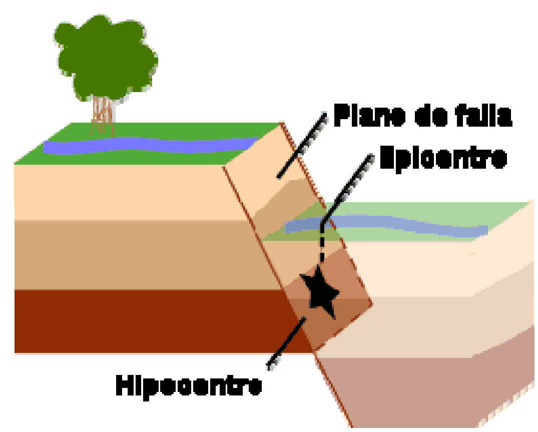
En este nivel son relevantes los procesos de argumentación y demostración, puesto que se trabaja con mayor grado de formalidad los aspectos conceptuales y algorítmicos. Además, se podrá motivar en las lecciones un mayor uso del vocabulario y simbología matemática en la argumentación de los resultados.

Los problemas geométricos que se usarán estarán en íntima conexión con *Medidas* y con otras áreas del conocimiento como el Álgebra, la Física, las Ciencias Sociales y otras, porque los problemas propuestos no estarán aislados de la realidad sino más bien estrechamente vinculados con actividades cotidianas.

Al existir un grado mayor de dificultad de los problemas planteados es fundamental que no se descarte de buenas a primeras una solución brindada por una o un estudiante, sino que se puedan rescatar las estrategias o varias nociones acertadas. Por eso los procesos *Comunicar* y *Representar* son fundamentales para el enriquecimiento de la construcción de las habilidades y para motivar actitudes de autoestima con respecto a las Matemáticas.

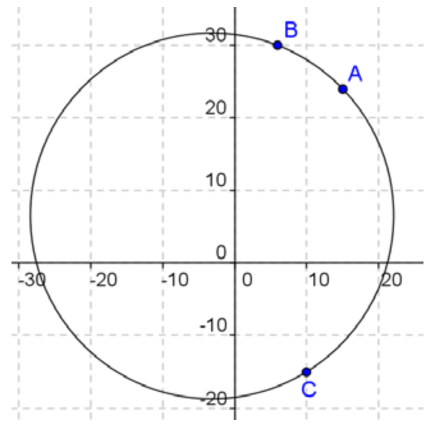
En este nivel se trabajará de lleno la resolución de problemas con atención especial a la estrategia utilizada más que al resultado, pues existirá diversidad de caminos para llegar a una misma solución.

Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

10° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Geometría Analítica • Circunferencia - Centro - Radio - Recta secante - Recta tangente • Recta exterior • Rectas paralelas • Rectas perpendiculares	1. Representar gráficamente una circunferencia dado su centro y su radio. 2. Representar algebraicamente una circunferencia dado su centro y su radio. 3. Aplicar traslaciones a una circunferencia. 4. Resolver problemas relacionados con la circunferencia y sus representaciones. 5. Determinar gráfica y algebraicamente si un punto se ubica en el interior o en el exterior de una circunferencia. 6. Determinar si una recta dada es secante, tangente o exterior a una circunferencia. 7. Representar gráfica y algebraicamente rectas secantes, tangentes y exteriores a una circunferencia.	▲ Se puede introducir la ecuación de la circunferencia utilizando como herramienta la fórmula de distancia entre dos puntos, la cual se desarrolló en 9º Año: $d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ ☺ Un movimiento sísmico es un movimiento vibratorio producido por la pérdida de estabilidad de masas de corteza. Cuando el movimiento llega a la superficie y se propaga por ésta se le llama terremoto.  El movimiento sísmico se propaga concéntricamente y de forma tridimensional a partir de ese punto de la Litósfera al hipocentro. Cuando las ondas procedentes del hipocentro llegan a la superficie terrestre se convierten en bidimensionales y se propagan de forma concéntrica a partir del primer punto de contacto con ella. Este punto se llama epicentro. **Fuente: Proyecto bisfera, España. http://recursos.cnice.mec.es/biosfera/alumno/4ESO/MedioNatural2/contenido2.htm** Hay un sismo y en tres estaciones se reportan ondas secundarias de similar intensidad. Tomando como punto de referencia la estación central sismológica las tres estaciones se ubican así: A: 24 millas al Norte y 15 millas al Este B: 30 millas al Norte y 6 millas al Este C: 15 millas al Sur y 10 millas al Este

a. ¿Cuál es la ubicación del epicentro con respecto a la estación central?
b. ¿Cuál fue el radio de alcance de la onda sísmica?
c. ¿Cómo se podría representar el comportamiento sísmico mediante una relación algebraica?

Lo que se quiere es que se plantee el problema en un eje de coordenadas.



Luego se obtiene la ecuación de la circunferencia por medio de la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

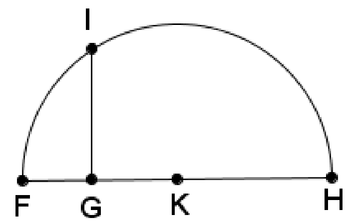
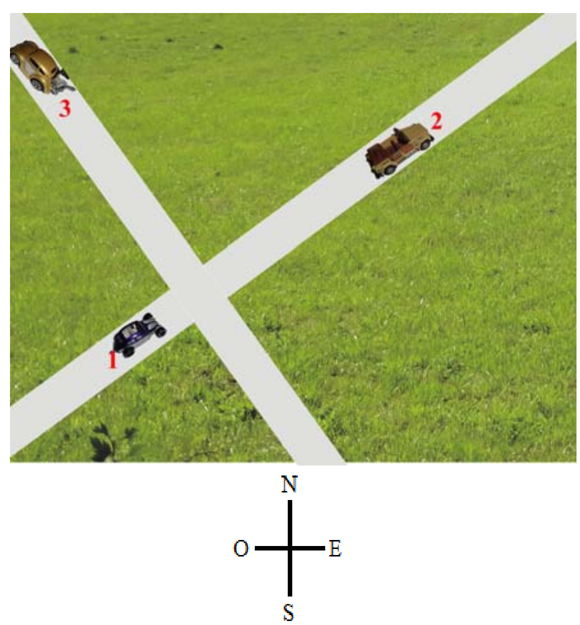
▲ Es importante describir la circunferencia como una relación entre las coordenadas de los puntos que la forman. También, conociendo las coordenadas de un punto, se deberá reconocer si éste se encuentra dentro, fuera o en la circunferencia.

Es interesante señalar, en el problema anterior, que las personas del pueblo que están 10 millas al Sur y 20 millas al Este de la estación central no deberían haber sentido el sismo; en cambio los habitantes de un pueblo que está a 5 millas al Oeste de la estación central sí lo sintieron ya que el pueblo está dentro del radio de la onda sísmica.

El problema anterior corresponde a un modelo que tiene conexión con otras disciplinas.

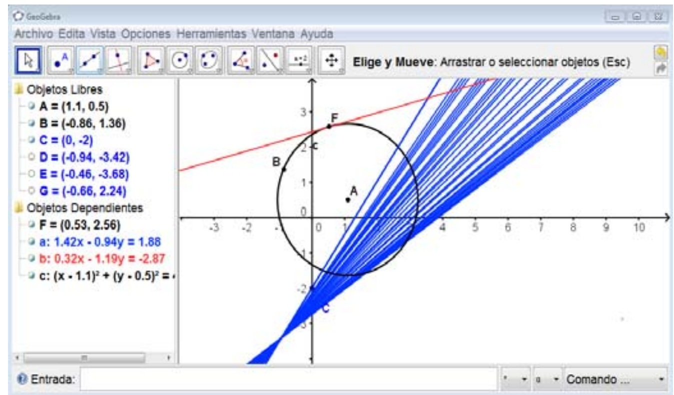
Un modelo como el anterior propicia la confianza en la utilidad de las Matemáticas.

Un elemento histórico con fines pedagógicos que puede utilizarse es la descripción realizada por el filósofo y matemático francés Descartes (1596-1650) de un método para obtener raíz cuadrada utilizando geometría. El siguiente texto es un fragmento tomado de *La Géometrie* (uno de los tres apéndices de su obra filosófica *Discours de la méthode)* sobre la extracción de la raíz cuadrada:

		Si hay que extraer la raíz cuadrada de GH, se le agrega en línea recta FG,  que es la unidad y dividiendo FH en dos partes iguales por el punto K, con ese punto como centro se traza el círculo FIH; luego elevando desde el punto G una línea recta, con ángulos rectos sobre FH, hasta I, es GI la raíz buscada.
	8. Analizar geométrica y algebraicamente la posición relativa entre rectas en el plano desde el punto de vista del paralelismo y la perpendicularidad. 9. Aplicar la propiedad que establece que una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio de la circunferencia en el punto de tangencia.	▲ Se puede proponer un problema como el siguiente: A partir del carro número 1, en la siguiente figura, el carro 2 se encuentra a 60 m al Este y 40 m al Norte, y el carro 3 a 24 m Oeste y X m al Norte, si las carreteras se cortan formando ángulo recto, ¿cuál es el valor de X?  **Elaboración propia** Se persigue que se desarrolle una exposición de las diversas estrategias. Esto llevará a la modelización mediante un sistema de coordenadas con origen en el carro 1 y, a partir de ahí, se trabajará la relación entre las ecuaciones de rectas perpendiculares. ▲ Se puede proponer un problema para introducir la relación entre las ecuaciones de rectas paralelas.

10. Utilizar software para representar circunferencias con condiciones dadas, representar traslaciones de circunferencias y clasificar rectas en secantes, tangentes y exteriores a la circunferencia.

Utilizando la tecnología se puede plantear una actividad donde se visualice, mediante la manipulación dinámica, si una recta es secante, tangente o exterior a una determinada circunferencia.



Polígonos

- Lado
- Radio
- Apotema
- Ángulo central
- Ángulo interno
- Ángulo externo
- Diagonal
- Perímetro
- Área
- Relaciones métricas

11. Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos.

12. Determinar las medidas de los ángulos internos y externos de polígonos en diversos contextos.

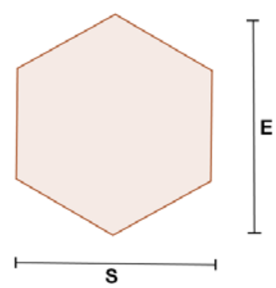
13. Determinar la medida de la apotema y el radio de polígonos regulares y aplicarlo en diferentes contextos.

14. Calcular perímetros y áreas de polígonos no regulares utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.

15. Resolver problemas que involucren polígonos y sus diversos elementos.

▲ Para iniciar el tema, se puede proponer el siguiente problema:

La siguiente figura representa la cabeza de un tornillo de forma hexagonal.



De acuerdo con los estándares internacionales, el fabricante presenta la siguiente tabla de medidas en milímetros.

S	4,00	5,50	7,00	8,00	10,00
E	4,38	6,08	7,74	8,87	11,05

Considerando las medidas anteriores:

a. ¿Se puede concluir que la cabeza del tornillo es un hexágono regular?
b. Si fuera así, ¿cuáles serían los valores aproximados de E para S = 13, S = 17, S = 19 y S= 24 respectivamente?
c. ¿Qué medida tendría el lado de la cabeza del tornillo si S = 7,00 mm.?
d. ¿Cuál sería su perímetro si E = 18,90?
e. ¿Cuál sería el área de la cabeza del tornillo si E = 21,10?

▲ La idea es que exploren ciertas relaciones métricas y propiedades del polígono regular antes de llevar a cabo la etapa de clausura.

Problemas como éste conectan de forma natural con unidades de medida y su utilidad en muchos oficios y campos de la Mecánica.

▲ Es importante que para trabajar con polígonos no regulares se repase la fórmula conocida desde primaria (base por altura entre 2) para calcular áreas de triángulos.

▲ Hay que tener presente que el cálculo de la medida de la apotema de un polígono puede requerir el uso de las razones trigonométricas.

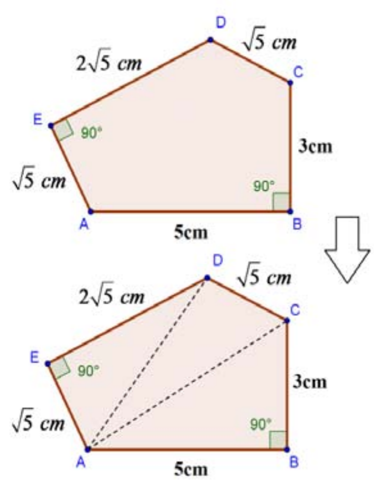
Un problema como el siguiente está relacionado con la indicación anterior y además hace conexión con el área de *Estadística y Probabilidad*.

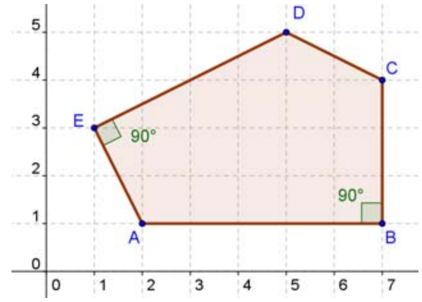
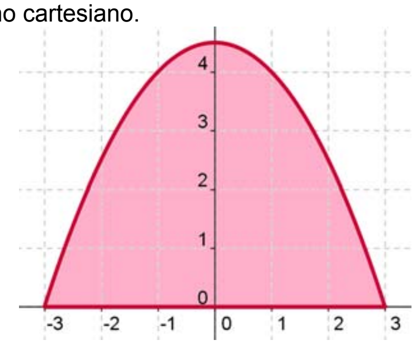
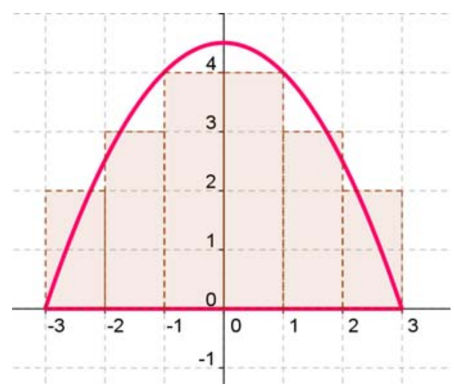
Un objetivo de tiro al blanco tiene la forma de un octágono regular con lados de 14 centímetros de longitud y tiene una diana circular con un diámetro de 3 centímetros.

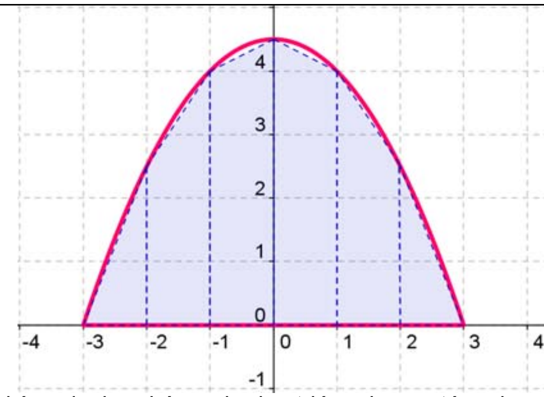
a. ¿Cuál es la probabilidad de que un dardo que da en el blanco vaya a dar en la diana?

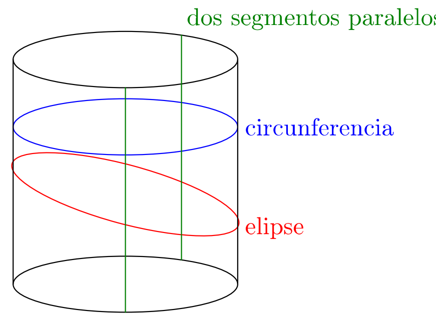
b. ¿Cuál es la probabilidad de que un dardo dé en la diana si el radio de la diana se duplica?

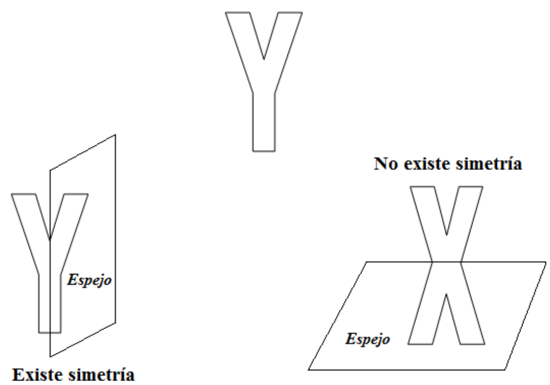
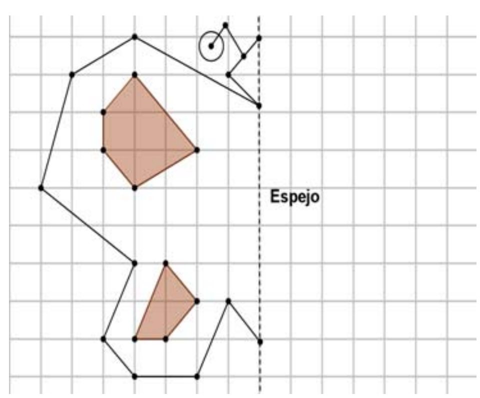
▲ Se pueden proponer problemas en donde se tenga que calcular el área de un polígono irregular conociendo las longitudes de sus lados o se ubique en una cuadrícula que indique sus dimensiones. Se recomienda descomponer el polígono irregular en triángulos en los que se conozca la medida de sus lados o se puedan averiguar para luego utilizar la fórmula básica del área, por ejemplo:

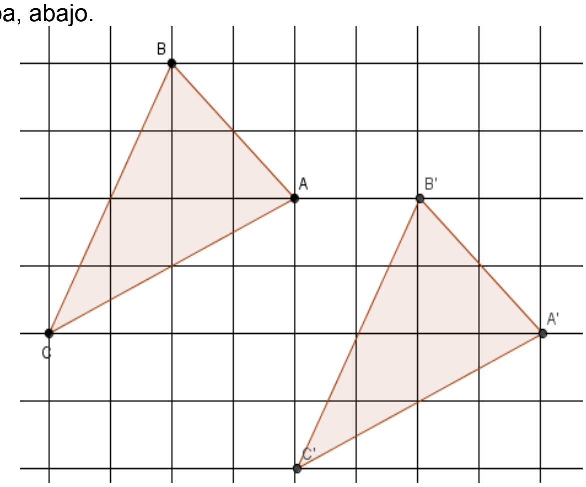


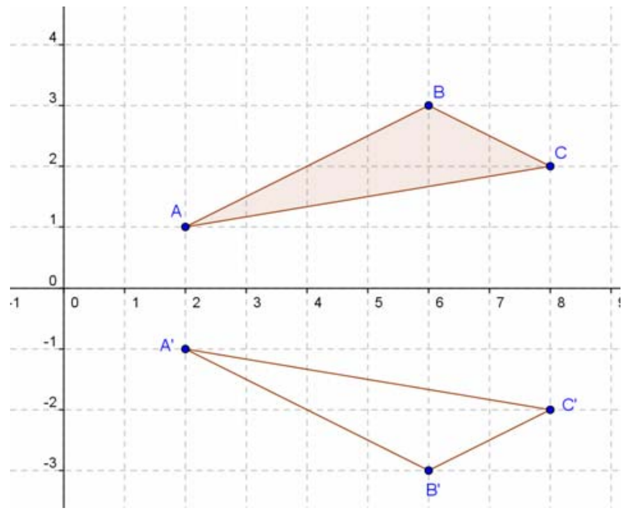
		El siguiente paso sería averiguar el área de un polígono irregular en un sistema de coordenadas, por ejemplo: 
	16. Estimar perímetros y áreas de figuras planas no poligonales utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.	▲ Por ejemplo, estime el área de la siguiente figura representada en el plano cartesiano.  Una primera aproximación se podría hacer utilizando rectángulos:  Una mejor aproximación se haría con trapecios:

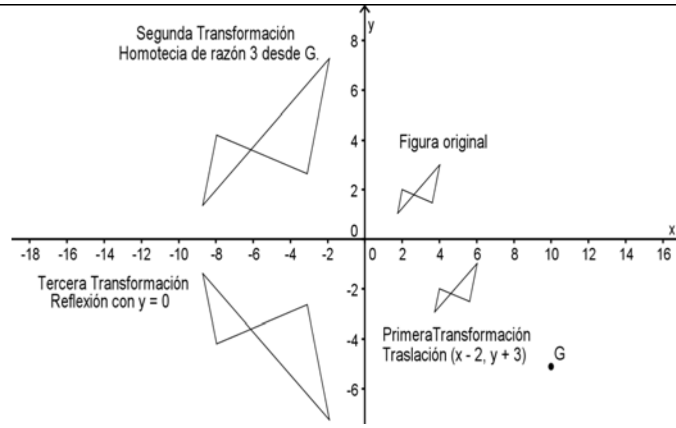
		 Se podría calcular el área de dos triángulos rectángulos y cuatro trapecios rectángulos de una unidad de altura. Podría señalarse intuitivamente la simetría de la figura y sólo calcular el área de una parte y multiplicarla por 2. Al final de la actividad, se puede brindar la ecuación de la parábola, con lo cual se obtienen las coordenadas de los puntos y el cálculo del área puede mejorarse. Esto permite establecer conexiones con *Relaciones y Álgebra.* Este tipo de razonamientos, en el que se aproximan líneas curvas y áreas de figuras no poligonales con polígonos de áreas conocidas, es un método que ha sido aplicado por varios matemáticos en diferentes momentos de la historiase puede ver en Eudoxo y Arquímedes.
	17. Utilizar software de geometría dinámica para estudiar propiedades y realizar conjeturas sobre las figuras geométricas.	Con el uso de un software de geometría dinámica se pueden comprobar varias propiedades de los polígonos regulares, como por ejemplo las relaciones métricas del hexágono regular en un sistema de coordenadas. También se puede aproximar el área de un círculo con polígonos regulares y observar que a mayor cantidad de lados mejor aproximación. 
Visualización espacial • Esfera • Cilindro circular recto	18. Identificar el radio y el diámetro de una esfera. 19. Identificar la superficie lateral, las bases, la altura, el radio y el diámetro de un cilindro circular recto.	▲ Para introducir el estudio de los cilindros se puede proponer un problema como el siguiente: De una tuca cilíndrica cuyo radio mide 10 cm se quiere obtener una viga de base cuadrada, mediante cuatro secciones planas. ¿Cuál es la medida máxima del lado del cuadrado de la base que se puede obtener?

• Base • Superficie lateral • Radio • Diámetro • Sección plana • Elipse	20. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de una esfera o un cilindro y características métricas de ellas. 21. Reconocer elipses en diferentes contextos.	 **Imagen cortesía de FreeDigitalPhotos.net** Luego del trabajo grupal, la etapa de clausura permite establecer qué figuras se obtienen al realizar secciones planas en un cilindro. Aquí se indica que la figura que se obtiene cuando se corta el cilindro con un plano que no es ni perpendicular ni paralelo al plano de la base se llama elipse (o es un arco de elipse).  No se trata de hacer un estudio detallado de la elipse, solamente se busca reconocer su forma al realizar cortes de un cilindro y evidenciar que aparece también en otros contextos. Se podrá conceptualizar el cilindro con una o dos bases según el contexto. En cuanto a los rectángulos y circunferencias que se obtienen al cortar cilindros o esferas, se pueden establecer sus dimensiones conociendo algunas de las medidas de los sólidos considerados. Por ejemplo, en una esfera de radio 8 cm, determinar el radio de la circunferencia que se obtiene al cortarla con un plano que dista 4 cm del centro de la esfera. El problema anterior sirve para hacer conciencia sobre el uso apropiado de los árboles como madera, y la necesidad de privilegiar la utilización de especies que se cultivan específicamente para ese uso. La elipse puede conectarse con varias aplicaciones científicas que pueden al menos ser mencionadas aquí; por ejemplo, la órbita de los planetas.

11° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Geometría analítica • Simetría axial • Imagen • Preimagen	1. Determinar ejes de simetría en figuras simétricas. 2. Identificar *elementos homólogos* en figuras que presentan *simetría axial.* 3. Trazar figuras simétricas utilizando un sistema de ejes coordenados en el plano. 4. Resolver problemas relacionados con la simetría axial.	▲ Se puede introducir el tema de forma intuitiva, con diferentes estrategias. Una de ellas es llevando a la clase diferentes imágenes y realizando dobleces de papel, para observar si coinciden todos los elementos.  **Imagen con derechos adquiridos por el MEP.** Otra estrategia sería utilizar un espejo para mostrar la simetría de una figura, por ejemplo con la letra mayúscula Y:  ▲ Otro tipo de actividad puede ser la siguiente: Si la línea punteada es un espejo, reflejar la imagen de la izquierda al lado derecho. 

		Luego se pueden plantear las siguientes interrogantes: a. ¿Qué figura se forma? b. ¿Qué características encuentra en la figura? c. ¿Qué elementos homólogos hay entre el lado derecho y el izquierdo? d. ¿En la realidad la mariposa cumple con estas características? e. ¿Qué otras figuras tienen simetría? Tome un punto cualquiera como origen de coordenadas. Escriba las coordenadas de los puntos marcados en la figura y diga cuáles son las coordenadas de los puntos homólogos correspondientes. ▲ La última parte de la actividad tiene muchas posibilidades, debe permitirse que cada estudiante escoja el punto que quiera. ▲Lo que se quiere es que poco a poco se vaya construyendo el concepto de simetría y luego el de simetría axial, así como los conceptos de eje de simetría, preimagen e imagen, entre otros. ▲ Después de utilizar papel cuadriculado puede utilizar el sistema de coordenadas para profundizar la comprensión del concepto de simetría. La simetría está muy ligada al arte y a la belleza de la naturaleza, es por esto que los ejercicios deben utilizar imágenes que motiven y fortalezcan la actitud de respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas.
Transformaciones en el plano • Traslaciones • Reflexiones • Homotecias • Rotaciones	5. Aplicar el concepto de traslación, homotecia, reflexión y rotación para determinar qué figuras se obtienen a partir de figuras dadas. 6. Identificar elementos de las figuras geométricas que aparecen invariantes bajo reflexiones o rotaciones. 7. Trazar la imagen reflejada de una figura dada con respecto a una recta. 8. Trazar la imagen de una figura dada si se la somete a una rotación. 9. Trazar en un plano cartesiano la figura que se obtiene al someter una figura a una traslación, rotación u homotecia o combinaciones de ellas.	▲ Para iniciar con el tema de transformaciones en el plano se puede plantear el siguiente problema: De acuerdo con los siguientes triángulos, ¿cuál es el “movimiento” que sufre el triángulo ABC? Utilice indicaciones como unidades a la derecha, izquierda, arriba, abajo.  Aquí no se está trabajando con coordenadas pues lo que se quiere es observar la traslación primero intuitivamente (“2 lugares hacia abajo y 4 lugares hacia la derecha”), luego se formulan problemas utilizando coordenadas.

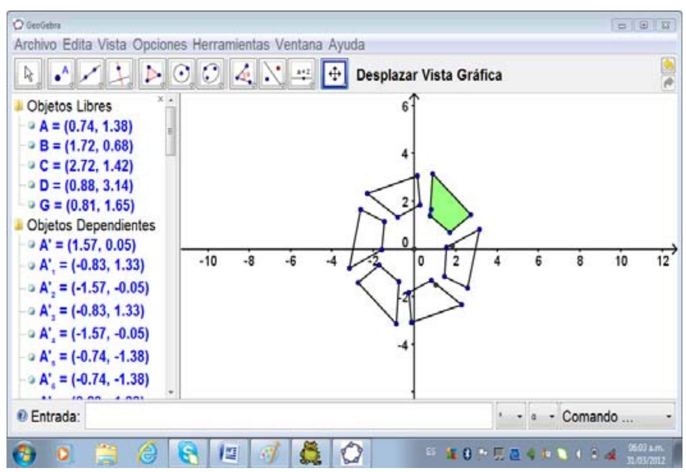
	10. Determinar el punto imagen de puntos dados mediante una transformación. 11. Resolver problemas relacionados con diversas transformaciones en el plano.	Para el caso de reflexiones es importante hacer una conexión con las habilidades relacionadas con la simetría axial (tema que ya se abordó anteriormente); por ejemplo, dado el triángulo ABC y el eje de las abscisas como “espejo” se obtiene el triángulo A’B’C’.  Es importante notar y discutir lo siguiente: A(2,1) y A’(2,-1) B(6,3) y B’(6,-3) C(8,2) y C’(8,-2). Luego se realiza la etapa de cierre definiendo los conceptos de traslación y reflexión en el plano coordenado de manera formal. ▲ En 8°Año se trabajó con la homotecia de un punto y una figura poligonal. En este año se busca seguir resolviendo ejercicios de este tema y complementarlo con las demás transformaciones. Por ejemplo, dada la figura ABCD y el punto E(8,-4) realice las siguientes transformaciones secuencialmente: a. Traslación (x – 2, y +3). b. A la figura obtenida en a., realice una homotecia de razón 3 desde el punto G(10,-5). c. A la figura obtenida en b. reflejarla con respecto a y = 0.



Se utilizará la notación g(A)=A’ para indicar la imagen de un punto A bajo una transformación g. Por ejemplo, para el caso de la traslación del ejemplo anterior, la imagen de $A(x, y)$ es $A'(x-2, y+3)$.

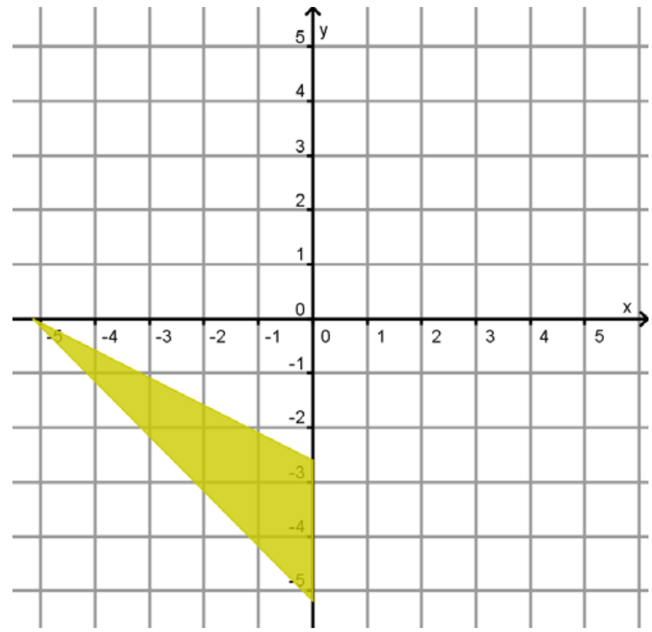
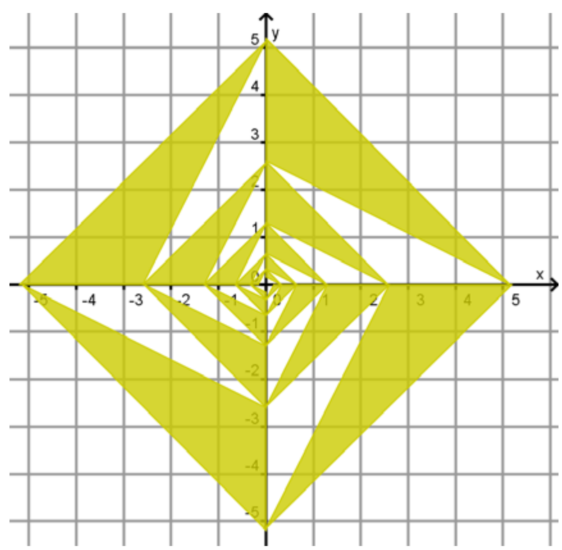
Se pueden también plantear varios problemas en los cuales se necesita involucrar el “sentido dinámico” de las transformaciones. Para su resolución se puede utilizar la computadora y un software idóneo que permita realizar diferentes transformaciones. Gracias a este software se logrará la manipulación dinámica de la figura dada, generando cambios también en la figura resultante de la transformación.

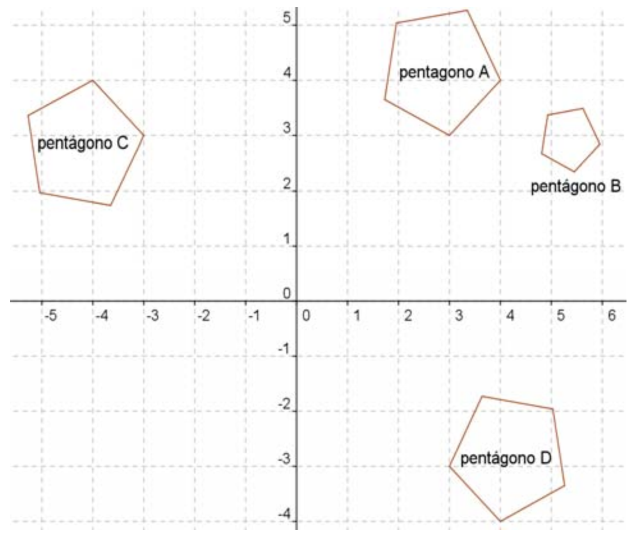
El uso de coordenadas permite profundizar en estos conceptos. Por ejemplo, el tema de rotaciones de figuras es recomendable explorarlo con un software dinámico.



Se debe enfatizar que las transformaciones aplicadas sobre las figuras son simplemente una forma de representación a conveniencia de las mismas formas geométricas.

Una breve descripción sobre las geometrías no euclidianas puede proporcionar una idea apropiada de lo que es una teoría matemática.

	12. Utilizar software de geometría dinámica para el análisis de las propiedades de las traslaciones, homotecias y reflexiones.	El software permite la manipulación dinámica de una figura dada, se puede “jugar” con las transformaciones para crear figuras. Por ejemplo, a partir de la figura A, construir a través de transformaciones la figura B. **Figura A**  **Figura B** 
	13. Plantear ejercicios o problemas que involucren alguna transformación o transformaciones de figuras en el plano.	Se sugiere plantear un procedimiento inverso. En lugar de indicar que se realice una determinada transformación en una figura determinada, se puede presentar una serie de imágenes con varias transformaciones de la figura, y se pide plantear un problema que tenga como solución esas transformaciones.

		Por ejemplo, los siguientes pentágonos son regulares; plantear un ejercicio que tenga como solución la siguiente representación gráfica:  Existen varios posibles ejercicios que tienen como solución la anterior imagen, por ejemplo se podría proponer lo siguiente: Primero, dado el pentágono A realice una homotecia de razón $\frac{1}{2}$ y llámelo pentágono B. Luego, al pentágono C refléjelo con respecto a la recta $y = x$ y llámelo pentágono D.
Visualización espacial • Cono circular recto • Vértice • Base • Superficie lateral • Radio • Diámetro • Sección plana • Elipse • Parábola • Hipérbola	14. Identificar la superficie lateral, la base, la altura, el radio y el diámetro de la base y el vértice de un cono circular recto. 15. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de un cono circular recto y características métricas de ellas. 16. Reconocer elipses, parábolas e hipérbolas en diferentes contextos. 17. Plantear y resolver problemas que involucren secciones de un cono mediante planos paralelos a la base.	▲ Puede introducir el tema mediante una nota histórica como la siguiente: Se atribuye a Menecmo (alrededor de 350 antes de nuestra era) el descubrimiento de una familia de curvas que le sirvieron en sus investigaciones sobre el problema de la duplicación del cubo. Tales curvas pueden ser obtenidas mediante secciones planas de un cono, por ese motivo reciben el nombre de **secciones cónicas**. En el siglo III antes de nuestra era, Apolonio escribió el tratado *Las Cónicas* en el que sistematizó todo lo que se conocía hasta ese momento sobre estas curvas y amplió el conocimiento de ellas. ▲ La idea es que se reconozcan circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas en el contexto de secciones planas de un cono circular recto. En cuanto a parábolas, elipses e hipérbolas, no se trata de hacer un estudio detallado de estas figuras, solamente se refiere a reconocer su forma en el contexto de cortes de un cono y evidenciar que aparecen también en otros contextos.

		En cuanto a la relación de la circunferencia con el cono, se pueden establecer algunas relaciones métricas. Por ejemplo, dado un cono de altura 5 cm y radio de la base 2 cm, determinar el radio de la circunferencia que se obtiene si se hace un corte con un plano paralelo al plano de la base, que dista 2 cm del plano de la base. Este problema hace uso de conocimientos previos como la semejanza de triángulos. Es conveniente puntualizar que la parábola como sección plana de un cono es otra forma de representación de dicha curva, además de las estudiadas en *Relaciones y Álgebra*.

Indicaciones metodológicas

Generales para el ciclo

1. El grado de rigor propio de la disciplina deberá ser mayor que en el Tercer ciclo.

2. Se solicitara a las y los estudiantes algunas demostraciones justificando los pasos seguidos en el proceso.

3. La conjetura, el uso de contraejemplos y el aprendizaje a partir del error juegan un papel relevante al igual que en el Tercer ciclo.

4. En este ciclo se hace mucho más evidente la importancia de relacionar la geometría sintética con la analítica, tanto en el tratamiento de la circunferencia como en el de las transformaciones.

5. El uso de software de geometría dinámica es fundamental en el tratamiento de los diferentes temas.

Décimo año

1. El proceso matemático *Representar* se ve potenciado en este año al establecerse la relación estrecha entre la representación geométrica y la analítica, particularmente en el caso de la circunferencia.

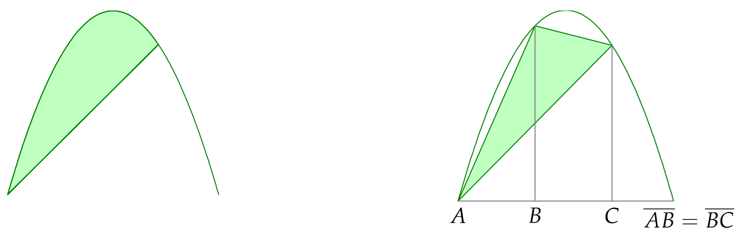
2. Se debe tener claro que algebraicamente se puede determinar si una recta dada es tangente o secante o exterior a una circunferencia dada. A través de dibujos de circunferencias y rectas en el plano, se pretende analizar si, respectivamente, la recta y la circunferencia tienen sólo un punto en común, o dos o ninguno. Para proceder algebraicamente debe entenderse que el que un punto sea común a ambos significa que sus coordenadas satisfacen ambas ecuaciones simultáneamente, por lo que se debe tener presente el concepto de ecuación de una figura.

   Considerando lo anterior, el asunto se reduce a determinar si una ecuación de segundo grado tiene una solución, dos soluciones o ninguna solución.

   Por ejemplo, dada la circunferencia de ecuación $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ y la recta de ecuación $y=2x+3$, determinar si la recta es exterior, secante o tangente a la circunferencia. Si un punto (x,y) pertenece a ambas curvas entonces debe satisfacer ambas ecuaciones, por lo tanto se sustituye $y=2x+3$ en la ecuación de la circunferencia: $(x-1)^2+(2x+3-2)^2=4$. Esto lleva a analizar la ecuación $5x^2 + 2x - 2 = 0$, cuyo discriminante es 44 que es positivo. La ecuación tiene dos soluciones, esto quiere decir que hay dos valores distintos de *x* que la satisfacen y por lo tanto hay dos puntos en común entre la recta y la circunferencia; es una secante.

3. El estudio de las áreas puede ser abordado mediante la Historia. Por ejemplo, Arquímedes de Siracusa aproximó el valor del número π. Para ello dibujó un polígono regular inscrito y otro circunscrito a una misma circunferencia, de manera que la longitud de la circunferencia y el área del círculo quedan acotadas por esos mismos valores de las longitudes y las áreas de los dos polígonos. A medida que se incrementa el número de lados del polígono la diferencia se acorta y se obtiene una aproximación más exacta. Partiendo de polígonos de 96 lados cada uno, Arquímedes calculó que el valor de π debía encontrarse entre $3\,{}^{10}/_{71}$ (aproximadamente 3,1408) y $3\,{}^{1}/_{7}$ (aproximadamente 3,1429), lo cual es consistente con el valor real de π.

   A esta técnica se le conoce con el nombre de método de exhaución. También demostró que el área del segmento parabólico de la figura que aparece abajo a la izquierda es igual a 4/3 de la del triángulo inscrito de la figura de abajo a la derecha.



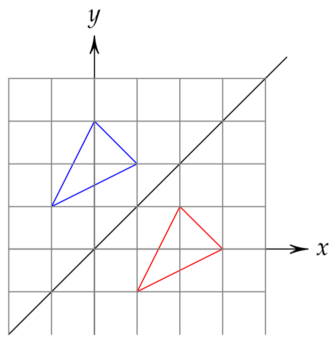
Fuente: Boyer, C. (1992). *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial, Madrid.

4. En cuanto al estudio de las esferas y cilindros, se busca la identificación de sus elementos, y además identificar las figuras que se forman cuando se cortan con un plano. Para esto pueden ayudar modelos con plastilina u otro material que puedan ser cortados para evidenciar qué sección plana se obtiene.

Undécimo año

1. Es conveniente desarrollar la habilidad para determinar la imagen bajo la reflexión de un punto dado. Por ejemplo, cuál es el punto imagen de $(-1,2)$ cuando se refleja sobre la recta $y = x$. Se puede trazar el punto y la recta en un sistema de ejes cartesianos y verificar que el punto imagen es $(2,-1)$. Gráficamente se puede determinar que la imagen de (x, y) bajo la reflexión sobre la recta $y = x$ es (y, x).

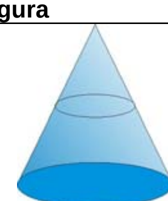
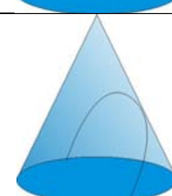
2. También se podrá determinar la figura que se obtiene como imagen de otra mediante una reflexión. Para esto debe ser evidente que la reflexión preserva las distancias y la relación de estar entre, es decir si C está entre A y B entonces C' está entre A' y B'. Lo anterior implica que si se quiere determinar la imagen de un segmento AB basta con determinar las imágenes de A y B, y entonces la imagen de $\overline{AB}$ es $\overline{A'B'}$. Ejemplo: determinar la imagen del triángulo de vértices $A(-1,1), B(0,3), C(1,2)$ bajo la reflexión sobre la recta $y = x$. Las imágenes de los vértices son $A'(1,-1), B'(3,0), C'(2,1)$, de modo que la imagen de ΔABC es $\Delta A'B'C'$.



3. En cuanto al estudio del cono, se busca además de la identificación de sus elementos, que se puedan identificar las figuras que se forman cuando se cortan con un plano. Para esto pueden ayudar modelos con plastilina u otro material que pueda ser cortado. El estudio del cono se puede utilizar para repasar temas como trigonometría o el teorema de Pitágoras.

4. Para enriquecer y facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje del tema de transformaciones en el plano es muy relevante que los problemas iniciales puedan ser tratados mediante un software de geometría dinámica, ya que éste permite visualizar movimientos y realizar las transformaciones de una forma sencilla y rápida. Hay que tener presente que el uso de geometría dinámica no implica necesariamente el uso de un laboratorio de cómputo, basta utilizar una computadora y un videobeam. Por otra parte, el uso de geometría dinámica como medio didáctico implica que la o el docente elabore una guía de trabajo que permita al conjunto de la clase alcanzar las habilidades respectivas.

5. Las secciones planas de un cono son:

Plano	Nombre de sección	Figura
Paralelo al plano de la base del cono	Circunferencia	
Oblicuo con respecto a la base del cono (sin cortarla)	Elipse	
Oblicuo con respecto a la base del cono, paralelo a la generatriz (sin pasar por el vértice)	Parábola	
Perpendicular al plano de la base del cono, sin pasar por el vértice	Hipérbola	

Elaboración propia

6. Esta es una breve reseña histórica sobre las geometrías no euclidianas.

El libro *Elementos* de Euclides tuvo un gran impacto en la historia humana y fue el referente para el estudio de la Geometría durante milenios. El quinto de los postulados de Euclides enuncia en términos actuales que "en el plano, por un punto fuera de una recta se puede trazar una y sólo una recta paralela a la recta dada".

Desde Euclides hasta el siglo XIX muchos matemáticos intentaron demostrar el quinto postulado a partir de las nociones comunes y de los otros postulados. Sin embargo, todos los intentos fueron vanos: parecía que el quinto postulado sí era un postulado. Así que, en la primera mitad del siglo XIX, a algunos matemáticos se les ocurrió pensar que a pesar de que el postulado parecía una verdad evidente podía ser cambiado.

De esta manera, cambiando el quinto postulado, Gauss, Lobachevsky y Bolyai crearon independientemente geometrías no euclidianas; es decir, geometrías en las que el quinto postulado de Euclides no se cumple. Una de estas geometrías asume, en sustitución del quinto postulado, que por un punto exterior a una recta pasa un número infinito de rectas paralelas a la dada (es decir que no la cortan). Otra asume que por un punto exterior a una recta no pasa ninguna recta paralela.

En ambos casos se crean teorías matemáticas completamente válidas que además son útiles en determinados contextos.

Indicaciones de evaluación

Al igual que en el ciclo anterior, durante el *trabajo cotidiano* se puede evaluar el uso apropiado del vocabulario y la simbología matemática, así como la construcción de sólidos y el uso de la tecnología para realizar transformaciones.

Para el *trabajo extraclase* se pueden proponer trabajos donde las y los estudiantes apliquen los conocimientos para reconocer las Matemáticas en situaciones generales relacionadas con el arte, las Ciencias o la cultura en general. Por ejemplo, en 11º Año investigar sobre teselados y elaborar un diseño propio para teselar el plano. También construir sólidos o partes de un sólido, o bien utilizar sólidos para realizar una construcción arquitectónica o una ciudad.

Para la evaluación mediante tareas cortas (*trabajo extraclase*) y *pruebas* se deben tener presentes las siguientes indicaciones.

- ✓ Debe considerarse el uso correcto del vocabulario, la notación y las diferentes propiedades que se traten. Debe exigirse precisión y fundamentación de los razonamientos cuando se argumenta con respecto a la solución de un problema determinado.

- ✓ Una habilidad que debe evaluarse es la de realizar trazos en el plano utilizando un sistema de coordenadas cartesianas. Además se debe evaluar que se identifiquen los ejes de simetría, los elementos homólogos en figuras simétricas, así como el trazo de figuras simétricas utilizando un sistema de ejes coordenados en el plano. Se debe prestar especial atención a este tema ya que será clave en la comprensión de la reflexión de figuras en el plano.

- ✓ Con el uso de un sistema de coordenadas cartesianas deberá evaluarse la habilidad de trazar una circunferencia dados su centro y su radio. Se puede pedir, por ejemplo, determinar el radio de una circunferencia que pasa por un punto dado y tiene un centro dado. Otro posible ejercicio de evaluación consiste en pedir que se determine la ordenada de un punto en una circunferencia a partir de cierta información sobre la circunferencia o que dadas las coordenadas de un punto se determine si éste está en la circunferencia o en el interior o exterior de ésta.

- ✓ En cuanto a las transformaciones en el plano es fundamental que puedan trazar la figura que se obtiene mediante una transformación dada o mediante una composición de transformaciones. Se deberán identificar elementos de las figuras geométricas que permanecen invariantes bajo una traslación, reflexión u homotecia. También se puede solicitar que se indique cuáles son los puntos imagen de puntos dados si se aplican diferentes transformaciones. Además se busca que se puedan resolver problemas relacionados con diversas transformaciones en el plano. Un ejemplo de ítem de reproducción:

  Se considera un triángulo de vértices (0,0), (0,2), (-1,1).
  a) Determine los vértices del triángulo que se obtienen al aplicar una reflexión con respecto a la recta y=x y luego una homotecia de centro (0,0) y razón 2.
  b) Determine los vértices del triángulo que se obtienen al aplicar primero la homotecia y luego la reflexión dadas en (a).
  c) Comente los resultados obtenidos.

- ✓ En cuanto a las figuras tridimensionales, cada estudiante deberá identificar sus diferentes elementos. Deberá evaluarse la determinación de figuras mediante secciones planas de los sólidos estudiados y relaciones métricas entre ellas. Un ejemplo de ítem de reflexión es el siguiente:

  Una esfera de radio 8 cm es cortada por un plano. El radio de la sección obtenida es $\sqrt{60}$, ¿a qué distancia se encuentra el centro de la esfera del radio de la sección?

Ciclo diversificado, Relaciones y Álgebra

Introducción

Al ingresar a este ciclo cada estudiante deberá haber desarrollado la habilidad para resolver ecuaciones de primer y de segundo grado, identificar una relación matemática en distintas representaciones así como pasar de una representación a otra. En particular deberá poder trazar la gráfica de funciones lineales y la gráfica de funciones cuadráticas. Al llegar a esta fase cada estudiante también debe comprender el concepto de variable e identificar cuantitativamente cambios en ella.

Durante el Ciclo diversificado se formalizará el concepto de función que ha sido trabajado desde la enseñanza Primaria como relación entre variables, y se ampliarán las habilidades desarrolladas con dichas funciones, incluyendo otros tipos especiales de funciones. Para su formalización se introducirán algunos elementos del lenguaje de los conjuntos numéricos.

Por medio de los conceptos abstractos de funciones, cada estudiante podrá apreciar y ampliar mejor algunas propiedades matemáticas de las funciones que fueron introducidas en 8º y 9º Año. Se da un énfasis visual por medio del uso de gráficas cuya construcción se ve favorecida por el uso de tecnologías digitales.

Las funciones exponencial, logarítmica y la modelización constituyen el foco de 11º Año. Se estudian las funciones inversas y sus representaciones (gráfica y algebraica), así como su relación con situaciones contextualizadas. Este último aspecto es crucial: se busca que cada estudiante pueda identificar y aplicar algunos modelos que utilizan estas funciones.

El uso de tecnología digital como por ejemplo software graficador potencia la construcción de representaciones gráficas además de servir de apoyo en cálculos tediosos y complejos.

Propósito de la enseñanza

El propósito de la enseñanza en *Relaciones y Álgebra* para este ciclo es desarrollar en cada estudiante habilidades para interpretar, representar y resolver problemas, utilizando el lenguaje funcional en sus distintas representaciones con el fin de explorar y modelar situaciones del contexto.

Habilidades generales

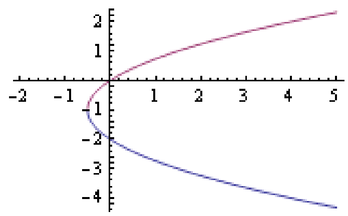
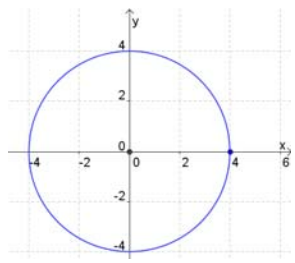
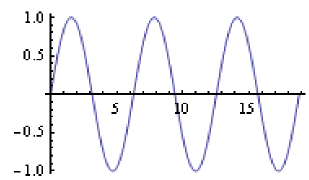
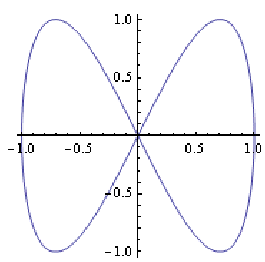
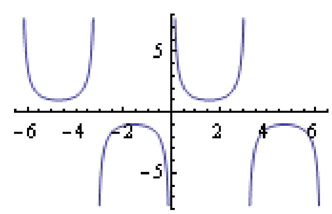
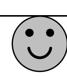
Las habilidades generales que deberá tener cada estudiante en *Relaciones y Álgebra* al finalizar el Ciclo diversificado son:

- Utilizar elementos del lenguaje de los conjuntos numéricos para representar dominio y rango de funciones, así como el conjunto solución de ecuaciones.
- Aplicar el concepto de función en diversas situaciones.
- Utilizar distintas representaciones de algunas funciones algebraicas y trascendentes.
- Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada.
- Determinar el modelo matemático que se adapta mejor a una situación dada.

El área de *Relaciones y Álgebra* ocupa proporcionalmente un espacio más amplio en este ciclo. Se potencia la resolución de problemas, la modelización (las funciones exponencial y logarítmica), se apela al uso de múltiples representaciones (tabulares, gráficas, algebraicas y verbales), se establecen conexiones estrechas con las otras áreas matemáticas del currículo y con otras materias. El tratamiento más abstracto de las funciones obliga a una mayor formalización en la argumentación y la comunicación matemática, de tal forma que todos los procesos matemáticos seleccionados por este currículo ocupan un lugar primordial en este ciclo.

Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

10° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Conjuntos numéricos • Unión • Intersección • Pertenencia • Subconjunto • Complemento • Intervalos	1. Analizar subconjuntos de los números reales. 2. Utilizar correctamente los símbolos de pertenencia y de subconjunto. 3. Representar intervalos numéricos en forma gráfica, simbólica y por comprensión. 4. Determinar la unión y la intersección de conjuntos numéricos. 5. Determinar el complemento de un conjunto numérico dado.	▲ Utilizar subconjuntos finitos o infinitos de los números reales, en particular el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, el de los números enteros $\mathbb{Z}$, los decimales $\mathbb{D}$, los racionales $\mathbb{Q}$, los irracionales $\mathbb{I}$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$ para los enteros positivos y los negativos respectivamente, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^-$ para los racionales positivos y los negativos respectivamente. Otros conjuntos de interés son el de los números pares, el de los impares y el de los números primos. ▲ El análisis de subconjuntos contempla identificar, describir y caracterizar subconjuntos de los números reales. Lo que se busca es utilizar estos conocimientos como lenguaje para el tratamiento de funciones y ecuaciones.
Funciones • Concepto de función y de gráfica de una función • Elementos para el análisis de una función - Dominio - Imagen - Preimagen - Ámbito - Inyectividad - Crecimiento - Decrecimiento - Ceros - Máximo y mínimo	6. Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función.	▲ Cada estudiante ya ha trabajado con funciones lineales y cuadráticas, ha desarrollado habilidades relacionadas con la identificación de variables independientes, dependientes y sus diversas representaciones. De lo que se trata es de ampliar estos conocimientos. ▲ Proponer un problema donde se establezca una relación entre variables. Durante una hora, se monitorea la posición de un objeto que se mueve rectilíneamente a razón de 1,25 m por segundo en sentido Este-Oeste con respecto a un punto de referencia dado. El monitoreo empezó cuando el objeto estaba ubicado a 140 m al Este de dicho punto de referencia. a. Determine una expresión matemática que indique la posición "*P*" del objeto conforme transcurre el tiempo "*t*" medido en segundos. b. Represente gráficamente en un sistema de ejes cartesianos dicha situación. ▲ En la etapa de cierre se sugiere presentar el concepto de función como una relación entre variables, mencionando los elementos involucrados y sus representaciones, para luego formalizar dicho concepto como una correspondencia unívoca entre dos conjuntos. Aquí se debe introducir un tratamiento abstracto que no se había hecho en los ciclos anteriores. ▲ Las funciones establecidas en el programa son funciones reales de variable real. Como codominio de la función se utilizará su ámbito o rango. Esta estrategia simplificará el tratamien-

- Análisis de gráficas de funciones • Composición de funciones • Función lineal • Función cuadrática		to de funciones inversas, pues exigirá únicamente analizar la inyectividad de la función. Utilizar un conjunto más amplio que el rango exigiría comprobar la sobreyectividad para garantizar la existencia de la inversa de una función. ▲ Se recomienda aportar algunas tablas, gráficas y ecuaciones relacionando a dos variables para que cada estudiante indique, con la respectiva justificación, cuáles corresponden a función y cuáles no.  ¿Cuáles representaciones gráficas corresponden a una función? La variable representada en el eje horizontal es la independiente y la del eje vertical es la dependiente.      ▲ Las gráficas anteriores fueron generadas con software graficador a partir de los criterios de las relaciones. Es recomendable que cada docente utilice, en la medida de lo posible, software para generar gráficas como las anteriores.  Es útil mencionar algunos aspectos del desarrollo del concepto de función a través de la historia.
	7. Evaluar el valor de una función dada en forma gráfica o algebraica, en distintos puntos de su dominio.	 La curva en la gráfica siguiente representa los ingresos del Gobierno Central durante los años 2000 hasta el 2009 (líneas quebradas negras).

8. Analizar una función a partir de sus representaciones.

9. Calcular la composición de dos funciones.

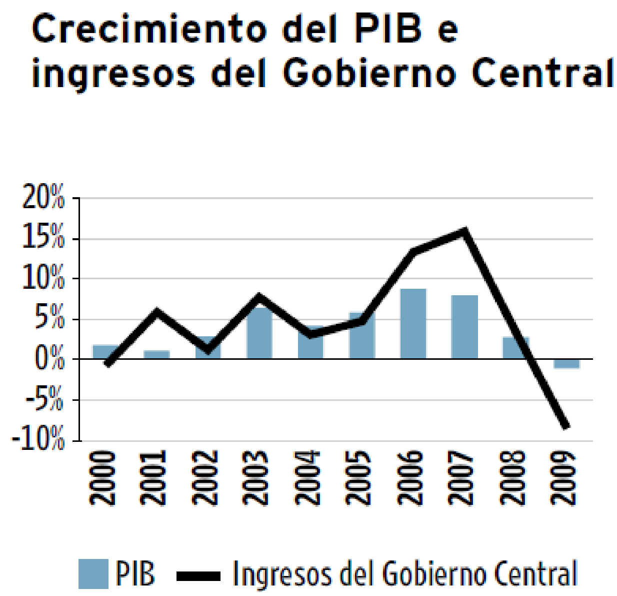


Imagen tomada de: Estado de la Nación 2010, capítulo 3, página 158

a. ¿En qué intervalos la función es creciente?
b. ¿En qué intervalos la función es decreciente?
c. ¿Cuál es el dominio de la función?
d. ¿Cuál es su ámbito (aproximado)?
e. ¿Es inyectiva la función?
f. ¿Cuáles son los ceros (aproximados) de la función?
g. ¿Cuál es la imagen (aproximada) de 2007?
h. ¿En cuáles intervalos la función es negativa?
i. ¿Cuál es el valor máximo (aproximado) de la función?
j. ¿Cuál es el valor mínimo (aproximado) de la función?

▲ Para evaluar una función en distintos puntos de su dominio, utilice distintas representaciones.

Algebraica

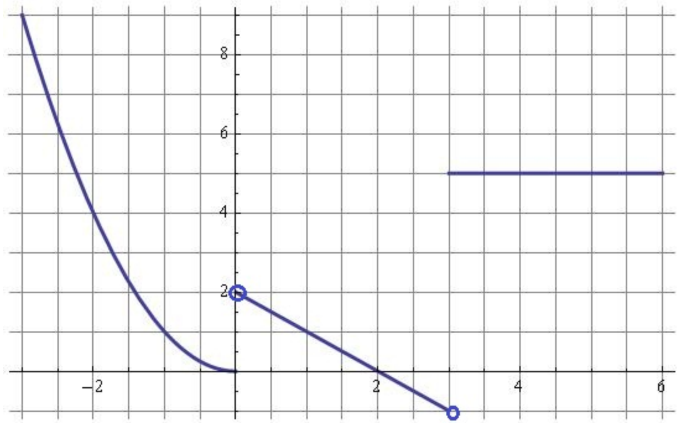
Sea $f(x) = 2x^3 + 5x - 8$, con dominio $\mathbb{R}$. Complete la tabla:

x	$f(x)$
-2	
t	
$\frac{1}{a^2}$	
	-8

Para la última entrada de la tabla el problema consiste en resolver una ecuación algebraica para encontrar las preimágenes de -8.

Gráficamente

A continuación se muestra la representación gráfica de una función f cuyo dominio es el intervalo $\left[-3, 6\right]$.



Complete la siguiente tabla:

x	$f(x)$
-2	
1	
π	
$\sqrt{20}$	
7	
2	

¿Cuál es el ámbito de la función?

▲ Para el análisis de la función a partir de su gráfica tome en cuenta los siguientes elementos: dominio, ceros, signo de la función, ámbito, inyectividad, crecimiento o decrecimiento, máximos y mínimos.

▲ No se utilizarán términos como estrictamente creciente o estrictamente decreciente, sino conceptos como creciente o decreciente que incluyen a los anteriores.

Para la inyectividad es pertinente utilizar varias representaciones de una función, para que cada estudiante identifique cuál es inyectiva y argumente su respuesta.

▲ La composición de funciones es muy importante pues permite conectar una función invertible con su inversa, tema que será analizado en 11° Año. Es importante calcular composición de funciones con distintas representaciones.

Complete la tabla que sigue sin conocer los criterios para las funciones f_1 y f_2:

x	0	1	2	3	4
$f_1(x)$	3		0	1	
$f_2(x)$		4	1		3
$(f_1 \circ f_2)(x)$		2	4		
$(f_2 \circ f_1)(x)$	0				

Este es un problema correspondiente al nivel de reflexión.

10. Representar gráficamente una función lineal.

11. Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica.

12. Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.

▲ Se puede comenzar implementando un problema que involucre función lineal como repaso de lo trabajado en 8° Año o función cuadrática para repasar lo visto en 9° Año.

La empresa “Pura Vida S. A.” produce juegos de mesa que promueven la conservación del medio ambiente. Dado que el costo de producir cada juego fue de ₡1250 y se hizo una inversión inicial de ₡3 500 000, se proyecta que el precio de venta para cada juego sea de ₡2750.

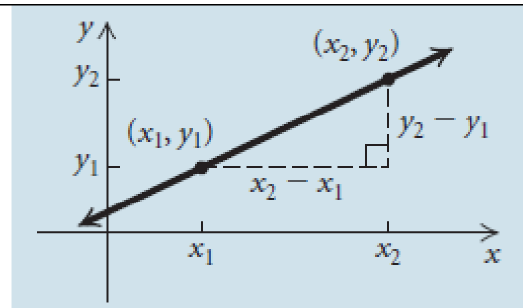
a. Determine la expresión algebraica que brinda la utilidad “*U*” que genera la empresa en función de la cantidad de artículos producidos.
b. Grafique dicha relación en un sistema de ejes cartesianos.
c. Determine cuántos artículos es necesario vender para que la empresa empiece a generar ganancias.

Un problema como éste favorece una cultura ambiental para el desarrollo sostenible, un valor transversal en el sistema educativo costarricense.

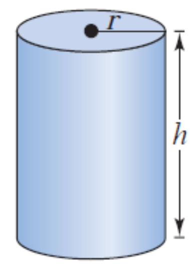
▲ Mencionar que la función identidad, expresada algebraicamente por $f(x) = x$, es un caso particular de la función lineal. Esta función será muy útil en la definición de la inversa de una función.

▲En la etapa de cierre desarrolle los conceptos de pendiente de una recta, intersección con el eje de las abscisas e intersección con el eje de las ordenadas. Además, se puede solicitar a cada estudiante que analice el problema anterior desde una perspectiva funcional, determinando su dominio, ceros, signo de la función, ámbito, inyectividad, crecimiento o decrecimiento, estableciendo conexiones con el problema y los elementos anteriores.

▲ Puede proponerse que se determine la pendiente y la *intersección con el eje de las ordenadas* de una determinada recta representada por el criterio $y = mx + b$, dados dos puntos de ella.

		 La idea es que cada estudiante pueda deducir la fórmula para la pendiente *m* de la recta, como la razón entre el cambio de *y* con respeto al de *x*: $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ y que siga utilizándola para calcular la pendiente de una forma más fácil. Se recomienda usar software matemático para conjeturar acerca de la influencia de los parámetros *a*, *b* en la representación gráfica de *y* = *ax* + *b*.
	13. Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.	▲ La función cuadrática ya fue estudiada en 9º Año, de lo que se trata ahora es de precisar sus propiedades. Se sugiere hacer un estudio sistemático para la representación gráfica que incluya: a. Punto de intersección con el eje de las ordenadas. b. Puntos de intersección con el eje de las abscisas. c. Intervalos de crecimiento o decrecimiento. d. Concavidad. e. Intervalo donde la función es positiva o negativa y su conexión con la solución de desigualdades cuadráticas. f. Máximo o mínimo de la función (vértice). g. Ámbito de la función. h. Eje de simetría. i. Intervalos máximos donde la función es inyectiva. Los puntos anteriores deben verse en conjunto, en forma articulada, y no por separado. ▲ Conviene analizar la influencia de los parámetros *a*, *b* y *c* en el tipo de gráfica. Una buena estrategia consiste en la técnica de completar cuadrado y utilizar transformaciones en el plano: homotecias y traslaciones. Es recomendable usar software matemático para facilitar la observación de las características descritas para $y = ax^2 + bx + c$ y para aproximar soluciones de ecuaciones de segundo grado.

	14. Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.	Una bola es lanzada hacia arriba con una velocidad inicial de v_0 metros por segundo. Pasados *t* segundos, la altura *h* de la bola se representa algebraicamente por $$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$ con $g = 9,8\,\mathrm{m/s^2}$ la aceleración de la gravedad. Plantear un problema con esta situación y resolverlo.
	15. Relacionar la representación gráfica con la algebraica.	▲ Se puede dar una serie de representaciones algebraicas y otra serie de representaciones gráficas, o bien una mezcla de ambas. ▲ Se puede hacer lo mismo utilizando representaciones tabulares y algebraicas (o bien gráficas). Se presentan varias tablas y varios criterios.
	16. Analizar sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	El doble de la edad de Juan aumentado en la edad de Cinthia equivale a 100 años. Si la edad de Cinthia es la misma que la edad de Juan disminuida en 11 años, ¿cuál es la edad de ambos? ▲ Por su naturaleza, este problema puede ser resuelto utilizando dos ecuaciones de primer grado, lo que sirve para justificar la importancia del conocimiento. ▲ Se sugiere explicar brevemente las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la igualdad en la resolución del problema anterior. Por ejemplo, en el método de igualación: $y = f(x)$; $y = g(x)$ entonces $f(x) = g(x)$ se utiliza la propiedad transitiva. En la etapa de cierre se formalizan dichos métodos. ▲ Trabajar con sistemas de la forma $$a_1x + b_1y = c_1\ ,\ a_2x + b_2y = c_2$$ y utilizar los métodos de sustitución, igualación, suma y resta y de forma gráfica. ▲ Se sugiere proponer sistemas con solución única, solución vacía y con infinitas soluciones. Enfatizar el significado gráfico de cada uno de los tres casos: rectas que se intersecan en un punto, rectas paralelas que no se intersecan, rectas coincidentes.
Sistemas de ecuaciones lineales • Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas	17. Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.	Usualmente el costo total de producción de *x* unidades de un producto tiene dos componentes: el costo inicial y el costo por unidad del producto. Cuando se han vendido suficientes unidades de tal forma que el ingreso total sea igual que el costo total, se dice que se llegó al punto de equilibrio. Suponiendo que el ingreso total es igual al número de unidades vendidas multiplicado por el precio de venta de cada unidad, plantee un problema que permita encontrar el punto de equilibrio para la situación dada.

11° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Funciones inversas • Inversa de la función lineal • Función raíz cuadrada	1. Identificar las condiciones para que una función tenga inversa. 2. Relacionar la gráfica de una función con la gráfica de su inversa. 3. Determinar intervalos en los cuales una función representada gráficamente tiene inversa. 4. Determinar y graficar la función inversa de *f(x) = mx + b*, $m \neq 0$. 5. Analizar gráfica y algebraicamente la función con criterio dado por $f(x) = a\sqrt{x+b} + c$.	▲ Se puede plantear un problema en donde se observe la necesidad de estudiar la inversa de una función. Una empresa quiere construir recipientes cilíndricos con volumen *V* y altura *h* conocidos, y quiere saber cuál es el radio de cada recipiente, para poder acomodarlos en cajas. El volumen de un cilindro de altura *h* dada es función del radio *r* del círculo de la base (o tapa), y está modelado por la ecuación $V(r) = \pi r^2 h$.  El problema consiste en expresar *r* como función del volumen *V*. En este caso la función *r*(*V*) es la inversa de la función *V*(*r*). La temperatura en grados Fahrenheit es función de la temperatura en grados Celsius y está modelada por la ecuación $F(C) = \frac{9}{5}C + 32$. Expresar *C* como función de *F*.  **Imagen con derechos adquiridos por el MEP** ▲ Dada la gráfica de una función, que cada estudiante grafique su función inversa (si existe), tomando en cuenta que ambas son simétricas respecto a la recta con representación *y* = *x*. ▲ Para determinar la inversa de una función cuadrática hay que seleccionar el dominio que garantice la inyectividad, resolver una ecuación de segundo grado y seleccionar el signo de acuerdo al dominio seleccionado. La función $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ no es inyectiva, pero si consideramos $x \geq 0$ y el codominio como el ámbito, es decir $y \geq 0$ entonces *f* tiene inversa. Su inversa es $g(x) = \sqrt{x}$. Cada estudiante podrá comprobar esto al hacer la composición

		$$\left(g \circ f\right)(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = \lvert x \rvert = x$$ pues $x \geq 0$. ▲ La gráfica de la función con criterio dado por $f(x) = a\sqrt{x+b}+c$ se obtiene de la gráfica de $f_0(x) = \sqrt{x}$ mediante transformaciones (traslaciones y homotecias). ▲Al finalizar la actividad, defina el concepto de función inversa tomando como referencia lo desarrollado en la actividad anterior. Al estar utilizando como codominio el ámbito de la función entonces la condición para que *f* : $D_f \rightarrow R_f$ tenga inversa es que *f* sea inyectiva, es decir, $$a, b \in D_f \text{ con } a \neq b \text{ entonces } f(a) \neq f(b).$$ Nótese la conexión con el área de *Geometría*.
Funciones exponenciales • La función a^x • Ecuaciones exponenciales	6. Analizar gráfica, tabular y algebraicamente las funciones exponenciales.	▲ Para introducir el tema se sugiere proponer la siguiente situación: Federico hereda ₡5 000 000. Desea depositar dicho dinero a plazos en un banco que paga un interés compuesto de un 6% y retirarlo hasta dentro de 10 años como una forma para solventar sus necesidades futuras. Aunque por lo general los bancos utilizan plazos anuales y semestrales, Federico quisiera saber cuánto ganaría al finalizar dicho periodo, si el dinero se capitalizará diariamente y compararlo con las ganancias obtenidas si se capitaliza anualmente. ▲ Una vez abordado el problema se procede a precisar los conceptos y características de los conceptos concernientes a una función exponencial. Se puede construir una tabla de valores para hacer una gráfica aproximada de una exponencial específica, y así familiarizar al estudiantado con algunas características de estas funciones. Se recomienda usar calculadora científica para realizar los cálculos y software matemático para graficar funciones del tipo $$f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$$ ▲ No es conveniente formalizar el concepto de asíntota, sino tratarlo de manera intuitiva como una recta que se aproxima arbitrariamente a la gráfica de la función (ver indicaciones metodológicas). ▲ El concepto de infinito no se introduce formalmente en este nivel educativo, sin embargo para la construcción y el estudio de gráficas se puede expresar de manera intuitiva su sentido. La base más importante y conveniente para las funciones exponenciales es el número irracional *e*. El número *e* es conocido a veces como número de Euler o constante de Napier, fue reconocido y utilizado por primera vez por el matemático escocés John Napier, quien introdujo el concepto de logaritmo.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>El número e, al igual que el número π, es un número trascendente, es decir que no puede ser obtenido directamente mediante la resolución de una ecuación algebraica. Su valor exacto no puede ser expresado como un número finito de cifras decimales o con decimales periódicos.

Los números de la forma $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se acercan al número e cuando n asume valores muy grandes. La siguiente tabla proporciona una idea de este acercamiento:
<table>
<tr><th>n</th><th>Valor aproximado de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$</th></tr>
<tr><td>10^2</td><td>2,70481382942</td></tr>
<tr><td>10^4</td><td>2,71814592683</td></tr>
<tr><td>10^5</td><td>2,71826823717</td></tr>
<tr><td>10^{10}</td><td>2,71828182832</td></tr>
<tr><td>10^{12}</td><td>2,71828182846</td></tr>
</table>

Su valor aproximado con 15 decimales es 2,718281828459045.

Es recomendable enfatizar la importante conexión que existe entre la función exponencial y la Economía, la Biología, la Física y otras ciencias, como los ejemplos que aparecen en las indicaciones metodológicas.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>7. Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones exponenciales.</td>
<td>▲ Para la resolución de ecuaciones exponenciales, conviene repasar las leyes de potencias y utilizar la noción de inyectividad para la justificación del algoritmo que resuelve dichas ecuaciones.

▲ Las ecuaciones exponenciales se pueden expresar como $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, donde f y g son funciones lineales o cuadráticas de x.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>8. Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones exponenciales.</td>
<td>▲ Para el desarrollo de esta habilidad no se debe pedir al grupo construir los modelos. Se trata de identificarlos y utilizarlos en el tratamiento de situaciones. Se propone el problema, se proporciona el modelo matemático (en forma algebraica, gráfica, tabular o verbal) y se solicita a cada estudiante resolverlo y analizarlo.

▲ Al trabajar con representaciones gráficas, en varias ocasiones se utilizan datos numéricos pequeños para una de las variables y datos muy grandes para la otra variable. En tales casos se sugiere utilizar diferentes escalas en los ejes.</td>
</tr>
<tr>
<td>Funciones logarítmicas

• La función $\log_a x$

• Ecuaciones logarítmicas</td>
<td>9. Identificar la función logarítmica como la inversa de la función exponencial.

10. Analizar gráfica y algebraicamente las funciones logarítmicas.</td>
<td>▲ Para introducir el tema, conviene usar un problema en el que surja de forma natural la función logarítmica.

Laura Marcela deposita 225 000 colones en su cuenta de ahorros en un banco y al final de t años recibe una notificación del banco indicando que en su cuenta tiene 375 000 colones. Si la tasa de interés es de un 6% compuesta mensualmente y si ella no hizo un nuevo depósito ni retiro durante esos años, ¿cuántos años han transcurrido desde el depósito hasta la notificación del banco?</td>
</tr>
</table>

En este problema es importante proporcionar el modelo

$$C(t) = C_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^t$$

y a partir de él justificar la necesidad de introducir la función logarítmica.

▲Durante la etapa de cierre introduzca la función logaritmo como inversa de la exponencial. Utilice la composición de funciones para justificar esta propiedad.

Cada estudiante debe saber que si $a > 0,\ \ a \neq 1,$ entonces $\log_a y = x$ si y sólo si $y = a^x$. Por lo tanto $\log_a y,\ y > 0$ es el número al que se debe elevar la base *a* para obtener *y*.

▲ Cambiar de la forma exponencial a la forma logarítmica y de la logarítmica a la exponencial.

Se recomienda usar software matemático para visualizar la relación entre las gráficas de la función exponencial y la logarítmica. El uso de tablas también favorecerá la comprensión de la relación entre ambas funciones.

x	3^x
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243

En la tabla anterior, la segunda columna contiene las potencias con base 3 de los números que aparecen en la primera columna, mientras que en la primera columna aparecen los logaritmos en base 3 de los números que aparecen en la segunda columna, es decir,

x	$\log_3 x$
1	0
3	1
9	2
27	3
81	4
243	5

Esto se observa mejor si unimos las dos tablas.

x	3^x	$\log_3 3^x$
0	1	0
1	3	1
2	9	2
3	27	3
4	81	4
5	243	5

		Comparta aspectos del desarrollo histórico de los logaritmos. La historia de la escala logarítmica conecta *Relaciones y Álgebra* con *Medidas*.
	11. Aplicar propiedades de los logaritmos para simplificar expresiones algebraicas.	▲ Las propiedades son: a. Logaritmo de la unidad. b. Logaritmo de la base. c. Logaritmo de una expresión en notación exponencial. d. Logaritmo de una multiplicación. e. Logaritmo de una división. f. Cambio de base. Destáquese la deducción de las propiedades de logaritmos a partir de las propiedades de las exponenciales.
	12. Resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones logarítmicas. 13. Utilizar logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales de la forma $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, *a*, *b* números reales positivos y distintos de 1, *f, g* polinomios de grado menor que 3.	▲ Utilizar ecuaciones de la forma $$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$ donde *f* y *g* son funciones lineales o cuadráticas de *x.* ▲ Use la noción de inyectividad de la función logaritmo para la justificación del algoritmo que permite resolver dichas ecuaciones.
	14. Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones logarítmicas.	▲ Para el desarrollo de esta habilidad no se busca construir los modelos. Se trata de identificarlos y usarlos. Se propone el problema, se da el modelo matemático (en forma algebraica, gráfica, tabular o verbal) y se pide resolverlo, interpretarlo y analizarlo. ▲ Se debe discutir cuál es el sentido del resultado en cada problema planteado.
Funciones y modelización	15. Utilizar las funciones estudiadas para plantear y resolver problemas a partir de una situación dada. 16. Analizar el tipo de función que sirva de modelo para una situación dada.	▲ Esta sección articula el estudio de funciones que permea todo el currículo desde la enseñanza Primaria. Lo que se busca es una integración de las diferentes funciones estudiadas con el propósito de identificar y usar modelos matemáticos de situaciones reales. ▲ Se sugiere que la o el docente proponga un problema en forma verbal o tabular y que cada estudiante interprete la información, la sistematice y establezca relaciones relevantes del problema para determinar el modelo que mejor refleje la situación. Además cada estudiante debe resolver el problema, analizar los resultados y verificar la factibilidad del modelo. ▲ Es importante que sean utilizadas cada una de las funciones estudiadas para alguna modelización de la situación dada: lineal, cuadrática, raíz cuadrada, logarítmica y exponencial.

Indicaciones metodológicas

Generales para el ciclo

1. Por la metodología presentada en estos programas es necesario dar tiempo para que cada estudiante plantee y resuelva problemas.

2. Se espera que cada estudiante utilice de forma adecuada el lenguaje y simbolismo matemático en sus razonamientos y argumentaciones.

3. El foco central de este ciclo consiste en un acercamiento más formal a las funciones en sus distintas representaciones y a la utilización de éstas como modelos matemáticos.

4. Hay que utilizar modelos matemáticos que favorezcan valores como la *Educación para la Salud, Educación Integral de la Sexualidad, Cultura Ambiental para el Desarrollo Sostenible y la Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz,* valores transversales en el sistema educativo costarricense.

5. El uso de tecnologías digitales favorece la visualización de las funciones estudiadas al permitir la manipulación de sus parámetros y los cambios que generan en sus gráficas. Software de graficación dinámica potencia la visualización de transformaciones efectuadas sobre las funciones. Esto conecta con el área de *Geometría.*

Décimo año

1. El estudio de teoría de conjuntos se desarrollará de modo instrumental para precisar el estudio de funciones y algunas propiedades en *Probabilidad*. Además, no se quiere un estudio exhaustivo de operaciones con conjuntos y un enfoque abstracto. Es esencial que cada estudiante utilice correctamente el lenguaje de la teoría de conjuntos para representar soluciones de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones, así como para representar dominio y ámbito de funciones. Se puede dar la representación gráfica o algebraica de una función (polinomial o racional) y solicitar la escritura por comprensión del dominio de la función. Otra forma es dar una ecuación que se reduce a una de segundo grado y preguntar por el conjunto solución, suponiendo por ejemplo que alguna solución de la cuadrática no es factible, pues anula un denominador.

2. Los conjuntos numéricos con sus notaciones respectivas son:
   a. El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ está formado por números 0, 1, 2, 3, 4, … . Históricamente, el número cero fue introducido en Europa en el siglo XII, pero no se consideraba un número natural. Con el desarrollo de la teoría de conjuntos en el siglo XIX, el cero pasó a formar parte del conjunto de los números naturales. Podemos utilizar $\mathbb{Z}^{+}$ para los números naturales sin el cero o enteros positivos.

   b. El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ está formado por los números naturales y sus opuestos -1, -2, -3, -4, -5 …

   c. El conjunto de los números decimales $\mathbb{D}$ está formado por todos los números que se escriben como $\frac{a}{10^n}$, *n* natural y *a* entero. Por ejemplo, $-2,31=-\frac{231}{100}=-\frac{231}{10^2}$ es un elemento de $\mathbb{D}$.

d. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ está formado por todos los números que se escriben como $\frac{a}{b}$, con *a* y *b* enteros y *b* no nulo. La escritura decimal de un número racional es o bien un número decimal finito o bien periódico.

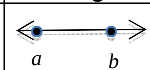
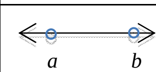
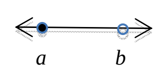
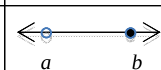
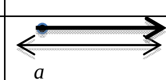
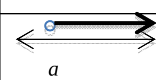
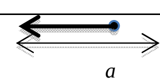
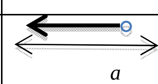
e. El conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ está formado por los números con expansión decimal infinita no periódica. Tales números no pueden ser escritos en la forma $\frac{a}{b}$, con *a* y *b* enteros y *b* no nulo. Ejemplos de números irracionales: $\sqrt{2}$, $3\sqrt{5}$, π, e.

f. Los números reales $\mathbb{R}$ están formados por los racionales y los irracionales: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$. Es relevante que cada estudiante tenga claro que $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

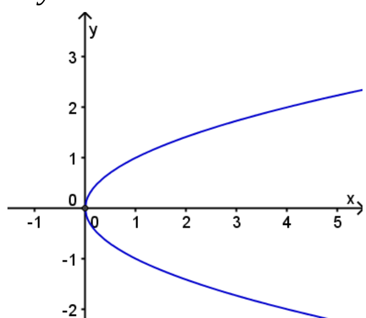
3. Para contextualizar los problemas relacionados con funciones lineales o cuadráticas y con sistema de ecuaciones lineales, es recomendable utilizar recortes de revistas, periódicos y datos estadísticos obtenidos, por ejemplo, del Instituto Nacional de Estadística y Censos (INEC), del Estado de la Nación o de sitios Web. Es el caso del problema propuesto en las indicaciones puntuales relacionadas con la habilidad específica 8.

4. Para la habilidad específica 15 se recomienda el uso de software graficador.

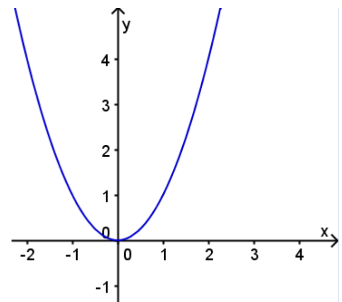
5. Los intervalos son subconjuntos de los números reales y para no confundirlos con la notación de par ordenado (*a*,*b*) se utilizarán las siguientes notaciones: $[a,b]$ para intervalo cerrado, $]a,b[$ para intervalo abierto, $[a,b[$, $]a,b]$ para intervalos semiabiertos.

Notación de intervalo	Notación de conjunto por comprensión	Representación gráfica.
$[a,b]$	$\{x \mid x\in\mathbb{R},\ a\le x\le b\}$	
$]a,b[$	$\{x \mid x\in\mathbb{R},\ a< x< b\}$	
$[a,b[$	$\{x \mid x\in\mathbb{R},\ a\le x< b\}$	
$]a,b]$	$\{x \mid x\in\mathbb{R},\ a< x\le b\}$	
$[a,\infty[$	$\{x \mid x\in\mathbb{R},\ x\ge a\}$	
$]a,\infty[$	$\{x \mid x\in\mathbb{R},\ x> a\}$	
$]-\infty,a]$	$\{x \mid x\in\mathbb{R},\ x\le a\}$	
$]-\infty,a[$	$\{x \mid x\in\mathbb{R},\ x< a\}$	

6. Para la habilidad específica 6 cada estudiante debe tener presente que algunas relaciones pueden ser consideradas como funciones al intercambiar las variables. Lo mismo podrá suceder al efectuar una rotación en ciertas gráficas de relaciones, lo que conecta con el área de *Geometría*. Por ejemplo, $y^2 = x$ representa una relación que no es una función si consideramos *x* como variable independiente, *y* como variable dependiente, pero si *y* es la variable independiente y *x* la dependiente (intercambiamos las variables) entonces la ecuación $x = y^2$ representa una función con criterio $x = f(y) = y^2$.



$y^2 = x$

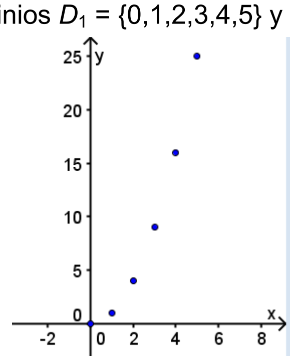


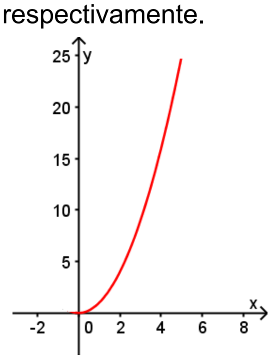
$y = x^2$

7. Sirve de motivación y proporciona un rostro humano a las Matemáticas el compartir la historia del desarrollo de las funciones matemáticas. Desde tiempos antiguos ya se trabajaba con el concepto de dependencia entre cantidades. Por ejemplo, los Pitagóricos intentaron determinar la relación entre la longitud y la altura de las notas emitidas por cuerdas de la misma especie. Arquímedes (287-212 a. C.) también contribuyó al desarrollo de la noción de dependencia entre cantidades, al relacionar el peso de un objeto con el volumen del agua desplazada por dicho objeto. Nicolás de Oresme (1320-1382) de la escuela de París cuestionó: ¿por qué no hacer un dibujo o gráfica que represente el modo en que las cosas varían? Afirmó que todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua y representarla gráficamente.

   En los siglos XV y XVI la idea de función experimentó nuevos rumbos, marcados por el desarrollo del álgebra simbólica por François Viète (1540-1603) y los experimentos de Galileo Galilei (1564-1642) mediante los cuales logró expresar relaciones funcionales entre distancia o velocidad versus tiempo (causa y efecto), en palabras y en lenguaje de proporciones. Posteriormente, el desarrollo de la geometría cartesiana por Fermat (1601-1665) y Descartes (1586-1650) y la creación del cálculo diferencial e integral por Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716) fueron decisivos para la evolución del concepto de función. En el siglo XVIII, Euler, Bernoulli, Lagrange y otros matemáticos lograron precisar aún más el significado de función. En el siglo XIX se formalizó aún más el concepto por los trabajos de matemáticos como Cauchy, Dirichlet, Riemann, Cantor y Dedekind.

8. Para las habilidades 10 y 13 es importante que cada estudiante conozca la diferencia entre una función de dominio discreto y de dominio continuo. Para esto se puede utilizar un mismo criterio con distintos dominios. Por ejemplo: las gráficas que siguen son representaciones del mismo criterio $f(x) = x^2$, en dominios D_1 = {0,1,2,3,4,5} y D_2 = [0,5] respectivamente.





9. Para la habilidad específica 9 puede presentar dos funciones en forma algebraica: $f(x) = x^2 + 1$, con dominio {1, 2, 3, 4}, $g(x) = x - 1$ con dominio {2, 5, 10, 17}. Es relevante hacer notar que el ámbito de *f* coincide con el dominio de *g*. Se propone representar tabularmente cada una de las funciones, pues esto facilitará concluir lo anterior.

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	5	10	17

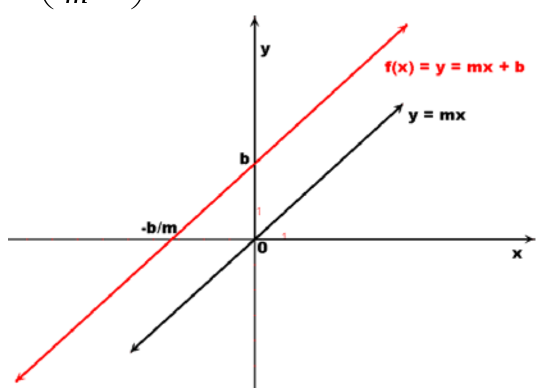
x	2	5	10	17
$g(x)$	1	4	9	16

Combinando las dos tablas tenemos:

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	5	10	17
$g(f(x))$	1	4	9	16

Por el patrón de formación se conjetura que $g(f(x)) = x^2$. Debido a que *g* se evalúa en las imágenes de *f* tenemos $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = (x^2+1) - 1 = x^2$ lo que confirma la conjetura. También hay que resaltar que no tiene sentido hacer la composición $(f \circ g)(x)$ pues el ámbito de *g* no coincide con el dominio de *f*. Una consecuencia es que la composición de funciones no es conmutativa, aun cuando existan $f \circ g$ y $g \circ f$. Considerando lo anterior, en la etapa de clausura se define la composición de funciones.

10. Respecto a las habilidades 10-12, calculada la pendiente *m* cada estudiante puede utilizar dos puntos arbitrarios de la recta para calcular el valor de *b* y el intercepto con el eje *y*, en $y = mx + b$. La recta interseca el eje *x* en el punto $\left(\frac{-b}{m}, 0\right)$.



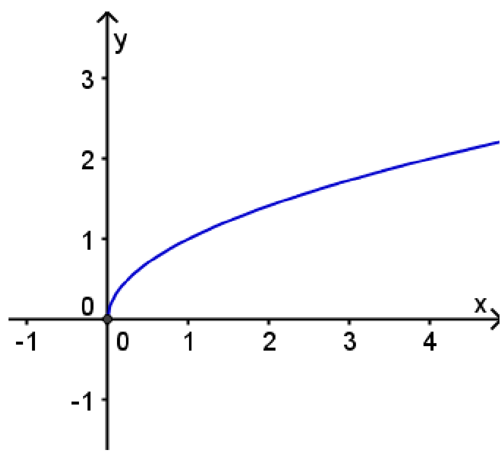
Undécimo año

1. Para contextualizar los problemas relacionados con funciones y con las ecuaciones exponenciales y logarítmicas, es recomendable utilizar recortes de revistas, periódicos y datos estadísticos obtenidos, por ejemplo, del Instituto Nacional de Estadística y Censos (INEC), del Estado de la Nación o de sitios Web. Por ejemplo: la tabla que sigue muestra la población de Costa Rica (en millones) en el periodo 1960-2009 (Banco Mundial. Indicadores de desarrollo mundial).

Año	Población (millones)
1960	1,334
1965	1,583
1970	1,822
1975	2,052
1980	2,349
1985	2,699
1990	3,078
1995	3,479
2000	3,931
2005	4,396
2009	4,579

Un modelo exponencial de la forma $y = a \cdot b^x$ para la población aproximada de Costa Rica es $P = 1\,401\,466\,(1{,}13454)^t$ donde P representa el tamaño de la población y t el tiempo en años, con $t = 0$ representando el año 1960.

2. Para la función raíz cuadrada, es conveniente construir una tabla con algunos puntos (pares ordenados) para la función cuyo criterio es $y = f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, ubicar los puntos en el plano cartesiano y posteriormente unirlos mediante una curva suave.



3. La gráfica de $f_1(x) = a\sqrt{x}, x \geq 0$ es una homotecia de la gráfica de $y = f(x) = \sqrt{x}$. La gráfica de $f_2(x) = \sqrt{x+b}, x \geq -b$ es una translación horizontal de la gráfica de $y = f(x) = \sqrt{x}$. La gráfica de $f_3(x) = \sqrt{x} + c, x \geq 0$ es una translación vertical de la gráfica de $y = f(x) = \sqrt{x}$. Por lo tanto, la gráfica de la función con criterio dado por $g(x) = a\sqrt{x+b} + c$ es una combinación de las transformaciones anteriores. Esta metodología favorece la conexión con el área de *Geometría* y puede ser utilizada con las funciones estudiadas, considerando los dominios apropiados.

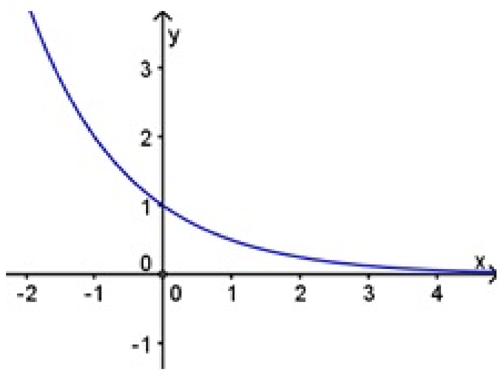
Dada la representación gráfica de $y = f(x)$ y un número real positivo c, las transformaciones más importantes son:

- $y = f(x - c)$ translación (desplazamiento) horizontal de la gráfica original, c unidades hacia la derecha.
- $y = f(x + c)$ translación horizontal de la gráfica original, c unidades hacia la izquierda.

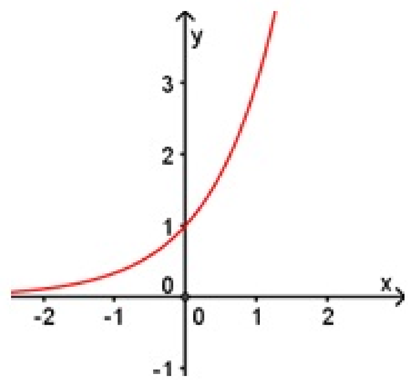
- $y = f(x) + c$ translación vertical de la gráfica original, c unidades hacia arriba.
- $y = f(x) - c$ translación vertical de la gráfica original, c unidades hacia abajo.
- $y = -f(x)$ reflexión de la gráfica original, respecto al eje horizontal x.
- $y = f(-x)$ reflexión de la gráfica original, respecto al eje vertical y.
- $y = f(cx)$ encoge la gráfica original por un factor c si $c > 1$ o la estira si $c < 1$.
- $y = cf(x)$ estira (expande) la gráfica original por un factor c si $c > 1$ o la encoge (contrae) si $c < 1$, sin reflexión sobre el eje x (c es positivo).

4. Para las transformaciones gráficas es fundamental que cada estudiante analice los tipos de simetrías de la gráfica y que grafique, si existe, la inversa de la función en el mismo sistema de coordenadas de la gráfica dada. Pueden graficar la función invertible dada en papel transparente, graficar la recta $y = x$ y doblar el papel en la dirección de la recta $y = x$ para obtener la inversa de la función dada.

5. Para las habilidades específicas 6 y 10 es pertinente utilizar software graficador y con capacidad para hacer cálculos simbólicos. Por ejemplo, para la función con criterio de la forma $f(x) = a^x$, con a positivo distinto de uno, la graficación para distintos valores de a abre espacios para conjeturas. Se recomienda construir varias gráficas para encontrar el patrón que se describe a continuación.



$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

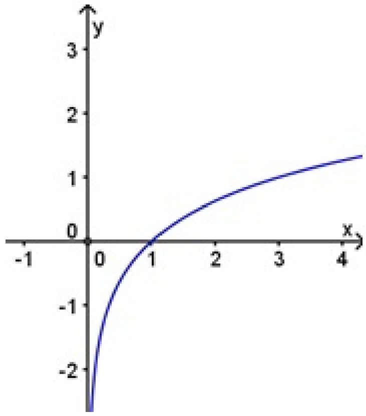


$$g(x) = 3^x$$

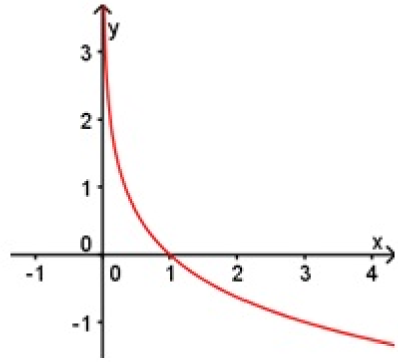
Observe la diferencia gráfica cuando el valor de a es menor que 1, y cuando a es mayor que 1. En ambos casos el dominio es toda la recta real, es decir, el intervalo $]-\infty, \infty[$ y el ámbito está formado por todos los números reales positivos. La gráfica interseca el eje y en el punto (0,1).

Si $a > 1$, la función es creciente y su gráfica se acerca al eje x cuando x tiende a menos infinito. El semieje negativo de las abscisas es una asíntota horizontal de la gráfica.

Si $0 < a < 1$, la función es decreciente y su gráfica se acerca al eje x cuando x tiende a infinito. El semieje positivo de las abscisas es una asíntota horizontal de la gráfica. Una forma de hacer ver esto es por medio de la elaboración de tablas de valores donde se aprecie el comportamiento asintótico de la función.



$f(x) = \log_3 x$



$g(x) = \log_{1/3} x$

Para la función logarítmica, el dominio es el intervalo $]0, \infty[$, y el ámbito está formado por todos los números reales. La gráfica interseca el eje *x* en el punto (1,0).

Si $a > 1$ la función es creciente y su gráfica se acerca asintóticamente al eje *y* negativo cuando *x* tiende a cero. Si $0 < a < 1$ la función es decreciente y su gráfica se acerca asintóticamente al eje *y* positivo cuando *x* tiende a cero. En cualquiera de los dos casos, el eje de las ordenadas es una asíntota vertical de la gráfica.

6. Para el análisis de funciones, utilizaremos el término creciente y no utilizaremos el término estrictamente creciente. Lo mismo ocurre con el término decreciente. Decimos que una función con criterio dado por $y = f(x)$ es creciente cuando ocurre $f(x_1) \le f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$. Igualmente *f* es decreciente si $f(x_1) \ge f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$. Por lo tanto una función constante es creciente y decreciente a la vez (es la única que cumple las dos condiciones).

7. No es conveniente tratar las asíntotas formalmente, sino intuitivamente. Existen distintos tipos de asíntotas a la gráfica de una función: verticales (x = constante), horizontales (y = constante) y oblicuas ($y = mx + b$). Las más apropiadas para este nivel son las verticales y las horizontales.

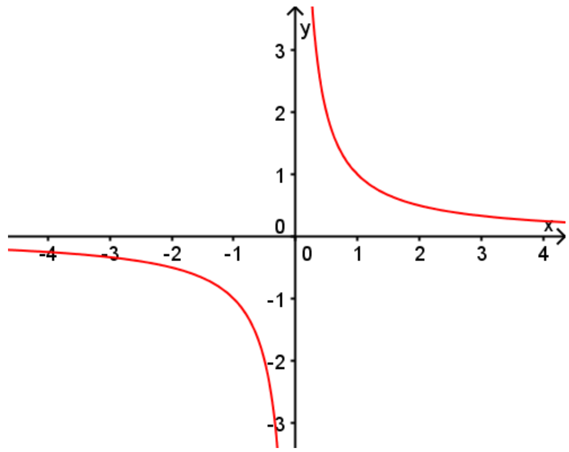
   Una asíntota es una recta que se aproxima arbitrariamente a la gráfica (curva) de una función, es decir, la distancia entre los puntos de la asíntota y los de la curva se hace cada vez menor a medida en que recta y curva se extienden indefinidamente. Formalmente se determina la ecuación de una asíntota a una curva calculando límites, lo cual no se busca en este currículo.

   Si la función es racional (cociente de dos polinomios) sin factores en común en el numerador y denominador, entonces las asíntotas verticales se encuentran en los puntos que anulan el denominador.

   Además, si $f(x) = \dfrac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$, a_i, b_p constantes, $i = 0, 1, \cdots, k;\ p = 0, 1, \cdots, n$ entonces la gráfica de *f* tendrá asíntota horizontal $y = 0$ (eje *x*) si $n > k$; asíntota horizontal $y = a_n/b_n$ si $n = k$; asíntota oblicua si $k = n + 1$, y ninguna si $k > n + 1$.

   Por ejemplo, la función representada algebraicamente por $y = \dfrac{1}{x}, x \neq 0$ tiene como asíntotas los ejes de coordenadas.

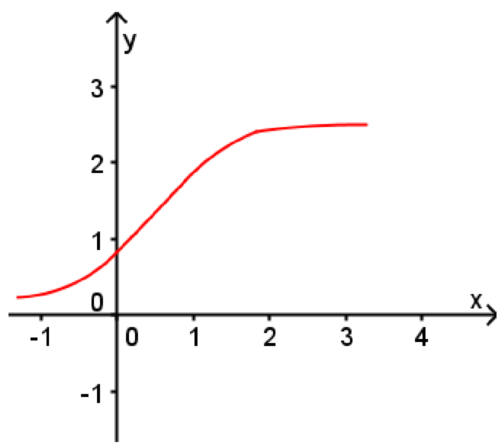
$$y = \frac{1}{x}, x \neq 0$$



Una curva especial que tiene dos asíntotas horizontales y que tiene muchas aplicaciones en Biología, Física y hasta en Ciencias Sociales es la curva logística. Su gráfica tiene forma de S y aparece en diversos modelos de crecimiento de poblaciones, propagación de enfermedades epidémicas y difusión en redes sociales. Su criterio es

$$M(t) = \frac{KM_0e^{rt}}{K + M_0\left(e^{rt} - 1\right)}$$

K es la capacidad del sistema, *r* es la tasa natural de crecimiento, M_0 es el tamaño de la población en el instante *t* = 0. Una magnitud que crece de acuerdo a esta representación presenta un crecimiento logístico.



8. Para la habilidad específica 8, existen muchos modelos matemáticos que utilizan la función exponencial. Por ejemplo:

- Cuando las células cancerosas se someten a radiación, la proporción de células sobrevivientes al tratamiento está dado por la fórmula $P = e^{-kr}$ donde *r* es el nivel de radiación y *k* una constante. Se sabe que cuando el nivel de radiación es 500 Roentgen sobrevive el 40% de las células cancerosas.
- Se está realizando un análisis sobre el incremento de una bacteria dañina al contacto con un derivado alimenticio de leche de cabra. De las 7 a.m. a las 9 a.m., el número de bacterias se incrementó de 600 a 1800. Para *t* horas después de las 7 a.m., el número de *f*(*t*)de bacterias está dado por $f(t) = 600(3)^{t/2}$.

9. Para la habilidad 9, se justifica que la función logarítmica $f(x)=\log_a x$ para $x>0, a>0, a\neq 1$ es la inversa de la función exponencial $g(x)=a^x$ usando la composición de funciones:

$$f(g(x))=\log_a(g(x))=\log_a a^x = x,\ x\in\mathbb{R}^+$$

Además, como *f* y *g* son inversas entre sí entonces tendremos que $g(f(x))=a^{f(x)}=a^{\log_a x}=x$, $x\in\mathbb{R}^+$. Como se intercambian dominio y ámbito de la función original para la función inversa, entonces el dominio de la función logarítmica es el ámbito de la función exponencial y el ámbito de la función logarítmica es el dominio de la función exponencial.

10. La historia de los logaritmos revela la dificultad de este concepto. Aquí se relata un breve resumen de esta historia.

    En 1614, John Napier (1550-1617) publicó su primera obra *Descripción del maravilloso canon de logaritmos*, después de 20 años de trabajo. En esta obra Napier describe la naturaleza de los logaritmos y construye una tabla de logaritmos de senos de ángulos, con arcos dados en minutos. En su segundo trabajo publicado póstumamente en 1619, *Construcción del maravilloso canon de logaritmos*, Napier describió la teoría que utilizó para construir las tablas. En el año 1617, el matemático inglés Henry Briggs (1561-1630) publicó un libro con los logaritmos de los números 1 a 1000 con una precisión de 14 decimales, y en 1624 publicó otra obra con los logaritmos de los números 1 a 20 000 y de 90 000 a 100 000 con 14 cifras decimales de precisión.

11. Para la habilidad específica 14, existen muchos modelos matemáticos que utilizan la función logarítmica. Por ejemplo:

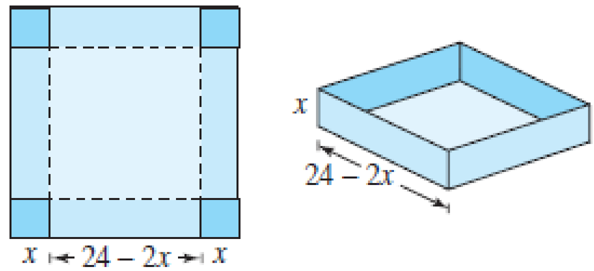
    a. La intensidad del sonido en decibelios se calcula como $I_{dB}=10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$ en donde I_{dB} es la intensidad sonora en decibelios, *I* (Vatios/m^2) es la intensidad sonora en escala lineal y I_0= 10^{-12} Vatios/m^2 es el umbral de audición, que se toma como medida de referencia. El ámbito audible (para el ser humano) es de 10^{-12} a 1 Vatio por metro cuadrado. Se pide plantear un problema utilizando la información dada. Una posibilidad consiste en calcular el ámbito de intensidad sonora (en decibelios) correspondiente al ámbito audible dado.

    b. La escala de Richter es una forma de transformar lecturas de amplitudes de ondas registradas por sismógrafos en números que miden la magnitud *M* de un temblor. Todos los temblores son comparados con un temblor nivel cero cuyas lecturas sismográficas miden 0,001 milímetros a una distancia de 100 kilómetros del epicentro. Un temblor cuya lectura sismográfica mide *x* milímetros tiene magnitud $M(x)=\log_{10}\left(\frac{x}{x_0}\right)$ en donde x_0 = 0,001 es la lectura del temblor nivel cero, con *x* y x_0 medidos a una misma distancia del epicentro. Se solicita a cada estudiante plantear un problema con la información dada. Un posible problema consiste en calcular la magnitud del temblor a distintas distancias *x* comparadas con x_0.

12. Para las habilidades específicas 15 y 16 considere situaciones como las siguientes:

    a. La temperatura *u* de un cuerpo en cualquier instante *t* es modelada por la función: $u(t)=T+(u_0-T)e^{-kt},\ k>0$ en donde *T* es la temperatura (constante) del medio ambiente, u_0 = *u*(0) es la temperatura inicial del cuerpo. El modelo se conoce como ley de Newton de enfriamiento.

b. Una caja abierta es hecha de cartón cuadrado de 24 cm de lado, doblándola como se indica en la figura.



c. En Química, el pH de una solución es la medida de la acidez de la solución. El pH se calcula como: $pH = -\log[H^+]$ con $[H^+]$ la concentración de iones de hidrógeno en la solución. El ámbito de *pH* es de 0 a 14. El agua pura, una solución neutra, tiene un *pH* de 7. Un ácido como el vinagre tiene un *pH* menor que 7 mientras que una solución alcalina como el amoniaco tiene un *pH* mayor que 7. La base del logaritmo es 10.

d. Si invertimos C_0 colones (valor presente) a una tasa de interés anual *i* (porcentual) compuesta *n* veces al año, entonces la cantidad (valor futuro) obtenida *t* años después es dada por: $C(t) = C_0\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^{nt}$. Si el interés se compone continuamente entonces $C(t) = C_0 e^{it}$.

Indicaciones de evaluación

En este nivel la evaluación debe estar ligada a la resolución de problemas y la modelización, lo que abre espacios para la realización de conexiones con otras disciplinas y con situaciones de la vida real.

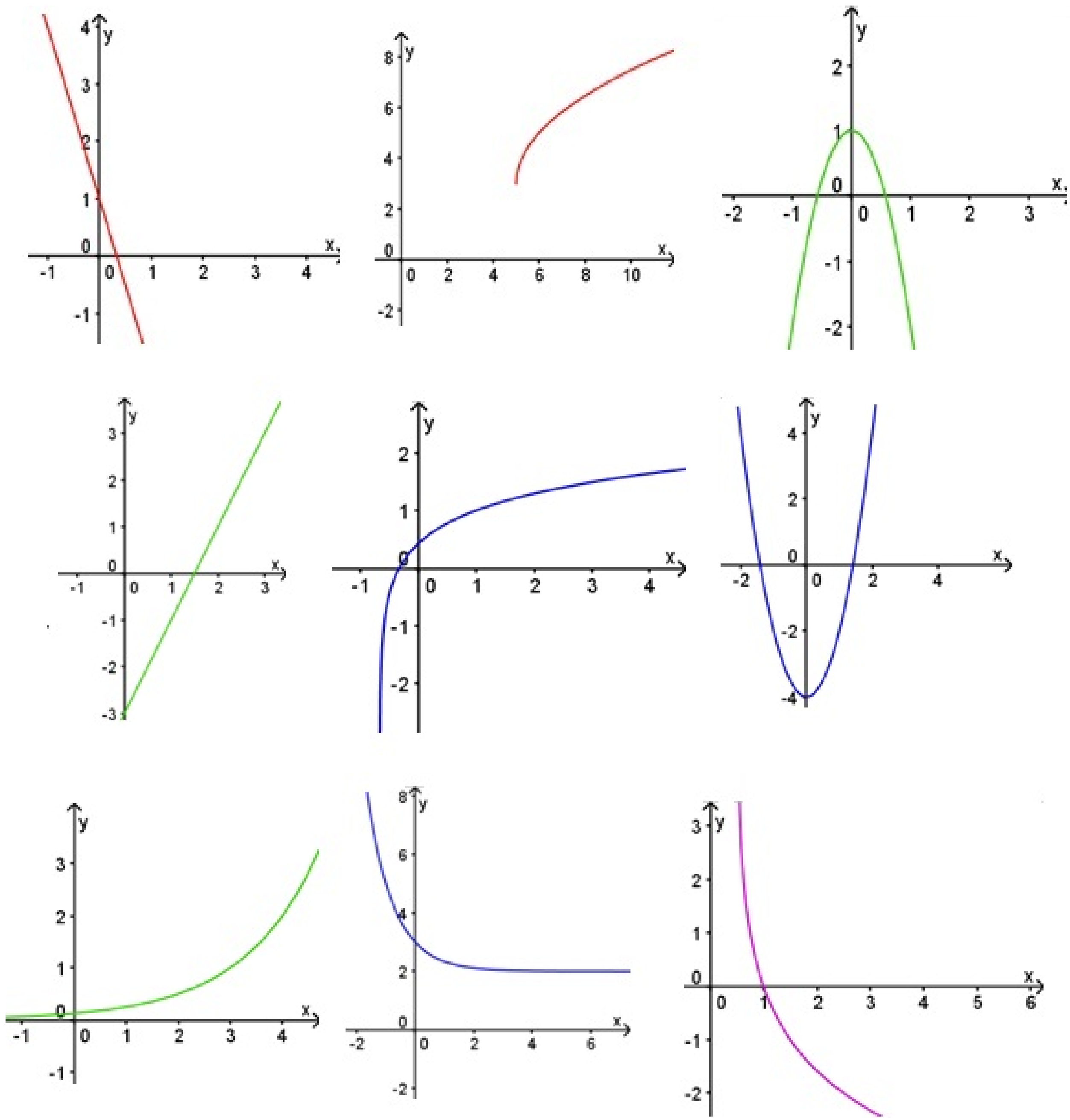
Para el *trabajo cotidiano* es importante evidenciar el progreso que cada estudiante experimenta al trabajar tópicos relacionados con las funciones, particularmente lo concerniente al uso de modelos matemáticos asociados a situaciones contextualizadas. Además, es fundamental evaluar el uso apropiado del vocabulario y la simbología matemática por parte de cada estudiante, así como la forma de comunicar y exponer sus argumentaciones.

En las *pruebas escritas* es factible implementar ítems que permitan la integración de varias habilidades específicas para su evaluación. Aunque la mayoría de conocimientos se pueden evaluar en un nivel de reproducción, es fundamental que los conocimientos que tienen que ver con resolución de problemas donde se apliquen las funciones estudiadas sean evaluados en la parte de desarrollo utilizando ítems con un nivel de dificultad de conexión y reflexión. A continuación algunos ejemplos:

a. Dadas las siguientes representaciones algebraicas y gráficas de funciones indique, justificando, qué gráfica corresponde a qué criterio dado.

$$y_1 = -3x+1,\ y_2 = 2x-3,\ y_3 = -3x^2+1, y_4 = 2x^2-4, y_5 = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2,$$

$$y_6 = \log_5(3x+2),\ y_7 = 2^{x-3},\ y_8 = \log_{1/2}(2x-1),\ y_9 = 2\sqrt{x-5}+3$$



b. A continuación se brinda información acerca de un modelo exponencial. Plantee un problema con dichos datos y resuélvalo.

El estroncio 90 es un material radioactivo cuya cantidad inicial de masa en gramos N_0 *se degrada conforme se expone al ambiente. La fórmula* $N = N_0\, e^{-0,28t}$ *describe la cantidad de gramos "N" de estroncio 90 presente después de "t" años.*

Para el *trabajo extraclase*, se pueden asignar tareas que permitan seguir activando los procesos de *Argumentar y razonar* y *Representar* en temáticas como el análisis de funciones dadas en distintas representaciones, búsqueda de modelos para situaciones dadas y análisis de modelos matemáticos.

También es valioso asignar tareas de investigación o bien un proyecto acerca de la historia del desarrollo y uso de las funciones y modelos matemáticos. En estos casos es necesario delimitar los alcances del trabajo.

Para las ecuaciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas es notable evaluar, además de las soluciones, la interpretación de dichas soluciones de acuerdo al contexto del problema o situación dada. Eso activa el proceso de *Razonar y argumentar*.

En la evaluación, considere el uso correcto del vocabulario, la notación y las diferentes propiedades que se traten, además de la precisión y fundamentación de los razonamientos cuando se argumenta acerca de la solución de un problema determinado.

Ciclo diversificado, Estadística y Probabilidad

Introducción

Se espera que cada estudiante llegue a este ciclo con destrezas elementales vinculadas con los procesos de recolección y presentación de datos, así como para el manejo de situaciones aleatorias simples. Pero además debe ser capaz de reflexionar más allá de los datos, es decir, comprender el trasfondo de la información que se comunica por medio de los diferentes instrumentos de tratamiento de información que hasta ahora se han estudiado.

En el presente ciclo se profundiza la utilización de medidas estadísticas tanto de posición como de variabilidad. Por otro lado, en materia aleatoria se formalizan las propiedades básicas del cálculo de probabilidades y se consideran problemas relacionados con estas propiedades.

Se espera que las habilidades alcanzadas durante el proceso educativo permitan generar una cultura estocástica que favorezca la capacidad de análisis sobre los datos que se generan en el entorno, y que le permitan a cada estudiante adquirir la capacidad de respaldar sus decisiones futuras con información sólida que le ofrezca una mayor posibilidad de éxito.

Propósito de enseñanza

El propósito de la enseñanza en este ciclo es propiciar en el estudiantado la capacidad de identificar, recolectar e interpretar la información necesaria para resolver problemas del entorno. Además, se pretende reconocer la importancia de la *Estadística* y *la Probabilidad* como herramientas fundamentales en el desarrollo de diversas áreas del conocimiento.

Habilidades generales

Las habilidades generales que se buscan generar en el área de *Estadística y Probabilidad* al finalizar este ciclo son:

- Utilizar diferentes representaciones para analizar la posición y variabilidad de un conjunto de datos.
- Valorar la importancia de las medidas de resumen (posición y variabilidad) para el análisis de la información estadística.
- Utilizar las medidas de posición para resumir y analizar la información proveniente de un grupo de datos cuantitativos.
- Utilizar las principales medidas de variabilidad para evaluar y comparar la dispersión de los datos.
- Analizar la importancia del uso de medidas relativas de tendencia central y variabilidad dentro de los análisis comparativos de información.
- Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas.
- Utilizar las probabilidades y las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.
- Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil.

Por medio de la adquisición de las anteriores habilidades se pretende favorecer una cultura hacia la comprensión y el análisis de la información. El uso de medidas de resumen y análisis probabilísticos permite modelar y simular situaciones del contexto para resolver problemas concretos. Esto provoca que el estudiantado valore la utilidad de los mecanismos estocásticos para favorecer una mejor comprensión del contexto y un fortalecimiento personal hacia la toma de decisiones. Las estrategias sugeridas propician el trabajo en equipo que permite desarrollar destrezas colaborativas y de perseverancia. Con esto se espera mantener la motivación e incrementar la confianza por el trabajo desplegado.

Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

<table>
<tr><td colspan="3">10° Año</td></tr>
<tr><td colspan="3">Estadística</td></tr>
<tr><td>Conocimientos</td><td>Habilidades específicas</td><td>Indicaciones puntuales</td></tr>
<tr>
<td>Representaciones tabulares y gráficas</td>
<td>1. Utilizar diferentes tipos de representaciones gráficas o tabulares para el análisis de datos cualitativos y favorecer la resolución de problemas vinculados con diversas áreas.</td>
<td>▲ Debido a que este tema fue discutido en 7º y 8º Año, no se requiere entrar en mucho detalle. Sin embargo, para complementar el trabajo que se va a realizar tanto en el análisis estadístico de datos cuantitativos como en el cálculo de probabilidades, es necesario proponer algunos problemas que conecten con estos enfoques y diferentes áreas científicas. Un ejemplo de problemas que permiten realizar esta conexión es el siguiente:

Utilizar la información del último Censo de Población para determinar los porcentajes de población indígena que mantienen su lengua autóctona y represente esta información en forma tabular o gráfica. De acuerdo con esta información, determine la probabilidad que un indígena aleatoriamente seleccionado pertenezca a los Cabécares y conserve su lengua autóctona.

La información necesaria para resolver este problema puede ser consultada en la dirección electrónica ccp.ucr.ac.cr. y puede ser resumida mediante el empleo de una hoja de cálculo.

Este problema conecta con el eje transversal Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz. En este sentido, se puede promover el respeto hacia los diferentes grupos indígenas del país y la realización de esfuerzos por conservar las tradiciones de estos pueblos.

Además de lo anterior, en este problema se ponen en ejecución todos los procesos que se proponen en este currículo.</td>
</tr>
<tr>
<td>Medidas de posición

• Moda
• Media aritmética
• Mediana
• Cuartiles
• Extremos
- Máximo
- Mínimo</td>
<td>2. Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas.

3. Identificar la ubicación aproximada de las medidas de posición de acuerdo con el tipo de asimetría de la distribución de los datos.

4. Utilizar la calculadora o la computadora para calcular las medidas estadísticas correspondientes de un grupo de datos.</td>
<td>▲ Para analizar la importancia de las medidas de posición se puede recurrir a problemas que requieran resumir información por medio de valores concretos. Por ejemplo:

La siguiente información corresponde a una muestra aleatoria de 20 partos producidos en cierto hospital. Se incluye el peso al nacer (en kg) y el número de hermanos de cada niño.

<table>
<tr><th>No</th><th>Peso</th><th>No. herm.</th></tr>
<tr><td>1</td><td>3,33</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3,09</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2,72</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3,04</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>3,95</td><td>0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>3,36</td><td>0</td></tr>
<tr><td>7</td><td>3,36</td><td>1</td></tr>
<tr><td>8</td><td>2,92</td><td>0</td></tr>
<tr><td>9</td><td>2,69</td><td>2</td></tr>
<tr><td>10</td><td>3,74</td><td>1</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>No</th><th>Peso</th><th>No. herm.</th></tr>
<tr><td>11</td><td>2,71</td><td>0</td></tr>
<tr><td>12</td><td>3,02</td><td>1</td></tr>
<tr><td>13</td><td>4,36</td><td>1</td></tr>
<tr><td>14</td><td>3,62</td><td>2</td></tr>
<tr><td>15</td><td>2,98</td><td>1</td></tr>
<tr><td>16</td><td>3,34</td><td>0</td></tr>
<tr><td>17</td><td>2,80</td><td>1</td></tr>
<tr><td>18</td><td>3,00</td><td>1</td></tr>
<tr><td>19</td><td>3,06</td><td>0</td></tr>
<tr><td>20</td><td>3,51</td><td>3</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Observe que la unidad estadística es el recién nacido y se valoran las características: bajo peso al nacer y número de hermanos.

a. Construya una distribución de frecuencias y el polígono de frecuencias correspondiente.
b. De acuerdo con la gráfica anterior identifique el intervalo en el que se presenta la mayor concentración de niños.
c. Si tuviera que caracterizar el peso de estos niños por medio de un solo valor ¿qué dato utilizaría? ¿Por qué?

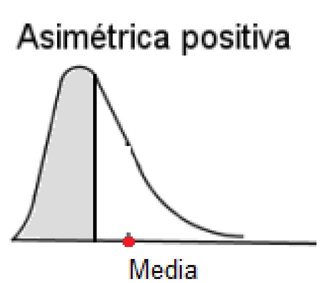
▲ En el proceso de clausura, se deben aprovechar las reflexiones realizadas para determinar la necesidad de emplear medidas específicas que caractericen el patrón de variabilidad de un grupo de datos cuantitativos. Es posible que en el grupo se tenga conocimiento sobre los conceptos de moda y media aritmética, pero ahora es necesario ampliar estas ideas.

El cálculo de medidas estadísticas no puede considerarse como un fin en sí mismo, sino como un paso para continuar con el proceso de análisis. Por ello, para simplificarlo se puede recurrir a una calculadora con funciones estadísticas o a la computadora para utilizar una hoja de cálculo o algún programa especializado.

▲ Se deben analizar problemas en los cuales la distribución de los datos sea asimétrica, con los efectos que esto genera para el análisis de datos.

Suponga que el salario promedio de una empresa es de ₡1 500 000 mensuales. ¿Será posible que el 80% de los empleados gane menos de ₡500 000? Si la respuesta es positiva, justifique por qué ocurre eso.

▲ Se debe identificar que efectivamente puede ocurrir que el salario promedio de todos los trabajadores sea de ₡1 500 000, mientras que el 80% de ellos gane menos de ₡500 000. Esto ocurre en el caso que unos pocos trabajadores tengan un salario muy alto respecto al salario común en la empresa; esto significa que la distribución de salarios presenta asimetría positiva, por lo que el salario promedio toma valores muy grandes por efecto de estos valores extremos. Si se desea caracterizar la distribución de salarios, es adecuado utilizar otras medidas como la mediana y la moda. La forma de la distribución de datos sería:



Media aritmética ponderada

5. Determinar la media aritmética en grupos de datos que tienen pesos relativos (o ponderación) diferentes entre sí.

6. Utilizar la media aritmética ponderada para determinar el promedio cuando los datos se encuentran agrupados en una distribución de frecuencias.

▲ Para valorar la importancia de la media aritmética ponderada, se recomienda plantear problemas en donde los datos tengan diferente peso relativo. Por ejemplo:

Una estudiante de la universidad obtuvo las siguientes calificaciones en un curso de Matemática, para una calificación de 0 a 10:

Pruebas	Calificaciones
Primer examen corto	6,00
Segundo examen corto	5,50
Tercer examen corto	6,50
Proyecto	6,00
Primer parcial	7,50
Segundo parcial	8,50

a. Los exámenes cortos tenían un valor de 5% cada uno, el proyecto valía 15% y los exámenes parciales 35% cada uno. Si la nota mínima de aprobación es un 7,00, ¿la estudiante aprobó el curso?
b. Realice un análisis sobre la forma en que se ponderan las evaluaciones de la asignatura de Matemáticas y la forma de determinar su nota por trimestre.

▲ Es necesario que haya experimentación y se busquen alternativas. Se debe orientar hacia el cálculo de un promedio ponderado, pues el concepto puede ser complejo. Una vez resuelto el problema y sistematizado el concepto, se puede pedir resolver problemas donde se aplique el conocimiento adquirido.

Considere la siguiente distribución de frecuencias que corresponde a la cantidad de horas extra que trabajaron los empleados de cierta empresa el mes pasado. Determine el número promedio de horas extra por empleado para ese mes.

Distribución de horas extra para los empleados de cierta empresa durante el mes anterior

No. de horas	No. trabajadores	Porcentaje de trabajadores
De 0 a menos de 10	5	8,93
De 10 a menos de 20	14	25,00
De 20 a menos de 30	23	41,07
De 30 a menos de 40	10	17,86
De 40 a 50	4	7,14
Total	**56**	**100**

En *Estadística y Probabilidad* se presenta una serie de problemas como el anterior, donde cada estudiante debe elegir un modelo que lo ayude a obtener la respuesta de la pregunta planteada. Es fundamental que las y los estudiantes puedan argumentar sólidamente la validez del modelo elegido y las condiciones en las cuales resulta apropiado.

<table>
<tr><td colspan="3">10^{mo} Año</td></tr>
<tr><td colspan="3">Probabilidad</td></tr>
<tr><td>Conocimientos</td><td>Habilidades específicas</td><td>Indicaciones puntuales</td></tr>
<tr>
<td rowspan="2">Eventos

• Relaciones entre eventos
- Unión $\cup$

- Intersección $\cap$

- Complemento

• Eventos mutuamente excluyentes</td>
<td>1. Describir relaciones entre dos o más eventos de acuerdo con sus puntos muestrales, utilizando para ello las operaciones: unión "$\cup$", intersección "$\cap$" y "complemento" e interpretar el significado dentro de una situación o experimento aleatorio.

2. Representar mediante diagramas de Venn las operaciones entre eventos.</td>
<td>▲ Para generar estas habilidades se pueden diseñar problemas con juegos de azar o problemas que involucren relaciones entre eventos de la vida real. Para ello, se requiere definir los conceptos de unión, intersección y complemento de un evento, correspondientes a un espacio muestral S.

El siguiente cuadro presenta 107 sismos que fueron reportados por el Observatorio Vulcanológico y Sismológico de la Universidad Nacional (OVSICORI) para el año 2010, de acuerdo con la región del país donde se detectó el epicentro:

Sismos más relevantes reportados por el OVSICORI en el 2010 por intensidad y ubicación del epicentro

<table>
<tr><th rowspan="2">Región</th><th colspan="2">Magnitud: escala Richter</th><th rowspan="2">Total</th></tr>
<tr><th>Menos de 4</th><th>4 o más</th></tr>
<tr><td>Central</td><td>27</td><td>7</td><td>34</td></tr>
<tr><td>H. Norte</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>H. Atlántica</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Brunca</td><td>13</td><td>22</td><td>35</td></tr>
<tr><td>Chorotega</td><td>13</td><td>10</td><td>23</td></tr>
<tr><td>Pacífica C.</td><td>2</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>60</td><td>47</td><td>107</td></tr>
</table>

Tomado de: OVSICORI-UNA. www.ovsicori.una.ac.cr/

Bajo el supuesto de que un investigador elige aleatoriamente uno de estos sismos, se definen los siguientes eventos:

A: que el sismo escogido haya tenido epicentro en la Región Brunca.
B: que el sismo haya tenido una magnitud de 4 o más en la escala Richter.

Determine el número de sismos que incluye cada uno de los siguientes eventos, represéntelos en diagramas de Venn y ofrezca una interpretación.

a. $A \cup B$
b. $A \cap B$
c. A^c y B^c</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Reconocer eventos mutuamente excluyentes en situaciones aleatorias particulares.</td>
<td>▲ Para identificar eventos mutuamente excluyentes, se pueden presentar diversas situaciones relacionadas con eventos, en algunos de los cuales se cumple esta condición.

Considere los eventos:

C: que el sismo escogido haya tenido epicentro en la Región Chorotega.
D: que la magnitud del sismo haya sido menor de 4 grados en la escala Richter.</td>
</tr>
</table>

		Analice los siguientes eventos y represéntelos gráficamente mediante diagramas de Venn: a. $B \cap C$ b. $A \cap C$ c. $B \cap D$ ▲ Se sugiere aprovechar los resultados generados para favorecer el aprendizaje del concepto de eventos mutuamente excluyentes como aquellos eventos que no pueden ocurrir al mismo tiempo, lo que equivale a que dicha relación genera el evento imposible.
Probabilidades • Reglas básicas de las probabilidades: - $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento A - Probabilidad del evento seguro es 1 y del evento imposible es 0 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para eventos A y B mutuamente excluyentes • Otras Propiedades - Probabilidad de la unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ - Probabilidad del complemento: $P(A^c) = 1 - P(A)$	4. Deducir mediante situaciones concretas las reglas básicas (axiomas) de las probabilidades. 5. Deducir las propiedades relacionadas con la probabilidad de la unión y del complemento. 6. Aplicar los axiomas y propiedades básicas de probabilidades en la resolución de problemas e interpretar los resultados generados. 7. Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones en problemas vinculados con fenómenos aleatorios.	▲ Antes de iniciar el análisis sobre las reglas básicas de probabilidad es conveniente retomar el concepto de probabilidad de un evento tanto por la definición clásica (o laplaciana) como por medio de la aproximación por frecuencia relativa. Se puede plantear una situación similar a la siguiente: Se lanzan simultáneamente dos dados. Para la suma de los puntos de los dados: a. Identifique un evento seguro y su probabilidad. b. Identifique un evento imposible y su probabilidad. c. ¿Por qué se dice que la probabilidad de un evento es un valor entre el cero y el uno? ▲ Después de realizar el proceso de cierre se puede considerar la siguiente situación. Considere los eventos: A: Obtener un número primo B: Obtener un múltiplo de cuatro C: Obtener un múltiplo de tres a. Compruebe que A y B son mutuamente excluyentes. b. Determine P(A), P(B) y P(C). c. Determine el evento $A \cup B$ y calcule $P(A \cup B)$. d. ¿Se cumple que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$? e. Determine el evento $A \cup C$ y calcule $P(A \cup C)$. f. ¿Se cumple que $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$? g. ¿Qué se puede deducir de los resultados e y f? ▲ Con los resultados anteriores, es elemental proceder a formalizar los axiomas básicos de probabilidades que se han venido trabajando en los años previos. En realidad, el único resultado nuevo consiste en que la probabilidad de la unión de eventos mutuamente excluyentes es igual a la suma de las probabilidades de los eventos simples. ▲ Para el logro de esta habilidad se puede continuar con el problema que se ha venido trabajando, por medio de las siguientes acciones: Resuelva lo siguiente: a. Determine el evento $B \cap C$ y calcule $P(B \cap C)$.

b. Relacione los términos $P(A \cup C)$, $P(B \cap C)$, $P(A)$ y $P(C)$.
c. Determine los eventos $B \cup C$, $B \cap C$.
d. Calcule $P(B \cup C)$ y $P(B \cap C)$.
e. Relacione los términos $P(B \cup C)$, $P(B \cap C)$, $P(B)$ y $P(C)$.
f. Determine A^c, $P(A^c)$, B^c y $P(B^c)$.
g. ¿Qué relación existe entre $P(A)$ y $P(A^c)$?
h. ¿Qué relación existe entre $P(B)$ y $P(B^c)$?

▲ Con las interrogantes anteriores se espera que las y los estudiantes puedan deducir que

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

así como que

$$P(B^c) = 1 - P(B)$$

Se deben aprovechar los resultados para resumir las propiedades generales que se deducen.

▲ Es adecuado introducir varios problemas con diferentes niveles de complejidad, para complementar el aprendizaje de las habilidades.

Debido a que se menciona al matemático ruso Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), se debe aprovechar para efectuar una pequeña referencia histórica sobre los aportes de este matemático al campo de las *Probabilidades*. En este particular, Kolmogorov realizó una axiomatización de la teoría de probabilidades por medio de los siguientes axiomas:

a. Para cada suceso aleatorio B hay asociado un número no negativo $P(B)$ que se llama su probabilidad.
b. $P(S) = 1$, donde S es el espacio muestral (evento cierto).
c. Si los sucesos $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son mutuamente excluyentes dos a dos, entonces,
$P(B_1 \cup B_2 \cup, \ldots, \cup B_n) = P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n)$

Fuente:
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Historia de la probabilidad.pdf

<table>
<tr><th colspan="3">11° Año</th></tr>
<tr><th colspan="3">Estadística</th></tr>
<tr><th>Conocimientos</th><th>Habilidades específicas</th><th>Indicaciones puntuales</th></tr>
<tr>
<td>Medidas de variabilidad

• Recorrido

• Recorrido intercuartílico

• Varianza

• Desviación estándar

Representación gráfica

• Diagrama de cajas</td>
<td>1. Identificar la importancia de la variabilidad para el análisis de datos.

2. Reconocer la importancia de la variabilidad de los datos dentro de los análisis estadísticos y la necesidad de cuantificarla.

3. Resumir la variabilidad de un grupo de datos mediante el uso del recorrido, el recorrido intercuartílico, la varianza o la desviación estándar e interpretar la información que proporcionan.

4. Utilizar diagramas de cajas para comparar la posición y la variabilidad de dos grupos de datos.

5. Emplear la calculadora o la computadora para simplificar los cálculos matemáticos en la determinación de las medidas de variabilidad.

6. Resolver problemas del contexto estudiantil que involucren el análisis de las medidas de variabilidad.</td>
<td>▲ Para favorecer una mejor comprensión de la variabilidad de los datos, se han definido algunas medidas estadísticas que permiten cuantificar su magnitud. Para valorar la importancia de estas técnicas es conveniente plantear problemas en los cuales se requiera realizar análisis comparativos entre dos o más grupos de datos.

En la página http://www.meteored.com/ se proyecta la temperatura máxima y mínima en diferentes ciudades del mundo. Para 12 días del mes de marzo del 2010, en la ciudad de Nicoya se proyectaron las siguientes temperaturas máximas en grados centígrados:

<table>
<tr><td>36</td><td>35</td><td>35</td><td>35</td><td>34</td><td>34</td></tr>
<tr><td>35</td><td>37</td><td>31</td><td>32</td><td>32</td><td>32</td></tr>
</table>

mientras que en San José para los mismos días las temperaturas máximas proyectadas fueron:

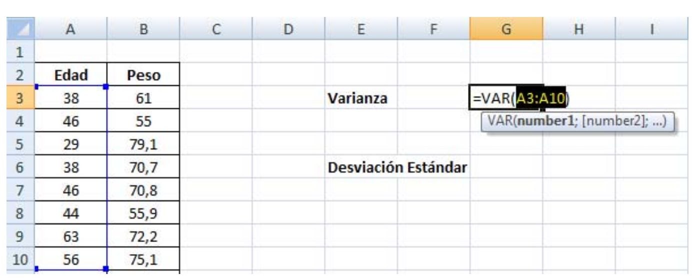
<table>
<tr><td>27</td><td>28</td><td>27</td><td>25</td><td>29</td><td>25</td></tr>
<tr><td>26</td><td>25</td><td>22</td><td>22</td><td>21</td><td>22</td></tr>
</table>

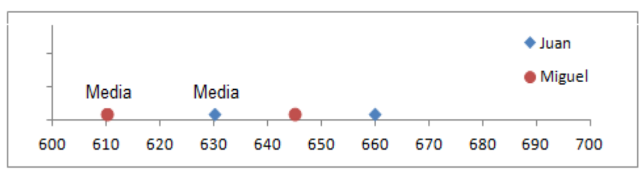
Realice un análisis estadístico con la información anterior, para comparar las temperaturas de las dos ciudades de acuerdo con esas muestras. ¿En cuál de las ciudades la temperatura es más variable?

▲ Se puede iniciar con el empleo del recorrido y el recorrido intercuartílico, e incluso recurrir a la elaboración de un diagrama de cajas.

▲ Posteriormente, se puede aprovechar el ejercicio para introducir el cálculo de la varianza y la desviación estándar, como medidas que tienen la virtud de utilizar todos los datos para su cálculo, considerando las diferencias entre cada dato con la media aritmética. Por lo complejo de estas medidas, se requiere definir los conceptos y además plantear interrogantes cuyas respuestas permitan valorar la importancia de estas medidas.

Para agilizar los cálculos, tanto en los cuartiles como en la varianza y la desviación estándar se debe promover el uso de una calculadora que tenga funciones estadísticas, o bien de una computadora mediante una hoja de cálculo o de un programa especializado.


<table>
<tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td><td>G</td><td>H</td><td>I</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Edad</td><td>Peso</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>38</td><td>61</td><td></td><td></td><td>Varianza</td><td></td><td>=VAR(A3:A10)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>46</td><td>55</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>VAR(number1; [number2]; ...)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>29</td><td>79,1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>38</td><td>70,7</td><td></td><td></td><td>Desviación Estándar</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>46</td><td>70,8</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>44</td><td>55,9</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>63</td><td>72,2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>56</td><td>75,1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

		Se debe evidenciar la importancia de las medidas estadísticas tanto de posición como de variabilidad para representar características propias de los datos. Éstas se complementan con las representaciones tabulares y gráficas como estrategias para resumir la información que comunican los datos, para tener elementos suficientes que permitan argumentar sobre un problema particular.
Medidas relativas • Posición relativa: estandarización • Variabilidad relativa - El coeficiente de variación	7. Reconocer la importancia de emplear medidas relativas al comparar la posición o la variabilidad entre dos o más grupos de datos. 8. Aplicar estandarización y el coeficiente de variación para comparar la posición y variabilidad de dos o más grupos de datos.	▲ No siempre las medidas absolutas permiten, tanto en posición como en variabilidad, realizar comparaciones de una manera eficiente. Por ello se deben plantear problemas que permitan determinar las limitaciones que tienen las medidas absolutas y la necesidad de buscar medidas relativas. Las siguientes situaciones son ejemplos que pueden orientar: Dos hermanos discuten sobre quién obtuvo un mejor rendimiento en el examen de admisión a una universidad. Juan realizó el examen en el 2009 y obtuvo una calificación de 660, mientras que Miguel obtuvo 645 en el 2011, ambos en una escala de 800 puntos. Juan indica que no hay nada que discutir pues su calificación es más alta. Pero Miguel le indica que aunque eso es cierto, en el 2009 la calificación media fue de 630 con una desviación estándar de 30 puntos, mientras que en el 2011 la calificación media fue de 610 con una desviación estándar de 25 puntos. Por ello Miguel dice que fue él quien obtuvo un mejor rendimiento. ¿Quién cree que tiene la razón? ¿Por qué? ▲ En este tipo de problemas se demuestra que el valor que toma un dato particular es muy relativo al momento de comparar con los datos de otro grupo. Seguidamente se representa en el eje coordenado la situación posicional de cada uno de los jóvenes.  La discusión se centra en identificar cuál calificación se aleja positivamente más del promedio, pero para ello se requiere considerar la variabilidad presente en las notas de cada uno de los años, por lo que el análisis se debe realizar con la posición relativa que se obtiene dividiendo la diferencia obtenida entre la nota y la media entre la desviación estándar: Nota relativa de Juan: $\frac{660-630}{30} = 1{,}0$ Nota relativa de Miguel: $\frac{645-610}{25} = 1{,}4$ De acuerdo con estos datos la posición relativa de Miguel es superior a la de Juan, por lo que si se compara la nota de cada uno de ellos con respecto a todo el estudiantado que realizó el examen en cada uno de los años, la nota de Miguel fue superior. Se debe aclarar que el supuesto básico para realizar este análisis es que la forma de la distribución de las calificaciones sea similar en ambos años.

Un zoólogo tiene como propósito recabar información para determinar el estado en que se encuentran los animales de un refugio de vida silvestre. Para ello espera que no exista mucha variabilidad entre los pesos de los animales adultos. Selecciona una muestra aleatoria de 10 jaguares machos y una muestra aleatoria de 10 tepezcuintes machos. Los pesos en kilogramos son:

Jaguar	80	66	72	76	76
Tepezcuinte	4,5	6,4	7,0	7,7	6,6

Jaguar	70	65	68	69	77
Tepezcuinte	7,5	8,1	6,3	7,7	6,9

Imágenes con derechos adquiridos por el MEP

¿Para qué animal los pesos mostrados son relativamente más variables? ¿Qué aspectos se deben considerar para realizar este análisis?

▲ En este problema, la primera alternativa consiste en considerar la variación absoluta, lo cual significaría que los pesos de los jaguares son más variables. Si éste fuera el caso, se debe cuestionar que los jaguares pesan más que los tepezcuintes, por lo que se debe realizar una comparación relativa. La medida que corresponde para realizar este análisis se denomina coeficiente de variación, y consiste en determinar la razón entre la desviación estándar y el promedio.

Coeficiente de variación = $\frac{Desv.est.}{Media\ aritmética} \cdot 100$

Al utilizar esta medida se puede verificar que, en términos relativos, son más variables los pesos de los tepezcuintes.

Aunque no sea de manera directa, el incorporar en los problemas elementos de flora y fauna del país permite no sólo conocer especies propias sino también sensibilizar sobre la importancia de la conservación, por lo que se promueve el eje transversal *Cultura Ambiental para el Desarrollo Sostenible*.

Indicaciones metodológicas

Generales para el ciclo

1. Se espera que en este ciclo las bases estudiantiles sean suficientemente sólidas, por eso es importante analizar muy bien el tipo de problemas que se proponen, pues hay que ir incrementando el nivel de dificultad para mantener activa la integración estudiantil durante el proceso. Debido a que éstos son los últimos dos años de la Secundaria se requiere ratificar las habilidades generales que se han venido promoviendo desde la Primaria y propiciar nuevas habilidades. Por ello, los problemas deben ser más integrales, de modo que les permitan combinar distintas técnicas para realizar el análisis correspondiente.

2. Por lo anterior, no siempre los problemas del contexto inmediato se ajustan a las habilidades que se propone desarrollar, por eso es deseable simular problemas que articulen adecuadamente los conceptos y propicien el desarrollo de esas habilidades.

3. En el área de la *Estadística*, los análisis están más dirigidos hacia el uso de las medidas de posición y variabilidad, tanto en forma absoluta como relativa. Pero se espera que mediante los conocimientos adquiridos se integre el uso de cuadros y gráficos para realizar análisis exploratorios vinculados con los datos. De hecho, se debe potenciar el empleo de gráficos de barras, lineales o diagramas de puntos y de cajas para analizar intuitivamente la distribución de los datos en cuanto a posición y variabilidad se refiere. Las medidas deben complementar los estudios exploratorios.

4. Respecto a cada una de las medidas de resumen que se analizan en este ciclo, es importante que se desarrollen habilidades para una adecuada comprensión de ellas. El procedimiento de cálculo juega un rol secundario, de hecho puede hacerse con el apoyo de una calculadora o incluso una computadora. El énfasis debe centrarse en el uso correcto de las medidas para los problemas planteados y su interpretación en función de esos problemas.

5. Debido a la complejidad que tienen el cálculo de los cuartiles, la variancia y la desviación estándar, se deben definir mediante el análisis que encierra su fórmula de cálculo. Pero se debe enfatizar el interés que tienen estas medidas para caracterizar los datos.

6. En el análisis de las decisiones bajo riesgo se pretende que mediante la acción con estudiantes sea posible modelar diversas situaciones a las que se enfrenta antes de tomar una decisión particular, esto le debe permitir valorar los riesgos a los que se somete. Por ello, su conocimiento sobre probabilidades y medidas de resumen debe proveer de la información necesaria para tomar una decisión adecuada. Dos problemas vinculados con la toma de decisiones se citan seguidamente:

   a. A Juan le proponen contratarlo para que realice cierto trabajo y le dan dos alternativas de pago:
      i) Un solo pago de cincuenta mil colones.
      ii) Un pago de cien mil colones siempre y cuando el trabajo se termine en el tiempo estipulado, en caso de atrasos le pagarán de acuerdo con la siguiente tabla.

Pago	₡50 000	₡20 000
Atraso	1 día	2 o más días

   De acuerdo con su experiencia, Juan sabe que para este tipo de trabajo tiene una posibilidad de uno en cinco de entregarlo a tiempo y también de uno en cinco de atrasarse sólo un día. Para decidir, Juan valora cuáles son sus verdaderas expectativas de ganancia, pues desea tomar la mejor decisión.
      i) ¿De qué manera el cálculo de probabilidades le puede ayudar a decidirse?
      ii) ¿Cuál es la probabilidad de que se atrase dos o más días?

iii) ¿Qué decisión debería tomar? ¿Por qué?

b. Suponga que Pedro debe decidir entre tres ciudades para ir a realizar un trabajo por un año. Pero Pedro tiene problemas de salud y le afectan los cambios de temperatura, por lo que debe escoger una ciudad en la cual la temperatura sea lo menos variable posible. Entre la información que se le proporciona respecto a la temperatura en grados centígrados a las 12 medio día en esas ciudades se encuentra lo siguiente:

Temperatura	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C
Promedio anual	25	24	25
Mediana anual	24	24	23
Moda anual	24	24	22

Pedro recuerda que al estudiar Estadística en Secundaria aprendió que las medidas de posición son apenas un referente de lo que puede ocurrir, pero la información proporcionada no es suficiente para tomar una decisión. Por ello pide que le envíen una muestra de mediciones de temperatura a las 12 medio día de 15 días elegidos aleatoriamente durante el año anterior. Los datos se muestran a continuación:

Ciudad A	15	30	28	25	10	35	30	17	25	29	33	13	25	24	31
Ciudad B	24	2	-1	29	39	38	30	15	25	28	33	18	36	14	24
Ciudad C	29	22	23	29	27	18	17	24	26	25	27	26	27	25	25

Pedro no recuerda qué puede hacer con esta información para tener un mejor criterio y poder decidir sobre el problema, por ello está buscando a alguien que le ayude con el análisis que le permita argumentar con información concreta la decisión que debe tomar.

i) Realice el análisis correspondiente e indique a Pedro con información concreta y clara ¿cuál sería la mejor decisión y por qué?
ii) Indíquele a Pedro los supuestos que usted ha utilizado para llevar a cabo este análisis.

Décimo año

1. La temática inicia nuevamente con procesos de análisis de información cualitativa, pero ahora con la intención de realizar una mayor conexión con otras áreas disciplinarias. En el ejemplo que se sugiere, se solicita realizar un análisis sobre la población indígena nacional que, de acuerdo con el último censo de población, conserva la lengua materna del grupo étnico al que pertenece.

   Según se puede consultar en la página electrónica ccp.ucr.ac.cr, de acuerdo con el censo de población del año 2000 (si estuvieran disponibles los datos de un censo más reciente, sería conveniente actualizar la información), se tiene que:

Costa Rica: Población indígena de 12 años o más de acuerdo con el número de personas que conservan la lengua materna de su grupo étnico según el Censo de Población y Vivienda, 2000.

Grupo	Lengua indígena	Sólo en español	Ignorado	Total
Bribri	5165	3554	1120	9839
Cabécar	7767	780	1132	9679
Guaymí	2078	135	274	2487
Boruca o brunca	54	1733	69	1856
Huetar	6	978	18	1002
Chorotega	22	786	183	991
Teribe o térraba	54	591	81	726
Maleku o guatuso	204	204	28	436
Otro	2	21	1	24
Total	**15 352**	**8782**	**2906**	**27 041**

Fuente: Censo de Población y Vivienda del año 2000. ccp.ucr.ac.cr

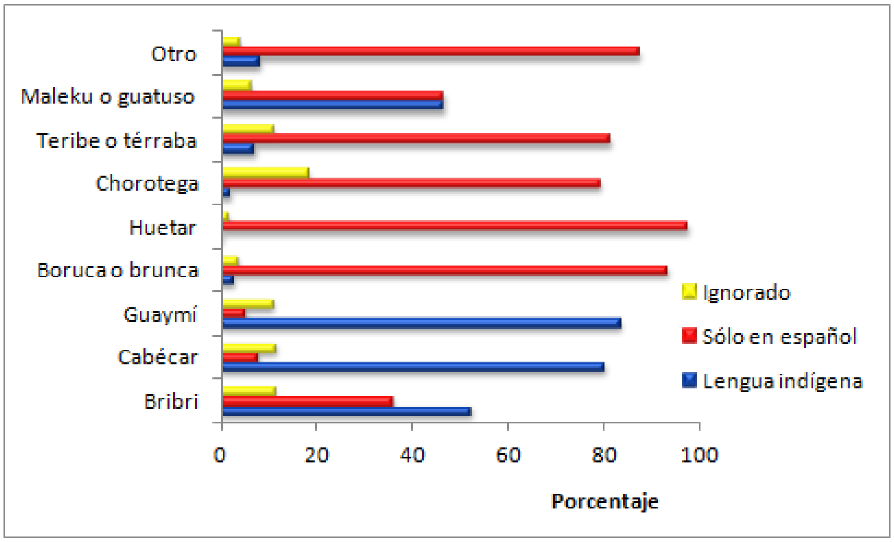
Debido a que se piden los porcentajes de población que conservan su lengua, la información puede ser resumida en cualquiera de las siguientes representaciones:

Costa Rica: Porcentaje de población indígena de 12 años o más de acuerdo con el número de personas que conservan la lengua materna de su grupo étnico según el Censo de Población y Vivienda, 2000.

Grupo	Lengua indígena	Sólo en español	Ignorado	Total
Bribri	52,50	36,12	11,38	100
Cabécar	80,25	8,06	11,70	100
Guaymí	83,55	5,43	11,02	100
Boruca o brunca	2,91	93,37	3,72	100
Huetar	0,60	97,60	1,80	100
Chorotega	2,22	79,31	18,47	100
Teribe o térraba	7,44	81,40	11,16	100
Maleku o guatuso	46,79	46,79	6,42	100
Otro	8,33	87,50	4,17	100
Total	**56,78**	**32,48**	**10,75**	**100**

Fuente: Censo de Población y Vivienda del año 2000. ccp.ucr.ac.cr

Costa Rica: Porcentaje de población indígena de 12 años o más de acuerdo con el número de personas que conservan la lengua materna de su grupo étnico según el Censo de Población y Vivienda, 2000.



Fuente: Censo de Población y Vivienda del año 2000. ccp.ucr.ac.cr

Con cualquiera de las últimas dos representaciones se puede analizar la información que se comunica. Por ejemplo, los Guaymíes eran los que conservaban para el año 2000 en mayor medida su lengua materna, mientras que los Huetares habían prácticamente perdido su lengua materna. Se debe aclarar que la categoría de Ignorados, que corresponde a información que no pudo ser clasificada, puede provocar errores parciales en el análisis.

Del mismo modo, para responder a la interrogante mencionada anteriormente sobre la probabilidad de que un indígena que se hubiera seleccionado aleatoriamente perteneciera al grupo de los Cabécares y conservara su lengua autóctona, se puede suponer entonces que el espacio muestral está constituido por los 27 041 indígenas que aparecen en el primer cuadro, de los cuales 7767 eran Cabécares que conservaban su lengua. La probabilidad solicitada es $\frac{7767}{27\,041} = 0{,}287$.

2. El propósito básico de cada una de las medidas de posición consiste en resumir en un valor una característica particular de todo el grupo de datos. En este sentido, el análisis se debería enfocar en esa característica, pues es la que le va a permitir interpretar adecuadamente estas medidas:

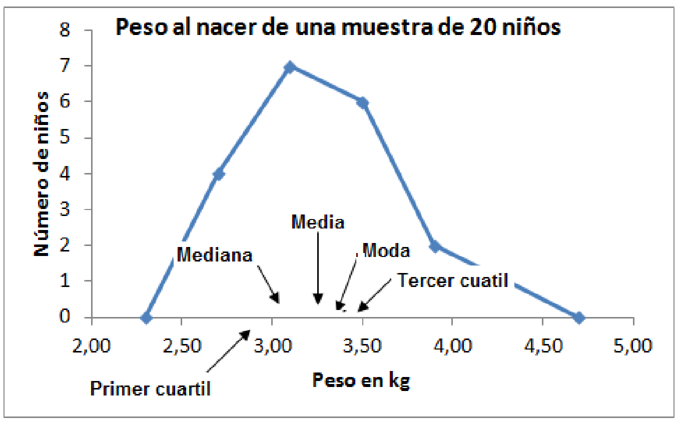
- La moda: representa el valor que más se repite, o el valor más común del conjunto de datos.
- La media aritmética: corresponde al promedio de los datos. Es una de las medidas más utilizadas en Estadística.
- La mediana: corresponde al valor que se ubica en el centro de la distribución de datos, de modo que el 50% de los datos son iguales o mayores que la mediana, el otro 50% son menores o iguales que la mediana.
- El máximo: corresponde al mayor valor que toman los datos.
- El mínimo: corresponde al menor valor que toman los datos.
- Cuartiles: el primer cuartil es aquel valor para el cual el 25% de los datos son menores o iguales y el 75% de los datos son mayores o iguales a este valor. Del mismo modo, el tercer cuartil es aquel valor para el cual el 75% de los datos son menores o iguales y el 25% de los datos son mayores o iguales a este valor. El segundo cuartil es la mediana.

Algunas de las fórmulas de cálculo de estas medidas requieren de especial discusión, pero ante todo se requiere enfatizar en la interpretación de los valores que ellas toman.

3. Para el ejemplo del análisis de las variables peso al nacer y número de hermanos de los niños, el cual se incluye en las indicaciones puntuales, las medidas de posición se indican en el siguiente cuadro:

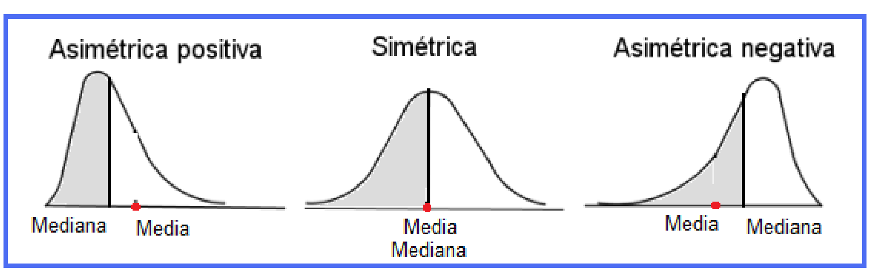
Medidas	Peso al nacer	Número de hermanos
Moda	3,36	1,00
Media aritmética	3,23	1,00
Mediana	3,08	1,00
Primer Cuartil	2,96	0
Tercer Cuartil	3, 44	1,50
Mínimo	2,69	0
Máximo	4,36	3,00

Para una buena comprensión del significado de la posición de los datos, en el caso de variables continuas cada estudiante debe comprender la representación gráfica de las medidas dentro de un polígono de frecuencias, tal como se muestra.



Desde ese punto de vista es significativo generar diferentes problemas que evidencien dichas propiedades para explicar adecuadamente el patrón de variabilidad de los datos.

4. La media aritmética o promedio representa el valor alrededor del cual se concentran los datos, pero su posición tiende a sesgarse influenciada por dichos valores debido a que dicha medida es muy sensible ante la presencia de valores extremos (datos muy altos o datos muy bajos de lo común). Para que el promedio cumpla con su propósito, la distribución de los datos debe ser aproximadamente simétrica, en caso contrario se debe recurrir a la mediana, que por sus características se ubica en el centro de la distribución. En las siguientes tres gráficas se muestra la posición de la media de acuerdo con la distribución de los datos, en la primera y tercera se observa el desplazamiento hacia los valores extremos; la parte sombreada representa el 50% del área, que equivale a una acumulación del 50% de los datos.



Elaboración propia

En el ejemplo sobre los salarios de los empleados de una empresa, que fue incluido en las indicaciones puntuales, se evidencia el efecto de los valores extremos sobre el promedio.

5. Vinculado con el punto anterior, conviene destacar que la acción docente esté centrada en la interpretación que se dé a cada medida estadística, para que se aproveche la información que suministra y no se incurra en errores en el proceso. A manera de ejemplo, es común que al interpretar la moda se diga que la mayoría de las observaciones toma este valor, lo cual en muchos casos es una afirmación falsa.

6. Para facilitar el cálculo de las medidas de posición existen múltiples herramientas computacionales, una de la más simples son las hojas de cálculo. Si se cuenta con los recursos necesarios, es conveniente hacer uso de ellos para simplificar el trabajo:

	A	B	C	D	G	I
2	Visitas	Presión	Edad	Peso		
3	4	N	38	61	Promedio	=AVERAGE(D3:D14)
4	6	N	46	55		AVERAGE(number1; [number2]; ...)
5	5	A	29	79,1	Primer cuartil	=QUARTILE(D3:D14;1)
6	2	B	38	70,7		QUARTILE(array; quart)
7	6	A	46	70,8	Mediana	=MEDIAN(D3:D14)
8	4	N	44	55,9		MEDIAN(number1; [number2]; ...)
9	4	N	63	72,2	Máximo	=MAX(D3:D14)
10	3	N	56	75,1		MAX(number1; [number2]; ...)
11	1	A	43	60,8	Mínimo	=MIN(D3:D14)
12	5	B	52	70,6		MIN(number1; [number2]; ...)
13	2	A	72	71,6		
14	1	N	71	85,5		

7. Algunos de los problemas que se utilizan para introducir un tema están vinculados directamente con el ámbito estudiantil o académico, pero también es oportuno incluir problemas relacionados con otras áreas. Por ejemplo, en las indicaciones puntuales para el cálculo de la media ponderada se incluyó un problema relacionado con la nota promedio de un curso; no obstante, existen múltiples aplicaciones para este concepto. Observe el siguiente ejemplo:

De acuerdo con la página de Internet *Index Mundi*, el siguiente cuadro resume el Producto Interno Bruto (PIB) para los países de la región y sus poblaciones:

PIB per cápita para los países de la región y número de habitantes

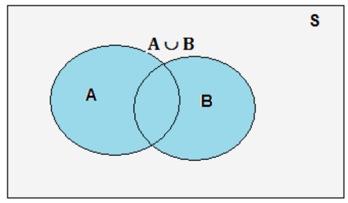
País	PIB 2009 (dólares)	Población (habit.)
Belice	7 610,1	318 000
Guatemala	4 532,8	13 687 000
Honduras	3 780,8	8 067 000
El Salvador	6 705,7	6 062 000
Nicaragua	2 796,8	5 635 000
Costa Rica	9 689,9	4 547 000
Panamá	9 281,1	3 436 000

Fuente: http://www.indexmundi.com/es/

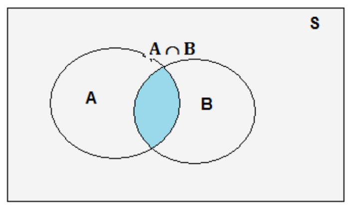
Investigar sobre el significado del PIB y PIB *per cápita*. Con base en esta información determinar el PIB *per cápita* promedio para la región.

8. Por medio de la teoría de conjuntos es posible definir operaciones con eventos, estos conceptos deben ser clarificados de modo que se puedan identificar los nuevos eventos que se forman al unir, interceptar eventos o determinar el complemento de un evento.

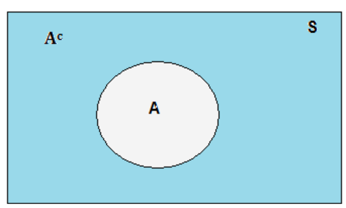
   a. Si se tienen dos eventos A y B, entonces: "$A \cup B$" se define como un nuevo evento que incluye los puntos muestrales de ambos eventos.



   b. Por su parte "$A \cap B$" se define como el evento que incorpora los puntos muestrales que se repiten en ambos eventos.



   c. Finalmente el *complemento del evento A* "A^c" representa un nuevo evento con los puntos muestrales del espacio muestral que no están en el evento A.

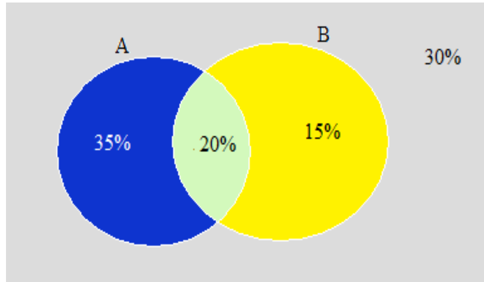


9. La representación de eventos por medio de diagramas de Venn u otras representaciones simplifican el análisis probabilístico y reducen la dependencia a las fórmulas, pues se pueden determinar fácilmente los puntos muestrales a favor de cada evento. Un problema que puede orientar al estudiantado sobre este punto se muestra seguidamente.

   Suponga que de los jugadores inscritos en el campeonato de fútbol de primera división, el 55% tiene menos de 25 años y el 35% tiene contrato por dos años o más. Además un 30% tiene más de 25 años y cuenta con un contrato menor a dos años. Utilice esta información para determinar:

   a. La probabilidad de que un futbolista aleatoriamente seleccionado tenga menos de 25 años o cuente con un contrato de dos o más años.
   b. La probabilidad de que un futbolista aleatoriamente seleccionado tenga 25 o más años.
   c. Si en total hay 260 futbolistas debidamente inscritos, ¿cuántos de ellos tienen 25 o más años y tienen un contrato menor de dos años?

   Observe que si A representa el evento de que el futbolista tenga menos de 25 años, B el evento de que el futbolista tiene un contrato por dos o más años, entonces la información proporcionada se puede resumir en el siguiente diagrama:



Observe que el espacio muestral incluye el 100% de los futbolistas (puntos muestrales), el evento A incluye el 55%, el evento B incluye el 35% de ellos y se observa que hay 20% que corresponde a la intersección entre A y B, que constituye los futbolistas que tienen ambas características. Por lo anterior las respuestas a las interrogantes serían:

a. La probabilidad que el futbolista seleccionado tenga menos de 25 años o posea un contrato de dos o más años es $P(A \cup B) = 0,35 + 0,20 + 0,15 = 0,70$.
b. La probabilidad que el futbolista seleccionado tenga 25 o más años es $P(A^c) = 0,15 + 0,30 = 0,45$
c. De acuerdo con el diagrama, el 30% de los futbolistas no cumplen ni la condición A ni la B, por lo que tienen 25 o más años y tienen contrato menor de dos años. El 30% de 260 equivale a 78 futbolistas.

Se puede comprobar que estos resultados pueden ser obtenidos también mediante la implementación de las reglas básicas de probabilidad.

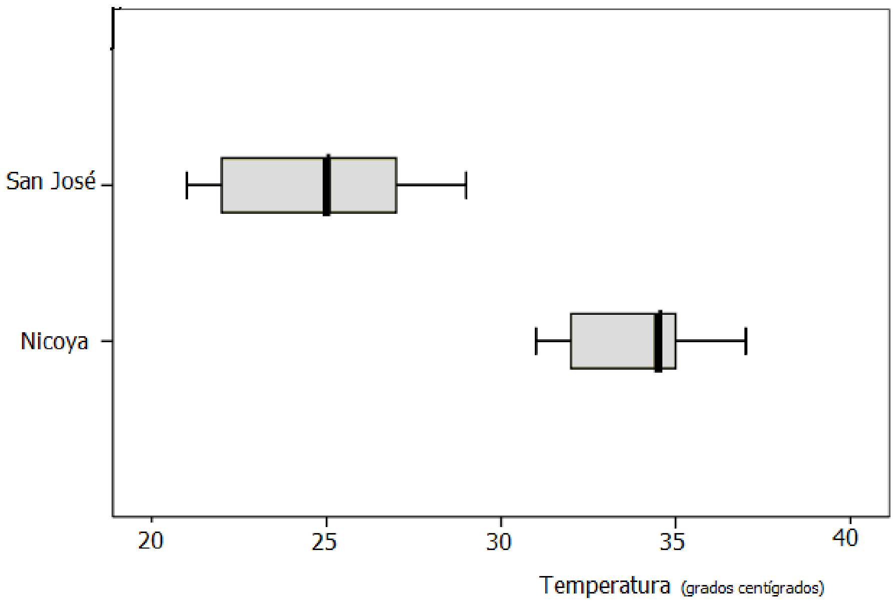
Undécimo año

1. Se debe tener presente que desde Primaria se ha venido analizando la importancia de la variabilidad en los datos. Se ha insistido en el rol que juega este concepto dentro de los análisis estadísticos, desde el punto de vista de que el propósito primario de la Estadística consiste en establecer estrategias para describir y resumir la variabilidad de los datos. La comprensión de la variabilidad permite establecer estrategias para realizar los análisis posteriores. Todo estudio estadístico, por sofisticado que sea, lleva implícito el reconocimiento de que los datos son variables.

2. Debido al potencial que tienen los diagramas de cajas para conectar las medidas de posición con las de variabilidad, es posible llevar a cabo un análisis visual de mucho valor práctico para caracterizar la distribución de un grupo de datos. Por ello, se recomienda que la acción docente no solamente enfatice la construcción del gráfico y el análisis de la variabilidad, sino que dentro de los análisis pueda complementar con estos otros elementos que caracterizan la posición y la forma de la distribución de los datos.

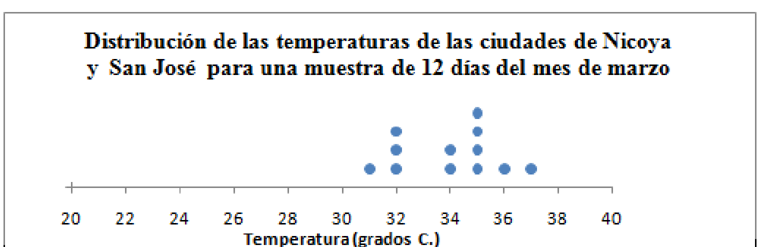
   Por ejemplo, si se retoma el ejemplo de las temperaturas máximas en el mes de marzo en San José y Nicoya que se propuso en las indicaciones puntuales, en el diagrama siguiente se muestra el comportamiento de cada grupo de datos.

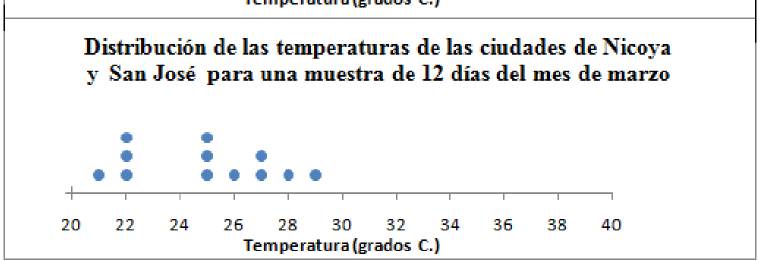
Temperatura en San José y Nicoya, muestra de 12 días en el mes de marzo



Este diagrama deja entrever varios aspectos claves. Primeramente, en cuanto a la ubicación de los datos se aprecia que las temperaturas en Nicoya son más altas, incluso el valor máximo en San José no alcanza al valor mínimo de Nicoya para esos días. Por otro lado, se observa también que las mediciones en San José son más variables. Por último, la posición de la mediana en la distribución de temperaturas en Nicoya muestra una fuerte asimetría negativa, en San José la distribución de los datos tiende a ser más simétrica. Este ejemplo pone de manifiesto la riqueza visual de estos diagramas y su potencial para favorecer análisis estadísticos.

3. Los diagramas de puntos también pueden ser utilizados dentro de los análisis preliminares que se realizan para comparar grupos de datos de una misma naturaleza. Muchos de los elementos discutidos en el punto anterior se pueden también apreciar en estos diagramas. La ventaja de emplear diagramas de cajas consiste en que incorporan directamente varias medidas estadísticas, pero es importante que cada estudiante pueda utilizar diferentes recursos para realizar los análisis.





4. Además del uso de medidas de posición y variabilidad es fundamental insistir en el empleo de medidas relativas para hacer comparaciones entre datos.

5. Cuando se compara la variabilidad de conjuntos de datos y éstos no son de una misma naturaleza o magnitud, se debe recurrir al empleo del coeficiente de variación.

Indicaciones de evaluación

En este ciclo, la evaluación debe orientarse a identificar la forma en que las y los estudiantes utilizan la *Estadística* y la *Probabilidad* para enfrentar problemas de un nivel de dificultad superior al de los ciclos previos. La capacidad de *Razonar* y *argumentar* debe someterse a un mayor nivel de exigencia, no se pretende simplemente que resuman datos o identifiquen probabilidades para responder preguntas puntuales, sino que aborden problemas con un mayor nivel de complejidad y de temas variados. No obstante, el uso de estrategias adecuadas para la recolección, ordenamiento, representación (cuadros, gráficos o medidas de resumen) y el análisis de la información siguen siendo fundamentales en los análisis tanto estadísticos como probabilísticos, pero más enfocados hacia la toma de decisiones.

Por ello, se propone:

- ✓ Para el *trabajo cotidiano*, las estrategias que se vayan a utilizar deben permitir evaluar el análisis que realiza cada estudiante durante la resolución de problemas que guardan relación con el empleo de medidas de posición y variabilidad, aunque los procesos de recolección de datos y representación mediante cuadros o gráficas continúan siendo relevantes. En el caso de *Probabilidad*, el trabajo estudiantil se centra en su habilidad para deducir y aplicar las propiedades de las probabilidades para la resolución de problemas y la toma de decisiones. En este sentido, conviene evaluar si realiza la corrección de errores cometidos y formalizan los nuevos conocimientos.

- ✓ En relación con el *trabajo extraclase*, las técnicas que se propongan deben orientar la acción estudiantil, en forma individual o en subgrupos, hacia el planteo y resolución de problemas por medio de un análisis lógico de cada una de estas actividades. En *Estadística* deben permitir a cada estudiante poner en práctica las habilidades adquiridas para llevar a cabo un análisis estadístico descriptivo sobre una situación particular, lo cual implica que se utilicen diversas técnicas de recolección, representación, determinación de medidas (de acuerdo con la naturaleza del fenómeno en estudio). Por otro lado, para el análisis de problemas vinculados con situaciones aleatorias, se deben poner en práctica herramientas estadísticas y propiedades de las probabilidades para modelar las situaciones, y para argumentar las conclusiones y favorecer la toma de decisiones.

- ✓ Por último, las *pruebas escritas*, así como las otras técnicas de evaluación que se pongan en práctica*,* deben permitir evaluar las habilidades adquiridas y aquellas que requieren ser reforzadas. Debido a que estas pruebas deben verse como una etapa más del proceso educativo, los ítems o preguntas que se incluyan en las dos áreas (*Estadística y Probabilidad*) deben estar orientadas hacia la identificación de las características de los datos y sus propiedades. A diferencia de los trabajos extraclase, los ítems en las pruebas escritas pueden enfocarse hacia conocimientos específicos como la interpretación que se genera de un cuadro, un gráfico, una medida estadística o la probabilidad de un evento; no obstante, no debe focalizarse en la construcción o cálculo sino en el mensaje que generan esos elementos. Los cálculos en sí mismos no son importantes sino en su función de corresponder a una interpretación particular

  Los siguientes ítems son ejemplos que pueden ayudar en la evaluación del logro de las habilidades que se proponen:

1. *De un total de 1500 estudiantes de primer ingreso a una universidad en particular, 685 desean cursar estudios en Ingeniería o Ciencias Básicas y 752 desean ingresar a una carrera de Ciencias Sociales (Administración y Economía). De ellos hay 254 que desean seguir carrera en ambas áreas, los restantes opinan que seguirán carreras en otras áreas. De acuerdo con esta información, la probabilidad de que una o un estudiante seleccione al menos una de estas áreas es:*
   a) *0,958*
   b) *0,169*
   c) *0,789*
   d) *0,457*

2. *Manuel es técnico en refrigeración y trabaja en la empresa Manolito y Asociados, tiene un salario mensual de 585 000 colones. Un amigo suyo llamado Felipe, que tiene la misma profesión, trabaja para la empresa Libertad R.L. y tiene un salario mensual de 650 000 colones. Este amigo pasa recriminando a Manuel indicándole que la empresa Manolito y Asociados no valora su trabajo pues le mantiene un salario muy bajo. La siguiente información representa las principales medidas estadísticas para todos los empleados de las dos empresas.*

Medidas estadísticas relacionadas con los salarios de los trabajadores de las empresas Manolito y Asociados y Libertad R.L (cantidades en colones)

Empresa	Promedio	Mediana	Moda	Recorrido	Desviación estándar
Manolito y Asociados	510 250	515 000	512 000	225 000	35 450
Libertad R. L.	593 035	589 500	595 000	195 000	41 202

Según la información anterior, analice cada una de las siguientes proposiciones:

I. *Manuel le indica que la empresa le reconoce su trabajo, pues si se compara su salario con el de todos los empleados de la empresa, él tiene un mejor salario relativo que el que tiene Felipe en la empresa Libertad R.L.*
II. *Felipe le dice que lo que ocurre es que, en términos relativos, los salarios de Manolito y Asociados son más variables que los salarios de Libertad R.L.*
III. *Ambos concuerdan en que tanto en posición absoluta como en variabilidad absoluta, los salarios de la empresa Manolito y Asociados son menores a los de la empresa Libertad R.L.*

De las afirmaciones anteriores son correctas

a) Solamente I y II.
b) Solamente I y III.
c) Solamente II y III.
d) Todas.

VII. OTROS ELEMENTOS

Tabla de conocimientos

Primer ciclo

1ER AÑO. CONOCIMIENTOS BÁSICOS				
Tamaño • Más grande • Más pequeño • Igual que • Tan grande como • Tan pequeño como	**Noción de longitud – anchura – espesor**	**Ubicación espacial**	**Distancia** • Lejos • Más lejos • Tan lejos como • Cerca • Más cerca • Tan cerca como	**Cantidad** • Mucho • Poco • Igual • Uno • Ninguno • Todos • Alguno • Más que • Menos que • Correspondencia uno a uno

1ER AÑO				
NÚMEROS	**GEOMETRÍA**	**MEDIDAS**	**RELACIONES Y ÁLGEBRA**	**ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD**
Números naturales • Conteo • Relaciones numéricas • Sistema de numeración decimal • Unidad y decena • Relaciones de orden • Números Ordinales **Operaciones con números naturales** • Suma • Resta **Cálculos y estimaciones** • Sumas • Restas	**Conocimientos básicos** • Líneas rectas • Líneas curvas • Líneas quebradas • Líneas mixtas • Nociones de posición con respecto a una línea cerrada (borde, interior, exterior) **Figuras planas** • Triángulo • Cuadriláteros • Polígonos • Identificación, trazo y clasificación **Cuerpos sólidos** • Cajas	**Longitud** • Unidad de medida • Metro • Centímetro **Moneda** • Unidad monetaria • Colón • Monedas de Costa Rica **Peso** • Unidad de peso • Comparación de pesos **Tiempo** • Día • Noche • Mes • Año • Antes • Después • Ahora • Mañana • Pasado • Presente • Futuro • Horas, minutos **Capacidad** • Unidad de Capacidad • Comparación de capacidades	**Sucesiones** • Patrones **Expresiones matemáticas** • Signo de Igualdad • Representación de cantidades	**<u>Estadística</u>** **El Dato** • Uso • Datos cuantitativos • Datos cualitativos **La variabilidad de los datos** **Recolección de información** • Observación • Interrogación **Presentación de información** • Frecuencia **<u>Probabilidad</u>** **Situaciones** • Aleatorias • Seguras

2° AÑO				
NÚMEROS	**GEOMETRÍA**	**MEDIDAS**	**RELACIONES Y ÁLGEBRA**	**ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD**
Números Naturales • Conteo • Relaciones numéricas • Sistema de numeración decimal • Centena • Recta numérica • Relaciones de orden • Sucesor y antecesor • Números ordinales **Operaciones con números naturales** • Suma • Resta • Multiplicación **Cálculos y estimaciones** • Suma • Resta • Multiplicación • División	**Líneas** • Horizontal • Vertical • Oblicua **Figuras planas** • Triángulo • Cuadrilátero • Cuadrado • Rectángulo • Vértice • Lado **Cuerpos sólidos** • Cajas • Esferas	**Longitud** • Metro • Centímetro • Relaciones • Símbolos **Moneda** • Estimación • Comparación **Peso** • Kilogramo • Gramo • Símbolo • Estimación • Comparación **Tiempo** • Horas • Minutos • Intervalos **Capacidad** • Litro • Estimación • Comparación	**Sucesiones** • Patrones • Tablas numéricas • Sucesiones ascendentes • Sucesiones descendentes	**Estadística** **El dato** • Uso • Datos cuantitativos • Datos cualitativos **La variabilidad de los datos** **Recolección de información** • Observación • Interrogación **Representación** • Tabular: cuadros de frecuencia. **Medidas de resumen** • Moda **Probabilidad** **Situaciones o experimentos** • Aleatorias • Seguras **Eventos** • Seguro • Probable • Imposible • Más probable y menos probable

3er AÑO				
NÚMEROS	**GEOMETRÍA**	**MEDIDAS**	**RELACIONES Y ÁLGEBRA**	**ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD**
Números naturales • Relaciones numéricas • Sistema de numeración decimal • Unidad de millar • Relaciones de orden • Números ordinales **Operaciones** • Multiplicación • División - Dividendo - Divisor - Cociente - Residuo **Cálculos y estimaciones** • Suma • Resta • Multiplicación • División	**Ángulos** • Lado • Vértice • Agudo • Recto • Obtuso **Rectas** • Paralelas • Perpendiculares **Segmentos** • Paralelos • Perpendiculares **Posición – localización** **Polígonos** • Pentágono • Hexágono **Circunferencias** • Radio • Diámetro **Cuerpos sólidos** • Esfera - Radio - Diámetro • Caja • Cubo - Arista - Cara	**Longitud** • Metro • Múltiplos • Submúltiplos • Conversiones **Moneda** • Monedas • Billetes • Comparación • Estimación **Peso** • Kilogramo • Cuartos • Medios • Tres cuartos • Estimar • Comparar **Tiempo** • Año • Mes • Semana • Hora • Minuto • Segundo • Conversiones **Capacidad** • Litro • Múltiplos • Submúltiplos • Conversiones **Medidas** • Longitud • Moneda • Masa • Tiempo • Capacidad	**Sucesiones** • Patrones • Sucesiones ascendentes • Sucesiones descendentes **Relaciones** • Tablas • Valor faltante **Representaciones** • Recta numérica	**<u>Estadística</u>** **El dato** • Uso • Datos cuantitativos • Datos cualitativos **Recolección de información** • Observación • Interrogación **Representación** • Tabular: cuadros de frecuencia • Gráfica: barras **Medidas de resumen** • Moda • Máximo • Mínimo **<u>Probabilidad</u>** **Situaciones o experimentos** • Resultados simples de un experimento aleatorio **Eventos** • Seguro • Probable • Imposible • Más probable, igualmente probable y menos probable

Segundo ciclo

4° AÑO				
NÚMEROS	**GEOMETRÍA**	**MEDIDAS**	**RELACIONES Y ÁLGEBRA**	**ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD**
Números naturales • Relaciones numéricas • Sistema de numeración decimal • Relaciones de orden • Números pares • Números impares • Múltiplos **Operaciones** • Multiplicación • División **Fracciones** • Concepto • Escritura • Lectura • Fracción propia • Representaciones **Decimales** • Lectura • Escritura • Ubicación en la recta numérica • Relaciones de orden **Cálculos y estimaciones** • Sumas • Restas • Multiplicaciones • Divisiones	**Triángulos** • Lado • Vértice • Ángulo • Base • Altura • Clasificación según la medida de sus lados - Equilátero - Isósceles - Escaleno • Clasificación según la medida de sus ángulos - Acutángulo - Rectángulo - Obtusángulo **Cuadriláteros** • Lado • Vértice • Ángulo • Base • Altura • Diagonal • Paralelogramos - Rectángulo - Rombo - Romboide - Cuadrado • No Paralelogramos - Trapecio - Trapezoide **Polígonos** • Regulares • Irregulares **Cuerpos sólidos** • Cubos • Prismas rectangulares • Planos • Planos paralelos • Planos perpendiculares **Simetría** • Figura simétrica • Eje de simetría • Puntos homólogos • Distancia de un punto al eje de simetría	**Superficie** • Metro cuadrado • Múltiplos • Submúltiplos • Estimación • Conversiones **Moneda** • Monedas • Billetes • Relaciones **Temperatura** • Grados Celsius • Grados Fahrenheit • Conversiones **Tiempo** • Año • Mes • Semana • Hora • Minuto • Segundo • Conversiones **Sistema métrico decimal** • Longitud • Peso • Capacidad • Superficie **Ángulos** • Grados	**Sucesiones** • Patrones **Representaciones** **Relaciones** **Propiedades de las operaciones**	<u>**Estadística**</u> **Datos** • Uso • Tipos de datos cuantitativos - Por conteo - Por medición • Fuentes de error en los datos **Recolección de información** • Experimentación por medición **Representación** • Gráfica: diagramas de puntos **Medidas de posición** • Moda • Media aritmética • Máximo • Mínimo **Medidas de variabilidad** • El recorrido <u>**Probabilidad**</u> **Situaciones o eventos aleatorios** **Eventos** - Resultados a favor de un evento - Representación de eventos - Eventos más probables, igualmente probables y eventos menos probables

5° AÑO				
NÚMEROS	**GEOMETRÍA**	**MEDIDAS**	**RELACIONES Y ÁLGEBRA**	**ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD**
Números naturales • Relaciones Numéricas **Operaciones** • Combinación de operaciones • Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma **Teoría de números** • Número par • Número impar • Múltiplos • Divisores • Reglas de divisibilidad **Fracciones** • Fracción propia e impropia • Representación mixta • Fracciones homogéneas • Fracciones heterogéneas • Relaciones numéricas • Ubicación en la recta numérica **Decimales** • Lectura • Escritura • Notación desarrollada • Redondeo **Cálculos y estimaciones** • Suma • Resta • Multiplicación • División	**Perímetro** • Triángulos • Cuadrados • Rectángulos • Paralelogramos • Trapecios **Área** • Triángulos • Paralelogramos • Trapecios **Geometría Analítica** • Puntos • Figuras **Transformaciones** • Traslaciones **Cuerpos sólidos** • Prismas • Cilindros • Altura	**Moneda** **Diversas medidas** • Longitud • Peso • Capacidad • Superficie • Tiempo • Ángulos	**Relaciones** • Cantidades constantes • Cantidades variables • Dependencia • Independencia • Escalas • Ecuaciones **Representaciones** • Tablas • Algebraicas	**<u>Estadística</u>** **Población y muestra** **Recolección de información** • El cuestionario y fuentes de error • Base de datos • Gráfica: barras y circulares **Medidas de posición** • Moda • Media aritmética • Máximo • Mínimo **Medidas de variabilidad** • El recorrido **<u>Probabilidad</u>** **Eventos** • Resultados a favor de un evento • Eventos seguros, probables o imposibles • Eventos más probables, igualmente probables y eventos menos probables

6° AÑO				
NÚMEROS	**GEOMETRÍA**	**MEDIDAS**	**RELACIONES Y ÁLGEBRA**	**ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD**
Teoría de números • Divisibilidad • Factores • Números primos • Números compuestos **Números naturales** • Potencias • Cuadrados perfectos • Cubos perfectos • Potencias de base 10 **Fracciones** • Fracciones equivalentes • Simplificación y amplificación. • Multiplicación • División • Inverso multiplicativo • Suma • Resta **Operaciones** • Prioridad • Combinación **Cálculos y estimaciones** • Suma • Resta • Multiplicación • División • Potencias	**Circunferencia** • Diámetro • Radio • Centro • Cuerda • Ángulo central • Cuadrante • Número π • Longitud • Área **Polígonos regulares** • Ángulo central • Radio • Apotema • Área • Perímetro **Cuerpos sólidos** • Cubo • Prismas • Cilindros • Conos • Pirámides • Esfera **Simetría**	**Volumen** • Metro cúbico • Múltiplos • Submúltiplos • Conversiones • Relación decímetro cúbico - litro **Diversas medidas** • Longitud - Nanómetro • Masa • Capacidad • Superficie • Tiempo • Temperatura • Moneda: colones, dólares, euros	**Relaciones** • Razón • Proporción directa • Porcentaje • Regla de tres **Sucesiones** **Representación** • Algebraica • Plano de coordenadas **Ecuaciones** • Ecuaciones de primer grado • Inecuación de primer grado	**<u>Estadística</u>** **Porcentajes** • Frecuencias porcentuales • Comparaciones entre grupos **Diagramas lineales** **Planteamiento y resolución de problemas** **<u>Probabilidad</u>** **Probabilidades** • Definición clásica o laplaciana de probabilidad **Propiedades de las probabilidades** • La probabilidad de cualquier evento es un valor numérico entre 0 y 1 inclusive • La probabilidad de un evento seguro es 1 y de un evento imposible es 0

Tercer ciclo

7° AÑO			
NÚMEROS	**GEOMETRÍA**	**RELACIONES Y ÁLGEBRA**	**ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD**
Números Naturales • Operaciones: - Suma - Resta - Multiplicación - División - Potencias • Combinación de operaciones **Teoría de números** • Algoritmo de la división • Divisibilidad • Factor • Múltiplo • Números primos • Números compuestos • Descomposición prima • Mínimo Común Múltiplo • Máximo Común Divisor **Números enteros** • Enteros negativos • Concepto de número entero • Relaciones de orden • Recta numérica • Valor absoluto • Número opuesto **Operaciones, cálculos y estimaciones** • Suma • Resta • Multiplicación • División • Potencias • Raíces • Combinación de operaciones	**Conocimientos básicos** • Punto - Puntos colineales y no colineales - Puntos coplanares y no coplanares - Punto medio • Recta - Segmento - Semirrecta - Rayo - Rectas concurrentes - Rectas paralelas en el plano - Rectas perpendiculares en el plano • Plano **Visualización espacial** • Caras • Aristas • Vértices • Rectas y segmentos paralelos • Rectas y segmentos perpendiculares • Planos paralelos • Planos perpendiculares **Ángulos** • Llano • Adyacentes • Par lineal • Opuestos por el vértice • Congruentes • Complementarios • Suplementarios **Triángulos** • Desigualdad triangular • Ángulos internos • Ángulos externos **Cuadriláteros** • Áreas • Suma de medidas de ángulos internos • Suma de medidas de ángulos externos **Geometría analítica** • Ejes cartesianos • Representación de puntos • Representación de figuras	**Sucesiones** • Ley de formación • Patrones **Relaciones** • Proporcionalidad inversa **Representaciones** • Verbal • Tabular • Gráfica • Algebraica	**La Estadística** **Conocimientos básicos** • Unidad estadística • Características • Datos u observaciones • Población • Muestra • Variabilidad de los datos • Variables cuantitativas y cualitativas **Recolección de información** • La experimentación • Interrogación **Frecuencia** • Absoluta • Porcentual **Representación** • Tabular: cuadros de frecuencia absoluta y porcentual **Medidas de posición** • Moda • Media aritmética • Mínimo • Máximo

8° AÑO			
NÚMEROS	**GEOMETRÍA**	**RELACIONES Y ÁLGEBRA**	**ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD**
Números racionales • Concepto de número racional • Representaciones • Relaciones de orden **Operaciones, cálculos y estimaciones** • Suma • Resta • Multiplicación • División • Potencias • Raíces • Combinación de operaciones	**Transformaciones en el plano** • Homotecias • Puntos homólogos • Segmentos homólogos **Triángulos** • Semejanza • Congruencias • Teorema de Thales **Visualización espacial** • Pirámide recta - Caras laterales - Base - Apotemas - Ápice (cúspide) - Altura • Sección plana • Prisma recto	**Funciones** • Función lineal **Expresiones algebraicas** • Concepto de expresión algebraica • Valor numérico • Monomios - Monomios Semejantes - Operaciones con monomios - Factor numérico y factor literal • Polinomios - Operaciones con polinomios - Productos notables **Ecuaciones** • Ecuaciones de 1er grado con una incógnita - Solución de una ecuación - Cero de una función - Raíz de una ecuación • Ecuaciones literales	**<u>Estadística</u>** **Recolección de información** • La experimentación • Interrogación **Frecuencia** • Absoluta • Porcentual **Representación** • Tabular: cuadros de frecuencia absoluta y porcentual • Gráfica: barras, circulares, lineales y diagramas de puntos **Medidas de posición** • Moda • Media aritmética • Mínimo • Máximo • Recorrido **<u>Probabilidad</u>** **El azar** • Aleatoriedad • Determinismo **Espacio muestral** • Espacio muestral, puntos muestrales y su representación **Eventos** • Resultados favorables a un evento • Eventos simples y compuestos • Evento seguro, evento probable, evento imposible **Probabilidad** • Eventos más probables, menos probables e igualmente probables • Definición clásica (o laplaciana) **Reglas básicas de probabilidad** • La probabilidad de cualquier evento es un valor numérico entre 0 y 1 • La probabilidad de un evento seguro es 1 y de un evento imposible es 0.

9° AÑO			
NÚMEROS	**GEOMETRÍA**	**RELACIONES Y ÁLGEBRA**	**ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD**
Números reales • Números irracionales • Concepto de número real • Representaciones • Comparación • Relaciones de orden • Recta numérica **Cálculos y estimaciones** • Suma • Resta • Multiplicación • División • Potencias • Radicales **Cantidades muy grandes y muy pequeñas**	**Triángulos** • Teorema de Pitágoras **Trigonometría** • Radianes • Seno • Coseno • Tangente • Razones trigonométricas de ángulos complementarios • Ángulos de elevación y depresión • Ley de senos **Geometría del espacio** • Pirámide recta • Apotema • Prisma recto • Área lateral • Área total	**Funciones** • Función cuadrática **Expresiones algebraicas** • Factorización • División de polinomios • Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias • Racionalización **Ecuaciones** • Ecuaciones de 2° grado con una incógnita - Raíces - Discriminante **Funciones** • Función cuadrática	**Estadística** **Variables cuantitativas** • Discretas • Continuas **Distribuciones de frecuencia** • Clases o intervalos • Frecuencia absoluta • Frecuencia relativa y porcentual • Representación tabular • Representación gráfica - Histogramas - Polígonos de frecuencia **Probabilidad** **Muestras Aleatorias** **Probabilidad frecuencial** • Estimación de probabilidad: empleo de la frecuencia relativa (concepto frecuencial o empírico) • Introducción a la ley de los grandes números

Ciclo diversificado

10° AÑO		
GEOMETRÍA	**RELACIONES Y ÁLGEBRA**	**ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD**
Geometría Analítica • Circunferencia - Centro - Radio - Recta secante - Recta tangente • Recta exterior • Rectas paralelas • Rectas perpendiculares **Polígonos** • Lado • Radio • Apotema • Ángulo central • Ángulo interno • Ángulo externo • Diagonal • Perímetro • Área • Relaciones métricas **Visualización espacial** • Esfera • Cilindro circular recto • Base • Superficie lateral • Radio • Diámetro • Sección plana • Elipse	**Conjuntos numéricos** • Unión • Intersección • Pertenencia • Subconjunto • Complemento • Intervalos **Funciones** • **Concepto de función y de gráfica de una función** • **Elementos para el análisis de una función** - Dominio - Imagen - Preimagen - Ámbito - Inyectividad - Crecimiento - Decrecimiento - Ceros - Máximo y mínimo - Análisis de gráficas de funciones • **Composición de funciones** • **Función lineal** • **Función cuadrática** **Sistemas de ecuaciones lineales** • Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas	**<u>Estadística</u>** **Representaciones tabulares y gráficas** **Medidas de posición** • Moda • Media aritmética • Mediana • Cuartiles • Extremos - Máximo - Mínimo **Media aritmética ponderada** **<u>Probabilidad</u>** **Eventos** • Relaciones entre eventos - Unión $\cup$ - Intersección $\cap$ - Complemento • Eventos mutuamente excluyentes **Probabilidades** • Reglas básicas de las probabilidades: - $0 \le P(A) \le 1$, para todo evento A - Probabilidad del evento seguro es 1 y del evento imposible es 0 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para eventos A y B mutuamente excluyentes • **Otras Propiedades** - Probabilidad de la unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ - Probabilidad del complemento: $P(A^c) = 1 - P(A)$

11° AÑO		
GEOMETRÍA	**RELACIONES Y ÁLGEBRA**	**ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD**
Geometría analítica • Simetría axial • Imagen • Preimagen **Transformaciones en el plano** • Traslaciones • Reflexiones • Homotecias • Rotaciones **Visualización espacial** • Cono circular recto • Vértice • Base • Superficie lateral • Radio • Diámetro • Sección plana • Elipse • Parábola • Hipérbola	**Funciones inversas** • Inversa de la función lineal • Función raíz cuadrada **Funciones exponenciales** • La función a^x • Ecuaciones exponenciales **Funciones logarítmicas** • La función $\log_a x$ • Ecuaciones logarítmicas **Funciones y modelización**	**Estadística** **Medidas de variabilidad** • Recorrido • Recorrido intercuartílico • Variancia • Desviación estándar **Representación gráfica** • Diagrama de cajas **Medidas relativas** • Posición relativa: estandarización • Variabilidad relativa - El coeficiente de variación

Distribución de áreas por nivel

Nivel	I Periodo	II Periodo	III Periodo
Tercer ciclo			
7° Año	Números	Estadística y Probabilidad Relaciones y Álgebra	Geometría
8° Año	Números Geometría	Relaciones y Álgebra	Estadística y Probabilidad
9° Año	Números Geometría	Estadística y Probabilidad Relaciones y Álgebra	Relaciones y Álgebra
Ciclo diversificado			
10° Año	Geometría Relaciones y Álgebra	Relaciones y Álgebra	Estadística y Probabilidad
11° Año	Relaciones y Álgebra	Estadística y Probabilidad Geometría	Geometría

Notas:

- Primaria no se incluye pues allí se trabaja en cada año lectivo una distribución de contenidos en espiral.
- *Medidas* es transversal en el Tercer ciclo y en el Ciclo diversificado.
- *Números* es transversal en el Ciclo diversificado.

Glosario

Agrupar (suma y producto) Técnica que se aplica para la realización de sumas o productos por columna. En el sistema decimal, con diez unidades de un orden determinado se forma una unidad del orden inmediato superior. Así, diez unidades simples forman una decena, diez decenas forman una centena, diez centenas una unidad de millar, etc. lo cual justifica el uso de las “llevadas” cuando se realizan sumas o productos cuyo resultado excede de 10.

Aleatoriedad Proceso en el que no puede determinarse el resultado antes que se produzca.

Álgebra Área de las Matemáticas en la que se usan símbolos, letras y números para expresar relaciones entre expresiones que representan números. Además, se ocupa de estudiar las propiedades de las operaciones aritméticas y lo números para obtener procedimientos que puedan ser generalizados. En el Álgebra se estudian las estructuras, relaciones y cantidades.

Ángulo Es la unión de dos rayos con punto final común.

Ángulo central de un polígono Ángulo cuyo vértice es el centro de un polígono y sus lados corresponden a dos radios consecutivos.

Apotema de la pirámide Es el segmento que tiene por extremos el ápice y el punto medio del lado de la base de una pirámide.

Apotema del polígono Es el segmento que tiene por extremos el centro del polígono y el punto medio de su lado.

Área matemática Conjunto de contenidos matemáticos del currículo que permiten su organización práctica. Se utilizan cinco áreas: *Números*, *Geometría*, *Medidas*, *Relaciones y Álgebra* y *Estadística y Probabilidad*.

Arista Es el segmento que corresponde a la intersección de dos caras de un cuerpo sólido.

Asíntota Recta que se aproxima continuamente a otra función o curva; es decir que la distancia entre las dos tiende a cero a medida que se extienden indefinidamente.
Recta que se aproxima continuamente a la gráfica de una función dada, es decir la aproximación es tal que la distancia entre las dos tiende a cero a medida que se extienden indefinidamente.

Asociativa (propiedad) Una operación binaria * sobre un conjunto dado *A*, tal que para cualesquiera elementos *a*, *b* y *c* de *A* se tiene que $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Azar Hace referencia a la casualidad, a lo fortuito, a una combinación de circunstancias que no se pueden prever ni evitar.

Binomio Es la suma de dos monomios no semejantes, es decir, es un polinomio que posee exactamente dos monomios no semejantes.

Cálculo mental	Son cálculos numéricos que siguen un procedimiento mental.
Característica	Particularidad de la unidad estadística que es objeto de estudio. Se pueden analizar varias características para una misma unidad estadística. También se conocen con el nombre de variables.
Círculo	Es la unión de la circunferencia con su interior.
Circunferencia	Es el conjunto de todos los puntos del plano que están a la misma distancia de un mismo punto llamado centro. El punto centro no pertenece a la circunferencia.
Clausura o cierre	Fase de la acción de aula en que se consignan los resultados matemáticos precisos (conceptos, métodos, procedimientos) y permite un proceso que "concluye" pedagógicamente el tema o los contenidos. Se trata de una síntesis cognoscitiva fundamental para el aprendizaje: a través de esta acción docente se ofrece un vínculo con la cultura matemática.
Cognición	Refiere a la capacidad de los sujetos para el procesamiento de información a partir de varios factores: la percepción, el conocimiento, la experiencia e incluso las características subjetivas.
Competencia	(…) la capacidad de los alumnos para aplicar conocimientos y habilidades, y para analizar, razonar y comunicarse con eficacia cuando plantean, resuelven e interpretan problemas relacionados con distintas situaciones. Se mide de un modo continuo, no como algo que una persona tiene o no tiene. (…) el carácter variable es un rasgo fundamental. Una persona instruida posee varias capacidades, y no existe ningún límite claro entre alguien que es totalmente competente y alguien que no lo es. (OECD, 2005, p. 23).
Competencia matemática	(…) una capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las Matemáticas en una variedad de contextos. Incluye razonar matemáticamente y usar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel de las Matemáticas en el mundo y hacer juicios bien fundados y decisiones necesarias para ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. (OECD, 2010, p. 4).
Complejidad, tratamiento de	Estrategia pedagógica que usa distintos niveles de profundidad y persigue la activación de acciones cognitivas en los problemas que se usan en la lección de Matemáticas.
Completar cuadrado	Procedimiento donde se busca el término que completa un trinomio *cuadrado* perfecto, para incorporarlo en la expresión algebraica sin modificar su valor original. Esto con el objeto de reescribir este trinomio en la forma $(a + b)^2$.
Composición aditiva	Permite formar otro número mediante la suma o resta de otros.
Composición de figuras	Es la acción de construir una figura a partir de la utilización de figuras geométricas más pequeñas.

Composición de transformaciones	Es la aplicación sucesiva de dos o más transformaciones geométricas a una figura dada.
Comunicar, proceso	Refiere a la expresión y comunicación oral, visual, escrita y simbólica de ideas, resultados y argumentos matemáticos a otros estudiantes, a los educadores, a la comunidad matemática.
Conectar, proceso	Actividades transversales para identificar y realizar conexiones entre las diferentes áreas matemáticas, y de las Matemáticas con otras disciplinas, o con las experiencias y contextos diversos.
Conexión, nivel de	Tipo de problema. Se basa en los procesos o competencias que intervienen en el nivel de reproducción, pero va más lejos. Refiere a la resolución de problemas que no son rutinarios pero se desarrollan en ambientes familiares al estudiante, la interpretación con exigencias mayores que en el grupo de representación, y algo que lo define: conexión entre los diversos elementos, en particular, entre distintas representaciones de la situación.
Conmutativa (propiedad)	Una operación binaria * sobre un conjunto dado *A*, tal que para cualesquiera elementos *a* y *b* de *A*, se tiene que $a * b = b * a$.
Conservación de la cantidad	El número que designa a una cantidad de objetos será siempre el mismo, independientemente del orden o la disposición de los elementos contados.
Constante	Es una cantidad que no varía. Es un número por sí solo, el cual se representa a veces mediante algún símbolo o letra particular. Por ejemplo, la razón entre la longitud de la circunferencia y la medida de su radio es constante, y se denota con la letra del alfabeto griego π.
Contextualización activa, Eje disciplinar	Refiere aquí al establecimiento específico de vínculos estrechos entre las Matemáticas y el entorno de los estudiantes que generen una participación activa del estudiante, privilegiadamente usando modelos.
Cuadrados perfectos	Un número natural *a* es cuadrado perfecto si existe un número *b* natural tal que $a = b^2$.
Cubos perfectos	Un número entero *a* es cubo perfecto si existe un número *b* entero tal que $a = b^3$.
Cuerda de una Circunferencia	Es un segmento de recta cuyos extremos son dos puntos de la circunferencia.
Cuestionario	Es una técnica para recolectar datos por medio de una serie de preguntas, escritas u orales, que debe responder un entrevistado.
Currículo integrado verticalmente	Organización de todos los elementos curriculares de manera integrada desde el primero al último año.
Dato	Unidad mínima de análisis estadístico, corresponde a la observación, respuesta o medición efectuada que puede ser un valor numérico o no numérico.

Dato continuo	Corresponde a aquellos datos que puede tomar cualquier valor: entero o no entero. Toma cualquier valor en el continuo. Se obtiene por medición
Dato cualitativo	Dato correspondiente a un valor no numérico.
Dato cuantitativo	Dato correspondiente a un valor numérico.
Dato discreto	Representa aquel dato que únicamente puede tomar valores aislados, generalmente números enteros. Se obtiene por recuento.
Desagrupar (resta y división)	Es una técnica que se aplica para la realización de restas y divisiones por columna. En el sistema decimal, con una unidad se pueden establecer equivalencias de orden inmediato inferior. Así, una decena forma diez unidades simples, una centena forma diez decenas, una unidad de millar diez centenas, etc. lo cual justifica el uso de “pedir prestado” cuando se realizan restas o “tomar” cifras cuando se hacen divisiones.
Descomposición aditiva	Consiste en expresar un número como la suma o resta de otros.
Descomposición de figuras	Es la acción de tomar una figura y fragmentarla en otras figuras más básicas.
Descomposición prima	Es la representación de un número natural como el producto de factores primos. Por ejemplo: $1500 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5^3$
Determinista, situación	Ver *evento determinista.*
Diagrama de Venn	Son ilustraciones que se usan para mostrar gráficamente el espacio muestral y algunos eventos relacionados con él, cada evento se representa con un círculo o un óvalo, dentro de ellos se incluyen los puntos muestrales.
Distributiva (propiedad)	Propiedad referida a un conjunto en el que hay definidas dos operaciones $(+,*)$ que satisfacen $a*(b+c)=a*b+a*c;\ \ a,b,c$ elementos del conjunto.
Divisibilidad, criterio de	Es un procedimiento por medio del cual es posible determinar si un número entero es divisible por otro de una manera rápida y sin recurrir al algoritmo de la división.
Divisible	Se dice que un número natural *a* es divisible por otro número natural *b* si al dividir *a* por *b* su residuo es cero.
Dominio de una función	Conjunto de valores *x* para los que está definida la función *f*, es decir, existe *y* tal que $y=f(x)$. Suele indicarse con $Dom(f)$.
Expresión algebraica	Es aquella en la que se utilizan letras, números y signos de operaciones.
Eje de las abscisas	Corresponde al eje *x.*
Ejes de coordenadas	Rectas en el sistema de coordenadas que son perpendiculares entre sí y se cortan en el origen.
Eje de las ordenadas	Corresponde al eje *y.*

Ejercicio	Tarea matemática en la cual el individuo que la va a realizar puede identificar inmediatamente las acciones necesarias sin necesidad de introducir algo novedoso, se trata de una tarea rutinaria. Una tarea puede ser un ejercicio o un problema en dependencia de varias circunstancias educativas. Una suma con números de cuatro dígitos puede ser un problema para estudiantes en 1er y 2°Años, y un ejercicio para 3er Año.
Ejes disciplinares, articuladores	Ejes centrales principales que participan en la mayoría de situaciones didácticas planteadas por este currículo y que contribuyen a la integración del mismo. Estos son *Resolución de problemas* y *Contextualización activa*.
Ejes disciplinares, centrales	Énfasis transversales específicos a las Matemáticas que potencian algunas dimensiones relevantes en la formación de esta materia, colocadas por el contexto histórico, los resultados y experiencias de la educación matemática internacional y la realidad educativa del país.
Elementos homólogos	Referidos a una transformación, dos elementos son homólogos si uno es la imagen del otro.
Elipse	Es la línea simétrica cerrada que resulta de la intersección entre la superficie de un cono o un cilindro por un plano oblicuo, el cual no interseca ninguna de sus bases.
Espacio muestral	Es el conjunto de todos los resultados simples de una experiencia o experimento.
Estadística y Probabilidad, área	Esta área refiere a dos grandes temas: por un lado a la identificación, organización y presentación de la información, lo que se asocia a la estadística descriptiva; por otro lado, al estudio de la inferencia a partir de los datos y de la predicción, lo que se asocia a la Estadística Inferencial y la Probabilidad. En este currículo, sin embargo, no se desarrolla la Estadística Inferencial.
Estilo de organización de las lecciones	Conjunto de conductas docentes para el desarrollo de una lección o una secuencia de ellas.
Estimación	Es un cálculo mental aproximado de una operación o de una medición.
Evento	Está constituido por posibles resultados de una experiencia o experimento. Se dice que es un subconjunto del espacio muestral.
Evento aleatorio	Corresponde a aquel evento o suceso cuyo resultado depende del azar, es decir no se puede conocer con anticipación a la realización de la experiencia.
Evento de la lección	Elemento, actividad o etapa dentro de la lección que se puede analizar comparativamente. En este currículo se mencionarán los siguientes: • El papel de la síntesis cognoscitiva. • Comienzo de la lección e introducción de contenido. • Los problemas que se plantean en la lección. • Las acciones docentes cuando estudiantes trabajan de manera individual, en parejas o en subgrupos. • Participación de estudiantes en la pizarra. • Final de la lección.

Evento determinista	Corresponde a aquel evento o suceso cuyo resultado es previsible sin necesidad de llevar a cabo la experiencia.
Evento imposible	Representa un evento que, en la realización de una experiencia o experimento, no es posible su ocurrencia.
Evento probable	Representa un evento que, en la realización de una experiencia o experimento, puede ocurrir o no ocurrir.
Evento seguro	Representa un evento que, en la realización de una experiencia o experimento, se tiene absoluta seguridad que va a ocurrir.
Fase independiente, del trabajo estudiantil	Se trata de una fase de la lección en la cual el o la estudiante busca estrategias de solución a un problema planteado; puede que esto sea realizado en el aula de forma individual, en parejas o en subgrupos.
Frecuencia	Número total de repeticiones de un dato o de un grupo de datos de una misma clase.
Función invertible	Una función $f : A \to B$ es invertible si y sólo si existe una función $g : B \to A$ tal que $f \circ g(x) = g \circ f(x) = x$.
Función inyectiva	Si a elementos *a, b* distintos del dominio de la función corresponden elementos distintos de codominio, es decir, $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.
Función lineal	Función cuyo criterio es de la forma $f(x) = ax + b$.
Función real de una variable real	Aplicación cuyo dominio y codominio son subconjuntos de los números reales.
Geometría analítica	Estudia las figuras geométricas mediante técnicas básicas del análisis matemático y del álgebra en un determinado sistema de coordenadas.
Geometría, área	Estudio de las características de las figuras geométricas y las relaciones entre ellas, la modelización geométrica y la visualización espacial que permiten potenciar los acciones de visualización, clasificación, construcción, argumentación y prueba.
Gestión curricular	La forma como se interpreta y desarrolla el currículo en el aula.
Grado de un polinomio	Dado el polinomio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$ entonces el grado del polinomio es *n*.
Habilidad específica	Una capacidad estudiantil para comprender o manipular intelectualmente un conocimiento (concepto o procedimiento); por ejemplo, “identificar un triángulo equilátero” o “efectuar sumas con números naturales menores de 1000”. Estas son capacidades a desarrollar en plazos cortos de tiempo y están asociadas a las áreas matemáticas en que se organiza el currículo.
Habilidad general	Una generalización de habilidades específicas o una combinación de ellas siempre asociada a un área matemática (habilidades aritméticas, habilidades geométricas, habilidades algebraicas, etc.). Las habilidades específicas se pueden ver como casos particulares de habilidades generales.

Heurísticas	Estrategias formales o informales que se dan o pueden darse para resolver un problema.
Hipérbola	Es una curva que se forma de la intersección entre un cono y un plano perpendicular a la base del mismo sin pasar por el vértice.
Homotecia	Es una transformación geométrica que multiplica todas las distancias por un mismo factor, partiendo de un punto fijo. Más formalmente, una homotecia de centro *O* y razón *k* (donde *k* es un número diferente de cero) es una transformación que a cada punto *A* le hace corresponder un punto *A'* tal que *O, A* y *A'* son colineales y la distancia de *O* a *A'* es *k* veces la distancia de *O* a *A*.
Incertidumbre	Expresión del grado de desconocimiento de una condición futura.
Indicación puntual	Acotación sobre los alcances de los contenidos o la inclusión de ejemplos o sugerencias de método.
Interpolación	Obtener una estimación de un valor que está dentro del rango de datos proporcionados.
Ley de formación	Es la representación verbal, literal o simbólica que permite predecir el término siguiente de una sucesión.
Línea cerrada	Línea que no posee extremos.
Logaritmo	El logaritmo de un número dado en cierta base es el exponente a que hay que elevar la base para obtener el número dado.
Medidas, área	Incluye la comprensión y manipulación de unidades, sistemas y procesos de medición del espacio y el tiempo, el uso de herramientas y fórmulas para efectuar las medidas.
Metacognición	Se refiere al conocimiento de nuestro propio proceso cognitivo y al control activo de las decisiones y de los métodos utilizados en la resolución de un problema.
Modelización, definición	Refiere a la identificación y el uso de modelos existentes, al diseño y construcción paso a paso, a la modificación o contrastación de su validez, etc.
Modelización, pasos	Se identifican 6 pasos: Paso 1. El Problema. Un problema que describe una situación de la realidad que debe ser modelizada. Paso 2. Sistematización. Una selección de los objetos, la información y las relaciones relevantes del problema que le permitan obtener una posible representación o idealización matemática. Paso 3. Modelo Matemático. Una traducción de los objetos y las relaciones del paso anterior en lenguaje matemático, de tal forma que obtenga un modelo que represente lo que ocurre en la realidad.

	Paso 4. Solución. Uso de los conocimientos matemáticos previos para poder encontrar la solución o soluciones del modelo planteado en el paso anterior, de esta forma se podrá obtener una aproximación de la solución del fenómeno que se está idealizando en el paso 1.
	Paso 5. Interpretación. Análisis de los resultados y las conclusiones considerando los conocimientos previos que se tiene del problema.
	Paso 6. Evaluación. Verificación a la luz de los resultados matemáticos de la validez del modelo y el poder predictivo que dicho modelo tiene sobre el problema original. Para este proceso puede utilizarse la comparación con datos observados y/o el conocimiento teórico o por experiencia personal que se tenga del problema.
Modelo matemático	Conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de cierta forma, un fenómeno estudiado o un problema o situación real.
Monomio	Expresión algebraica que contiene únicamente el producto de constantes y variables que poseen exponente natural.
Monomios semejantes	Dos o más monomios que poseen el mismo factor literal. Por ejemplo, $3xy^5$, $-2xy^5$ y xy^5 son monomios semejantes.
Muestra	Es una parte o subconjunto de la población que se selecciona para realizar análisis estadísticos. Se pretende que la muestra sea lo más representativa posible de la población, por lo que existen métodos especializados para realizar la escogencia de la muestra.
Muestreo	Corresponde a uno o más métodos o procedimientos estadísticos destinados a la selección de una muestra representativa de la población.
Número compuesto	Es número natural $p > 1$, que no es primo.
Número ordinal	Número que denota la posición de un elemento perteneciente a una sucesión ordenada.
Número primo	Un número natural $p > 1$ se denomina primo si sus únicos divisores son 1 y p. Es aquel número natural que posee dos divisores diferentes.
Números, área	Refiere a la comprensión y manipulación de los números, los sistemas numéricos, las operaciones y cálculos.
Paralelepípedo	Cuerpo geométrico constituido por seis paralelogramos, de los cuales son congruentes y paralelos aquellos que son opuestos entre sí.
Patrón	Ver *Ley de formación.*
Pendiente de una recta	El aumento o disminución de la ordenada de un punto de la recta, para un aumento de la abscisa de una unidad. Es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas.
Población	Representa el conjunto total de elementos o unidades de los que interesa obtener información o tomar decisiones.
Polinomio	Es una suma de monomios.

Pregunta dirigida	Estrategia de conducción de la lección mediante una indagación dirigida hacia toda la clase: • formulación de preguntas apropiadas sobre un tópico, • tiempo de espera para que las y los estudiantes ofrezcan respuestas, • reformulación de las preguntas para avanzar en los distintos aspectos del tópico, y • repetición del proceso hasta llegar a un cierre cognoscitivo y pedagógico del tema.
Problema	Es una tarea matemática que para resolverse el sujeto debe usar información de una manera novedosa para éste.Un problema es un planteamiento o una tarea que busca generar la interrogación y la acción estudiantiles utilizando conceptos o métodos matemáticos, implicando al menos tres cosas: • que se piense sobre ideas matemáticas sin que ellas tengan que haber sido detalladamente explicadas con anterioridad, • que se enfrenten a ellos sin que se hayan mostrado soluciones similares, • que los conceptos o procedimientos matemáticos a enseñar estén íntimamente asociados a ese contexto.
Problemas, de final abierto	Aquellos que admiten varias soluciones y aproximaciones, y que pueden ser oportunidades muy valiosas para introducir conceptos y procedimientos, para organizar la lección o para *trabajos extra clase* por medio de proyectos.
Procesos matemáticos	Actividades cognitivas (o tipos de actividades) que realizan las personas en las distintas áreas matemáticas y que se asocian a capacidades para la comprensión y uso de los conocimientos. La realización sistemática de estos procesos transversales en la acción de aula apoya el progreso de diversas dimensiones de la competencia matemática.
Proporción	Igualdad entre dos razones.
Proporción	Desde el punto de vista estadístico, corresponde a una razón del número de elementos que tienen una determinada característica entre el total de elementos.
Proporcionalidad directa	Es una relación entre dos variables de forma tal que la razón entre ellas es constante.
Proporcionalidad inversa	Es una relación entre dos variables de forma tal que el producto de ellas es constante.
Punto muestral	Corresponde a un resultado simple de una experiencia o experimento. Es un elemento del espacio muestral.
Racionalización	Proceso mediante el cual se busca eliminar el radical o los radicales que están en el denominador o numerador de una fracción.
Radián	Unidad de medida de ángulos. El ángulo central de una circunferencia que intercepta un arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia, mide un radián.

Razón de dos números	Expresión que compara dos números por división.
Razonamiento inductivo	Proceso de observación de datos, identificación de patrones y elaboración de generalizaciones a partir de las observaciones efectuadas.
Razonar y argumentar, proceso	Se trata de actividades mentales que aparecen transversalmente en todas las áreas del plan de estudios y que desencadenan formas típicas del pensamiento matemático: deducción, inducción, comparación analítica, generalización, justificaciones, pruebas, uso de ejemplos y contraejemplos. Busca desarrollar capacidades para permitir la comprensión de lo que es una justificación o prueba en matemática, para desarrollar y discutir argumentaciones matemáticas, para formular y analizar conjeturas matemáticas, para usar fórmulas o métodos matemáticos que permitan la comprensión o desarrollo de informaciones presentes.
Razones trigonométricas	Relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo. Las fundamentales son el seno, coseno y tangente.
Recta numérica	Línea recta en la que se representan los números en orden como puntos de la recta.
Rectas paralelas	Rectas que están en el mismo plano y no se cortan.
Rectas perpendiculares	Son rectas que se cortan y forman ángulos rectos.
Recurrencia	Proceso de generación de una sucesión o patrón a partir de un primer término dado al aplicar una regla a fin de obtener cualquier término a partir del término o términos precedentes.
Recursividad	Ver *Recurrencia.*
Reflexión	Una reflexión con respecto a una recta *L* es una transformación que a cada punto *A* le hace corresponder un punto *A’* tal que *L* es la bisectriz del segmento *AA’*. Si *A* está en la recta, entonces *A’*=*A*.
Reflexión, nivel de	Tipo de problema. El elemento significativo es la reflexión, realizada en ambientes que son más novedosos para una persona y contienen más elementos que los que aparecen en el otro nivel de complejidad. Se plantea aquí: formulación y resolución de problemas complejos, la necesidad de argumentación y justificación, la generalización, el chequeo de si los resultados corresponden a las condiciones iniciales del problema y la comunicación de esos resultados. Se exige la participación de varios métodos complejos para su solución.
Relaciones y Álgebra, área	Integra varios temas como el estudio de patrones y relaciones de distinto tipo (numéricas, geométricas), las funciones (vistas como relaciones entre variables), así como el manejo de expresiones y relaciones simbólicas, ecuaciones e inecuaciones, como medio de potenciar procesos de generalización y simbolización.
Representación gráfica	Representación de los datos por medio de un gráfico con la intención de mostrar un patrón o forma que toma la concentración de datos para favorecer la comprensión del lector.

Representación tabular Representación de los datos por medio de una tabla o cuadro con la intención de resumir un grupo de datos para favorecer la comprensión por parte del lector.

Representar, proceso Pretende fomentar el reconocimiento, interpretación y manipulación de representaciones múltiples que poseen las nociones matemáticas (gráficas, numéricas, visuales, simbólicas, tabulares).

El proceso busca favorecer la capacidad para elaborar y usar representaciones matemáticas que sirvan en el registro y organización de objetos matemáticos, para interpretar, modelar situaciones propiamente matemáticas, para manipular distintas representaciones de objetos matemático, persigue también desarrollar capacidades para poder traducir una representación en términos de otras, comprendiendo las ventajas o desventajas (o los alcances) de cada representación en una situación determinada.

Reproducción, nivel de En esencia se refiere a ejercicios o problemas relativamente familiares que demandan la reproducción de conocimientos ya practicados, son los procesos o competencias que se invocan en la mayoría de exámenes o pruebas en las aulas. Apelan a conocimiento de hechos y representación de problemas comunes, reconocimiento de cosas equivalentes, recolección de objetos matemáticos o propiedades, procedimientos rutinarios, aplicación de algoritmos estándar, manipulación sencilla de expresiones que poseen símbolos, fórmulas y cómputos sencillos. También incluye la resolución rutinaria de problemas.

Resolución de problemas Conjunto de estrategias pedagógicas cuyo sustrato es el planteamiento y resolución de problemas. Se identifican al menos las siguientes dimensiones:

Colocada ya en contexto educativo, la resolución de problemas debe integrar al menos dos propósitos:

- aprendizaje de los métodos o estrategias para plantear y resolver problemas,
- aprendizaje de los contenidos matemáticos (conceptos y procedimientos) *a través de la resolución de problemas.*

En el primer propósito se enfatizan los medios (estrategias, heurísticas, métodos) que requiere un problema (una acción matemática). El aprendizaje de técnicas de resolución de problemas no garantiza que un estudiante pueda resolver problemas nuevos y distintos, sin embargo el entrenamiento en las mismas favorece el desarrollo de esa capacidad. Sin embargo, no sería apropiado concebir el papel de la resolución de problemas reducido a entrenar y lograr destrezas en esas técnicas y métodos, por más ricos que éstos puedan ser.

En el segundo propósito lo que se plantea es una acción de aula que permita generar aprendizajes matemáticos en un contexto específico; esto apela al diseño de tareas que sirvan para la construcción de aprendizajes dentro de una lección (o una secuencia de ellas) y promueve la realización de los procesos matemáticos.

En este currículo se plantea como un eje disciplinar.

Resolución de problemas, pasos	Se identifican 4 pasos: Paso 1. Entendimiento del problema. Tener claridad sobre lo que trata el problema antes de empezar a resolverlo. Paso 2. Diseño. Considerar varias formas para resolver el problema y seleccionar un método específico. Paso 3. Control. Monitorear el proceso y decidir cuándo abandonar algún camino que no resulte exitoso. Paso 4. Revisión y comprobación. Revisar el proceso de resolución y evaluar la respuesta obtenida.
Rotación	Una rotación de centro O y ángulo x, es una transformación que a cada punto A le asigna un punto A' tal que OA=OA' y el ángulo formado por OA y OA' es x. Al aplicar una rotación se obtiene una figura congruente a la inicial, girada un ángulo x.
Secante de una circunferencia	Es una recta que interseca la circunferencia en dos puntos.
Sección plana	Es la intersección entre un plano y un cuerpo geométrico.
Sentido espacial	Se refiere al poseer la noción de espacio, ubicación, localización.
Sentido métrico	Se refiere al poseer la noción de medición, comprender qué atributos mide cada tipo de medición, realizar aproximaciones y comparaciones de medidas.
Simetría axial	Una figura tiene simetría axial si hay una recta L, llamada eje de simetría, tal que la reflexión de la figura con respecto a L es la misma figura.
Simetría central	Una simetría central de centro O es una transformación que hace corresponder a cada punto A otro punto A' tal que O es el punto medio del segmento AA'.
Sistema de coordenadas cartesianas	Es un sistema que utiliza uno o más números (coordenadas) para determinar unívocamente la posición de un punto o de otro objeto geométrico.
Sistema de numeración decimal	Es el sistema más usado en todo el mundo. Consiste en representar las cantidades utilizando como base las potencias del número diez. El conjunto de símbolos utilizado se compone de diez cifras diferentes: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Por ejemplo en el número 4673, tenemos 3 unidades, 7 decenas, 6 centenas y 4 unidades de millar. Luego este número se puede escribir como: $(4 \times 10^3) + (6 \times 10^2) + (7 \times 10^1) + (3 \times 10^0) = 4000 + 600 + 70 + 3 = 4673$.
Sistema métrico decimal	Es un sistema de unidades en el cual los múltiplos y submúltiplos de cada unidad de medida están relacionados entre sí por múltiplos o submúltiplos de 10. Las unidades básicas son: el metro para la longitud, el kilogramo para la masa y el segundo para el tiempo.
Solución de una ecuación	Valor de la incógnita que al ser reemplazado en la ecuación hace que se cumpla la igualdad.

Sucesión	Secuencia ordenada de números reales, $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ donde el subíndice indica el lugar que ocupa el término en la sucesión y a_n es el término general de la sucesión. Podemos definirla también como una aplicación de los enteros positivos en $\mathbb{R}$.
Tangrama	Es un rompecabezas formado por un conjunto de siete piezas que se obtienen al fraccionar un cuadrado y que pueden disponerse de diferentes maneras para construir figuras.
Tarea matemática	Trabajo que se propone realizar sobre un tópico de matemáticas.
Transformaciones geométricas	Operaciones geométricas que permiten crear una nueva figura a partir de una previamente dada.
Traslación	Una traslación de vector *z* es una transformación que a cada punto *A* le hace corresponder otro punto *A'* tal que el vector *AA'* es igual al vector *z*. Si se aplica una traslación a una figura, se obtiene una figura congruente a la inicial, ubicada en otro lugar.
Trigonometría	Área de las Matemáticas que trabaja con ángulos, triángulos, razones y funciones trigonométricas.
Trinomio	Es la suma de tres monomios no semejantes, es decir, es un polinomio que posee exactamente tres monomios no semejantes dos a dos.
Unidad estadística	Unidad básica de observación, corresponde al sujeto u objeto de estudio, que es la fuente de generación de los datos.
Valor absoluto de un número real	Mide la distancia del punto que representa un número real al origen.
Valor posicional	Es el valor que posee cada dígito del numeral con el que se representa un número, dependiendo de su posición en él. Por ejemplo, el último dígito de izquierda a derecha representa la cantidad de unidades que posee el número, el penúltimo representa la cantidad de decenas, el antepenúltimo la de centenas y así sucesivamente.
Variabilidad de los datos	Corresponde a la dispersión que presentan los datos entre sí, en este sentido se encuentran conjuntos de datos más homogéneos o más heterogéneos. La variabilidad de los datos representa la esencia misma de la estadística, pues la razón de ser de esta disciplina consiste en determinar tendencias o patrones de comportamiento de los datos producto de su variabilidad.
Variable	Es un símbolo que representa un número de un conjunto dado de números.
Variable dependiente	Es aquella que depende de los valores que puede tomar la *variable independiente.*
Variable independiente	Variable a la cual se le pueden asignar valores de forma libre para observar las variaciones que presenta la *variable dependiente*.

Notas

[1] La Educación Matemática convoca, por un lado, un campo **independiente** de investigación y por el otro una profesión asociada a ésta (Kilpatrick, 1992; Sierpinska & Kilpatrick, 1998, pp. 527-548; Artigue, 2011). Y la independencia se subraya: la Educación Matemática no es ni matemática ni pedagogía general, ni una suma o yuxtaposición formal de ellas (Brousseau, 1997). Sus asuntos son distintos y propios, eso sí, con demandas formativas que involucran el dominio de las matemáticas y la pedagogía general, pero en una síntesis científica. La educación matemática se ha consolidado en los últimos 50 años, ya no se puede hablar de enseñanza de las matemáticas como aquella actividad que por miles de años nos ha acompañado. Se debe hablar ahora de una profesión basada en una investigación que posee resultados que no se pueden evadir y que, como en toda disciplina científica moderna, posee un crecimiento vigoroso que obliga a la especialidad.

[2] Las ideas y los alcances de este currículo no podrían pasar por alto la situación crítica que atraviesa la Educación Matemática en el país en el actual escenario, lo que plantea una perspectiva estratégica de cambio. Indicadores de esta situación son varios. Entre ellos: los resultados en pruebas comparativas internacionales (SERCE, PISA, TIMSS), las pruebas nacionales y los diagnósticos que realizan universidades públicas.

Pruebas internacionales

i) Algunos resultados del Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE) permiten identificar algunos logros positivos, pero muestran varias limitaciones en habilidades en el área de las matemáticas. De acuerdo al tercer Informe del Estado de la Educación, en el SERCE nuestras y nuestros estudiantes encuentran dificultades en las siguientes actividades:

- Encontrar promedios y resolver cálculos, combinando las cuatro operaciones básicas en el campo de los números naturales.
- Identificar el paralelismo y la perpendicularidad en una situación real y concreta, representar gráficamente un porcentaje.
- Resolver problemas que involucran propiedades de los ángulos de triángulos y cuadriláteros, que integran áreas de diferentes figuras o dos operaciones entre números decimales.
- Resolver problemas que involucran el concepto de fracción.
- Hacer generalizaciones para continuar una secuencia gráfica que responde a un patrón de formación complejo.
- Resolver problemas en los que se debe seleccionar la información útil, o con información no explícita y que requiere el uso de relaciones y conexiones entre diferentes conceptos.

Además, en la prueba de Matemáticas para tercer grado, un 24,4% y un 37,0% se ubicaron en los niveles I y II, respectivamente; y en sexto grado el 37,3% se colocó en niveles inferiores al III. Si bien son diversas las causas de este bajo nivel en matemáticas, se debe consignar una forma de enseñanza aprendizaje dirigida a procedimientos sencillos y una organización de la lección inconsistente con la generación de capacidades cognitivas de mayor nivel. Así lo muestran Chaves Esquivel, Castillo, Chaves Barboza, Fonseca & Loría (2010):

> En los ambientes de aula observados, las Matemáticas que se desarrollaron estuvieron, casi en su totalidad, centradas en la definición de conceptos y la aplicación de procedimientos algorítmicos. La rutina que predominó en las actividades desplegadas se enfocó hacia la definición teórica del nuevo concepto o contenido matemático y la posterior ejemplificación de la forma en que el concepto se utiliza para resolver ejercicios. (p. 27).

Se coincide con lo que indica el SERCE (2008), el foco de la enseñanza de las matemáticas no debería estar en: “el aprendizaje de algoritmos y procedimientos de cálculo, ni en el uso de los problemas sólo como elemento de control de lo aprendido” (p. 57). Más bien debería estar en:

> (…) que el estudiante desarrolle la capacidad de utilizar conceptos, representaciones y procedimientos matemáticos para interpretar, comprender y actuar en el mundo. En efecto, habilidades como interpretar, calcular, recodificar, graficar, comparar, resolver, optimizar, demostrar, aproximar y comunicar, entre otras, pro-porcionan criterios y elementos esenciales para desenvolverse también fuera de la escuela y para afrontar los retos de un mundo en cambio permanente.
>
> **Por su parte, la resolución de problemas propicia el desarrollo del pensamiento lógico matemático, puesto que exige poner en juego y en contexto diferentes tipos y niveles de razonamiento. Esto favorece el desarrollo de habilidades para reconocer y utilizar conceptos y procedimientos matemáticos con diferentes y crecientes grados de dificultad.** Énfasis añadido. (p. 57).

ii) La prueba PISA del año 2009 reportó (en el 2011) que el 23,6% de estudiantes que realizaron la prueba en Matemáticas **no alcanzan ni siquiera el primer nivel de competencia matemática que plantea esa prueba**. El 33,1% de estudiantes participantes está ubicado en el primer nivel de competencia matemática; en este nivel de competencia "por lo general los estudiantes realizan procesos de un paso que implican reconocer contextos familiares y problemas matemáticos bien formulados, reproducen procesos o hechos ampliamente conocidos y aplican destrezas de cálculo simples." PISA (2003, p. 54) Hay que notar que el 23,6% de estudiantes evaluados ni siquiera alcanzó este nivel básico de destrezas. Véase cuadro "Resultados de la prueba PISA".

Tabla de notas 1: Resultados de la prueba PISA Plus 2009.
Porcentaje de alumnos en los distintos niveles de aptitud

Área	No alcanza el nivel 1	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5	Nivel 6
Matemática	23,6	33,1	27,8	12,2	3,0	0,3	0,0
Aptitud de lectura	1,3	31,3	34,7	24,6	7,3	0,8	0,0
Ciencias	9,6	29,4	37,9	18,5	4,2	0,3	0,0
Fuente: Elaboración propia con base en Australian Council for Educational Research (2011).							

Lo anterior evidencia un nivel muy bajo en la resolución de problemas y en capacidades cognitivas matemáticas de un mayor nivel.

Se debe mencionar que más de la mitad (el 56,7%) de estudiantes que realizaron la prueba **no alcanzó el segundo nivel de competencia matemática**; en el cual:

> (…) los estudiantes realizan generalmente ejercicios más complejos de más de un paso de procesamiento. También combinan diferentes elementos de información o interpretan diversas representaciones de información o de conceptos matemáticos identificando los elementos importantes y la relación entre ellos. Por lo general, trabajan con formulaciones o modelos matemáticos dados, presentados con frecuencia de forma algebraica, para identificar soluciones, o realizan una pequeña secuencia de pasos de procesamiento o cálculo para alcanzar una solución. PISA (2003, p. 54).

Como se puede ver, tampoco el segundo nivel de PISA es algo sumamente complicado para no pensar que debería haber un mayor porcentaje de estudiantes del país alcanzando este nivel.

Si se realiza una comparación por áreas de evaluación, de acuerdo a los resultados de las pruebas aplicadas en el 2009 hay clara evidencia de una brecha entre materias. El cuadro de arriba muestra las diferencias entre las competencias en lectura y ciencias donde los resultados son más favorables. Por ejemplo, en la competencia de lectura (*reading proficiency*) el 67,4% de estudiantes está por encima del primer nivel y sólo el 1,3% no lo alcanza. De manera similar, en el área de ciencias el 57,9% están por encima del primer nivel y sólo el 9,6% no lo alcanza. Esto evidencia que las y los estudiantes costarricenses presentan mucho mejor nivel en competencias de lectura y en el área de Ciencias que en Matemáticas.

Además, es alarmante que en lo que respecta a competencia matemática el país se ubicó en el puesto 55 entre 74 países o regiones, muy por debajo de la media de los países de la OECD.

Pruebas nacionales

A nivel de Educación Primaria, se realizaron en el año 2008 por primera vez las pruebas nacionales diagnósticas de Segundo ciclo de la educación general básica. De acuerdo al tercer informe del Estado de la Educación del 2011 en la materia de Matemáticas la prueba resultó difícil para el nivel de habilidad de los examinados. Esto contrasta con los resultados de otras asignaturas; por ejemplo, en la materia de Español nuestras y nuestros estudiantes se ubicaron en el rango de habilidades intermedias y en general la prueba resultó fácil para el grupo de examinados. Similarmente, la prueba de Ciencias evidenció ser fácil para el nivel de habilidad de los examinados. Esto coincide con los resultados en las pruebas internacionales.

En las pruebas de Bachillerato, en los últimos diez años los resultados más deficientes se han dado en matemáticas, creando una gran brecha con las otras materias. Incluso en el 2009, se obtuvo una nota promedio de 65,6. En el año 2011 bajó a 74,6% de un 79,27% en el año 2010. Se debe tener presente que la nota está compuesta por un 60% correspondiente a la nota del examen y un 40% a la llamada nota de presentación que es el promedio de las calificaciones obtenidas por el estudiante en Décimo año y en los dos primeros trimestres de Undécimo año en Español, Matemáticas, Estudios Sociales, Educación Cívica, Inglés o Francés (a elegir) y Biología, Química o Física (a elegir). Para los colegios técnicos se toman en cuenta las calificaciones obtenidas en Décimo año, Undécimo año y los dos primeros trimestres de Duodécimo año. (División de Control de Calidad, “Pruebas de Bachillerato”, página electrónica del MEP, mep.go.cr). Los resultados en las Matemáticas en el bachillerato son desalentadores. En el 2011, aplicaron Bachillerato 775 instituciones públicas en las cuales se obtuvo un promedio de 65,8 en la nota del examen de bachillerato en Matemáticas. Además, 644 instituciones públicas de las 775 obtuvieron un promedio de notas inferiores a 70 en el examen de bachillerato en Matemáticas. Esto quiere decir que más del 80% de estas instituciones están con un rendimiento preocupante en la asignatura de Matemáticas.

Diagnósticos en las universidades públicas

Las pruebas de bachillerato no son de un alto nivel cognitivo, se centran en evaluar conceptos y procedimientos mecánicos y no conocimientos puestos en práctica en la resolución de problemas y la modelización. Cuando estos estudiantes que han ganado su bachillerato llegan a una universidad pública, los resultados son también muy desalentadores.

La baja promoción en los primeros cursos de Matemáticas es una constante desde hace años. Y esto no ha sido responsabilidad exclusiva de las universidades. Para poner un ejemplo, desde hace varios años se creó en la Universidad de Costa Rica el examen de diagnóstico en Matemática (DiMa) con el propósito de alertar a estudiantes, profesores y autoridades universitarias sobre posibles deficiencias en los conocimientos y destrezas en el área de Matemáticas y proponer posibles soluciones.

En el año 2010 se admitieron 4322 estudiantes de primer ingreso a carreras que incluyen al menos un curso de cálculo en la Universidad de Costa Rica. De ellos, 331 habían aprobado MA0125 o MA1001 con el programa MATEM, por lo que estaban eximidos de aplicar el examen de diagnóstico. Muchos de estos estudiantes (277) ingresaron a carreras que requieren cursos de Matemáticas, por lo que la población meta era de 4045 estudiantes. Al examen de diagnóstico de ese año se presentaron 2645 estudiantes (de ellos sólo 1 no era de primer ingreso) abarcando cerca del 65% de la población meta. **De los 2645 estudiantes que realizaron la prueba diagnóstica, 1706 obtuvieron notas inferiores a 50** (o sea el 64,5%). Solamente 423 estudiantes obtuvieron notas superiores a 70 (o sea tan sólo 16%) y de ellos el 32,1% son de instituciones privadas y 20,7% de instituciones semioficiales.

Hay que tener claro que esto no es un hecho aislado. De acuerdo a la información del Primer Informe de Resultados, DiMa 2010, se presenta el siguiente cuadro con resultados históricos:

Tabla de notas 2: Resultados históricos del Examen de Diagnóstico en Matemática
Universidad de Costa Rica
Porcentaje de notas inferiores a 50.
Años 2004 hasta 2010

Año	Cantidad de estudiantes con notas inferiores a 50	Porcentaje (%)	Total de estudiantes que realizaron la prueba diagnóstica
2004	557	53,1	1049
2005	1011	59,2	1708
2006	1642	61,5	2670
2007	1876	64,2	2921
2008	1603	62,6	2562
2009	1929	69,0	2795
2010	1706	64,5	2644
Fuente: Elaboración propia con base en el Primer Informe de Resultados, DiMa 2010.			

Puede observarse en el gráfico que en los últimos cinco años más del 60% de estudiantes que aplican este diagnóstico obtienen notas inferiores a 50. A raíz de esta problemática otras universidades públicas están implementando planes similares a la UCR.

En el Instituto Tecnológico de Costa Rica los resultados son parecidos. Así lo muestran Ramírez y Barquero (2010, p. 74) en un análisis de pruebas diagnósticas que fueron contestadas por 1077 estudiantes en el 2008, por 1230 estudiantes en el 2009 y 1042 en el 2010 que se matricularon en los cursos de Matemática General, Matemática Básica o Fundamentos de Matemática I y que estuvieron presentes el día de la aplicación:

> En el 2008 el promedio general fue de 52,4 con una desviación estándar de 17,43. En el 2009 el promedio general fue de 37,05 con una desviación estándar de 17,82. En el 2010 el promedio general fue de 31,62 con una desviación estándar de 17,83.

Similarmente, la Universidad Nacional ha realizado este tipo de diagnósticos para valorar el nivel de conocimientos y habilidades matemáticas que presentan estudiantes de nuevo ingreso. Los siguientes son resultados del examen diagnóstico aplicado en el 2008:

Tabla de notas 3: Rendimiento en el Examen Diagnóstico de Matemáticas
Universidad Nacional
Año 2008

Calificación	Número de estudiantes	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Menos de 20	96	8,1	8,1
De 20 a menos de 40	425	36,1	44,2
De 40 a menos de 60	351	29,8	74,0
De 60 a menos de 80	205	17,4	91,4
Más de 80	101	8,6	100,0
Total que respondió	**1178**	100,0	
Total	**1385**		
Fuente: Edwin Chaves Esquivel, exdirector de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional.			

De igual forma, los resultados en el año 2009 son también alarmantes, ya que aplicaron el examen de diagnóstico 1027 estudiantes, de los cuales solamente 27 tuvieron nota superior a 70, y la media fue 34, la mediana 33 y la moda 32.

Causas

Estos resultados obedecen a varias causas. Algunas son externas al sistema educativo, otras son responsabilidad de éste. No se puede eximir de responsabilidad a los programas de estudio. Es correcta la valoración de la Unión Costarricense de Cámaras y Asociaciones del Sector Empresarial Privado UCCAEP, que reseña el Banco Mundial (2009):

> Una de las **deficiencias principales** de la división académica del sistema secundario de educación parece ser la falta de calidad y pertinencia, que **están asociadas con programas de estudios** y sistemas de evaluación **obsoletos**, y capacitación deficiente de profesores. Además y vinculado a esto, no hay suficientes estudiantes que están siendo capacitados adecuadamente en campos que son sumamente importantes para la competitividad de la nación, como matemáticas, ciencias y programas técnicos. Esto ha contribuido a un excedente de profesionales en las ciencias sociales, la ley y la administración, mientras hay una escasez de técnicos, científicos e ingenieros. Énfasis añadido. (p. 29).

Varias fuentes nacionales confirman los problemas del plan de estudios en Matemáticas. En el tercer informe del Estado de la Educación (2011), por ejemplo, se hace referencia a varios cuestionamientos:

1. Incongruencia entre lineamientos y malla curricular:

> (…) **los docentes consideran que la malla curricular no es congruente con los lineamientos dictados.** El enfoque teórico planteado en la política educativa que rige desde 1994 debería articularse adecuadamente con el componente operativo, es decir, con los diversos elementos de la malla curricular. (p.333). Énfasis añadido.

Se puede decir que mientras en la fundamentación se declara una perspectiva constructivista, en la malla curricular predomina un enfoque conductista. Es una auténtica contradicción.

2. Un modelo desfasado:

> (…) el modelo utilizado no dista mucho de la clasificación convencional que se empleaba en programas anteriores, pues incluye los usuales segmentos de objetivos, contenidos, procedimientos y aprendizajes por evaluar. (p.333).

3. Inconsistencia entre metodología y estructura de planes de estudio:

> Tanto la estructura horizontal como la vertical muestran una lógica de linealidad que no pareciera ser consistente con las orientaciones metodológicas que se plantean en los planes de estudio.(p. 333)

4. Ausencia de conexiones entre las áreas del currículo:

> No se visualizan las interrelaciones entre los diversos temas matemáticos, ni entre éstos y los de otras disciplinas
>
> Un ejemplo de lo anterior se presenta con el tema de Estadística, la propuesta en la malla curricular subestima la disciplina pues le da un carácter procedimental al enfatizar en cálculos y construcción de cuadros. Con ello se desaprovecha el potencial de la disciplina para el análisis global de información que se genera en el contexto estudiantil y la posibilidad de desarrollar varias habilidades intelectuales y competencias transversales a partir de estos análisis.
> Pero además, la Estadística aparece aislada de los demás tópicos matemáticos y de las otras asignaturas, lo que la hace ver como un apéndice dentro del área matemática (p. 333).

5. Disonancia con la realidad:

> En opinión de los docentes consultados, la implementación de los programas oficiales de Matemáticas se ha constituido en una utopía, plasmada en el papel pero **lejana de la realidad. Los actuales procesos educativos parecen estar en disonancia con lo escrito en esos documentos.** (p. 331). Énfasis añadido.

Otros autores añaden:

6. No hay resolución de problemas como estrategia metodológica:

De Faria (2008), por ejemplo, señala que la resolución de problemas en los programas de estudio para el Tercer Ciclo y la Educación Diversificada no es considerada como una estrategia metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, sino más bien como un tópico más que hay que "aprender"; éste, además, sin brindar las bases suficientes para interiorizar estrategias y heurísticas para su resolución. Por lo tanto, el estudiante actual se encuentra acostumbrado a "resolver problemas" de manera automática y mecánica sin profundizar en el análisis e interpretación del problema.

Además, precisamente la estructura no favorece la resolución de problemas:

> En los programas oficiales, claramente se establece que las "*matemáticas a enseñar*" responden a intereses globales, donde la resolución de problemas y la contextualización juegan el papel fundamental. Sin embargo, **la estructura que presenta este componente dentro de los documentos, permite que los docentes enfaticen más en los contenidos específicos por encima de dichos principios, los cuales podrían ser relegados o, del todo, no ser considerados**. (Chaves y Barrantes, 2011, p.3). Énfasis añadido.

7. Planes de estudio sobrecargados:

> Un factor que recurrentemente se ha planteado como característica de la educación media es que los programas de estudio están saturados de contenidos. A partir de esta situación se justifica la dificultad de cubrir los diversos temas o de aplicar estrategias didácticas distintas a las tradicionales bajo el argumento de que requieren de un tiempo con el que no se cuenta. (Meza, Agüero y Calderón, 2011, p.13).

8. No hay indicaciones suficientes y adecuadas sobre el uso de tecnologías:

> (…) en estos documentos es notable la ausencia de lineamientos que propicien otros recursos con características similares a las calculadoras, y que permita ampliar las alternativas que podrían tener los docentes. (Chaves et al., 2010, p.15).

Las debilidades de los programas elaborados en el periodo 1995-2005 son muchas más. Se pueden citar:

- ausencia de conexión entre los fundamentos de primaria (basados en esencia en un solo libro del año 1982 de Constance Kamii quien enfatiza un constructivismo radical piagetiano) y los de secundaria,
- ausencia de una visión estratégica que permita visualizar de manera integrada los contenidos de toda la educación primaria y secundaria y favorecer las conexiones,
- insuficientes indicaciones metodológicas y las que hay no están ajustadas a los contenidos por nivel y área (son meras generalidades, en su mayoría),
- débil presencia de la tecnología que no orienta sobre usos adecuados de ésta,
- problemas serios en contenidos de las áreas matemáticas: desarticulación de temas de álgebra y funciones, inapropiada y débil participación de la Estadística y Probabilidad, ausencia de Geometría de coordenadas, etc.

Este currículo busca responder a todas estas debilidades con una perspectiva que asume como enfoque principal la resolución de problemas (como estrategia pedagógica central que sustenta una organización de la acción de aula) para propiciar el desarrollo de capacidades cognitivas de mayor nivel, planes de estudio integrados verticalmente (y con conexiones entre áreas), consistencia entre la fundamentación y la malla curricular, cinco ejes disciplinares transversales que ayuden a cerrar las brechas que tiene en el país con los estándares internacionales, y un sólido apoyo al docente por medio de una extraordinaria cantidad de indicaciones y sugerencias generales y puntuales que acompañan de manera precisa cada año lectivo en cada una de las áreas matemáticas.

Esta propuesta identifica las lecciones de la experiencia nacional e internacional, los resultados de la investigación en Educación Matemática, en una adaptación e integración apropiada para la realidad costarricense en el actual escenario histórico.

[3] En la política educativa costarricense se asumen tres visiones: humanismo, racionalismo y constructivismo.

> En concordancia tanto con una visión integral del ser humano, como se establece en el Marco Legal vigente, como con la dignidad de la PERSONA conforme se declara en el punto A.1 de este mismo documento, se define una Política Educativa que, de manera coherente y balanceada, pueda nutrirse de tres visiones filosóficas, las que, sin prejuicio del más amplio sentido que tienen en el curso de la historia del pensamiento, se propone aprovecharlas en el sentido que, de seguido, se dirá:
> HUMANISTA, como la base para la búsqueda de la plena realización del ser humano, de la persona dotada de dignidad y valor, capaz de procurar su perfección mediante la realización de los valores estipulados en la legislación educativa, tanto los de orden individual como los de carácter social;
> RACIONALISTA, como el reconocimiento de que el ser humano está dotado de una capacidad racional que puede captar objetivamente la realidad en todas sus formas, construir y perfeccionar de continuo los saberes y hacer posible el progreso humano y el entendimiento entre las personas.
> CONSTRUCTIVISTA, como el esfuerzo en el actuar considerando que la educación debe partir desde la situación cognoscitiva del alumno, de su individualidad, de sus intereses e idiosincrasia, por lo que debe reconocer la cultura específica del alumno con sus respectivas estructuras de conocimiento ya formadas y emprender una acción formativa del alumno y del conocimiento que los transforme mutuamente (Consejo Superior de Educación de Costa Rica, 1994).

La política educativa nacional se nutre de esta fuente. Lo que se adopta en lo que se refiere a la corriente constructivista, sin embargo, es en esencia un enfoque centrado en el estudiante (situación cognoscitiva, subjetividad y cultura) y su papel activo. Esto ha tenido mucha influencia en los currículos de muchos países. Su énfasis en los aprendizajes como progresos cognitivos (particularmente estructurales) ha repercutido en una forma de enseñanza distanciada de los enfoques conductistas que dominaron mucho tiempo: una contribución importante del constructivismo.

Con Confrey y Kazak (2006, p. 306-309) se podría señalar su ascenso situado entre los años 1986 y 1995, teniendo precedentes en al menos tres fuentes: la tradición de la resolución de problemas (desde al menos Polya), la tradición sobre errores, falsas creencias y obstáculos epistemológicos (que incluye los trabajos de Brousseau) y las teorías de desarrollo cognitivo (el mayor peso de Piaget, pero con la participación de Van Hiele y otros). Se trata de una corriente epistemológica que enfatiza el papel del sujeto en la construcción cognoscitiva. Una de sus fuentes centrales son los trabajos de Piaget (1950, 1970, 1973). Con Ruiz (2000) se coincide:

> En Piaget: el sujeto es el factor activo. Para Piaget existe una “abstracción reflexiva”, que define como una generalización operatoria. Es esta clase de abstracción la que le permite proponer *etapas mentales* definidas por medio de estructuras mentales. Este asunto de las etapas es uno de los temas más conocidos sobre sus ideas epistemológicas. Para Piaget, las acciones del sujeto y no del objeto son las claves. El objeto posee un rol secundario: ofrecer circunstancias sobre las que el sujeto interviene. En este mundo teórico el sujeto puede coordinar y combinar sus acciones. ¿Qué crea el conocimiento matemático? Su respuesta es inequívoca: la acción y operación mentales.

Algunas de las principales definiciones de esta visión han sido condensadas, entre otros, por von Glaserfeld (1984, 1987, 1989), Cobb (1983), Dubinsky (1992). Como sintetiza muy bien Radford (2008) tres premisas epistemológicas del constructivismo son: i) el conocimiento no se recibe de manera pasiva por el sujeto sino que es construido, ii) la función cognitiva es adaptativa y sirve a la organización de la experiencia y no a la descripción de una realidad ontológica, iii) el sujeto construye su conocimiento de manera autónoma. Estas últimas premisas poseen sus orígenes más antiguos en la filosofía de Kant: se asume la imposibilidad de conocer un mundo externo al sujeto, a lo único que se puede aspirar es a un conocimiento hipotético, cuyo valor lo da su “viabilidad” (von Glaserfeld, 1995). El objeto epistémico es en el constructivismo una oportunidad para la acción del sujeto.

La primera premisa es aceptada por doquier, como señala Kilpatrick (1987): “ (…) la mayoría de científicos cognitivos fuera del Conductismo darían su asentimiento fácilmente, y casi ningún educador matemático activo vivo creería algo distinto” (pp.7-8).

Este constructivismo enfatiza las construcciones cognitivas individuales. Es la variante teórica más conocida. Aquí se empuja una visión de la acción de aula donde tienen poco lugar la sociedad y la cultura, y se condiciona el papel docente.

Otra tradición epistemológica es la llamada *socioculturalista* emparentada con el pensamiento de Vygotsky (1978):

> (…) toda alta función mental fue externa y social antes de ser interna. Fue primero una relación social entre dos personas. Podemos formular la ley general de la genética del desarrollo cultural en la siguiente manera. Toda función aparece dos veces o en dos planos... Aparece primero entre personas como una categoría intermental, y después dentro del niño como una categoría intramental.

Aquí hay también construcción de aprendizajes pero dentro de unidades sociales. Porque hay construcción a veces se ubica también como una variante de constructivismo. Se trata de dos énfasis epistemológicos que por supuesto han tenido influencia en las acciones que se proponen para el aula.

Los autores constructivistas cognitivos han buscado respuestas a la necesidad de salir del marco cognitivo individual y darle algún lugar a lo social y cultural, incluso alejándose definitivamente de esa variante de constructivismo. Un ejemplo es la ubicación de la clase como *microcultura* donde las interacciones incluyen negociación de significados (Bauersfeld, 1994; cf. Cobb & Bauersfeld, 1994), con una orientación que se suele llamar “interaccionista”. (Cf. Ruiz & Chavarría, 2003).

En la comunidad de educación matemática desde mediados de los años 90 el foco de interés se ha distanciado de las investigaciones constructivistas “cognitivistas”, se ha dado un papel importante al lenguaje, la cultura, los métodos, fines y medios que han construido la sociedad (Artigue, 2011; D’Ambrosio, 1997, 2007, 2008; Valero, 2004; Radford, 2008). Este enfoque ha pesado en la acción de aula para fundamentar el papel docente y la interacción colectiva y social no sólo como medios para provocar construcciones cognitivas, sino como factores que intervienen para transmitir la cultura y el conocimiento de una sociedad. Como señala correctamente Artigue (2011):

> Una constatación unánime es que la investigación, inicialmente centrada en el alumno, en la comprensión de su funcionamiento cognitivo y en la elaboración de organizaciones didácticas respetuosas tanto de la epistemología de la disciplina como del funcionamiento cognitivo, se ha desplazado hacia el docente, considerándolo como un actor esencial y problemático de la relación didáctica. La investigación se interesó en sus creencias, conocimientos y prácticas. Los investigadores trataron de identificar los conocimientos necesarios para realizar esa labor, entender sus características, sus interconexiones, la manera de cómo se forman y se desarrollan (Even & Ball, 2008). La distinción introducida en 1986 entre “content knowledge”, “pedagogical content knowledge” y “pedagogical knowledge” (Schulmann, 1986) fue trabajada y revisada dando lugar a construcciones tales como aquella propuesta por Deborah Ball y sus colegas (Ball, Hill & Bass, 2005). Aproximaciones teóricas específicas también se han desarrollado, tales como la aproximación dual de las prácticas de enseñanza (Robert y Rogalski, 2002) que combina contribuciones didácticas y de ergonomía cognitiva para pensar la complejidad del trabajo docente o la teoría de la acción conjunta (Sensevy & Mercier, 2007). La investigación también se interesó en las prácticas de formación del profesorado y en sus efectos, analizando sus limitaciones y tratando de comprender las razones para el éxito de ciertas prácticas. Es emblemático de este interés el trabajo que se ha desarrollado internacionalmente en torno a la práctica japonesa dicha de “Lesson Study” (Isoda, Stephens, Ohara y Miyakawa, 2007). (pp. 3-4)

Hay asuntos muy importantes que en el constructivismo cognitivo tampoco han sido integrados, como el papel de lo emocional en la construcción de los aprendizajes, algo que también fue propuesto por Vygostky (1986) y que ha sido objeto de varias investigaciones (cf. Ernest, 2011; cf. Rolf & Radford, 2011).

Hay otros elementos que provocan tensión en las filas constructivistas. Por ejemplo, la existencia de aprendizajes que no requieren construcciones cognitivas independientes por el estudiante (por ejemplo, notaciones, convenciones sobre procedimientos, etc.). Autores como Lesh y Doerr (2008) aportan:

> Existen al menos cuatro cualitativamente distintos tipos de objetivos instruccionales que son importantes en la Educación Matemática y que no todos necesitan construirse independientemente por los estudiantes: ellos son: (a) *objetivos de conducta* (OC) como los simples hechos y destrezas, (b) *objetivos de proceso* (OP) como los hábitos de mente que no están conectados a ningún constructo particular matemático, (c) *objetivos afectivos* (OA) como actitudes, creencias, sentimientos y (d) *objetivos cognitivos* (OC) como los modelos y sistemas conceptuales que los acompañan (constructos) para construir, describir, explicar, manipular, y controlar matemáticamente (o estructuralmente) sistemas interesantes … (p. 532-533)

La perspectiva en la que coinciden muchos autores es que un nuevo “paradigma” emergerá integrando constructivismo y las perspectivas socioculturales, así como los influjos provocados por las tecnologías en la educación. La modelización -se afirma- puede ser fuente de esta nueva perspectiva (Confrey y Kazak, 2006, p. 334). También las elaboraciones semióticas (Gravemeijer, 2010, p. 8).

Para nutrir un currículo y la acción de aula lo más pertinente parece ser no identificarse drásticamente con ninguna teoría o paradigma de una manera radical. Y más bien conviene asumir un criterio amplio, integrador aunque coherente, que utilice los elementos teóricos que se requieren en correspondencia con las necesidades educativas, incluso acercándose a lo que suele llamarse “pragmatismo realista”. Es lo que Cobb (1994) ya expresaba: “el aprendizaje matemático debe verse como un proceso de construcción activa individual a la vez que un proceso de enculturación de prácticas matemáticas de una sociedad más amplia” (p. 13), y que hoy sigue sosteniendo (cf. Cobb, 2011, p. 16).

En ese sentido, por ejemplo, se deben ver los aprendizajes como resultantes dinámicas de construcciones cognitivas y de influjos socioculturales que provocan aprendizajes también por otros medios (imitación, repetición procedimental, etc.). Y asumir las acciones didácticas y pedagógicas que se requieren.

En la resolución de problemas (que enfatiza contextos reales e instrumentos tecnológicos), precisamente es adecuado poner en acción esta visión. A la fortaleza de ver los aprendizajes como construcciones de los sujetos de manera activa (que ha acordado la política educativa costarricense) se añade la potencia de visualizar a un docente que transmite las influencias socioculturales y los constructos de la disciplina, todo *a través* de un medio escolar que posee sus propias reglas.

[4] La selección de las áreas matemáticas se realiza de formas diversas en el mundo en respuesta a tradiciones y perspectivas curriculares específicas. No son inusuales diferencias en aquellas para la Primaria y las de la Secundaria. En Japón por ejemplo, en Primaria: Números y cálculos, Cantidades y medidas, Figuras geométricas, Relaciones cuantitativas. En Secundaria (hasta 9º Año): *Números y expresiones matemáticas*, *Figuras geométricas*, *Funciones*, *Tratamiento de datos*. En *Relaciones cuantitativas* incluyen asuntos de funciones y de manejo de información (Takahashi, Watanabe, & Yoshida, 2008). En Finlandia usan diversas áreas pero se incluyen en forma precisa, a veces ciertas áreas no aparecen en un año, o se fusionan en otra: *Números y cálculos*, *Álgebra*, *Funciones*, *Geometría*, *Tratamiento de datos, Estadística y Probabilidad*, *Pensamiento y habilidades* (Finnish National Board of Education, 2004). El programa PISA organiza los temas para sus pruebas en 4 áreas: *Espacio y forma*, *Cambio y relaciones*, *Cantidad e Incertidumbre* (OECD, 2005, p. 39), pero su interés es la prueba y no el desarrollo curricular. México, otro ejemplo, influido por PISA, sin embargo acomoda los contenidos por medio de 4 “ejes” que llama: *Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma, espacio y medida, Manejo de la información, Actitud hacia el estudio de* las Matemáticas. Aparecen en toda la educación hasta el 9º Año, aunque el cuarto eje que curiosamente no es cognoscitivo sino actitudinal es transversal (Secretaría de Educación Pública de México, 2011, p. 40).

Aquí se acepta como adecuado el enfoque del National Council of Teachers of Mathematics (planteado desde hace 20 años), en dos sentidos: por un lado, se juzga pertinente la selección de áreas para toda la educación preuniversitaria (integración vertical), y por otro las cinco áreas seleccionadas: *Números y operaciones*, *Álgebra*, *Geometría*, *Medida*, *Análisis de datos y probabilidad* (National Council of Teachers of Mathematics, 2003). Dentro del área de Álgebra el NCTM incluye los temas de relaciones y funciones. En cuanto a lo primero:

> Aprender matemáticas supone acumular ideas e ir construyendo sucesivamente conocimientos más profundos y perfeccionados. **El currículo debería proporcionar una guía que ayude al profesorado a conducir a sus alumnos a niveles crecientes de complejidad y profundidad de conocimiento**. Tal guía requiere un currículo bien articulado, para que los profesores sepan qué matemáticas han estudiado sus alumnos en los niveles anteriores y qué debe enfatizarse en los siguientes. Énfasis añadido.
> (…)
> Sin una clara articulación del currículo a través de todos los niveles, es inevitable la duplicación de esfuerzos y la revisión constante. Un currículo bien articulado asesora a los profesores en cuanto a las ideas matemáticas importantes, o los temas principales que deben recibir especial atención en cada momento. También les guía y asegura respecto a la profundidad de tratamiento de determinados conceptos y destrezas, y sobre cuándo se espera que concluya este tratamiento. (NCTM, 2003, pp.16-17).

[5] Hay muchas definiciones de competencia, sin embargo se coincide con Rico y Lupiáñez (2008) en que poseen características en común; lo resume Lupiáñez (2009):

- La competencia *sirve para y se manifiesta mediante la acción*, lo cual se expresa de diversos modos, genéricos o específicos como actuar, interpretar y resolver problemas, enfrentar demandas complejas o aplicar conocimientos a la práctica.

- La competencia *se muestra mediante el desarrollo personal y social* del sujeto competente, lo cual también se expresa de diversas maneras como vivir, desarrollar capacidades, tomar decisiones, continuar aprendiendo, trabajar, o mejorar la calidad de vida.

- La competencia siempre hace referencia a un contexto de aplicación. Hay un claro énfasis en que la acción y el desarrollo, que se derivan de las componentes cognitivas y actitudinales tienen lugar en un marco concreto, de manera contextualizada. Las menciones son amplias y, a veces, imprecisas pero no dejan lugar a dudas. En el análisis anterior se mencionan situaciones determinadas o definidas, y las referencias a contextos tienen mayor diversidad y transmiten más precisión: contextos académicos, profesionales o sociales en una variedad de áreas, en la práctica educativa o en la sociedad. (p. 87)

La definición de PISA coincide con esto.

Las diferencias alrededor del concepto de competencia emergen en torno al rango de intervención (mayor o menor generalidad), y no tanto sobre el concepto mismo (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 142).

[6] En este currículo no se introducen las competencias como organizadoras del plan de estudios, sólo se usan como una perspectiva general que busca la formación matemática, pero se reconoce su relevancia. Las competencias dentro de un currículo escolar ofrecen visiones renovadoras que permiten redireccionar el significado de los aprendizajes y sustentar premisas constructivistas cruciales, apoyando que la educación aporte al progreso social. Se coincide con Rico y Lupiáñez (2008):

> Al optar por este marco, el sistema educativo apuesta por la necesidad de dar un sentido a los aprendizajes. Un sentido en este caso constructivista, ya que se contempla al alumno como constructor de sus aprendizajes; no basta con la transmisión del saber. Adquirir y desarrollar competencias es el modo de atender los fines formativos del currículo que, esencialmente, consiste en aprender a hacer lo que se hace, haciéndolo. Complementariamente, el marco de competencias

> contribuye al desarrollo social, ya que proporciona respuesta avanzada a las necesidades del mundo económico y laboral, y garantiza el logro de una política escolar democrática. (p. 150).

Aquí, sin embargo, se usa las competencias de una manera precisa en atención a los fines educativos nacionales y las posibilidades de docentes y estudiantes en el actual momento histórico: como una perspectiva que nutre decisiones curriculares y la acción de aula, con la propuesta de procesos que poco a poco se vayan introduciendo en los quehaceres educativos.

Un planteamiento por competencias pleno significaría su introducción operativa en el planeamiento o la evaluación cotidiana. Proponer eso último habría significado al menos otras cosas:

i) Introducirlas explícitamente en los instrumentos de planeamiento oficiales, y pedir que se reporten los resultados de su introducción en el aula: grados de avance de las competencias en cada uno de las y los estudiantes (lo que podría consignarse por medio de rúbricas para la observación). En esa perspectiva la planificación se debería hacer no por medio de conocimientos o habilidades específicas sino "por medio de la resolución de tareas no convencionales" (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 157). Más aún:

> La planificación debe establecer las expectativas de aprendizaje. También debe incorporar criterios para su seguimiento y desarrollo, considerando niveles de dominio para cada una de las competencias. Parámetros importantes para planificar el nivel de dominio que se puede esperar en una determinada competencia son el tipo o familia de tareas que las movilizan, su nivel de dificultad y su grado de complejidad (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 157).

ii) Habría significado en la evaluación "tareas para evaluar el uso conjunto" de conocimientos, habilidades y actitudes, comprendiendo que las competencias son "interdependientes", y que debe haber una "valoración holista, que tenga en cuenta el ejercicio conjunto de sus componentes en distintos contextos" (Rico y Lupiáñez, 2008, pp. 155-156). Implicaría "reconocer el nivel o grado de logro alcanzado", y por tanto proponer instrumentos con escalas de logro (como por ejemplo, los seis niveles que utiliza PISA (OECD, 2005, pp. 46-47)).

Esto no se propone hacer en este currículo.

[7] La idea de proceso que se usa en este currículo es muy parecida a la que usa el *National Council of Teachers of Mathematics* NCTM, de los Estados Unidos. Esta organización profesional plantea *estándares de procesos*, a la par de *estándares de contenido.* Los estándares de proceso "enfatizan modos de adquirir y usar conocimientos" (NCTM 2000, p. 29). Los estándares de proceso son también expectativas de logro en actividades transversales distintas a las áreas matemáticas. En este currículo el concepto de proceso posee un sentido más práctico, menos general: son "familias" o tipos de actividades. *Conectar*, por ejemplo, podría verse como una familia de actividades que se propone realizar en la implementación del currículo y que propulsan el desarrollo de una o varias competencias. Igual sucede con *Plantear y resolver problemas*. De hecho, el NCTM ha evolucionado y planteado más recientemente una manera más práctica de usar los estándares de proceso en su colección *Focus in High School Mathematics* (NCTM, 2009). Una manera aun más práctica y precisa de trabajar con este tipo de actividades es la que ha propuesto el llamado *Common Core State Standards for Mathematics CCSSM*, una formulación distinta a la del NCTM que ha logrado tener recientemente un extraordinario impacto en los Estados Unidos. CCSSM propone como "Estándares para la práctica matemática": *Dar sentido a problemas y perseverar en revolverlos, Razonar abstractamente y cuantitativamente, Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros, Modelizar con matemáticas, Usar herramientas apropiadas estratégicamente, Poner cuidado a la precisión, Buscar y usar la estructura, Buscar y expresar regularidad en razonamientos repetidos.* (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2012).

Una comparación de coincidencias y diferencias entre el NCTM y el CCSSM en cuanto a procesos se puede ver en NCTM (2010, p. 12 y sgtes.).

Hay, por otro lado, una diferencia relevante en los procesos aquí seleccionados. En este currículo se selecciona *Plantear y resolver problemas*, igual que el NCTM (no se insisten en el planteamiento, pero es implícito en el enfoque del NCTM), pero se enfatiza la resolución de problemas en contextos reales, que involucra necesariamente la modelización. Se asume aquí que la dimensión realista y la modelización (matematización) son importantes para darle a la resolución de problemas un sentido más vigoroso. Coincidimos con English, Lesh y Fennewald (2008) cuando ven los modelos y la modelización como una perspectiva importante para relanzar la resolución de problemas. En este currículo la modelización es parte de *Plantear y resolver problemas*, mientras que en el NCTM se incluye dentro del proceso que llaman "Representaciones". Puesto que los procesos actúan de manera coligada, no es tan relevante dónde se coloca la modelización.

La necesidad de introducir en el currículo las capacidades matemáticas y no sólo contenidos, se expresa en la idea de "estándares de proceso" en el NCTM, de "competencia matemática" en PISA, "Estándares para la práctica matemática" del CCSSM, también se refleja en la propuesta del *National Research Council* de los Estados Unidos (2003): *Comprensión conceptual, Fluidez en procedimientos, Competencia estratégica, Razonamiento estratégico, Disposición productiva*. Igual sucede con los "procesos clave" del Currículo Nacional de Matemáticas en el Reino Unido: *representar, analizar, interpretar y evaluar*. Singapur, otro ejemplo, también usa procesos en su currículo: *razonamiento, comunicación y conexiones, habilidades de pensamiento y heurísticas, y aplicación y modelización* (Soh, C. K., 2008).

[8] La OECD (2010), en el marco teórico propuesto para PISA en el 2012, señala siete capacidades específicas matemáticas que sustentan la competencia matemática, que se plantean en todas las áreas matemáticas del plan de estudios pero son independientes de esas áreas, y son denominadas *competencias matemáticas*. Al colocarse en términos del currículo, se pueden vislumbrar como metas cognitivas que se desarrollan poco a poco durante toda la formación matemática (y no de una manera lineal), a diferencia de las habilidades específicas asociadas a conocimientos matemáticos a desarrollar en cortos plazos. En este currículo no se trabajan de manera operativa estas competencias matemáticas. Las competencias matemáticas seleccionadas son: *Comunicación, Matematización, Representación, Razonamiento y argumentación, El diseño de estrategias para resolver problemas, Utilización de lenguaje simbólico, formal y técnico y operaciones,* y *Utilización de herramientas matemáticas.* Esto representa un cambio en relación con el marco teórico de PISA 2013, donde se consignaron 8 competencias matemáticas (OECD, 2005), aunque en la mayoría son de forma; la mayor diferencia fue fusionar dos competencias.

Si bien es teóricamente posible identificar otras competencias matemáticas o reformularlas de otras maneras, las ocho competencias matemáticas (PISA 2003), o las siete (PISA 2012), permiten describir la competencia en las Matemáticas. Estas competencias son como los pétalos de una flor: aunque cada una posee un centro de gravedad propio poseen intersecciones diversas con las demás competencias.

El papel de la competencia matemática permite redimensionar el significado de la formación matemática: se busca un sólido dominio de los conceptos y procedimientos matemáticos pero en un marco de generación de competencias. El papel de esos contenidos se aprecia con una visión más rica, aportando nuevos significados; deben ser convenientes, necesarios y suficientes, varían y deben acomodarse para asegurar el desarrollo de la competencia matemática.

Aunque se juzga que las competencias matemáticas son una perspectiva útil para un currículo, en general no se propone su operacionalización en los planes de estudio en Costa Rica.

La estrategia que se propone es el desarrollo de capacidades cognitivas superiores y de la competencia matemática general por medio de cinco actividades transversales en los planes de estudio.

Los procesos matemáticos y las competencias

Se considera más eficaz trabajar con procesos y no con competencias directamente, pues en primer lugar, se desea enfatizar las acciones a desarrollar en la acción de aula. Si el propósito en juego fuera la evaluación del sistema educativo (como pretende PISA) el uso exclusivo de competencias sería apropiado. Pero aquí se trata de algo distinto: se busca aportar instrumentos a realizar en la acción de aula que promuevan esas competencias. Y ese es el sentido de la introducción de procesos matemáticos.

En segundo lugar, colocados estos cinco procesos directamente en asociación con la acción de aula, su selección y la forma como se conceptúan ofrecen una perspectiva propia de lo que se asume adecuado promover en Costa Rica en esta etapa histórica. Con estos procesos se ordenan, integran o enfatizan las competencias matemáticas (las 8 de PISA 2003 o las 7 de PISA 2012) de una manera específica. Estos elementos expresan también una perspectiva de lo que se considera debe ser la Educación Matemática (por ejemplo, al enfatizar la relación entre resolución de problemas y modelización).

En tercer lugar, el trabajo con estos cinco procesos y no las ocho competencias simplifica y facilita la implementación del currículo (siete u ocho parámetros son más difíciles de incorporar en la labor de aula).

En un plano más teórico, investigadores han criticado una especie de círculo entre el sustrato del que emergen las competencias matemáticas (la matematización general) y que exista una competencia precisamente en esos términos (cf. Jablonka & Bergsten, 2010). Es correcta la crítica, pero no invalida el enfoque, es un asunto de precisiones.

La utilización específica de las competencias por medio de los procesos de este currículo se hace de varias maneras. En un primer momento se estableció un proceso que refiere a dos competencias. La competencia *El diseño de estrategias para resolver problemas* no supone necesariamente la competencia *Matematización*. Son competencias independientes. Sin embargo, se insiste: se busca aquí que exista una relación estrecha entre ambas. Se propone que una buena parte de los problemas que se trabajen sean contextualizados y llamen al uso de modelos.

Por otro lado, se plantea otro proceso que involucra dos competencias que aparecían en PISA 2003: *Pensamiento y razonamiento matemático* y *Argumentación matemática.* Se propone trabajar con actividades que integren la búsqueda por robustecer éstas de manera asociada. Para PISA 2012 esas competencias se integraron en una sola.

El proceso *Conectar* no se asocia de manera directa a una competencia o a una combinación de ellas, sin embargo pone en movimiento acciones cognitivas asociadas a varias competencias. Su realización en el aula plantea importantes relaciones significativas entre las áreas matemáticas pero también con otras materias, y refuerza la asociación con contextos reales. Esto se ha considerado esencial para la educación costarricense.

Comunicar y *Representar* sí se vinculan directamente con competencias mencionadas. En el caso de *Comunicar* posee un alcance más amplio: se busca desarrollar actividades de comunicación donde participen las Matemáticas y, de nuevo, también otros conocimientos.

Con este esquema se operacionalizan los procesos en el plan de estudios: se seleccionan tópicos que favorecen mejor la participación de procesos y se dan indicaciones puntuales y generales para realizarlos.

Además de los énfasis que de esta manera recogen los procesos seleccionados, se pueden señalar asociaciones de los mismos con las siete competencias, que se pueden recolectar en la tabla siguiente.

Tabla de notas 4: Procesos matemáticos y competencias matemáticas en PISA 2012

Procesos	**Competencias matemáticas**
Razonar y argumentar	*Razonamiento y argumentación* *Comunicación*
Plantear y resolver problemas	*Razonamiento y argumentación* *Comunicación* *El diseño de estrategias para resolver problemas Construcción de modelos* *Utilización de lenguaje simbólico, formal y técnico y operaciones* *Utilización de herramientas matemáticas*
Comunicar	*Razonamiento y argumentación* *Comunicación matemática* *Utilización de lenguaje simbólico, formal y técnico y operaciones* *Utilización de herramientas matemáticas*

Conectar	*Razonamiento y argumentación* *Comunicación matemática* *Utilización de herramientas matemáticas*
Representar	*Razonamiento y argumentación* *Utilización de lenguaje simbólico, formal y técnico y operaciones*
Fuente: elaboración propia.	

El proceso *Comunicar,* además de incluir soporte directo a la competencia *Comunicación,* permite apoyar el progreso de las competencias *Razonamiento y argumentación*, y en ciertos momentos *Utilización de lenguaje simbólico, formal y técnico y operaciones*. Dependiendo de la tarea planteada puede apoyar *Utilización de herramientas matemáticas*.

Al realizarse el proceso *Comunicar* se puede trabajar las competencias de *Razonamiento y argumentación*, *Comunicación matemática* y en ocasiones *Utilización de herramientas matemáticas*.

La actividades asociadas con *Representar* permiten el desarrollo de competencias de *Razonamiento y argumentación, Utilización de lenguaje simbólico, formal y técnico y operaciones* y en ocasiones la *Comunicación.*

La forma en que estos procesos matemáticos apoyan el progreso de cada una de las competencias con las que se asocian depende de las diversas circunstancias ofrecidas por las áreas matemáticas, los ciclos y años lectivos. No debe pensarse que se deben encontrar de manera idéntica en cada año escolar.

[9] El tema de la resolución de problemas tiene unos 30 años de estar en las discusiones educativas internacionales desde que el National Council of Teachers of Mathematics NCTM planteó *An agenda for action* en 1980, se trataba de una respuesta a la etapa que se denominó de "Back to Basics" que se dio como reacción a las dificultades que tuvo la reforma de las Matemáticas modernas durante los años 1960-1970 en varios países. A finales de esa década se realizaron precisiones sobre esta temática por el mismo NCTM, que por ejemplo se expresaron en *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* de 1989. Se subrayaba desde entonces el provocar aprendizajes *a través de la resolución de problemas*. Los antecedentes de las propuestas de la década de los ochenta eran trabajos como los de G. Polya (1945). Schoenfeld (1983) ofreció una influyente reformulación de las ideas de Polya lo que constituyó un nuevo punto de partida para el tema en la comunidad de Educación Matemática. Stanic y Kilpatrick (1988) escribieron una síntesis hasta ese momento de la resolución de problemas que constituye un "clásico". Una versión más general de la resolución de problemas la aportó hace poco Schoenfeld (2011).

Se coincide con Cai y Lester (2010), en una reseña reciente sobre el enfoque de generar aprendizajes a través de la resolución de problemas:

> El ambiente de aprendizaje de **enseñar a través de la resolución de problemas** ofrece un medio natural para que los estudiantes puedan presentar varias soluciones a su grupo o clase y aprender matemáticas a través de interacciones sociales, negociación de significados, y alcanzar un entendimiento compartido. Estas actividades ayudan a los estudiantes a clarificar sus ideas y a adquirir perspectivas diferentes del concepto o la idea que están aprendiendo. Empíricamente, enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas ayuda a los estudiantes para ir más lejos de adquirir ideas aisladas hacia el desarrollo de sistemas de conocimientos crecientemente conectados y complejos (p. 3). Énfasis añadido.

El planteamiento de la resolución de problemas fue asumido en los currículos de diversos países, entre ellos Japón, Corea y Singapur. Por ejemplo desde los 80 Singapur lo colocó como el corazón de su currículo de matemáticas, las diferentes modificaciones curriculares hasta ahora han dejado intacto ese planteamiento (Ministry of Education of Singapore, 2006a; Soh, 2008). Desde los 80, otro ejemplo: "… ha sido un elemento importante en los currículos matemáticos de Finlandia por más de 20 años" (Pehkonen, Hannula & Björkqvist, 2007, p. 121). Una de las conclusiones relevantes del estudio de las pruebas TIMSS en el año 1999 es precisamente que en todos los países estudiados Australia, República Checa, Hong Kong (SAR), Japón, Holanda y Suiza (seleccionados por su exitoso rendimiento en pruebas internacionales) se trabajaba más de un 70% del tiempo de clase con resolución de problemas (Hiebert, Gallimore, Garnier, Givvin, Hollingsworth, Jacobs, Chui, Wearne, Smith, Kersting, Manaster, Tseng, Etterbeek, Manaster, Gonzales, y Stigler, 2003).

Japón asumió ideas del NCTM en los ochenta, pero en este país la resolución de problemas posee un sentido esencialmente pragmático alrededor de la acción de aula, significa aquella lección que genere entendimiento (aprendizajes). Los estudios comparativos internacionales sobre la lección han consignado las características y puntos fuertes de la lección japonesa. Precisamente Ruiz (2011) analiza esas características en su relación con la experiencia de otros países; varias de sus conclusiones sobre la lección japonesa han sido importantes insumos de la visión sobre la resolución de problemas que se usa en este currículo.

[10] El énfasis en contextos reales para los problemas es también una característica del mismo marco teórico de PISA; éste encuentra fundamento en las orientaciones de la *Educación Matemática Realista* (EMR) iniciada por Hans Freudenthal (1973, 1991) como respuesta a algunas tendencias dominantes en su momento en la Educación Matemática (como la Reforma de las Matemáticas Modernas y el Conductismo). En esa corriente se afirma la matematización de dos maneras: horizontal y vertical. La primera refiere a la organización de los elementos reales, casi empíricos, del contexto mediante modelos. La segunda es la organización, estructuración y refinamiento de los modelos a través de las formas de pensamiento y lenguaje matemáticos. En la primera se va del mundo de la vida al mundo de los símbolos, en la segunda se mueve sólo en el de los símbolos. Existe una fuerte interacción e intersección entre ambas formas de matematización. Ambos tipos de actividad se encuentran en la práctica del matemático y justamente se busca trasladarlos a la acción escolar, aunque con adecuaciones. La Educación Matemática debe proporcionar contextos adecuados para que se puedan desarrollar ambas formas de matematización. Si los problemas que se ofrecen son abstractos, solamente se le da la oportunidad de una matematización vertical.

En este currículo se acepta como conveniente la orientación general de la EMR, sin embargo se hacen dos acotaciones: en primer lugar, se considera relevante la presencia de problemas abstractos en la lección como elementos para construir aprendizajes y promover competencias. En segundo lugar, los problemas en contextos reales deben seleccionarse con cuidado y disponer de suficientes ejemplos y recursos que requerirá el país durante varios años. Se propone aquí, entonces, una estrategia dominante en problemas en contextos reales pero sin debilitar el papel de los problemas abstractos (que en ciertas tareas son esenciales para el dominio de ciertos temas matemáticos).

Se adopta aquí una convergencia valiosa entre la enseñanza de las Matemáticas a través de la resolución de problemas y la orientación de la EMR.

[11] Se coincide con Lesh y Lamon (1992, p. 26):

> Los modelos matemáticos son sistemas funcionales completos que consisten de (i) *elementos* (por ejemplo, cantidades, razones, razones de cantidades, formas, coordenadas), (ii) *relaciones* entre los elementos dentro del sistema, (iii) *operaciones y transformaciones* sobre los elementos del sistema, (iv) *patrones* que gobiernan el comportamiento de las relaciones, operaciones, y transformaciones.

Se insiste sin embargo en una noción amplia de modelo. Y especialmente en el uso y construcción de modelos en forma sucesiva para el aprendizaje.

[12] PISA 2003 señaló tres niveles de complejidad en las situaciones donde participan las competencias matemáticas:

> PISA organizó las actividades cognitivas que engloban las competencias antes mencionadas en torno a tres *grupos de competencias* denominados: *grupo de reproducción, grupo de conexiones* y *grupo de reflexión*. Estos grupos han demostrado servir de base adecuada para el análisis del modo en que las distintas competencias son requeridas como respuesta a los diferentes tipos y nive-

les de demandas cognitivas planteados por los diferentes problemas matemáticos. (OECD, 2005, p. 40-41).

En este currículo no se asumen los términos “reproducción”, “conexión” y “reflexión” como clústeres de competencias. Se usan como niveles de complejidad de los problemas. Es decir, como niveles distintos de demandas cognitivas en los problemas que se presentan en el aula.

En PISA 2012 se abandonan los conceptos “reproducción”, “conexión” y “reflexión” para señalar clústeres de las competencias. Se pasa a un enfoque más cercano a los “procesos” que intervienen en la matematización: “formular, emplear, interpretar.” (OECD, 2010, p. 14). Para los propósitos de este currículo se preserva el sentido de las complejidades que se derivó de aquellos términos en PISA 2003. Aquí se entenderán no como grupos de competencias sino como niveles de complejidad caracterizados de manera precisa, lo que resulta pertinente para el currículo.

Demandas cognitivas y capacidades matemáticas distintas participan de manera combinada y específica en cada uno de estos niveles.

Trabajar en distintos niveles de complejidad es primordial en un enfoque en que se busca el desarrollo de capacidades cognitivas superiores: “La consecución de competencias en el aula debe buscar su desarrollo mediante el avance y la progresión en los niveles de cada una de ellas, avance que **se lleva a cabo mediante secuencias de tareas de complejidad creciente**”. (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 153). Énfasis añadido.

Rico y Lupiáñez consignan correctamente algunas características de las tareas que ayudan en el desarrollo de capacidades cognitivas:

> *Compleja*: obliga a la organización dinámica de los recursos, recursos que pueden ser de naturaleza u origen diferente.
> *Finalista*: orientada hacia la acción, se propone un objetivo concreto.
> *Interactiva*: donde el contexto de la tarea y su objetivo orientan la selección de recursos y su organización; aprender es interactuar con el medio.
> *Abierta*: en la cual el proceso y el resultado no estén predeterminados.
> *Inédita*: cuando el problema cambia en cada planteamiento, se consigue cierto sentido de novedad.
> *Construida*: es decir, que se oriente hacia los objetivos de aprendizaje sin necesidad de reflejar toda la complejidad de la realidad. (p. 154).

Los problemas en contextos reales son útiles para diseñar tareas con estas características.

[13] De acuerdo a Alfaro y Barrantes (2008, p.95) en Costa Rica hay una percepción tradicional del problema matemático como un enunciado verbal “contextualizado”. Sin embargo, esta concepción es insuficiente para utilizar la resolución de problemas como estrategia metodológica:

> Las creencias mencionadas anteriormente juegan en contra de la posibilidad de utilizar la resolución de problemas como una estrategia en el proceso de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas. En efecto, por un lado, en una estrategia de este tipo, un problema no necesariamente debe ser del estilo clásico: verbalización, contextualización; por el contrario, muchas situaciones puramente matemáticas pueden servir como un disparador del proceso de adquisición de conocimientos.

Muchos autores señalan esto, por ejemplo Calvo (2008):

> Una de las áreas de la matemática que mayor dificultad adquiere para los estudiantes y las estudiantes es la resolución de problemas; los niños y las niñas son capaces de resolver mecánicamente las operaciones fundamentales básicas (suma, resta, multiplicación y división), pero no saben cómo aplicarlas para la solución de un problema, ya que sólo se les ha enseñado a actuar de forma mecánica y repetitiva. (p. 124).

Se coincide con Gamboa (2007):

> Tradicionalmente, en la enseñanza de las Matemáticas se ha puesto mucho énfasis en el trabajo con ejercicios rutinarios a los cuales los estudiantes dan solución mecánica, debido al énfasis que los profesores han dado a los procedimientos, sin dar oportunidad para que el alumno reflexione sobre estos procesos.
>
> Este abordaje rutinario en la enseñanza ha generado una separación entre los conceptos teóricos y su aplicabilidad, lo que ha provocado en los alumnos desinterés por las Matemáticas. (p. 10).

La resolución de problemas es una orientación para enfatizar capacidades cognitivas superiores. Esto debe estar claramente incorporado en el currículo. Como bien señala el NCTM (2003, p.15):

> Un currículo de matemáticas escolares determina, en gran manera, lo que los estudiantes tienen oportunidad de aprender y lo que realmente aprenden. En un currículo coherente, las ideas matemáticas están ligadas y se construyen unas sobre otras, para que así profundice la comprensión y el conocimiento del alumnado y aumente su habilidad para aplicarlas. **Un currículo efectivo se centra en unas matemáticas importantes; matemáticas que preparen para un estudio continuado y para la resolución de problemas en diferentes entornos: el aula, la casa o el trabajo.** Su articulación incentiva a los estudiantes para ir aprendiendo ideas matemáticas cada vez más complejas a medida que avanzan los estudios. Énfasis añadido.

La resolución de problemas ha sido planteada en Costa Rica desde hace más de 20 años (Cf. Oviedo y Méndez, 1991), pero no con la intensidad y perspectiva que se requiere. En las aulas costarricenses no se ha incorporado, como consigna una investigación reciente:

> Después del análisis hecho sobre las observaciones de aula en el apartado anterior, es evidente que, la resolución de problemas no estuvo presente, como estrategia didáctica, en los ambientes de aprendizaje estudiados.
> Aunque esto es lo que dicta la Política Educativa, la realidad de aula es otra. (Chaves Esquivel et al, 2010, p. 28).

Las universidades formadoras de docentes no le han dado el lugar que debería tener en sus planes de formación inicial. Eso obligaría a modificaciones importantes en esos planes (cf. Ruiz, Barrantes y Gamboa, 2009; cf. Araya y Sequeira, 2008). También, y esto es central: plantea desencadenar amplios procesos de capacitación en servicio, una auténtica formación continua.

[14] El uso de tecnologías contribuye a fortalecer la generación de estrategias en la resolución de problemas: "se convierte en una herramienta capaz de aportar a las clases de matemáticas sistemas de representación que puedan ser utilizados para la visualización y experimentación de conceptos importantes, lo que contribuye con las estrategias para la resolución de problemas" (Alpízar, 2007, p. 97). Y con Gamboa (2011), la tecnología permite:

> i) realizar el análisis de casos particulares de los problemas a trabajar. Basados en estos casos particulares, los alumnos pueden conjeturar sobre la solución para el caso general;
>
> ii) facilitar la observación de los fenómenos presentes en cada uno de los problemas, lo que requiere de todo un análisis donde el uso de la tecnología juega un importante papel;
>
> iii) generar una serie de valores y representaciones, en los cuales se basa el análisis para hallar la solución del problema. (p. 37)

La existencia de software gratuito como Geogebra favorece su incorporación en la educación y generar los amplios beneficios que, por ejemplo, en la resolución de problemas se pueden obtener (Arias, Guillén y Ortiz, 2011, p. 2). En el mismo sentido, con Meza, Agüero y Calderón (2011):

> La existencia de programas computacionales gratuitos de utilidad para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, como el caso de Geogebra o de wxMaxima, entre muchos otros, constituye parte de las nuevas oportunidades con que cuenta el/la docente. Aquí lo relevante es el desarrollo de estrategias de divulgación de la existencia de este tipo de programas, fortaleciendo la capacitación en el uso didáctico de este tipo de programas (…). (p. 25).

Los beneficios del uso de las tecnologías han sido documentados, incluso en Costa Rica, por ejemplo Jiménez, Espinoza y Morales (2011) describen la experiencia desarrollada con profesores de Matemática de Secundaria, en los cantones de Guácimo y Pococí, en el uso de la tecnología, a través de una iniciativa desarrollada en el marco del Programa de Regionalización Interuniversitaria. El diagnóstico incluyó la participación de 384 estudiantes de la zona, con similar distribución de género. Se tomaron en cuenta a cinco colegios de la región, cuyos estudiantes residían en 11 distritos diferentes. La edad promedio de estudiantes encuestados fue de 14 años. Los siguientes son algunos resultados del diagnóstico:

> Con respecto al gusto o interés por la informática, solo el 2% dice no estar interesado en lo más mínimo en la informática, mientras que el 90% de los encuestados indica que la informática es útil. Un 81,3% de los estudiantes expresan su grado de satisfacción por asistir a clases donde se utiliza la informática. **El 63% de los estudiantes indica que cuando utilizan las tecnologías informáticas sienten más ganas de aprender y sólo el 4% indica que le ayuda poco.** Además, el 33% de los estudiantes está totalmente de acuerdo en que: utilizar equipo tecnológico incentiva la permanencia en el colegio y por ende no abandonar los estudios de educación secundaria. (p. 5). Énfasis añadido.

Es importante incluir de manera adecuada los usos de la tecnología (y dar indicaciones precisas) para favorecer aprendizajes como también para evitar formas inadecuadas de usarla, como Meza, Agüero y Calderón (2011) consignan que ha sucedido en Costa Rica:

> Una de las cuestiones que se han venido poniendo de manifiesto en los últimos años, tanto por las diversas expresiones de los docentes, como por la evidencia que se encuentra en la misma publicidad, es que la enseñanza de la matemática en la educación media está fuertemente mediatizada por la enseñanza de trucos que utilizan la calculadora para hallar respuestas correctas aunque el/la estudiante no comprenda los procedimientos o los conceptos.
>
> Muestra de este tipo de publicidad se encuentra en volantes promocionales de textos de matemática para la educación media o en mantas de academias. El uso de la calculadora mediante procedimientos automatizados para encontrar “respuestas correctas” en exámenes de selección única, parece estar mediatizando, de manera muy significativa, los procesos de enseñanza de la matemática en la educación media costarricense. Así lo manifiestan varios de los informantes, quienes sostienen una opinión de preocupación ante este fenómeno. (p.13).

Vale mencionar que PISA en sus pruebas incorporará con mayor fuerza desde el 2012 competencias relacionadas con tecnologías, aunque de manera opcional. De hecho, las pruebas podrán incluir las siguientes:

- Confeccionar un gráfico a partir de datos, incluyendo tablas de valores (por ejemplo, gráficos de pastel, barras, gráficos lineales), usando instrumentos de apoyo simples.
- Generar gráficas de funciones y usarlas para responder preguntas sobre las funciones.
- Ordenar información y planificar estrategias eficientes de ordenación.
- Usar calculadoras manuales o simuladores.
- Usar instrumentos como reglas y transportadores virtuales.
- Transformar imágenes usando las ventanas de diálogo y el ratón, para rotar, reflejar o trasladar imágenes (OECD, 2010, p. 31).

En perspectiva histórica se requiere preparar a las nuevas generaciones en el uso de tecnologías en la Educación Matemática, no sólo como medios de motivación personal sino como importantes instrumentos y capacidades que se exigirán cada vez más en este escenario.

[15] Varios investigadores han mostrado cómo los problemas usuales (situaciones matemáticas revestidas de entorno) provocan en estudiantes la creencia de que se resuelven siempre aplicando alguna de las operaciones aritméticas o una combinación de ellas y nada más. Con ello se genera una idea falsa del papel de las Matemáticas y del sentido de sus aplicaciones. (Davis, 1989; Schoenfeld, 1991). Estos “problemas”, sin embargo, pueden modificarse para introducir elementos de modelización. Verschaffel,

Greer y De Corte (2010, pp. 210-271) resumen algunas de las condiciones para enriquecer ese tipo de tareas matemáticas:

- Romper con la expectativa de que un problema formulado con palabras puede resolverse sólo con sumar, restar, multiplicar o dividir, o una combinación simple de ellas.
- Eliminar los defectos en los textos que inmerecidamente atribuyen ser exitosas a estrategias superficiales de solución.
- Variar los problemas de tal manera que no se asuma que todos los datos incluidos, y sólo ellos, son los requeridos para la solución. Entonces, los estudiantes deben esperar seleccionar datos o encontrarlos, o estimar datos que no están suministrados explícitamente.
- Quitar problemas en los que los números no corresponden a la vida cotidiana.
- Legitimizar formas de respuesta que no son respuestas numéricas exactas.
- Presentar problemas para los cuales son posibles modelos alternativos, e incluir discusión sobre los méritos relativos de estas alternativas.
- Crear oportunidades para darles a los niños, además de la experiencia de la resolución de problemas, la posibilidad de generar problemas ellos mismos.

Si bien sería conveniente tener textos y recursos con el nuevo tipo de problemas, para la contextualización activa es posible también usar los recursos existentes y transformarlos adecuadamente. En Costa Rica se trata de una estrategia de mediano y largo plazo.

[16] Lo que ha predominado en la educación Secundaria del país es un estilo de organización de la lección que subraya una secuencia de pasos o momentos: Teoría->Ejemplo->Práctica Rutinaria, y a veces la introducción como apéndice de un ejercicio contextualizado:

1. En el paso de la teoría se proporcionan las definiciones y los principales conocimientos asociados al tópico curricular.
2. En el siguiente paso se hace la descripción de los ejemplos que muestran o ilustran los conceptos o procedimientos asociados.
3. El tercer paso corresponde a la presentación de ejercicios similares a los ejemplos en su grado de dificultad aunque con ligeras variaciones.
4. Es posible que se añada al final algún ejercicio contextualizado, cuyo nivel de complejidad no dista del utilizado en los ejemplos y ejercicios.

En el mejor de los casos se usa un verdadero problema (uno que implica algún nivel mayor de demanda cognitiva). Se usaría sin embargo para completar el proceso de aprendizaje, y el problema actuaría como un espacio para hacer aplicaciones (los y las estudiantes usarían lo aprendido en abstracto).

En ese estilo de organización de la lección se da una acción docente básica que suministra la información y los conocimientos matemáticos (procedimientos, algoritmos, demostración de propiedades, graficación de figuras, resolución de ecuaciones, etc.), las personas reciben pasivamente las explicaciones y en algunos momentos -cuando fuera necesario- pueden externar sus dudas. Este estilo no favorece la interrelación activa entre estudiante-docente, estudiante-estudiante, ya que posee un sentido unidireccional en el flujo de significados y conocimientos y no provoca el aporte y compromiso estudiantil en el desarrollo mismo de la lección.

En muchas ocasiones la parte de teoría se reduce sustancialmente ofreciendo una variante disminuida del estilo: Ejemplo -> Práctica rutinaria, que a veces incluye un ejercicio contextualizado.

El predominio de este estilo responde a varias razones. Una de ellas es la ausencia de tiempo suficiente para el desarrollo de fines curriculares en el aula, debido por ejemplo a un abarrotado conjunto de contenidos a cumplir en un cronograma muy rígido. Por el otro lado, obedece a una falta de elementos de apoyo para abordar estrategias pedagógicas distintas que requieren, entre otras cosas, insumos y materiales específicos (textos adecuados y manipulables). Además, existe la ausencia de formación docente en enfoques alternativos asociados de manera específica a la labor de aula en la enseñanza de las Matemáticas. Finalmente, interviene la distorsión provocada por las pruebas nacionales hacia una concentración en el aula en ejemplos y ejercicios similares a los que aparecerían en esas pruebas. Todos estos elementos intervienen de distinta manera.

En la educación Primaria este estilo no se ha dado de la misma manera debido a la naturaleza de la enseñanza en estos niveles donde se busca trabajar mucho con elementos manipulables físicamente, mediante la intuición, y donde los aspectos de definición y teoría ocupan un lugar menor. Sin embargo, sí domina la dirección "Ejemplo->Práctica Rutinaria".

El estilo de lección que se sugiere en este currículo se fundamenta en varias fuentes. En primer lugar, en la experiencia e investigación que se han llevado a cabo en Costa Rica. Hay una coincidencia en que la acción de aula en el país se concentra en procedimientos rutinarios con escaso trabajo en el desarrollo de capacidades cognitivas superiores (Programa Estado de la nación, 2011; SERCE, 2008; Chaves Esquivel et al, 2010). Se trata de un estilo de lección que no motiva el interés estudiantil, debilita condiciones centrales para que se potencie la construcción de los aprendizajes. Ruiz, Barrantes y Gamboa (2009) proponen precisamente una formación docente en sintonía con características de una lección distinta a la que se desarrolla mayoritariamente en las aulas costarricenses.

En segundo lugar, se sustenta en las ideas de la OECD en el marco teórico de las pruebas PISA, los planteamientos teóricos de la corriente de Educación Matemática Realista (EMR) iniciada hace más de 30 años por H. Freudenthal (1973, 1983, 1991) y que fundamentan la acción educativa en Holanda desde hace varias décadas, en la amplia experiencia exitosa de Japón, así como en algunos resultados de investigación de la escuela de didáctica de las matemáticas en Francia.

La OECD en PISA propone un enfoque que:

> (…) contrasta con el concepto **tradicional** de las matemáticas escolares, a menudo más limitado. En los centros de enseñanza, el contenido matemático se enseña y evalúa frecuentemente de forma que se abstrae de los contextos reales, por ejemplo, a los alumnos se les enseñan técnicas de aritmética y luego se les presenta una operación aritmética para que la completen; se les enseña a resolver un determinado tipo de ecuaciones y luego se les presentan ecuaciones similares para que las resuelvan; se les enseñan las propiedades y relaciones geométricas y luego se les pide que demuestren un teorema. Una vez aprendidos los conceptos en cuestión, se les suele pedir que resuelvan problemas matemáticos inventados que exigen la aplicación de dicho conocimiento. Las matemáticas requeridas son, por lo general, evidentes. **Puede que los alumnos dominen las técnicas requeridas o no. Probablemente no se presta la atención suficiente a la utilidad de las matemáticas en el mundo real.** (OECD, 2005, p. 38). Énfasis añadido.

En el marco teórico para las pruebas comparativas internacionales se declara un enfoque de problemas en contextos reales:

> La intención es promover un enfoque de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que haga especial hincapié en los procesos asociados al planteamiento de problemas en contextos reales, procurando que dichos problemas adopten una forma apta para la aplicación de métodos matemáticos, que se utilice el conocimiento de las matemáticas para resolverlos y que se evalúe su solución en el contexto del problema original. Si los alumnos aprenden a hacerlo así, estarán mejor preparados para utilizar sus conocimientos y habilidades matemáticas durante toda su vida; serán competentes en matemáticas. (OECD, 2005, p. 38).

En segundo lugar, esta organización recoge también ideas expresadas en la perspectiva de la EMR, que es el sustrato teórico de la forma como se enseña matemáticas en Holanda desde hace muchos años (país con indicadores excelentes en todas las pruebas internacionales). Se trata de una larga trayectoria en el diseño instruccional para la enseñanza de las matemáticas (Treffers, 1987; Cobb, Gravemeijer, & Yackel, 2011, pp. 75-82). La influencia de estos planteamientos ha trascendido Holanda, se han adoptado en varias partes del mundo y constituyen precisamente un referente teórico central de la OECD en las pruebas PISA. EMR se separa de lo que considera un enfoque "mecanicista" de desarrollar la enseñanza:

trabajar las matemáticas en abstracto (desnudas de contexto) para luego -en el mejor de los casos- aplicar lo aprendido en problemas reales: “en lugar de empezar con ciertas abstracciones o definiciones que serán aplicadas luego, uno debe empezar con contextos ricos que demanden organización matemática o en otras palabras contextos que pueden ser matematizados” (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000, p. 5). En EMR los problemas contextualizados son fuente para el proceso de aprendizaje. Trabajando con esos problemas se desarrollan los conceptos e instrumentos matemáticos y el entendimiento. Hay un punto de partida: las y los estudiantes no se consideran receptores pasivos de matemáticas ya hechas sino como participantes activos del proceso educativo. De igual manera:

> Es importante: ofrecer oportunidades para compartir sus estrategias e invenciones entre ellos. Escuchando lo que otros descubren y discutiendo esos hallazgos, los estudiantes pueden obtener ideas para mejorar sus estrategias. Más aun, la interacción puede evocar reflexión que permite a los estudiantes alcanzar un nivel más alto de comprensión.
>
> (…) los estudiantes necesitan espacio para construir sus ideas e instrumentos matemáticos. Para hacer eso, los docentes deben proveer a los estudiantes con el ambiente de aprendizaje en el cual este proceso de construcción puede emerger. (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000, p. 5-7).

Se propone en EMR una forma de organización de la lección que se separa del estilo tradicional que se ha señalado en este currículo (teoría->ejemplo->práctica-> ejercicio contextualizado) y propone otra en que se invierte el esquema: se parte de problemas, se brinda espacio a las y los estudiantes para elaborar y construir sus estrategias y soluciones, se realiza una socialización de los resultados. Es un estilo que posee gran convergencia con la organización de la lección japonesa. La diferencia reside en que para EMR se enfatizan problemas de partida reales o imaginados por el estudiante de esa forma, mientras que en el caso de Japón se ha favorecido el uso de los problemas abstractos (aunque se están dando cambios en los últimos años). En este currículo se beneficia el planteo de problemas en contextos reales pero se proponen también abstractos como relevantes.

En tercer lugar, la organización dominante de la lección en Japón constituye un importante influjo para la propuesta de enfoque que se sugiere. Ésta ha sido ampliamente documentada. Ruiz (2011), por ejemplo, realiza una amplia comparación de los resultados de tres estudios comparativos internacionales realizados con videos por TIMSS en 1995 y 1999, y por un grupo independiente desde el 2005 encabezado por D. Clarke, C. Keitel, Y. Shimizu, E. Jablonka, J. Emanuelsson y I.A.C. Mok. Estos estudios condensaron importantes resultados sobre el desarrollo de las lecciones, en particular sobre Japón (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006; Neubrand, 2006; Shimizu, 2006 y 2009; Stigler y Hiebert, 1999, 2004). Es posible observar variaciones de estos cuatro pasos e incluso realizar la introducción de otros, pero de manera general se consigna una forma de organizar la lección donde se incluyen estos 4 momentos sugeridos por este currículo. Esta organización de la lección es resultado y constituye fundamento de lo que se denomina “estudios de las lecciones”, un mecanismo poderoso para el desarrollo profesional que se realiza en Japón y que se ha expandido a muchos países. Este componente ha sido central en un sistema educativo que exhibe niveles de éxitos muy importantes en todas las pruebas comparativas internacionales y ha influenciado muchas experiencias en el mundo. Con Ruiz (2011) se valora este esquema de organización como una estrategia exitosa que condensa de manera muy práctica en la gestión de aula el propósito principal de la resolución de problemas: enseñar las matemáticas a través de los problemas.

Una cuarta fuente del estilo de organización de las lecciones que se sugiere lo constituye la teoría de las situaciones didácticas TSD, elaborada por G. Brousseau desde la década de los sesenta del siglo pasado y extendida por varios investigadores principalmente francófonos. Es una teoría que posee una gran influencia y aceptación en España, Francia y en toda América Latina. En esa teoría se propone la noción de situación, que en esencia es:

> … un sistema de relaciones entre algunos estudiantes, un docente y algún conocimiento matemático. El aprendizaje de los estudiantes resulta de interacciones que se dan dentro de estos sistemas y es altamente dependiente de las características de ellos. La teoría busca entender estas relacio-

nes y determinar las condiciones para el funcionamiento óptimo de ellos. (Artigue & Houdement, 2007).

Se trata de una teoría que busca dar un modelo de lo que es la acción de aula y en ese sentido es sobre todo un instrumento de investigación (no de diseño curricular), aunque propone algunos lineamientos para que ésta sea adecuada e incluso una estrategia: la ingeniería didáctica (Cf. Artigue, Douady, Moreno & Gómez,1995). En la situación didáctica las y los estudiantes pueden lograr o construir aprendizajes, y aquí se subraya la existencia de momentos en que el estudiante debe enfrentarse solo al problema (sin intervención del docente en cuanto a la solución del mismo): "situaciones adidácticas". Éstas son esenciales para el aprendizaje y deben ser provocadas por el docente y aceptadas por el estudiante (un proceso que denominan la "devolución"). Otro momento relevante es lo que Brousseau (1997) llama "institucionalización", cuando la docente "… define las relaciones que se pueden dar entre el comportamiento "libre" del estudiante o su producción con el conocimiento cultural o científico y el proyecto didáctico: ella brinda una forma de "lectura" de estas actividades y de darles un estatus." (p. 56). Es una etapa que "cierra" la situación didáctica. Estos dos elementos se consideran en este currículo como muy importantes.

La situación didáctica es un concepto más general que el problema, lo incluye, refiere a toda la actividad del aula (Brousseau, 2006).

Como con toda teoría, se puede aceptar algunos de sus planteamientos y otros no. Por ejemplo, en este caso se coincide con Radford (2008) en cuanto a que dentro de esta teoría se dan varias asunciones: existe una familia de situaciones que corresponden a cada pieza de conocimiento matemático, la que se denomina situación fundamental; se asume que el sujeto (epistémico, no concreto) construye de una manera *óptima* los conocimientos para resolver el problema específico planteado en la situación didáctica (esta construcción se ve como una adaptación cognitiva a circunstancias –en el sentido constructivista), se asume que hay una matemática establecida con la que el sujeto se relaciona, y que sin la fase autónoma no hay aprendizajes. En este currículo:

- Se acepta la relevancia de la fase autónoma (que se denomina "independiente") para los aprendizajes. Sin embargo se posee una visión amplia de lo que pasa en el aula: no es sólo un asunto individual cognitivo, el estudiante puede aprender también por el concurso del docente y de los compañeros del grupo (pesa lo que Vygotsky (1987) llama "zona próxima de desarrollo"). Por eso la acción del docente (no sólo inhibiéndose de dar soluciones) debe jugar un papel central, para impedir que esa fase pueda terminar en un fracaso educativo si el estudiante no es suficientemente activo; y de igual manera es esencial el influjo de la clase (los compañeros).
- No se afirma aquí que todo pedazo de conocimiento matemático sea susceptible de tener una situación fundamental, lo que significa que no se plantea proporcionarlas en todos los tópicos matemáticos de este currículo (y no sólo porque no se pueda, en ocasiones se podría pero otras consideraciones logísticas o pedagógicas lo inhiben).
- No se visualizan aquí las matemáticas como un cuerpo rígido con el que dialoga un sujeto epistémico, las matemáticas con constructos sociales e históricos. En la TSD hay un conocimiento "sabio" dado que se busca transmitir a un sujeto que es epistémico (no concreto). Con fuerza, en el sustrato de este currículo se le da relevancia al sujeto concreto metido en contextos socioculturales, y se valoriza la socialización estudiantil tanto en la construcción de soluciones o estrategias como en la contrastación de las mismas como factores para constituir aprendizajes. Por eso se subraya en este currículo el tercer paso en la organización de la lección.

La lección japonesa y los planteamientos de la EMR, PISA, TSD nutren un enfoque distinto al tradicional (teoría->ejemplo->práctica-> ejercicio contextualizado). EMR no acepta de ese estilo ni siquiera aquellas situaciones donde se aplican matemáticas en verdaderos problemas contextualizados (no sólo ejercicios); propone una dirección contraria, igual que PISA. Brousseau, por su parte, considera que mucho de ese estilo tradicional está lleno sólo de las "institucionalizaciones" y que carecen de esas fases decisivas "adidácticas". En todos los casos se plantea crear "medios" para la producción (o reinvención) de conocimientos: problemas que despierten actividades cognitivas y brinden espacios a estudiantes para el desarrollo de esas actividades. EMR, PISA y la lección japonesa subrayan la contrastación social (en grupos o toda la clase) de los resultados de esas actividades. TSD y la lección japonesa enfatizan las relaciones de validación con la cultura matemática.

Entonces, se podría decir que en este currículo la sugerencia de organización de las lecciones, con base en los aportes de las y los investigadores y docentes costarricenses, asume el enfoque de PISA y usa como base la experiencia japonesa aunque con algunos énfasis nutridos por EMR y TSD:

1. Problema: se asume la relevancia de construir aprendizajes a través de la resolución de problemas, se promueve aquellos en contextos reales (EMR + PISA), se acepta que debe haber algún nivel de “reinvención” de los tópicos matemáticos en juego (EMR) y se busca que las matemáticas que intervendrán respondan de manera óptima al problema (TSD), pero hasta donde sea posible.
2. Trabajo estudiantil independiente: se subraya la importancia para el desencadenamiento de acciones cognitivas y el aprendizaje del espacio que debe darse al trabajo autónomo (EMR + TSD + lección japonesa), se acepta que el docente no debe obstaculizar esa autonomía (TSD) pero se acepta que en la práctica educativa real la acción del grupo y del docente contribuyen al aprendizaje (no es inadecuado para aprender que se debilite la autonomía en algunos casos).
3. Comunicación y contrastación: se propone como fase esencial para el aprendizaje (EMR + lección japonesa).
4. Clausura o cierre: un momento importante para “institucionalizar” los conocimientos (TSD + lección japonesa) y conectar con la cultura matemática.

Este estilo materializa los fines de la política educativa costarricense, que subrayan la construcción de los aprendizajes, puesto que una manera de asumir los mismos es precisamente ofrecer desafíos interesantes en la clase, fomentar la acción estudiantil en el diseño y realización de estrategias, en la contrastación y comunicación colectivas de éstas así como fortalecer una intervención docente inteligente, estimulante y apropiada.

Bibliografía y referencias

Agüero, M. (2011, 21 de marzo). ICE busca socio para levantar gigante energético en Reventazón. *La Nación.* Recuperado de http://www.nacion.com/2011-03-21/ElPais/NotasSecundarias/ElPais2718677.aspx

Agüero, M. (2011, 27 de julio). Pasajes de autobuses subirán entre 5 y 270 en todo el país. *La Nación.* Recuperado de http://www.nacion.com/2011-07-27/ElPais/pasajes-de-autobuses-subiran-entre--5-y--270-en-todo-el-pais.aspx

Agüero, M. (2012, 8 de marzo). Acumulación de ajustes provoca alzas mayores a ₡100 en gasolinas. *La Nación.* Recuperado de http://periodico.nacion.com/doc/nacion/la_nacion-08marzo2012/2012030801/4.html?key=07b3cc706b369a533a1cb1315ecc5994#4

Alcázar, A. (2007). *Historia de la probabilidad*. Recuperado el 7 de abril del 2012 de http://web.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Historia%20de%20la%20probabilidad.pdf

Alfaro, C. & Barrantes, H. (2008). ¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza mediacostarricense. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 4, 83-98.

Alpízar, M. (2007). Herramientas tecnológicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 3, 99-118.

Araya, J. A. & Sequeira, R. (2008). Resolución de problemas en los planes de estudio de las universidades formadoras de profesionales en la enseñanza de la matemática en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 3, Número 4, 139-155.

Artigue, M. (2011). La educación matemática como un campo de investigación y como un campo de práctica: Resultados, Desafíos. Conferencia presentada en la *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática,* junio 2011, Recife, Brasil. Recuperado el 9 de marzo del 2012 de http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/?info_type=home&lang_user=br

Artigue, M. & Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *ZDM Mathematics Education* 39: 365–382. DOI 10.1007/s11858-007-0048-x

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (Eds.).(1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Asociación Demográfica Costarricense. (2009). *Se mantiene alta tasa de prevalencia de uso de métodos anticonceptivos.* Recuperado de http://www.adc-cr.org/adc_tasa_prevalencia.php

Australian Council for Educational Research (2011). *PISA 2009: Plus Results*. Recuperado de https://mypisa.acer.edu.au/images/mypisadoc/acer_pisa%202009%2B%20international_1.pdf

Ball, D., Hill, H. & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching. Who knows mathematics well enough for teach third grade, and how can we decide? *American Educator*. 29 (3), 14-17, 20-22, 23-46.

Banco Mundial. (2009, junio). Competitividad en Costa Rica. Recuperado de http://siteresources.worldbank.org/INTCOSTARICAINSPANISH/Resources/CostaRicaCompetitiveness.pdf

Barba, C. *Actividades de conteo en Nivel inicial*. Uruguay Educa. Recuperado de http://phobos.xtec.es/sgfprp/resum.php?codi=908

Barrantes, H. (2008). Creencias sobre las Matemáticas en estudiantes de la enseñanza media costarricense. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *4*, 45-69.

Bases de datos. (s.f.). Centro Centroamericano de Población. Recuperado de www.ccp.ucr.ac.cr

Bases de datos. (s.f.). Instituto Nacional de Estadística y Censos. Recuperado de www.inec.go.cr

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Granada, España: Grupo de Educación Estadística. Granada, España: Universidad de Granada.

Batanero, C. & Godino, J. (2012). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Granada, España: Universidad de Granada.

Bauersfeld, H. (1994). "Language games" in the mathematics classroom: their function and their effects, en P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Begg, A. (1997). Some emerging influences underpinning assessment in statistics. En Gal I. y Garfield. J.B. (Ed.), *The Assessment Challenge in Statistics Education (*pp. 17-26). Amsterdam: IOS Press.

"Bioestadística: Métodos y aplicaciones". Recuperado el 7 de abril del 2012 de www.bioestadistica.uma.es/libro/node49.htm.

Blank, J. (2006). *Alimentación sana v/s comida chatarra.* Recuperado de: http://triunviratumltda.blogspot.com/2006/06/alimentacin-sana-vs-comida-chatarra.html

Boyer, C. (1992). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad.

Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las Matemáticas? (Primera parte). *Enseñanza de las Ciencias, 8*(3), 259- 267.

Brousseau, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las Matemáticas? (Segunda Parte). *Enseñanza de las Cienci*as, *9*(1), 10- 21.

Brousseau, G. (1998). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.*Dordrecht, The Nedherlands: Kluwer.

Brousseau, G. (2006). Mathematics, didactical engineering and observation. Conferencia presentada en el PME 30, Praga, Julio 2006. Descargado de http://www.math.washington.edu/*warfield/Didactique.html.

Cai, J. & Lester, F. (2010). Why is Teaching With Problem Solving Important to Student Learning? NCTM: Reston. A Research Brief enviado el 8 de abril del 2010.

Calderón, K. (2007). *La didáctica hoy. Concepciones y aplicaciones*. San José, Costa Rica: EUNED.

Calvo, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Revista Educación*, 32(1), 123- 138. Recuperado de http://redalyc.uaemex.mx/pdf/440/44032109.pdf

Campbell, J. I. D. (Ed.). (2005). *Handbook of mathematical cognition*. New York: Psychology Press.

Caro, R. & García, F. (2011, abril). Historias de matemáticas: ¡Qué historia esto de la estadística! *Revista de Investigación e Innovación Educativa "Pensamiento Matemático"*, Recuperado de http://www.oei.es/cienciayuniversidad/spip.php?article2118

Casado, S. (n.d.). *Los sistemas de numeración a lo largo de la historia*. Recuperado de http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/SISTNUM.html#E

Charles, R. & Silver, E. (Eds.). (1989). *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Chavarría, J. & Chaves Barboza, E. (2008). Desarrollo histórico y percepción del proceso de implementación del sistema internacional de unidades en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 4*, 99-123.

Chaves Esquivel, E. (2007a). *Una valoración sobre la enseñanza de la Estadística en los colegios académicos diurnos: regiones educativas de San José, Alajuela, Heredia, Pérez Zeledón y Upala*. (Tesis inédita de Doctorado) Universidad Estatal a Distancia (UNED), San José, Costa Rica.

Chaves Esquivel, E. (2007b). Inconsistencia entre los programas de estudio y la realidad en el aula en la enseñanza de la estadística de secundaria. *Actualidades Educativas en Educación*, 7 (3), Recuperado de http://revista.inie.ucr.ac.cr/.

Chaves Esquivel, E. & Barrantes, H. (2011). La necesidad de reformar el currículo escolar de matemática en Latinoamérica: La experiencia de Costa Rica. Ponencia presentada en la *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Junio 2011, Recife, Brasil. Descargada el 9 de marzo del 2012 de http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/?info_type=home&lang_user=br.

Chaves Esquivel, E., Castillo, M., Chaves Barboza, E., Fonseca, J. & Loría R. (2010). *La enseñanza de* las Matemáticas *en la secundaria costarricense: entre la realidad y la utopía*. Ponencia preparada para el Tercer Informe Estado de la Educación. San José, Programa Estado de la Nación.

Chaves Esquivel, E., Espinoza, J. & Espinoza, J. (2009). La enseñanza de la Estadística por medio de la resolución de problemas. *ALME*, *22*, p. 683-692.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique*. Paris: La Pensé e Sauvage.

Clarke, D., Emanuelsson, J., Jablonka, E. & Mok, I. (Eds.). (2006). *Making connection: Comparing mathematics classrooms around the world.* The Netherlands: Sense Publishers.

Clarke, D., Keitel, C. & Shimizu, Y. (Eds.). (2006). *Mathematics classrooms in twelve countries: the insider's perspective.* The Netherlands: Sense Publishers.

Cobb, P, Gravemeijer, K., & Yackel, E. (2011). Chapter 6. Introduction. En E. Yackel, K. Gravemeijer, & A. Sfard, A. Eds.). *A Journey in Mathematics Education Research. Insights form the Work of Paul Cobb*. Dordrecht, The Nedherlands: Springer.

Cobb, P. (1983). The Constructivist Researcher as Teacher and Model Builder.*Journal for Research in Mathematics Education*, 14, (83-94).

Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher*, 23(7), 13-20.

Cobb, P. (1998). Learning from Distributed Theories of Intelligence. *Mind, Culture, and Activity*. 5. Pp.187-2004.

Cobb, P. (2011). Chapter 2. Introduction. En E. Yackel, K. Gravemeijer, & A. Sfard. (Eds.). *A Journey in Mathematics Education Research. Insights form the Work of Paul Cobb*. Dordrecht, The Nedherlands: Springer.

Confrey, J. & Kazak, S. (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. En A. Gutiérrez & P. Boero, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Rotterdam, The Nedherlands: Sense Publishers, (pp. 305-345).

Consejo superior de Educación de Costa Rica (1994). Política educativa hacia el Siglo XXI. Acuerdo tomado en la sesión Nº 82-94, el 8 de noviembre de 1994. Descargado de http://www.oei.es/quipu/costarica/politicaeducativasigloXXI.pdf

D'Ambrosio, U. (1997). Ethnomathematics and its address in the history and pedagogy of mathematics. En Powell, A. B. & Frankenstein, M. (Eds.), *Ethnomathematics. Challenging Eurocentrism in Mathematics Education*, pp.13–24. Albany NY: State University of New York Press.

D'Ambrosio, U. (2007). Peace, social justice and ethnomathematics. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 1:25–34.

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. México : Limusa.

Dalakov, G. (2011, mayo 25). *The logarithms and rules*. Recuperado de http://historycomputer.

com/CalculatingTools/logarythms.html

Davis, R.B. (1989). The culture of mathematics and the culture of schools. *Journal of Mathematical Behavior*, 8, pp.143-160.

De Faria, E. (2006). Control en la resolución de problemas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *1*, 77-86.

De Faria, E. (2008a). Creencias y matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,4*, 9-27.

De Faria, E. (2008b). Resolución de problemas en los programas de estudio de matemática del Ministerio de Educación pública de Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 4*, 157-173.

De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 19-58. Recuperado de http://www.rieoei.org/rie43a02.pdf

Descartes, R. (2008). *La géométrie* [Editado por Hermann, A. Versión de 1886]. Recuperado de http://www.gutenberg.org/ebooks/26400/26400-pdf.pdf, doi: ISO-8859-1

Dubinsky, E. (1992). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-124). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

"*Educar en valores: Respeto a la diversidad*". (2012)**.** Recuperado de http://www.guiainfantil.com/1225/educar-envalores-respeto-a-la-diversidad.html

"El ascenso durante el buceo, salir del agua". (2010). Recuperado de http://buceaconmigo.com/El+ascenso+durante+el+buceo%2C+salir+del+agua_5_42_9_98_es.html

English, L., Lesh, R., & Fennewald, T. (2008). *Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development*. Presentado al 11th International Congress on Mathematical Education, Julio 6-13 de 2008 en Monterrey, México.

Enzensberger, H. (1998). *El diablo de los números.* Madrid: Ediciones Siruela.

Ernest, P. (2011). *The psychology of learning mathematics: The cognitive, affective and contextual domains of mathematics education*. Saarbrûcken, Alemania: Lambert Academic Publishing.

Euclides. (1991). *Los elementos* [Traducción de María Luisa Puertas] . Madrid: Gredos.

Even, R. & Ball, D. (2008).*The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI Study*. New York: Springer.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Figueroa, N. & Jiménez, K. (2010). *Primer informe de resultados. Examen de Diagnóstico en Matemática, DiMa.* Recuperado de http://www.diagnostico.emate.ucr.ac.cr/sites/diagnostico.emate.ucr.ac.cr/files/PrimerInformeDiMa2010.pdf

Finnish National Board of Education. (2004). *National core curriculum for Upper Secondary schools 2003.*Recuperado de http://www.oph.fi/english/publications/2003/National_Core_Curriculum_for_Upper_Secondary_Schools_2003

Finnish National Board of Education. (2004). *National core curriculum for Basic Education 2004*. Recuperado de http://www.oph.fi/english/publications/2009/national_core_curricula_for_basic_education

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Boston, USA: Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Nedherlands: Reidel

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, The Nedherlands: Reidel

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*, Dordrecht: Kluwer Academic Publ.

Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 3, 11-44.

Gardner, H. (1995). *Inteligencias múltiples: La teoría en la práctica*. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica, S. A.

Godino, J. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para maestros: Proyecto Edumat-Maestros.* Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/.

Gravemeijer, K. (1997). Instructional design for reform mathematics education. En M. Beishuizen, K.P.E. Gravemeijer, & E. C. D. M. van Lieshout (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 13-34). Utrecht: Technipress, Culemborg.

Gravemeijer, K. (2010). Preamble: from models to modeling. En Gravemeijer, K., Lehrer, R., van Oers, B. & Verschaffel, L. (Eds.). *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education.* Dordrecht, The Nedherlands: Kluwer Academy Press. (pp.7-22).

Guedj, D. (2011). *El imperio de los números.* Blume, Barcelona.

Hernández, S. (2005, mayo - agosto). Historia de la estadística. *Revista de Divulgación Científica y Tecnológica de la Universidad Veracruzana*, *18*(2). Recuperado de http://www.uv.mx/cienciahombre/revistae/vol18num2/articulos/historia/index.htm.

Hiebert, J.; Gallimore, R.; Garnier, H.; Givvin, K.; Hollingsworth, H.; Jacobs, J.; Chui, A.; Wearne, D.; Smith, M.; Kersting, N.; Manaster, A.; Tseng, E.; Etterbeek, W.; Manaster, C.; Gonzales, P. & Stigler, J. (2003). *Teaching Mathematics in Seven Countries. Results From the TIMSS 1999 Video Study*. EUA: US Department of Education, National Center for Education Statistics.

"Historia de las Estadísticas". (2008). Recuperado de http://www.estadisticaparatodos.es/historia/histo_esta.html.

Loaiza, V. (2012, 12 de marzo). Sueldos base del sector público se disparan por pluses salariales. *La Nación.* Recuperado de http://periodico.nacion.com/doc/nacion/la_nacion-12marzo2012/2012031201/?key=ed1cd76d5f097bbc3e140aaa6ca2708f#8

"Los cambios en el medio natural". Recuperado de http://recursos.cnice.mec.es/biosfera/alumno/4ESO/MedioNatural2/contenido2.htm

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada, España: Universidad de Granada. Tesis doctoral. Recuperada de http://0-hera.ugr.es.adrastea.ugr.es/tesisugr/18504188.pdf

Mammana, C. & Villani, V. (Eds.). (1998). *Perspective son the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI Study.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Press.

Meza, L., Agüero, E. & Calderón, M. (2011). *La teoría en la práctica educativa: una perspectiva desde la experiencia de docentes graduados/as de la carrera "Enseñanza de la matemática asistida por computadora"*. Recuperado de http://www.tec.ac.cr/sitios/Docencia/matematica/Documents/Informe%20Final-documento%201-formato%20VIE-Meza-Aguero-Calderon-2011.pdf

"Midiendo longitudes". Recuperado de: http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/081001_midiendo_longitudes.elp/primeras_unidades_de_medida.html

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Canadá. (2009). *Progression des apprentissages mathématique: Quebec, Canadá.* Recuperado de http://www.mels.gouv.qc.ca/progression/mathematique

Ministère de l'Éducation nationale de la France. (2008, agosto). Programmes du collège. Programmes del'enseignement de mathématiques. *Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008*. París, Francia: autor.

Ministère de l'Éducation nationale de la France. (2008, junio). Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire. *Le B.O.Bulletin officiel du Ministère de l'education nationale et du Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche. N° 3 du 19 juin 2008*. París, Francia: autor.

Ministério da Educaçao do Portugal. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Portugal: autor.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2003). *La revolución educativa. Estándares básicos dematemáticas y lenguaje. Educación básica y media.* Colombia: autor.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Colombia: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1995a). *Programa de estudios. Primer ciclo. Matemáticas*. Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1995b). *Programa de estudios. Segundo ciclo. Matemáticas.* Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1995c). *Programa de estudios. Tercer ciclo. Matemáticas.* Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1996). *Programa de estudios. Educación Diversificada. Matemáticas.* Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2001a). *Programa de estudios. Educación Diversificada. Matemáticas.* Costa Rica: autor.

Loaiza, V. (2012, 12 de marzo). Sueldos base del sector público se disparan por pluses salariales. *La Nación.* Recuperado de http://periodico.nacion.com/doc/nacion/la_nacion-12marzo2012/2012031201/?key=ed1cd76d5f097bbc3e140aaa6ca2708f#8

"Los cambios en el medio natural". Recuperado de http://recursos.cnice.mec.es/biosfera/alumno/4ESO/MedioNatural2/contenido2.htm

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada, España: Universidad de Granada. Tesis doctoral. Recuperada de http://0-hera.ugr.es.adrastea.ugr.es/tesisugr/18504188.pdf

Mammana, C. & Villani, V. (Eds.). (1998). *Perspective son the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI Study.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Press.

Meza, L., Agüero, E. & Calderón, M. (2011). *La teoría en la práctica educativa: una perspectiva desde la experiencia de docentes graduados/as de la carrera "Enseñanza de la matemática asistida por computadora"*. Recuperado de http://www.tec.ac.cr/sitios/Docencia/matematica/Documents/Informe%20Final-documento%201-formato%20VIE-Meza-Aguero-Calderon-2011.pdf

"Midiendo longitudes". Recuperado de: http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/081001_midiendo_longitudes.elp/primeras_unidades_de_medida.html

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Canadá. (2009). *Progression des apprentissages mathématique: Quebec, Canadá.* Recuperado de http://www.mels.gouv.qc.ca/progression/mathematique

Ministère de l'Éducation nationale de la France. (2008, agosto). Programmes du collège. Programmes del'enseignement de mathématiques. *Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008*. París, Francia: autor.

Ministère de l'Éducation nationale de la France. (2008, junio). Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire. *Le B.O.Bulletin officiel du Ministère de l'education nationale et du Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche. N° 3 du 19 juin 2008*. París, Francia: autor.

Ministério da Educaçao do Portugal. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Portugal: autor.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2003). *La revolución educativa. Estándares básicos dematemáticas y lenguaje. Educación básica y media.* Colombia: autor.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Colombia: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1995a). *Programa de estudios. Primer ciclo. Matemáticas*. Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1995b). *Programa de estudios. Segundo ciclo. Matemáticas.* Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1995c). *Programa de estudios. Tercer ciclo. Matemáticas.* Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1996). *Programa de estudios. Educación Diversificada. Matemáticas.* Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2001a). *Programa de estudios. Educación Diversificada. Matemáticas.* Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2001b). *Programa de estudios. Tercer ciclo. Matemática.* Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2005a). *Programa de estudios. Educación Diversificada. Matemáticas.* Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2005b). *Programa de estudios. Tercer ciclo. Matemáticas.* Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2009a). *Informe Preliminar Pruebas Nacionales Diagnósticas de Segundo Ciclo (2007-2009).* Resumen ejecutivo. San José, Departamento de Evaluación Académica y Certificación, Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad, Ministerio de Educación Pública.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2010). *Alumnas embarazadas en la Educación Tradicional 2009*. Departamento de Análisis Estadístico, Dirección de Planificación Institucional. Boletín 01-10.

Ministry of Education of Singapore (2006a). *Mathematics syllabus primary: Singapore*. Recuperado de http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences

Ministry of Education of Singapore (2006b). *Mathematics syllabus secondary: Singapore*. Recuperado de http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences

Monge, F. (2012). Precios sugeridos. Feria del agricultor. Recuperado de http://web.cnp.go.cr/index.php/informacion-de-mercados/precios-nacionales-semanales/semanales/ferias-delagricultor

Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Ruddock, G.J., O'Sullivan, C.Y. & Preuschoff. C. (2009). *TIMSS 2011: Assessment frameworks*. Boston, EUA: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA), TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

"Nanotecnología: ¿Qué es la Nanotecnología?". Recuperado el 7 de abril del 2012 de http://www.euroresidentes.com/futuro/nanotecnologia/nanotecnologia_que_es.htm.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989a*). Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA, EUA: autor

National Council of Teachers of Mathematics. (1989b). *Historical topics for the mathematics classroom.* Second Edition. Reston, VA, EUA: autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática* [Traducción de José María y Jesús Casado]. Sevilla: Sociedad Andaluza para la Educación Matemática "THALES".

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática* [Traducción de Manuel Fernández Reyes]. Sevilla: Sociedad Andaluza para la Educación Matemática "THALES".

National Council of Teachers of Mathematics. (2006a). *Curriculum focal points for prekinder garten through grade 8 mathematics.* Reston, VA: autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (2006b). *Historical topics for the mathematics classroom*. Reston: autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (2007). *Perspective son the design and development of school mathematics curricula.* Reston, VA: autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (2009). *Focus in high school mathematic: Reasoning and sense making.* Reston, VA: autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (2010). *Mathematics curriculum: Issues, trends, and future directions.* Reston, VA: autor.

National Council of Teachers of Mathematics (1980). An agenda for action: Recommendations for school mathematics in the 1980s. Reston, VA: The Author.

National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers . (2012). Common Core State Standards. Washington D.C: National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers. Sitio web http://www.corestandards.org/the-standards Recuperado el 2 de marzo del 2012.

National Research Council of the United States. NRC (2003). *How students learn: History, math and science in the classroom.* Washington, DC: National Academy Press.

NBE (1994). *Framework Curriculum for the Comprehensive School 1994*. National Board of Education: Helsinki: Valtion painatuskeskus.

NCTM (2010). *Making it happen*. Reston, VA, Estados Unidos: autor.

Niss, M. (2011). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education.*Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 9,* 13-24.

Niss, M. & Jensen, T. H. (eds). (2002). *Kompetencer og matematiklæring – Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*, number 18 in *Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie*, The Ministry of Education, Copenhagen, Denmark. Cf. http://nyfaglighed.emu.dk/kom.

Niss, M. & Jensen, T. H. (eds). (2011). *Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. English edition.

Observatorio Vulcanológico y Sismológico de Costa Rica. (2012). *Sismos reportados en el 2012*. Recuperado el 7 de abril del 2012 de http://www.ovsicori.una.ac.cr/sismologia/sentidos/ssentido/SismosAnual.php

OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. España: Santillana Educación S.L.

OECD (2010). *PISA 2012 Mathematics framework*. Descargado de http://www.oecd.org/dataoecd/8/38/46961598.pdf el 6 de marzo del 2012.

OECD. (2003). *The PISA 2003 assessment framework – mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills.* Paris: OECD.

OECD. (2006). *Assessing scientific, reading and mathematical literacy a framework for PISA 2006.* París: autor.

OECD. (2010). *Pisa 2009 results: what students know and can do – student performance in reading, mathematics and science* [Vol. I]. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1787/9789264091450-en doi: 10.1787/9789264091450-en

“Otro pastel de limón”. Recuperado el 7 de abril del 2012 de http://www.arecetas.com/receta/OTRO_PASTEL_DE_LIMON/52163/

Oviedo, J. & Méndez, Z. (1991). Hacia una nueva metodología en la enseñanza de la matemática. *Ciencia y Tecnología en la construcción del futuro*. Recuperado de http://cimm.ucr.ac.cr/aruiz/libros/Ciencia%20y%20Tecnologia/EducacionyCiencias/JennyOviedoZayraMendez.html#3

Pehkonen, E. (2008). Some background factors for the Finnish PISA results in mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 7 (1).

Pehkonen, E.. Hannula, M. & Björkqvist, O. (2007). Problem solving as a teaching method in mathematics education En Pehkonen, E., Ahtee, M. & Lavonen, J. (eds). *How Finns Learn Mathematics and Science*. Sense Publishers: Rotterdam/Taipai.

Perero, M. (1994). *Historia e historias de Matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Piaget, J. (1950). *The Psychology of Intelligence*. New York: Routledge.

Piaget, J. (1970). *Genetic Epistemology*. New York: Columbia University Press.

Piaget, J. (1973). *To understand is to invent*. New York: Grossman.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1974). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris, Francia: Presses Universitaires de France.

Pierce, R. (2008, abril 08). *Razón de oro*. Recuperado de http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/razonoro.html

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Poveda, R., & Murillo, M. (2003). Las nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. *UNICENCIA*, *20*(1), 125-133.

Programa Estado de la Nación. (2008). *Estado de la región en desarrollo sostenible, un informe desde Centroamérica y para Centroamérica.* San José, Costa Rica: autor.

Programa Estado de la Nación. (2010). *Decimosexto informe estado de la nación en desarrollo humano sostenible.* San José, Costa Rica: autor.

Programa Estado de la Nación. (2010*). El aterrizaje de los números: Propuesta didáctica para el abordaje de la Matemática aplicada a la realidad de Istmo Centroamericano. Segundo Ciclo.* San José, Costa Rica: autor

Programa Estado de la Nación. (2011). *Estado de la Educación 3.* San José, Costa Rica: Consejo Nacional de Rectores, Programa Estado de la Nación.

Programa Estado de la Nación*. Estadísticas ambientales.* Recuperado de http://www.estadonacion.or.cr/index.php/estadisticas/costa-rica/compendio-estadistico/estad-ambientales

Programa Estado de la Nación. *Panorama ambiental. Estado de la Región*. Recuperado de http://www.estadonacion.or.cr/images/stories/informes/region_004/cap02_demografico.pdf

Programa Estado de la Nación. *Panorama Demográfico. Estado de la Región*. Recuperado de http://www.estadonacion.or.cr/images/stories/informes/region_004/cap02_demografico.pdf

Quirós, J. (2010). *Contribución a una propuesta metodológica de la enseñanza de la Estadística en octavo año de la Enseñanza General Básica*. Tesis para optar al grado de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica.

Radford, L. (2008). Theories in Mathematics Education. A Brief Inquiry into their Conceptual Differences. Working Paper. Junio 2008. Preparado para el *ICMI Survey Team 7*. *The notion and role of theory in mathematics education research*. Recuperado de http://www.laurentian.ca/NR/rdonlyres/77731A60-1A3E-4168-9D3EF65ADBF37BAD/0/radfordicmist7.pdf

Refinadora Costarricense de Petróleo. (2012). *Precios vigentes de combustibles y asfaltos*. Recuperado el 7 de abril del 2012 de http://www.recope.go.cr/info_clientes/precios_productos/

Rico, L. & Lupiáñez, J. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Rodríguez, I. (2010, 5 de mayo). Costarricenses piden ambientes libres de humo de tabaco. *La Nación*. Recuperado de http://www.nacion.com/2010-05-31/AldeaGlobal/UltimaHora/AldeaGlobal2391509.aspx

Rolf, W.M. & Radford, L. (2011). *A Cultural-Historical Perspective on Mathematics Teaching and Learning*. Rotterdam: Sense Publishers.

Ruiz, A. (1995). *Historia de las Matemáticas en Costa Rica: Una introducción.* San José, Costa Rica: Edit. UCR, UNA.

Ruiz, A. (1999). *Geometrías no euclidianas*. San José, Costa Rica: EUCR.

Ruiz, A. (2000). *El desafío de las Matemáticas*. Heredia, Costa Rica: EUNA.

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las Matemáticas*. San José, Costa Rica: EUNED.

Ruiz, A. (2006). *Universalización de la educación secundaria y reforma educativa*. San José, Costa Rica: EUCRCONARE.

Ruiz, A. (2010). Conocimientos y currículo en la educación matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,6*, 107-141.

Ruiz, A. (2011). La lección de matemáticas a través de estudios internacionales con videos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*, Recuperado de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM

Ruiz, A. & Chavarría, J. (2003). Educación Matemática: *escenario histórico internacional y construcción de una nueva disciplina.* Revista *UNICIENCIA*, Vol. 20 Número 2 (2003). Heredia, Costa Rica: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional.

Ruiz, A., Barrantes, H. & Gamboa, R. (2009). *Encrucijada en la enseñanza de* las Matemáticas*: la formación de educadores.* Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Ruiz, D. Historia de la Estadística. Recuperado en junio del 2012 de http://www.eumed.net/cursecon/libreria/drm/1a.htm

Sao Paulo (Estado) Secretaria da Educaçao. (2010). *Curriculo do Estado de Sao Paulo: Matemática e suas tecnologías*. Sao Paulo, Brasil: SEE.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1991). On mathematics as sense making: An informal attack on the unfortunate divide of formal and informal mathematics. En J.F. Voss, D.N. Perkins & J.W. Segal (Eds.), Informal reasoning and education. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 311-343.

Schoenfeld, A. (2011). *How we think*. New York: Routledge.

Secretaría de Educación Pública de México (2011). *Proyecto de acuerdo por el que se establece la articulación de la educación básica*. México: autor.

Secretaría de Educación Pública de México. (2009). *Matemáticas I. Serie Programas de Estudio. Programa en validación.* México: autor.

Secretaría de Educación Pública de México. (2009). *Matemáticas II. Serie Programas de Estudio. Programa en validación.* México: autor.

Secretaría de Educación Pública de México. (2009). *Matemáticas III. Serie Programas de Estudio. Programa en validación.* México: autor.

Secretaría de Educación Pública de México. (2009). *Matemáticas IV. Serie Programas de Estudio. Programa en validación.*México: autor.

Sensevy, G. & Mercier A. (2007). *Agir ensemble. L'action conjointe du professeur et des élèves*. Rennes: Presses Universitaires de Rennes.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Sierpinska, A. & Kilpatrick, J. (Eds.). (1998). *Mathematics education as a research domain: a search for identity. An ICMI study*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Press.

Sierpinska, A. & Kilpatrick, J. (1998). Continuing the search. En A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 527-548). Dordrecht, The Nedherlands: Kluwer.

Soh, C. K. (2008). An Overview of Mathematics Education in Singapore. En Z. Usiskin & E. Willmore (Eds.). *Mathematics curriculum in Pacific Rim countries –China, Japan, Korea and Singapore.* USA: IAP Information Age Publishing Inc.

Sousa, D. A. (2008). *How the brain learns mathematics*. Thousand Oaks, California: Corwin Press.

Stacey, K., Chick, H. & Kendal, M. (2004).*The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1988). Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. En R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tahan, M. (1972). *El hombre que calculaba*. España: Ed. Verón.

Takahashi, A., Watanabe, T. & Yoshida, M. (2006*).Lower secondary school teaching guide for the Japanese course of study. Grades 7-9.* Madison, New Jersey, EUA: Global Education Resources, L.L.C.

Takahashi, A., Watanabe, T. & Yoshida, M. (2008).*English translation of the Japanese mathematics curricula in the course of study. Grades 1-9.* Madison, New Jersey, EUA: Global Education Resources, L.L.C.

Tellechea, E. (2002). *Notas para el taller de entrenamiento de la preselección.* Manuscrito publicado informalmente, Matemáticas, Universidad de Sonora, Sonora, México. Recuperado de http://www.mat.uson.mx/eduardo/entrspresel2002.pdf

Tobias, S. & Duffy, T.M. (Eds.). (2009). *Constructivist instruction: Success or failure*. New York: Routledge.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal an theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Un tercio de la humanidad podría contraer la nueva gripe en 2010. (2009, Mayo 7). *El Mundo*, Recuperado de http://www.elmundo.es/elmundosalud/2009/05/07/medicina/1241700820.html

UNESCO. (2008). *Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE): Los aprendizajes de los estudiantes de América Latina el Caribe*. Recuperado de http://unesdoc.unesco.org/images/0016/001606/160660s.pdf

Usiskin, Z. & Willmore, E. (Eds.) (2008). *Mathematics curriculum in Pacific Rim countries – China, Japan, Korea and Singapore.* USA: IAP Information Age Publishing Inc.

Valero, P. (2004). Socio-political perspectives on mathematics education. En P. Valero & R. Zevenbergen (Eds.), *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology* (pp. 5-23). Dordrecht, The Nedherlands: Kluwer Academic Publishers.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. *Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9*. Utrecht: Utrecht University.

Varona, P., Herrera, D., García, R., Bonet, M., Romero, T. & Venero, S. (2009, abril-junio). Mortalidad atribuible al tabaquismo en Cuba*. Revista Cubana de Salud Pública, 35*(2)*.* Recuperado dehttp://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_issuetoc&pid=0864-346620090002&lng=es&nrm=iso

Vásquez, A. (2012). *La discapacidad en América Latina*. Recuperado de http://es.scribd.com/doc/58562862/La-Discapacidad-En-America-Latina-Armando-Vasquez

Verschaffel, L., Greer, B. & y De Corte, E. (2010). Everyday knowledge and mathematical modeling of School Word Problems. En Gravemeijer, K., Lehrer, R., van Oers, B. & Verschaffel, L. (Eds.). *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education.* Dordrecht, The Nedherlands: Kluwer Academy Press.

von Glaserfeld, E. (1984). An introduction to radical constructivism. En P. Walzlawick: *The invented reality* (pp.17-40). New York: Norton.

von Glaserfeld, E. (1987). Learning as a constructive activity. En C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 3-189). Hillsdale, N. J.: Erlbaum.

von Glaserfeld, E. (1989). Constructivism in Education. En T. Huse & , T. N. Postlethwaite, *The International Encyclopedia of Education Supplementary Volume*, Oxford: Pergamon Press.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. London: The Falmer Press.

Vygotsky, L. (1978). *Mind and society: the development of higher mental processes.* Cambridge, Boston: Harvard University Press.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society*. London: Harvard University Press.

Vygotsky, L. (1986). *Thought and language*. Cambridge, MA.: MIT, Press.

Vygotsky, L. S. (1987). *Collected works (vol. 1)*. New York: Plenum.

Walzlawick, P. (Ed.). (1984). *The invented reality* .New York: Norton.

Yackel, E, Gravemeijer, K, & Sfard, A. (Eds.) (2011). *A Journey in Mathematics Education Research. Insights from the Work of Paul Cobb*. Dordrecht, The Nedherlands: Springer.

Créditos

Director general

- Ángel Ruiz Zúñiga (Universidad de Costa Rica)

Autores

- Hugo Barrantes Campos (Universidad de Costa Rica)
- Edwin Chaves Esquivel (Universidad Nacional, Universidad de Costa Rica)
- Edison De Faria Campos (Universidad de Costa Rica)
- Ricardo Poveda Vásquez (Universidad Nacional, Liceo Alfredo González Flores, Asesor Nacional de Matemáticas del Departamento de I y II Ciclos, Ministerio de Educación Pública).
- Miguel González Ortega (Liceo Regional de Flores, Universidad Nacional)
- Luis Armando Hernández Solís (Colegio Técnico Profesional de Pacayas, Universidad Estatal a Distancia)
- Damaris Oviedo Arce (Montealto School)
- Oscar Salas Huertas (Universidad Nacional, Universidad de Costa Rica)
- Ángel Ruiz Zúñiga (Universidad de Costa Rica)

Lectores y colaboradores[1]

- Alicia Arguedas Monge (Escuela Miguel Obregón Lizano, Región de Educación de Alajuela)
- Ana Patricia Maroto Vargas (Universidad de Costa Rica)
- Andrea Ureña Ureña(Asesora pedagógica de Matemáticas de la Región de Educación de Los Santos, Ministerio de Educación Pública)
- Carmen Batanero Bernabeu (Universidad de Granada, España)
- Carmen González Arguello (Universidad Nacional)
- César Álvarez Sánchez (España)
- Christiane Valdy (Escuela Franco Costarricense)
- Cristian Quesada Fernández (Colegio Nocturno de la Unión, Universidad Estatal a Distancia)
- Cristina Picado Garita (Escuela de Llano Bonito, Cirrí Sur, Naranjo)
- Eduardo Mancera Martínez (Comité Interamericano de Educación Matemática, México).
- Erasmo López López (Colegio Técnico Profesional de Upala, Región de Educación de Upala)
- Fidel Oteiza Morra (Universidad de Santiago, Chile)
- Floria Arias Tencio (Universidad de Costa Rica)
- Gerardo Murillo Vega (Asesor pedagógico de Matemáticas de la Región de Educación de Sarapiquí, Ministerio de Educación Pública)
- Grace Vargas Ramírez (Escuela Alberto Manuel Brenes Mora, Región de Educación de Occidente)
- Heriberto Rojas Segura (Asesor pedagógico de Matemáticas de la Región de Educación de Térraba, Ministerio de Educación Pública)
- Hermes Mena Picado (Asesor pedagógico de Matemáticas de la Región de Educación de Aguirre, Ministerio de Educación Pública)
- José María Chamoso Sánchez (Universidad de Salamanca, España)
- Juan Carlos Picado Delgado (Asesor pedagógico de Matemáticas de la Región de Educación de Upala, Ministerio de Educación Pública)

[1] Las revisiones y aportes fueron en la mayoría de los casos en forma parcial en capítulos, áreas o algunos ciclos educativos. La responsabilidad de cualesquiera errores o omisiones es enteramente de los autores. Se presenta el listado de lectores y colaboradores en orden alfabético.

- Julissa Solís Umaña (Asesora pedagógica de Matemáticas de la Región de Educación de Nicoya, Ministerio de Educación Pública)
- Luis Fernando Mena Esquivel (Asesor pedagógico de Matemáticas de la Región de Educación de Guápiles, Ministerio de Educación Pública)
- María de los Ángeles Rocha Palma (Asesora pedagógica de Matemáticas de la Región de Educación de San José, Ministerio de Educación Pública)
- Marianela Zumbado Castro (Liceo Alfredo González Flores, Región de Educación de Heredia)
- Maureen Oviedo Rodríguez (Asesora pedagógica de Matemáticas de la Región de Educación de Heredia, Ministerio de Educación Pública)
- Pablo Mena Castillo (Asesor del Departamento de Evaluación Académica y Certificación del Ministerio de Educación Pública)
- Patrick Scott (Comité Interamericano de Educación Matemática, Estados Unidos)
- Salvador Llinares Ciscar (Universidad de Alicante, España)
- Susanne Blais (Escuela Franco Costarricense)
- Xinia Zúñiga Esquivel (Asesora pedagógica de Matemáticas de la Región de Educación de Pérez Zeledón, Ministerio de Educación Pública).
- Yorleny Rojas Jiménez (Asesora pedagógica de Matemáticas de la Región de Educación de San Carlos, Ministerio de Educación Pública)
- Zully Tenorio Aguilar (Escuela León Cortés Castro, Región de Educación de Cartago)

Edición de estilo

- Julián Ruiz (Costa Rica)

Reconocimientos especiales

El capítulo de *Evaluación* fue elaborado en colaboración y acuerdo con el Departamento de Evaluación de la Dirección de Desarrollo Curricular del Ministerio de Educación Pública en acuerdo con la comisión redactora de los programas. De igual manera las secciones de *Indicaciones de evaluación* en cada área de los planes de estudio fueron revisadas por este departamento.

El capítulo de *Gestión y planeamiento pedagógicos* fue revisado por la Dirección de Desarrollo Curricular del Ministerio de Educación Pública.

Estos programas de estudio de Matemáticas incorpora total o parcialmente una colección grande de recomendaciones realizadas por:

- Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica
- Facultad de Educación de la Universidad de Costa Rica
- Escuela de Matemática de la Universidad Nacional
- Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico
- Centro de Investigación y Docencia en Educación de la Universidad Nacional
- Cátedra de Matemáticas Básicas de la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Estatal a Distancia
- Comisión de Decanas y Decanos de Educación del Consejo Nacional de Rectores

La versión definitiva de estos programas se realizó con el apoyo del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*. Este proyecto del Ministerio de Educación Pública ha sido apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación.

http://www.reformamatematica.net